ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 34 за 2007 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А. Д. Брюно, В. П. Варин

Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А. Д., Варин В. П. Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 34. 22 с.
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-34

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, В.П. Варин

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ ПРИ МАЛЫХ μ

Москва, 2007 г.

УДК 521.1+531.314
А.Д. Брюно, В.П. Варин. Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Плоская круговая ограниченная задача трех тел рассматривается при малых значениях отношения масс μ основных тел. С помощью степенной геометрии найдены все предельные задачи при $\mu \to 0$: задача двух тел, задача Хилла, промежуточная задача Хенона и основная предельная задача. В каждой из них выделяются решения, которые являются пределами периодических решений ограниченной задачи при $\mu \to 0$, и пределы семейств периодических решений (называемые порождающими семействами). С помощью порождающих семейств при малых $\mu > 0$ изучается семейство h, начинающееся обратными круговыми орбитами бесконечно малого радиуса вокруг тела большей массы. Показано, что при росте μ структура семейства h мало меняется.

A.D. Bruno, V.P. Varin. Periodic solutions of the restricted three-body problem for small μ. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2007.

We consider the plane circular restricted three-body problem for small mass ratios μ of principal bodies. Using Power Geometry, we found all limit problems for $\mu \to 0$: the two-body problem, Hill's problem, intermediate Hénon's problem, and the main limit problem. In each of these problems we isolated solutions that are the limits of periodic solutions of the restricted problem as $\mu \to 0$, as well as limits of the families of periodic solutions (which are called the generating families). Using generating families, for small $\mu > 0$, we studied the family h which begins as retrograde circular orbits of infinitely small radius around the body of bigger mass. We demonstrated that, as μ increases, the structure of the family h does not undergo significant changes.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 05-01-00050.

E-mails: bruno@keldysh.ru, varin@keldysh.ru
http: www.keldysh.ru
(см. электронная библиотека, каталог публикаций сотрудников ИПМ, препринт).

1. Введение

1.1. *Постановка задачи.* Пусть три точечных тела P_1, P_2 и P_3 движутся в одной плоскости под действием закона тяготения Ньютона. Тела P_1 и P_2 имеют массы m и m_2 соответственно, а масса тела P_3 настолько мала, что ее влиянием на тела P_1 и P_2 можно пренебречь. Будем говорить, что масса тела P_3 равна нулю. Тогда тело P_2 совершает кеплерово движение относительно тела P_1. Если тело P_2 движется по окружности, то задача о движении тела P_3 называется плоской круговой ограниченной задачей трех тел, коротко – ограниченной задачей. Ее впервые сформулировал Эйлер [1].

Будем считать, что единицы массы, времени и расстояния выбраны так, что сумма $m + m_2$, гравитационная постоянная, расстояние P_1P_2 и угловая скорость тела P_2 относительно тела P_1 равны единице. Единственным параметром тогда будет $\mu = m_2 \in [0, 1/2]$. Если ввести вращающуюся вместе с телом P_2 систему координат, то в этой (синодической) системе координат с центром в P_1 положение x_1, x_2 тела P_3 описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы и одним параметром μ (см. [2], гл. III, § 1)

$$\dot{x}_j = \partial H/\partial y_j, \qquad \dot{y}_j = -\partial H/\partial x_j, \quad j = 1, 2 \tag{1.1}$$

где

$$H = H_0 + \mu R, \quad H_0 = (y_1^2 + y_2^2)/2 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - r^{-1} \tag{1.2}$$
$$R = r^{-1} + x_1 - r_2^{-1}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$$

Точкой обозначена производная по времени t.

При $\mu \neq 0$ задача не интегрируется в конечном виде. Наибольший интерес представляют семейства периодических решений, ибо они образуют как бы скелет некоторой части фазового пространства. При фиксированном значении параметра $\mu \neq 0$ периодические решения системы Гамильтона (1.1) образуют однопараметрические семейства; при переменном μ – двупараметрические [3].

Цель настоящей статьи – дать обзор результатов о семействах периодических решений ограниченной задачи при малых μ. Интерес к таким исследованиям вызван стремлением описать движение в Солнечной системе малых тел (частиц колец планет-гигантов, спутников, астероидов, тел пояса Койпера и.т.д.) и космических аппаратов.

Например, изучались периодические решения при следующих значениях μ (в скобках указаны тела $P_1 - P_2 - P_3$):

$3.5 \cdot 10^{-9}$ (Сатурн – Янус(1980S1) – Эриметеус(1980S3)) [4, 5];

$6.7 \cdot 10^{-6}$ (Сатурн – Мимас – частица кольца Сатурна) [6];
$5.178 \cdot 10^{-5}$ (Солнце – Нептун – тело пояса Койпера) [7 – 9];
$9.538 \cdot 10^{-4}$ (Солнце – Юпитер – Астероид) [10 – 14];
$1.215 \cdot 10^{-2}$ (Земля – Луна – космический аппарат) [15].

Кроме того, вычислялись периодические решения при других малых значениях μ, а также – при больших значениях: $\mu = 0.4$ [16] и $\mu = 0.5$ [17] (в связи с динамикой частиц и планет в поле двойной звезды).

Здесь не дается перечень всех работ по этой тематике (их сотни), а указывются только те, которые непосредственно связаны с темой статьи.

Большинство работ посвящено вычислению семейств периодических решений при фиксированных значениях μ, что не требует развитой теории. Однако имеется и другой подход: рассмотреть предельные задачи при $\mu \to 0$ и их регулярные и сингулярные возмущения при $\mu > 0$. Это позволяет построить теорию семейств периодических решений при малых μ [18, 2, 11 – 14, 19 – 22]. Здесь кратко излагается эта теория, и ее результаты сравниваются с численными.

1.2. *Содержание работы.* В разд. 2 формулируются четыре предельные задачи, существующие при $\mu \to 0$, и рассматриваются периодические решения двух их них: задачи двух тел P_2, P_3 и задачи Хилла.

В разд. 3 рассматривается основная предельная задача, т.е. система (1.1), (1.2) при $\mu = 0$. Она интегрируется, и можно описать все ее решения, что было сделано ранее ([2], гл. III-VI). Фазовое пространство этой задачи при $\mu = 0$ устроено сложно из-за столкновений тела P_3 с телом P_2, в результате которых образуются решения-отрезки. При $\mu > 0$ эти столкновения вызывают сингулярные возмущения, приводящие к дальнейшему усложнению строения фазового пространства.

Из периодических решений и наборов решений-отрезков основной предельной задачи выделяются порождающие, которые являются пределами периодических решений при $\mu \to 0$. Они образуют порождающие семейства, которые рассматриваются в разд. 4. Для решений с регулярными по μ возмущениями выделение порождающих и изучение порожденных семейств (т.е. их возмущений при $\mu > 0$) делается с помощью нормальной формы [2]. Для решений с сингулярными возмущениями, на которых происходит столкновение тел P_3 и P_2, выделение порождающих семейств основано либо на обобщенном принципе Брука [11 – 14, 20], либо на теории сингулярных возмущений [21].

В качестве примеров в разд. 5 и 6 рассмотрены два порождающих семейства; одно из них устроено просто и мало меняется при росте μ от нуля до 1/2, а другое устроено очень сложно: при росте μ от нуля оно испытывает бесконечно много самобифуркаций и от него ответвляется бесконечно много замкнутых подсемейств, которые существуют лишь на небольших интервалах значений μ.

В разд. 7 построена теория возмущений для периодических орбит, имеющих вид "подков" и "головастиков" (это традиционные названия). Изучена структура и взаимное расположение основных семейств, содержащих такие решения.

Разделы 5 и 6 написаны совместно, а остальные – первым автором. Результаты подразд. 6.2 – 6.4 и разд. 7 публикуются впервые.

1.3. *Основные свойства системы* (1.1) *и ее периодических решений* [23, 2]. *Орбита* – это проекция решения $x_j(t), y_j(t)$ $(j = 1, 2)$ системы (1.1) на плоскость x_1, x_2. Если пересекаются два семейства периодических решений и периоды на одном семействе в q раз больше периодов на другом семействе, то будем говорить, что первое семейство имеет *(локальную) кратность* q.

Система (1.1) переходит в себя при подстановке

$$t, x_1, x_2, y_1, y_2 \longrightarrow -t, x_1, -x_2, -y_1, y_2 \tag{1.3}$$

которая является ее *симметрией*. При симметрии (1.3) плоскость $x_2 = y_1 = 0$ инвариантна и называется ([2], гл. III) *плоскостью симметрии* Π. Решения системы (1.1), переходящие в себя при подстановке (1.3), — *симметричные*. Симметричное периодическое решение два раза пересекает плоскость симметрии. По этим пересечениям удобно отслеживать взаимные положения таких решений.

Семейство периодических решений системы (1.1) при фиксированном значении параметра μ называется *натуральным*, если оно продолжено в обе стороны до естественных концов, которыми могут быть окончание в неподвижной точке или на другом семействе периодических решений, стягивание орбиты в точку или ее уход в бесконечность, стремление периода к нулю или бесконечности; наконец, натуральное семейство может быть замкнутым.

Общие свойства семейств периодических решений системы Гамильтона с двумя степенями свободы были приведены подробно ([3], § 1-3) и кратко ([2], гл. II, § 4). О семействах симметричных периодических решений см. [3], § 5. Каждое симметричное решение M семейства F имеет период T, след Tr матрицы монодромии системы в вариациях и две точки пересечения с плоскостью симметрии Π (через полупериод). Параметром семейства могут служить значения функции Гамильтона и координаты пересечений с плоскостью симметрии.

В системе (1.1) при $\mu \in (0, 1/2]$ семейства симметричных периодических решений — двупараметрические, поэтому они могут иметь особенности коразмерности 1 и 2; некоторые из них изучены ранее [2, 3]. Но при $\mu = 0$ система (1.1) является вырожденной.

2. Предельные задачи

2.1. *Вывод предельных задач* ([24, 25]; [26], гл. IV, § 4; [27]; [28], § 1). Для того чтобы при малых μ найти все первые приближения ограниченной задачи трех тел вблизи тела P_2, нужно ввести локальные координаты

$$\xi_1 = x_1 - 1, \;\; \xi_2 = x_2, \;\; \eta_1 = y_1, \;\; \eta_2 = y_2 - 1$$

и разложить функцию Гамильтона по этим координатам. После разложения $1/\sqrt{(\xi_1+1)^2+\xi_2^2}$ в ряд Маклорена функция Гамильтона (1.2) примет вид

$$H = -\frac{3}{2} + 2\mu + \frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 +$$
$$+ f(\xi_1, \xi_2^2) + \mu\left\{\xi_1^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} - f(\xi_1,\xi_2^2)\right\} \qquad (2.1)$$

где f — сходящийся степенной ряд, не содержащий членов порядка меньше трех. Как известно [26], носитель $\mathbf{S}_1$ ряда в правой части равенства (2.1) состоит из точек

$R = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = (\mathrm{ord}\,\xi_1, \mathrm{ord}\,\xi_2, \mathrm{ord}\,\eta_1, \mathrm{ord}\,\eta_2, \mathrm{ord}\,\mu)$: $(0,0,2,0,0)$, $(0,0,0,2,0)$, $(0,1,1,0,0)$, $(1,0,1,0,0)$, $(2,0,0,0,0)$, $(0,2,0,0,0)$, $(k,2l,0,0,0)$, $(2,0,0,0,1)$, $(0,2,0,0,1)$, $(-1,0,0,0,1)$, $(0,-1,0,0,1)$, $(k,2l,0,0,1)$

где $k, l \geq 0$, $k+2l \geq 3$, и из отрезка J, соединяющего точки $(-1,0,0,0,1)$ и $(0,-1,0,0,1)$. Этот отрезок — носитель члена $\mu/\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$. Конус задачи

$$\mathbf{K} = \{W \in \mathbb{R}^5_* : \; w_1 < 0, w_2 < 0, w_5 < 0\}$$

ибо $\xi_1, \xi_2, \mu \to 0$.

Сделаем проекцию

$$\pi R = R'' \stackrel{\mathrm{def}}{=} (p, q, s) \in \mathbb{R}^3$$

где

$$p = r_1 + r_2 = \mathrm{ord}\,\xi_i, \;\; q = r_3 + r_4 = \mathrm{ord}\,\eta_i, \;\; s = r_5 = \mathrm{ord}\,\mu$$

Множество $\mathbf{S}_1''$ этих точек R'' состоит из

$(0,2,0), (1,1,0), (2,0,0), (k,0,0), (2,0,1), (-1,0,1), (k,0,1), k = 3,4,5,\ldots$

Замыкание выпуклой оболочки множества $\mathbf{S}_1''$ – это многогранник $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{R}^3$. Поверхность многогранника $\mathbf{\Gamma}$ состоит из граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$, ребер $\mathbf{\Gamma}_j^{(1)}$ и вершин $\mathbf{\Gamma}_j^{(0)}$. Каждому такому элементу $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствует укороченный гамильтониан $\hat{H}_j^{(d)}$, являющийся суммой тех членов ряда (2.1), точки которых R'' принадлежат $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$. Укороченные функции Гамильтона $\hat{H}_j^{(d)}$ — это различные первые приближения функции (2.1), справедливые в разных областях пространства $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \mu)$. Конус задачи

$$\mathbf{K}'' = \{W'' \in \mathbb{R}^3_* : w_1 < 0, w_3 < 0\}$$

Многогранник $\mathbf{\Gamma}$, представляет собой полубесконечную трехгранную призму с косым основанием (фиг. 1), имеет четыре грани и шесть ребер.

Грань $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ служит косым основанием призмы $\mathbf{\Gamma}$, она содержит вершины $(0,2,0)$, $(2,0,0)$, $(-1,0,1)$ и точку $(1,1,0)$. Ее вектор нормали $N_1'' = -(1,1,3) \in \mathbf{K}''$. Ей соответствует укороченная функция Гамильтона

$$\hat{H} = \hat{H}_1^{(2)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \tag{2.2}$$

Степенное преобразование

$$\xi_i = \tilde{\xi}_i \mu^{1/3}, \quad \eta_i = \tilde{\eta}_i \mu^{1/3}, \quad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

приводит функцию (2.2) к такому виду (2.2), где $\mu = 1$ и все ξ_i, η_i заменены на $\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i$. Система Гамильтона

$$\dot{\tilde{\xi}}_j = \partial\hat{H}/\partial\tilde{\eta}_j, \quad \dot{\tilde{\eta}}_j = -\partial\hat{H}/\partial\tilde{\xi}_j;\ j = 1, 2 \tag{2.4}$$

описывает *задачу Хилла* [29], которая является неинтегрируемой.

Грань $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ содержит точки $(0,2,0)$, $(1,1,0)$, $(2,0,0)$ и $(k,0,0)$. Ее вектор нормали $N_2'' = (0,0,-1) \subset \mathbf{K}''$. Ей соответствует укороченная функция Гамильтона $\hat{H} = \hat{H}_2^{(2)}$, которая получается из функции H (1.2) при $\mu = 0$. Такую задачу (2.4) назовем *основной предельной задачей.*

Остальные две грани имеют нормальные векторы $(0,-1,0)$ и $(0,1,2)$, лежащие вне конуса задачи $\mathbf{K}''$, поэтому соответствующие укорочения гамильтониана не годятся.

Рассмотрим ребра. Из шести ребер одно несобственное. Оно проходит через точку $(0,2,0)$ параллельно вектору $(1,0,0)$. На трех ребрах $q = 0$, т.е. для них укороченная функция Гамильтона не зависит от η_1, η_2, и у решений соответствующей системы Гамильтона ξ_1, $\xi_2 = \mathrm{const}$, т.е. они неинтересны. Остаются два ребра.

Ребро $\mathbf{\Gamma}_1^{(1)}$ содержит точки $(0,2,0)$ и $(-1,0,1)$ множества $\mathbf{S}_1''$. Соответствующая укороченная функция Гамильтона

$$\hat{H} = \hat{H}_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \tag{2.5}$$

описывает *задачу двух тел* P_2 и P_3 в неподвижной системе координат. Степенное преобразование

$$\xi_j = \mu\tilde{\xi}_j, \quad \eta_j = \tilde{\eta}_j, \quad t = \mu\tilde{t}, \quad i = 1,2 \tag{2.6}$$

переводит ее в систему Гамильтона (2.4) с функцией Гамильтона вида (2.5), где ξ_j, η_j, μ заменены на $\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, 1$ соответственно.

Пусть $\mathbf{\Gamma}_0^{(2)}$ — грань, проходящая через точки $(0,2,0)$, $(2,0,1)$, $(-1,0,1)$. Ее внешняя нормаль $N_0'' = (0,1,2)$, а вектор нормали к грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ есть $N_1'' = -(1,1,3)$. Поскольку ребро $\mathbf{\Gamma}_1^{(1)}$ — пересечение граней $\mathbf{\Gamma}_0^{(2)}$ и $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$, то его нормальный конус состоит из векторов $N = (n_1, n_2, n_3) = \alpha N_0'' + \beta N_1''$, где $\alpha, \beta > 0$; если $\alpha > 3\beta/2$ и $\beta > 0$, то $n_1/n_3 \in (1/3, \infty)$.

Ребро $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$ содержит точки $(2,2,0)$ и $(1,1,0)$, $(0,2,0)$ множества $\mathbf{S}_1''$. Ему соответствует укороченная функция Гамильтона (2.2) с $\mu = 0$, описывающая *промежуточную задачу* (между задачей Хилла и задачей двух тел P_1 и P_3), которая является интегрируемой. Это первое приближение ввел Хенон [30]. Поскольку нормальный вектор к грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ есть $N_1'' = -(1,1,3)$, а нормальный вектор к грани $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ есть $N_2'' = (0,0,-1)$, то нормальный конус к ребру $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$ состоит из векторов $N = (n_1, n_2, n_3) = \alpha N_1'' + \beta N_2''$, где $\alpha, \beta > 0$, т.е. $n_1/n_3 \in (0, 1/3)$. Положим $\alpha = \beta = 1$, тогда получаем вектор $-(1,1,4)$, лежащий в нормальном конусе ребра $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$. Ему соответствует степенное преобразование

$$\xi_j = \mu^{1/4}\tilde{\xi}_j, \quad \eta_j = \mu^{1/4}\tilde{\eta}_j, \quad i = 1,2 \tag{2.7}$$

В координатах $\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j$ при $\mu \to 0$ получаем предельную функцию Гамильтона (2.2) с $\mu = 0$, где вместо ξ_j, η_j стоят $\tilde{\xi}_j$ и $\tilde{\eta}_j$ соответственно, и систему (2.4).

Итак, для векторов $N = (n_1, n_2, n_3)$, лежащих в нормальном конусе ребра $\mathbf{\Gamma}_1^{(1)}$, отношение $\nu \stackrel{\text{def}}{=} n_1/n_3 \in (1/3, \infty)$; для векторов N из нормального конуса грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ имеем $\nu = 1/3$; для векторов N из нормального конуса ребра $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$ имеем $\nu \in (0, 1/3)$; а для векторов N из нормального конуса грани $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ имеем $\nu = 0$. Поэтому если $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = O(\mu^\nu)$, то очень близко к телу P_2, т.е. для $\nu > 1/3$, первым приближением ограниченной задачи с функцией Гамильтона (2.1) будет задача двух тел P_2 и P_3 с гамильтонианом (2.5); просто близко, т.е. для $\nu = 1/3$, – задача Хилла с гамильтонианом (2.2); подальше от тела P_2, т.е. для $1/3 > \nu > 0$, – промежуточная задача Хенона; а вдали от тела P_2, т.е. для $\nu = 0$, – основная предельная задача. Вблизи тела P_2 периодические решения ограниченной задачи являются возмущениями как периодических решений всех указанных четырех первых приближений, так и результатов склейки гиперболических орбит задачи двух тел P_2, P_3 с решениями-отрезками либо основной предельной задачи, либо промежуточной задачи. Периодические решения промежуточной задачи были использованы [31 – 35] как порождающие для отыскания периодических квазиспутниковых орбит ограниченной задачи.

Итак, в окрестности тела P_2 имеются три разные десингуляризации (2.6), (2.3) и (2.7) (т.е. замены координат, разрешающие особенность), соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma}_1^{(1)}$, грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ и ребру $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$. Из них была известна только десингуляризация (2.3) для задачи Хилла, т.е. для грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$.

Ниже рассмотрим три предельные задачи (двух тел P_2 и P_3, Хилла и основную). Промежуточная задача Хенона явно интегрируется. Она была достаточно полно исследована [30 – 35] и здесь не рассматривается.

2.2. *Задача двух тел* P_2 *и* P_3 описывается системой Гамильтона

$$\dot{\xi}_j = \partial \hat{H}/\partial \eta_j, \quad \dot{\eta}_j = -\partial \hat{H}/\partial \xi_j; \; j = 1, 2 \tag{2.8}$$

с функцией Гамильтона (2.5), где $\mu = 1$. Это интегрируемая задача; ее решения подробно описаны во многих книгах (см., например, [36]). Здесь отметим только, что она имеет два семейства периодических решений с круговыми орбитами: семейство f с обратным направлением движения и семейство g с прямым движением. Имеются также другие периодические решения. Но при возмущениях ограниченной задачи сохраняются только эти два семейства, а остальные разрушаются ([2], Введение, с. 8; [20], § 5.6). Кроме того, отметим существование гиперболических орбит пролета тела P_3 вблизи тела P_2. Подробнее задача двух тел рассмотрена ниже в подразд. 3.2.

2.3. *Задача Хилла* ([30, 37]; [14], § 2) описывается системой (2.8) с функцией Гамильтона $\hat{H}$ (2.2), где $\mu = 1$. Имеются другие выводы задачи Хилла ([23], гл. 10).

Система (2.2), (2.8) обладает двумя симметриями:

$$t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \to -t, -\xi_1, \xi_2, \eta_1, -\eta_2 \tag{2.9}$$

$$t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \to -t, \xi_1, -\xi_2, -\eta_1, \eta_2 \tag{2.10}$$

В частности, $\Pi = \{\xi_2 = \eta_1 = 0\}$ — плоскость симметрии (2.10). В дальнейшем рассматриваются только периодические решения с симметрией (2.10). Семейство таких решений имеет две характеристики на плоскости Π. Система (2.2), (2.8) имеет особенность при $\xi_1 = \xi_2 = 0$ и две неподвижные точки $L_1 = (-3^{-1/3}, 0, 0, -3^{-1/3})$, $L_2 = (3^{-1/3}, 0, 0, 3^{-1/3})$.

В этих точках у матрицы линеаризованной системы (2.8) два собственных числа вещественны и два – чисто мнимы. Поэтому из каждой точки L_1 и L_2 выходит одно семейство периодических решений. Задача Хилла (2.2), (2.8) неинтегрируема и исследовалась численно. Наиболее полно семейства ее периодических решений описал Хенон [30, 37] и изобразил их характеристики в координатах $-2\hat{H}, \xi_1(0)$. На фиг. 2 эти характеристики показаны на плоскости Π в координатах ξ_1, η_2. (Фиг. 2, впервые опубликованная А.Д. Брюно [38], сделана по подробным таблицам, присланным Хеноном в 1979 г. и содержащим координаты второй точки пересечения решения с плоскостью Π). На фиг. 2 каждое семейство периодических решений представлено двумя характеристиками. Перечислим основные семейства.

Семейство a выходит из точки L_2 ([30], табл. 2).

Семейство c выходит из точки L_1 ([30], табл. 2). Оно получается из семейства a отображением (2.9).

Семейство f начинается круговыми орбитами вокруг точки $\xi_1 = \xi_2 = 0$ с обратным направлением движения, т.е. по часовой стрелке ([30], табл. 3). Его решения обладают двумя симметриями (2.9) и (2.10).

Семейство g начинается круговыми орбитами вокруг точки $\xi_1 = \xi_2 = 0$ с прямым направлением движения ([30], табл. 4). Его решения также обладают двумя симметриями (2.9) и (2.10). Оно содержит критическое решение M с $\xi_1 = 0.28350$ и $\mathrm{Tr} = 2$. На фиг. 2 решение M представлено двумя точками M_1 и M_2. Это решение M делит семейство g на две части: g_+ ([30], верхняя часть табл. 4, $a < 1$) и g_- ([30], нижняя часть табл. 4, $a > 1$).

Семейство g' пересекается с семейством g по решению M ([30], табл. 5). Решение M разбивает семейство g' на две части: g'_- ([30], вторая колонка табл. 5) и g'_+ ([30], третья колонка табл. 5 с заменой всех знаков минус на плюс). Части g'_+ и g'_- переходят друг в друга при отображении (2.9).

Семейство f_3 это семейство g_3 ([37], табл. 1). Оно дважды пересекает семейство f как (локально) трехкратное. Его решения обладают двумя симметриями: (2.9) и (2.10).

Хенон [30] нашел пределы периодических решений семейств $a, \ldots, g'$ при $-2H \to +\infty$ и другие предельные периодические решения как решения промежуточной задачи. Рассматривая задачу Хилла как возмущение этой промежуточной задачи, Перко [39, 40] при больших $-\hat{H}$ доказал существование семейства f и счетного числа семейств $g^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Однако его гипотеза о расположении семейств $g^{(n)}$ ([40], конец разд. 2 и на рис. 3), ошибочна, ибо пересечение всех семейств $g^{(n)}$ по решению M невозможно. Отсюда видно, что вычисленных шести семейств $a, \ldots, f_3$ недостаточно для описания структуры всех семейств периодических решений с симметрией (2.10). Надо бы вычислить еще локально кратные семейства, пересекающиеся с семейством g' по резонансным решениям с $\mathrm{Tr} = -2, -1, 0$.

Ограниченная задача — регулярное возмущение задачи Хилла с малым параметром $\mu^{1/3}$. Изучение возмущений начал Перко [41] для семейств a, c, f, g, g', $g^{(n)}$. Поскольку ограниченная задача имеет только симметрию (2.10) и не имеет симметрии (2.9), то эта последняя нарушается при возмущении, причем вблизи решения M, по которому пересекаются семейства g и g', должна произойти бифуркация этих семейств. Ее характер специально не изучался, но он известен по вычислениям семейств периодических решений ограниченной задачи.

В принципе, все возмущения периодических решений задачи Хилла можно изучать с помощью нормальной формы. Но это пока не сделано.

3. Основная предельная задача

3.1. *Введение.* Основная предельная задача [2,18,20] — это задача (1.1), (1.2) с $\mu = 0$, т.е. такая задача двух тел P_1 и P_3 во вращающейся системе координат, у которой в четырехмерном фазовом пространстве x_1, x_2, y_1, y_2 удалена плоскость

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \tag{3.1}$$

соответствующая телу P_2. Поэтому, чтобы описать ее решения, сначала рассмотрим задачу двух тел P_1 и P_3 в неподвижной (сидерической) системе координат X_1, X_2, Y_1, Y_2, затем – во вращающейся вместе с телом P_2 (синодической) системе x_1, x_2, y_1, y_2:

$$(x_1 + ix_2)\exp(it) = X_1 + iX_2 \tag{3.2}$$

После этого выделим те новые решения, которые соответствуют столкновениям тела P_3 с телом P_2, и возникают после удаления плоскости (3.1) из фазового пространства. Затем в разд. 4 опишем *порождающие* решения, т.е. те, которые являются пределами решений задача (1.1), (1.2) при $\mu \to 0$. После этого в подразд. 4.3 и разд. 5, 6 рассмотрим несколько примеров порождающих семейств периодических решений, т.е. при $\mu = 0$, и порожденных ими семейств при $\mu > 0$.

3.2. *Задача двух тел в неподвижной системе координат* ([2], гл. III; [36]). Пусть тело P_3 нулевой массы движется в плоскости X_1, X_2 под действием ньютоновского притяжения тела P_1 массы $m > 0$, покоящегося в начале координат $X_1 = X_2 = 0$. Движение тела P_3 описывается системой Гамильтона

$$\dot{X}_j = \partial h / Y_j, \quad Y_j = -\partial h / X_j, \ j = 1, 2; \quad h = (Y_1^2 + Y_2^2)/2 - m(X_1^2 + X_2^2)^{-1/2} \tag{3.3}$$

В частности, $\dot{X}_j = Y_j$.

Система (3.3) имеет три независимых интеграла. Это интеграл энергии и интеграл площадей

$$h = (Y_1^2 + Y_2^2)/2 - m(X_1^2 + X_2^2)^{-1/2} = m(2a)^{-1/2}, \quad c = X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \tag{3.4}$$

и $\tilde{\omega}$ – долгота (угол) перицентра, т.е. точки орбиты с наименьшим значением $(X_1^2 + X_2^2)^{1/2}$.

Орбиты на плоскости X_1, X_2 — эллипсы ($a > 0$), параболы ($a = \infty$) и гиперболы ($a < 0$) с фокусом в нуле: $X_1 = X_2 = 0$, где находится тело P_1. Эллиптическая орбита однозначно определяется тремя параметрами: большой полуосью a, эксцентриситетом e и долготой перицентра $\tilde{\omega}$. Величины a и e связаны с интегралами (3.4) равенствами

$$a = a, \quad e = +\sqrt{1 - c^2 (am)^{-1}} \tag{3.5}$$

Положение точки P_3 на орбите дается либо истинной аномалией ν, либо средней аномалией l, либо эксцентрической аномалией u. Все аномалии – это углы, отсчитываемые от направления на перицентр, так что при прохождении точки P_3 через перицентр $\nu = l = u = 2\pi k$, а при прохождении через апоцентр $\nu = l = u = 2\pi k + \pi$, где k – целое число. Период обращения T_s подчиняется закону Кеплера

$$(T_s/(2\pi))^2 = a^3 \tag{3.6}$$

Знак величины c, определяемой последним равенством (3.4), указывает направление движения по эллипсу: прямое при $c > 0$ и обратное при $c < 0$. Положим $N = 2\pi T_s^{-1}$ и $n = N \operatorname{sgn} c$, тогда n – средняя угловая скорость движения точки P_3 по эллипсу. Согласно равенству (3.6)

$$N = |n| = a^{-3/2} \tag{3.7}$$

Если $e = 0$ ($a = c^2$), то орбита — окружность радиуса a, а величина $\tilde{\omega}$ здесь теряет смысл. Если $e = 1$ ($c = 0$), то орбита — отрезок длины $2a$; один конец его находится в нуле. Движение по отрезку начинается с выхода точки P_3 из точки P_1 и через время T_s (см. равенство (3.6)) заканчивается столкновением этих точек. Направление движения (знак n) здесь теряет смысл.

3.3. *Синодические орбиты.* Во вращающихся (синодических) координатах x_1, x_2 согласно равенству (3.2) движение описывается системой уравнений (1.1), где

$$H = (y_1^2 + y_2^2)/2 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - mr^{-1} \tag{3.8}$$

и интегралы (3.4) принимают вид

$$h = (y_1^2 + y_2^2)/2 - mr^{-1} = -m(2a)^{-1}, \quad c = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{3.9}$$

При переходе к вращающейся системе координат конические сечения закручиваются в более сложные орбиты, и только круговые орбиты ($e = 0$) сохраняют свою форму. Синодическая орбита, соответствующая эллиптическому движению, заключена в кольце

$$a(1-e) \leq r \leq a(1+e) \tag{3.10}$$

Движение происходит со средней угловой скоростью $n - 1$. Если число N иррационально, то орбита никогда не замыкается, и ее точки расположены всюду плотно в указанном кольце. Если N рационально, то положим

$$N = |n| = (p+q)/p, \quad -N = |n| = (p+q')/p, \quad q' = -(2p+q) \tag{3.11}$$

где $p > 0$ и q – взаимно простые числа. Итак, при рациональном N синодическая орбита замыкается через q оборотов вокруг начала координат, если $n > 0$, и через q' оборотов, если $n < 0$. Синодический период таких орбит $T = 2\pi p$.

Все синодические орбиты с фиксированными n и e получаются из одной такой орбиты при повороте ее вокруг нуля на тот или иной угол. Каждой точке синодической орбиты соответствует единственная точка указанной сидерической орбиты. Напротив, одной точке сидерической орбиты соответствует, вообще говоря, несколько точек синодической орбиты, а именно $p + q$ точек для рационального N и счетное множество – для иррационального N. Точки минимума (максимума) полярного радиуса r на синодической орбите соответствуют перицентру (апоцентру) сидерической орбиты; в этих точках $\dot{r} = 0$.

В четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ переменных x_1, x_2, y_1, y_2 гамильтониан (3.8) аналитичен всюду, кроме плоскости $P_1^* \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1 = x_2 = 0\}$, соответствующей телу P_1. В этой области $\mathcal{G}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^4 \backslash P_1^*$ выделим множество $\mathcal{D}$ условием $a > 0$ (см. (3.9)). Множество $\mathcal{D}$ состоит их всех тех и только тех траекторий, сидерические орбиты которых являются эллипсами. Рассмотрим пересечения траекторий из множества $\mathcal{D}$ с плоскостью симметрии $\Pi = \{x_2 = y_1 = 0\}$. На этой плоскости теперь удобнее ввести новые координаты $\tilde{a}$, $\tilde{e}$:

$$\tilde{e} = x_1 y_2 |y_2| m^{-1}, \quad \tilde{a} = x_1 (2 - |\tilde{e}|)^{-1} \tag{3.12}$$

Тогда

$$a = |a|, \quad e = |1 - |\tilde{e}||, \quad n = \operatorname{sgn} \tilde{e} a^{-3/2} \tag{3.13}$$

В координатах $\tilde{a}$, $\tilde{e}$ пересечение множества $\mathcal{D}$ с плоскостью Π – это полоса

$$\tilde{a} \in \mathbb{R} \backslash 0, \quad \tilde{e} \in [-2, 2] \tag{3.14}$$

Две прямые $\tilde{e} = 1$ и $\tilde{e} = -1$ соответствуют круговым орбитам с периодом T и следом Tr:

$$T = 2\pi |n - 1|^{-1}, \quad \mathrm{Tr} = 2 \cos T \tag{3.15}$$

если $n \neq 1$. Если $n = 1$, то соответствующие точки $\tilde{a} = \pm 1$, $\tilde{e} = 1$ неподвижны. На прямой $\tilde{e} = 1$ сидерическое движение прямое (это семейство Id), а на прямой $\tilde{e} = -1$ – обратное (это семейство Ir).

Четыре полосы $\tilde{e} \in (-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ соответствуют эллиптическим сидерическим орбитам с прямым движением, если $\tilde{e} > 0$ и с обратным движением, если $\tilde{e} < 0$. При фиксированном $a = |\tilde{a}|$ с рациональным $N = a^{-3/2} = (p + q)/p$ соответствующие синодические орбиты периодичны с периодом $T = 2\pi p$ и следом $\mathrm{Tr} = 2$ (это семейства $E_N^{\pm}$). Все точки этих полос соответствуют либо перицентрам, если $|\tilde{e}| > 1$, либо апоцентрам, если $|\tilde{e}| < 1$.

Три прямые $\tilde{e} = 0, \pm 2$ соответствуют решениям, на которых происходят столкновения тела P_3 с телом P_1. При этом прямые $\tilde{e} = \pm 2$ можно считать совпадающими; они соответствуют точкам столкновений.

3.4. *Ограниченная задача при* $\mu = 0$ ([2], гл. III, § 3). Пусть масса тела P_2 равна нулю. Хотя тело P_2 не притягивает тело P_3, но возможны их столкновения. В этом заключается отличие ограниченной задачи трех тел при $\mu = 0$ от синодической задачи двух тел. Теперь синодическое движение тела P_3 описывается той же системой (1.1) с тем же гамильтонианом H (3.8), но уже в области $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \backslash P_2^*$, где P_2^* – плоскость $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, соответствующая в фазовом пространстве телу P_2. Точки столкновений тела P_3 с телом P_2 (т.е. точки решения задачи двух тел, лежащие на плоскости P_2^*, или, что то же, точка $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ на орбите задачи двух тел) разбивают решение задачи двух тел на куски, которые теперь уже не будут продолжением друг друга. Каждый такой кусок — самостоятельное решение ограниченной задачи трех тел с $\mu = 0$.

Особый интерес представляют куски, начинающиеся и кончающиеся точками столкновений. Будем называть их *решениями-отрезками*, или *решениями с последовательными столкновениями*. В ограниченной задаче решения-отрезки играют примерно такую же роль, как периодические решения.

На фиг. 3 показаны сидерические орбиты тел P_2 (окружность) и P_3 (эллипс). Столкновения могут происходить только в точках пересечения этих орбит Q_1 и Q_2. Пусть в моменты $t_2 < t_1$ происходят два последовательных столкновения.

Возможны два случая.

Случай 1. Столкновение при t_2 происходит в той же точке Q_1 сидерической плоскости, что и столкновение в момент t_1. Тогда тела P_2 и P_3 между двумя столкновениями сделают по несколько полных оборотов по своим орбитам. Для этого их сидерические периоды обращения должны быть соизмеримы, т.е. N – рациональное число. Отрезок – это периодическая траектория с выколотой точкой. Множество таких отрезков обозначим T_N.

Случай 2. Столкновение в момент t_2 происходит в другой точке Q_2 сидерической плоскости. Точки Q_1 и Q_2 симметричны относительно оси X_1 (см. фиг. 3). Из соображений симметрии следует, что в момент $(t_1 + t_2)/2$ тела P_2 и P_3 находятся на оси X_1. Соответствующая синодическая орбита симметрична относительно оси x_1. Множество таких решений-отрезков обозначим S.

Каждое решение-отрезок находится на решении задачи двух тел с определенными значениями a, e, c. Множество решений-отрезков (т.е. решений с последовательными столкновениями) состоит из счетного множества однопараметрических семейств T_N, имеющихся для всех рациональных $N < 2^{2/3} \approx 1.587$ и состоящих из несимметричных решений-отрезков, и счетного множества однопараметрических семейств S, состоящих из симметричных решений-отрезков и распадающихся на семейства A_i, B_j, C_{kl}, где целые $i \geq 0$, $j \geq 1$, $l \geq k \geq 1$. Впервые семейства S нашел Хенон [18], затем была развита их теория ([2], гл. III-VI; [20]); изучено строение семейств T_N ([2], гл. III). Не останавливаясь на изложении этой теории, отметим только некоторые ее следствия.

На плоскости П в координатах $\tilde{a}$, $\tilde{e}$ (3.12) телу P_2 соответствует кривая

$$P_2^{**} = \{2 - |\tilde{e}| = 1/\tilde{a}\}$$

На фиг. 4 она изображена штрих-пунктиром. Столкновение возможно только в кольце

$$1 - e \leq a^{-1} \leq 1 + e$$

На фиг. 4 ему соответствуют области ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ограниченные штриховыми кривыми и штрих-пунктирной кривой P_2^{**}. В этих областях изображены характеристические кривые семейств S. Отметим, что каждое симметричное решение-отрезок пересекается с плоскостью Π в одной точке, а их однопараметрическое семейство – по кривой, которая называется характеристикой семейства. Были приведены ([2], гл. IV) орбиты решений-отрезков семейств A_i, B_j, C_{kl}.

4. Порождающие семейства периодических решений

4.1. *Порождающие решения.* Пусть периодическое решение M_μ ограниченной задачи (1.1), (1.2), которое имеется при некотором $\mu > 0$, может быть непрерывно продолжено до $\mu = 0$ и в пределе дает решение (не точку) одной из предельных задач. Этот предел называется *порождающим периодическим решением.* Согласно Хенону ([20], § 2.10), различают три вида порождающих периодических решений в зависимости от предела M_0 в основной предельной задаче:

Первый вид. Все точки решения M_0 отделены от тела P_2.

Второй вид. Решение M_0 имеет хотя бы по одной точке на теле P_2 и вне тела P_2.

Третий вид. Решение M_0 целиком лежит в теле P_2.

Порождающее решение первого вида является периодическим решением синодической задачи двух тел P_1 и P_3. Порождающее решение второго вида состоит из нескольких решений-отрезков основной предельной задачи. Поскольку при $\mu > 0$ ограниченная задача имеет интеграл H (1.2), то все решения-отрезки, входящие в порождающее периодическое решение, имеют одинаковое значение интеграла H или постоянной Якоби $C = -2H$. Порождающее периодическое решение третьего вида является периодическим решением задачи Хилла или промежуточной задачи Хенона. Предел при $\mu \to 0$ семейства периодических решений называется *порождающим семейством.* Оно может состоять из порождающих периодических решений разных видов.

4.2. *Порождающие решения первого вида.* Все порождающие периодические решения первого вида и их бифуркации были изучены ([2], гл. VII, VIII). К ним относятся все симметричные периодические решения. Они образуют два семейства Id и Ir с круговыми орбитами и счетное число семейств $E_N^\pm$ с эллиптическими орбитами с фиксированной большой полуосью (одно или два семейства для каждого рационального $N = a^{-3/2} > 0$) ([2], рис. 11). Бифуркации между этими семействами происходят в местах пересечения семейства Id с семействами $E_{(p+1)/p}$ для $p = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Обозначим эти пересечения через $\mathrm{Id}(N) = \mathrm{Id} \cap E_N$. На плоскости П этим пересечениям семейств соответствуют точки с $N = (p+1)/p$ для $p = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, т.е. $\tilde{a} = \pm N^{-2/3}$, $\tilde{e} = 1$. Они делят семейство Id на куски Id_p с $p/(p-1) > N > (p+1)/p$ для $p = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, а семейства $E_{(p+1)/p}$ – на две части: $E^{+}_{(p+1)/p}$ (с $\tilde{\omega} = 0$) и $E^{-}_{(p+1)/p}$ (с $\tilde{\omega} = \pi$). Характер бифуркаций кусков Id_p с семействами $E^{\pm}_N$ показан на фиг. 5. Были приведены ([2], табл. 2 Приложения) возмущения периода T и следа Tr на некоторых семействах E_N.

Кроме того, имеются семейства $G_{1/p}$ несимметричных порождающих решений для $p = 1, 2, \ldots$. Для них $N = 1/p$. Семейство G_1 выходит из неподвижной точки Лагранжа L_4 как семейство короткопериодических решений, пересекается с семейством $E^{-}_{1/p}$ и заканчивается в неподвижной точке L_5. Семейство $G_{1/p}$ с $p > 1$ замкнуто, оно дважды пересекается с семейством $E^{-}_{1/p}$ и не пересекается с семейством $E^{+}_{1/p}$.

4.3. *Порождающие решения второго вида.* При $\mu = 0$ всякое симметричное периодическое решение со столкновением P_3 с P_2 образовано решениями-отрезками из семейств S и четным числом симметрично расположенных отрезков из семейств T_N, причем значение постоянной Якоби C на всех отрезках одинаково ([2], гл. III, IV). По-видимому, каждая такая комбинация — порождающая. Но это доказано только для простейших из них, состоящих только из одного или двух решений-отрезков [42]. Были изучены ([2], гл. III-V) семейства S, T_N и их характеристики на П. Бифуркации между семействами симметричных периодических решений происходят в местах пересечения семейств Id, Ir, $E^{\pm}_N$, S. При рациональном $N = (p+q)/p$, $N \neq 1$ пересечения семейства E_N с семействами S происходят на орбитах, у которых

$$\tilde{e} = \psi(N, k), \quad k = 0, 1, \ldots, 2|p+q|$$

где ψ – некоторая функция. Этим значениям $\tilde{e}$ соответствуют определенные орбиты ([2], гл. VI, п. 3.Б, гл. IV, теорема 2.4), которые обозначим $E_N(k)$.

Есть еще две орбиты пересечения ([2], гл. III, § 3):

$E_1(-1) = \{N = 1, \tilde{e} = -1\}$ (здесь пересекаются семейства Ir, E_1 и S);

$E_1(1) = \{N = 1, \tilde{e} = 1\}$ (здесь пересекаются семейства Id, E^{+}_1 и S).

Итак, на указанных орбитах $\mathrm{Id}(1 + 1/p)$ и $E_N(k)$ происходят бифуркации между кусками порождающих семейств симметричных периодических решений.

В формировании порождающих семейств большую роль играют также экстремальные (по постоянной Якоби C) орбиты семейств S. Была развита их теория ([2], гл. IV, V), и опубликованы численные значения [43]. На каждом семействе S типа A_i и B_j выбираются начальная экстремальная орбита $S(0)$ и направление возрастания нумерации так, что все экстремальные орбиты обозначаются $S(k)$, где целое число k может быть и отрицательным. Для семейств A_i орбита $A_i(0)$ кратна орбите $E_1(-1)$, т.е. $\tilde{a} = \pm 1$, $\tilde{e} = -1$. Для семейств B_j орбита $B_j(0)$ – это $E_1(1)$, т.е. $\tilde{a} = 1$, $\tilde{e} = 1$. На семействах C_{kl} есть только две экстремальные орбиты: $C_{kl}(1)$ при $\tilde{e} > 0$ и $C_{kl}(-1)$ при $\tilde{e} < 0$. Имеются таблицы самих семейств S [18].

Были описаны ([2], гл. III, IV) базовые порождающие семейства Id, Ir, $E_N^{\pm}$, A_i, B_j, C_{kl} и T_N, а также точки пересечения их характеристик на плоскости симметрии П, соответствующие специальным решеним, по которым пересекаются базовые семейства:

$$\mathrm{Id}(N) = \mathrm{Id} \cap E_N, \qquad \mathrm{Ir}(N) = \mathrm{Ir} \cap E_N, \qquad E_N(k) \tag{4.1}$$

Кроме того, были выделены [2] описанные выше экстремальные орбиты

$$A_i(k), \quad B_j(k), \quad C_{kl}(\pm 1) \tag{4.2}$$

на которых возможен возврат (складка) или замыкание соответствующей характеристики порождающего семейства. На специальных решениях (4.1) происходит бифуркация пересекающихся базовых семейств, т.е. порождающее семейство состоит из кусков базовых семейств, ограниченных специальными решениями. Характер этих бифуркаций обсуждался [20, 21], но изучен пока не во всех случаях.

На порождающих семействах периодических решений второго вида (т.е. со столкновениями тел P_3 и P_2) след $\mathrm{Tr} = \pm\infty$. Смена знака Tr происходит только на специальных и экстремальных решениях для семейств, периодические решения которых состоят из одного решения-отрезка семейств S (т.е. A_i, B_j или C_{kl}) [44]. Для семейств периодических решений, составленных более чем из одного решения-отрезка, кроме этих возможны и другие места смены знака следа Tr, но о них пока ничего не известно. Но у регулярной системы Гамильтона в месте пересечения двух семейств периодических решений след $\mathrm{Tr} = 2$ на одном семействе и $\mathrm{Tr} = 2\cos(2\pi/q)$ – на другом, где натуральное число q — порядок резонанса и кратность пересечения. Поэтому однокусковые порождающие семейства могут пересекаться только на специальных решениях (4.1) и на экстремальных решениях (4.2), а многокусковые еще и на неизвестных решениях.

4.4. *Примеры порождающих семейств* ([14], [20], гл. 10).

Семейство m начинается как часть семейства Ir с a от ∞ до 1 и с $\tilde{e} = -1$. При $a = 1$ оно переходит в часть семейства A_0 с $\tilde{e} < -1$, включая отрезки гиперболических орбит. Здесь $\mathrm{Tr} = -2$ при $a = 1$ и $\mathrm{Tr} = -\infty$ на семействе A_0 от $a = 1$ до экстремальной орбиты $A_0(-1)$ [43]. На орбите $A_0(-1)$ след Tr перескакивает от $-\infty$ до $+\infty$, затем $\mathrm{Tr} = +\infty$.

Семейство c начинается из неподвижной точки L_1 как семейство c задачи Хилла, затем переходит в часть семейства B_1 с $a \le 1$ и $|\tilde{e}| \ge 1$ от $\tilde{e} = 1$ до $\tilde{e} = -1$ и $a = 1$, где кончается как двукратное на семействе h.

Семейство a начинается из неподвижной точки L_2 как семейство a задачи Хилла, затем переходит в часть семейства B_1 с $a \ge 1$ и $|\tilde{e}| \le 1$ от $\tilde{e} = 1$ до $E_{1/2}(1)$. Здесь семейство B_1 пересекается с семейством A_0 и с другой частью семейства B_1. Затем идет семейство $B_1 + 2A_0$. При этом на семействе A_0 значения N меняются от $1/2$ до 1 и значения постоянной Якоби C убывают до -1, а на семействе B_1 значения N убывают от $1/2$ до значения N', соответствующего $C = -1$. Пусть на семействе B_1 при $N = N'$ и $C = -1$ имеем $a = a'$, $\tilde{e} = \tilde{e}'$. Затем идет кусок семейства $B_1 + B_1$ от $C = -1$ до значения $C = C''$, соответствующего экстремальному решению-отрезку $B_1(-1)$ [43], где $a = a''$ и $\tilde{e} = \tilde{e}''$. При этом для двух орбит семейства B_1 значение C одинаково, но они принадлежат разным участкам семейства B_1: на одной орбите $1 \le a \le a''$ и $-1 \le \tilde{e} \le \tilde{e}''$, а на другой $a'' \le a \le a'$ и $\tilde{e}'' \le \tilde{e} \le \tilde{e}'$. На экстремальной орбите $B_1(-1)$ семейство заканчивается как двукратное.

Семейство b начинается из неподвижной точки L_3 как семейство E_1^- от $\tilde{e} = 1$ до $\tilde{e} = -1$ и здесь заканчивается как двукратное на семействе h.

Семейство f начинается как семейство f обратных круговых орбит задачи двух тел P_3 и P_2. Затем переходит в семейство f задачи Хилла, затем – в семейство E_1^+ от $\tilde{e} = 1$ до $\tilde{e} = -1$. Здесь оно переходит в часть семейства B_1 с $a \ge 1$ от $a = 1$, $\tilde{e} = -1$ до орбиты $E_{1/3}(0)$, затем в семейство $E_{1/3}^+$ до орбиты $E_{1/3}(2)$, в семейство B_1 до орбиты $E_{1/5}(0)$, в семейство $E_{1/5}^+$ до орбиты $E_{1/5}(2)$, в семейство B_1 до орбиты $E_{1/7}(0)$, и т.д.

Семейство g начинается как семейство g прямых круговых орбит задачи двух тел P_3 и P_2. Затем переходит в семейство g_+ задачи Хилла. На решении M оно переходит в семейство g'_+ задачи Хилла. Затем переходит в кусок семейства B_2 с $a < 1$ до $a = 1$, $\tilde{e} = -1$. Здесь оно переходит в семейство $T_1 + T_1$, каждая орбита которого образована двумя разными орбитами семейства T_1, симметричными друг другу относительно оси x_1. Этот кусок заканчивается при $\tilde{a} = 1$, $\tilde{e} = 1$, где переходит в семейство g_- задачи Хилла. На решении M оно переходит в семейство g'_- задачи Хилла, которое продолжается от $\tilde{a} = 1$, $\tilde{e} = 1$ куском семейства B_2 с $a > 1$. Была описана ([20], п. 10.2.5) его дальнейшая судьба, но окончание семейства не известно.

Семейство l начинается как часть семейства Id с $a \in (\infty, 2^{2/3}]$, т.е. с $N \in (0, 1/2]$. После орбиты Id(1/2) семейство переходит в семейство $E^-_{1/2}$ до орбиты пересечения $E_{1/2}(1)$, где оно переходит в семейство $A_0 + B_1$.

Возмущения порождающих семейств изучены слабо. Известно только смещение следа Tr на семействах E_N ([2], рис. 74), а также возмущения следа Tr и периода T на семействах E_N ([2], Приложение, табл. 2). Были прослежены возмущения этих порождающих семейств при $\mu \approx 10^{-3}$ [14] и $\mu \approx 10^{-2}$ [15].

Далее рассмотрим эволюцию двух семейств h и i при росте μ от нуля до 1/2. Напомним, что орбита называется *критической*, если на ней либо $\mathrm{Tr} = \pm 2$, либо происходит столкновение тела P_3 с телом P_1 или P_2, либо постоянная Якоби имеет экстремум вдоль семейства при фиксированном μ.

5. Семейство h

Семейство h начинается обратными круговыми орбитами бесконечно малого радиуса вокруг тела P_1 большей массы.

5.1. *Порождающее семейство* h ($\mu = 0$). Порождающее семейство h было сначала описано ([14], § 3) как семейство $IR+$, затем ([20], п. 10.2.6) как семейство h.

В табл. 1 приведены данные по 16 критическим орбитам вычисленного куска этого семейства: номер орбиты k, нормированный период орбиты $T/(2\pi)$, значение постоянной Якоби C, след Tr (или концы интервала его изменения), начальные точки орбиты в астрономических координатах $\tilde{a}(0)$ и $\tilde{e}(0)$ согласно соотношениям (3.12), точка орбиты через полупериод $\tilde{a}(T/2)$, $\tilde{e}(T/2)$.

На фиг. 6 показаны характеристики семейства в координатах $\tilde{a}$, $\tilde{e}$. Порождающее семейство h начинается как часть семейства Ir обратных круговых орбит вокруг тела P_1 единичной массы. Эта часть заканчивается орбитой 1, где семейство h переходит в часть семейства A_0 с $\tilde{e} > -1$, до орбиты 4. При этом на орбите 2 происходит столкновение с телом P_2, и это столкновение сохраняется при $\mu > 0$, а на орбите 3 постоянная Якоби C достигает максимума. В орбите 4 семейство h становится семейством $E^+_{1/2}$ до орбиты 6. При этом на орбите 5 происходит столкновение с телом P_1. От орбиты 6 семейство h продолжается как семейство A_1 до орбиты 11. При этом на орбите 7 постоянная Якоби C достигает минимума. На орбите 9 происходит столкновение с телом P_2 нулевой массы. На орбите 10 постоянная Якоби C достигает максимума. От орбиты 11 семейство h продолжается как семейство $E^+_{1/4}$ до орбиты 13. При этом на орбите 12 происходит столкновение с телом P_1. От орбиты 13 семейство h продолжается как семейство A_0 до пересечения с семейством $E^+_{1/6}$. При этом на орбите 14 постоянная Якоби C достигает минимума; на орбите 16 происходит столкновение с телом P_2. В целом семейство h состоит из кусков

$$\{A_0, E^+_{1/(4k-2)}, A_1, E^+_{1/(4k)}\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Выше был описан первый такой кусок ($k = 1$) и начало второго ($k = 2$).

Было приведено ([45], § 1; [22], § 6) много деталей этого семейства, включая орбиты.

5.2. *Эволюция семейства h при росте μ от 0 до 1/2.* Для $\mu = 0.00095388$, соответствующего случаю Солнце – Юпитер, семейство h было вычислено ([14], § 4) как семейство $IR+J$ (также см. [45], § 2 и [22], § 7). На плоскости $\tilde{a}$, $\tilde{e}$ характеристики этого семейства практически не отличаются от характеристик порождающего семейства, показанных на фиг. 6. Семейство h вычислено для $\mu = 0.1$ и $\mu = 0.2$ [45] и для $\mu = 0.3, 0.4, 0.5$ [46]. На фиг. 7 показаны характеристики семейства h при $\mu = 0.1, 0.3, 0.5$. Видна эволюция семейства h при росте μ, причем у семейства h не появляются новые особенности и не происходят самобифуркации. Для $\mu \approx 0.012$ семейство h было вычислено [15] как семейство A_1.

Продолжение см. в Препринте "Сложные семейства периодических решений ограниченной задачи". Там же литература.

Таблица 1.

k	$T/(2\pi)$	C	Tr	$\tilde{a}(0)$	$\tilde{e}(0)$	$\tilde{a}(T/2)$	$\tilde{e}(T/2)$
1	0.50	-1	$[-2,+\infty]$	-1	-1	1	-1
2	1.50	2.679465	$+\infty$	-1.47175	0.43384		$\mp\infty$
3	1.99	2.970940	$[+\infty,-\infty]$	-1.58720	0.63003	1.603	1.376
4	2.00	2.970934	$[-\infty,2]$	-1.58740	0.62996	1.587	1.370
5	2.00	0.629961	2	-1.58740	0	1.587	± 2
6	2.00	-1.711013	$[2,-\infty]$	-1.58740	-0.62996	1.587	-1.370
7	2.19	-1.785103	$[-\infty,+\infty]$	-1.76225	-0.53648	51.553	-2.019
8	2.50	-1.491531	$+\infty$	-1.96669	-0.29891	0.511	-3.954
9	3.50	2.414539	$+\infty$	-2.41232	0.23485		$\mp\infty$
10	3.99	2.929162	$[+\infty,-\infty]$	-2.51977	0.39686	2.539	1.606
11	4.00	2.929161	$[-\infty,2]$	-2.51984	0.39685	2.519	1.603
12	4.00	0.396850	2	-2.51984	0	2.519	± 2
13	4.00	-2.135461	$[2,-\infty]$	-2.51984	-0.39685	2.519	-1.603
14	4.05	-2.141393	$[-\infty,+\infty]$	-2.56117	-0.38821	5.877	-1.829
15	4.50	-1.645629	$+\infty$	-2.82190	-0.19649	0.358	-4.790
16	5.50	2.312067	$+\infty$	-3.20444	0.17058		$\mp\infty$