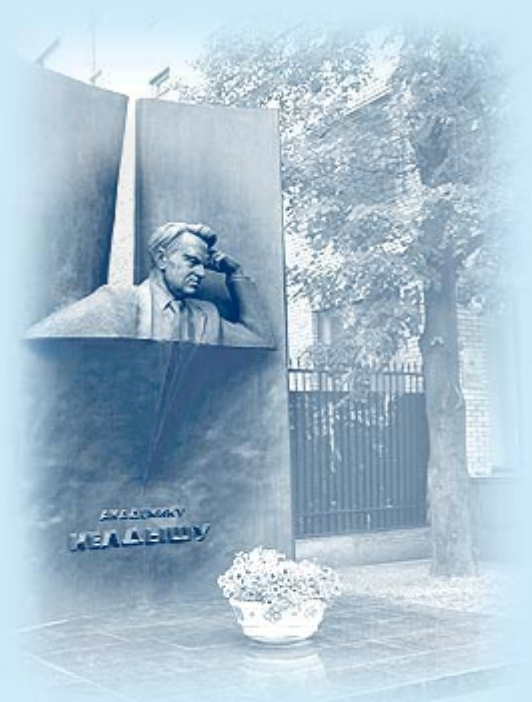




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 20 за 2007 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю. Ф. Голубев

Оптимальное управление перемещением неустойчивого стержня

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю. Ф. Оптимальное управление перемещением неустойчивого стержня // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 20. 26 с.
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-20>

Ордена Ленина
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Ю.Ф. Голубев

Оптимальное управление перемещением неустойчивого стержня.

Москва, 2007

УДК 531.1

Голубев Ю.Ф. Оптимальное управление перемещением неустойчивого стержня.

Аннотация. Исследуется задача об управлении системой, состоящей из весомого стержня, опирающегося своим нижним концом о подвижную подставку. В предположении безынерционного движения подставки с ограниченной скоростью ищется быстроедействие из неустойчивого начального равновесия системы в ее другое неустойчивое положение с заданной скоростью поступательного движения. Показано, что закон оптимальной скорости перемещения подставки принадлежит границе допустимой области и имеет не более двух переключений с одного предельного значения на другое. Получены расчетные формулы для определения моментов переключения скорости подставки в зависимости от краевых условий. Приведены результаты компьютерного моделирования системы с учетом инерционности движения подставки.

Golubev Yu.F. Optimal control of an unstable rod displacement.

Abstract. The control problem is investigated with reference to a system which consists of a weighty rod leaned by its lower end on a mobile support. System performance from its unstable initial equilibrium to another unstable position with prescribed translation velocity is sought with the assumption of inertia-free support motion with bounded velocity. It is proved that optimal support velocity time dependence belongs to the permissible domain wall and realizes bang-bang control with two switches as a maximum. Calculation formulas for support velocity switches points of time in dependence on edge conditions are received. Results of computer simulation of a system performance with taking into account inertia of a support are presented.

Оглавление

Введение	3
1. Уравнения движения	4
2. Необходимые условия оптимальности	7
3. Быстроедействие в начало фазовых координат	10
4. Свойства быстрогодействия в начало координат	14
5. Быстроедействие к поступательному движению	18
Заключение	23
Литература	25

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 07-01-00134) и программы 22 РАН.

Введение

Задаче о динамическом равновесии перевернутого физического маятника посвящено много исследований, инициированных работами [1, 2, 3]. В них устойчивость равновесия маятника в верхнем положении обеспечивается за счет периодических вертикальных вибраций точки опоры. Частота этих вибраций должна быть достаточно большой, что не всегда практически удобно реализуется. Вибрация точки подвеса в горизонтальном направлении для стабилизации верхнего положения маятника мало эффективна. Для стабилизации перевернутого маятника с неподвижной точкой опоры применяются различного рода следящие системы управления, например, [4, 5]. Метод стабилизации перевернутого маятника посредством горизонтальных перемещений точки опоры предложен в [6]. Вместе с тем помимо стабилизации представляет практический интерес также и транспортировка точки опоры перевернутого маятника в другое пространственное положение с сохранением вертикальной ориентации маятника. Такая задача возникает, в частности, при перемещении высотного строительного крана по рельсам. В одномерном варианте эта задача решена разными методами. В [7] построен оптимальный регулятор по методу Калмана-Летова. В [8] предложен нечеткий контроллер перемещения перевернутого маятника на тележке в заданную точку. В [6] представлен алгоритм управления на основе PD-регулятора, обеспечивающего перемещение точки опоры маятника на заданное расстояние с удержанием маятника в перевернутом вертикальном положении. В перечисленных алгоритмах в качестве обратной связи использовалась информация об угловом положении стержня относительно опоры. При разработке транспортного средства "Сегвэй" задача стабилизации вертикального положения рулевой колонки (перевернутый маятник) при произвольном движении точки опоры была решена с помощью системы гироскопов [9].

В данной работе исследуется задача о быстроедействии точки опоры стержня из одного фиксированного положения в пространстве в другое ее заданное положение при условии, что в начале маневра стержень был застabilизирован в верхнем положении равновесия, а в конце маневра требуется привести стержень тоже в верхнее положение с заданной скоростью в новом положении точки опоры. Предполагается, что стержень в процессе маневра должен сохранять ориентацию относительно вертикали и не должен проходить через нижнее положение равновесия. Стержень просто поставлен на опору и, следовательно, в точке опоры отсутствуют управляющие моменты и измерительные устрой-

ва. Управление движением в целом должно быть обеспечено лишь за счет подходящего перемещения точки опоры стержня. Измерительную обратную связь в таком случае может обеспечивать, например, система технического зрения, наблюдающая за какой-нибудь фиксированной точкой стержня.

Аналогичная задача о транспортировке точки подвеса физического маятника без раскачки в окрестности его нижнего положения равновесия была решена в работах [10, 11] применительно к обеспечению процесса погрузки портовым краном.

Автор благодарен В.В. Корянову за помощь в подготовке иллюстративного материала.

1. Уравнения движения

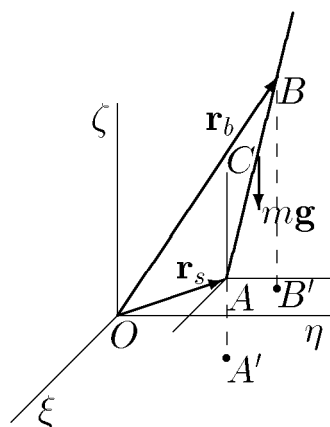


Рис. 1.1. Стержень на опоре в точке A

Рассмотрим весомый стержень (рис. 1.1), который стоит на подставке в точке опоры, задаваемой радиус-вектором $\mathbf{r}_s$, и имеет массу m . Некоторая точка B стержня отстоит от опоры на постоянное расстояние l и задается радиус-вектором $\mathbf{r}_b$. Предполагается, что силовой момент в точке контакта стержня с опорой отсутствует, так что воздействие подставки на стержень сводится лишь к реакции, приложенной к стержню в точке опоры.

Возьмем подвижную систему координат S , оси которой сохраняют постоянную ориентацию, а начало A совпадает с концом вектора $\mathbf{r}_s$. В системе S на стержень действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила инерции $-m\ddot{\mathbf{r}}_s$, обе приложенные к центру масс стержня C . В системе S конец стержня, совпадающий с точкой A , неподвижен. Относительный радиус-вектор и относительная скорость точки B стержня выражают-

ся формулами

$$\boldsymbol{\rho}_b = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_b = \dot{\mathbf{r}}_b - \dot{\mathbf{r}}_s. \quad (1.1)$$

Пусть L — длина стержня. Относительная скорость произвольной точки $\boldsymbol{\rho} = \mu \boldsymbol{\rho}_b / l$, $0 \leq \mu \leq L$, стержня примет вид

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mu}{l} \dot{\boldsymbol{\rho}}_b.$$

Пусть поперечный момент инерции стержня относительно точки A равен J , а центр масс стержня отстоит от точки A на расстояние l_c , так что его относительный радиус-вектор имеет вид $\boldsymbol{\rho}_c = l_c \boldsymbol{\rho}_b / l$. Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента

$$\mathbf{K} = \frac{J}{l^2} \boldsymbol{\rho}_b \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_b$$

стержня относительно точки A в системе S [12]:

$$\dot{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\rho}_c \times m(\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{r}}_s) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\rho}_b \times \left[\frac{J}{l^2} \ddot{\boldsymbol{\rho}}_b - \frac{ml_c}{l} (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{r}}_s) \right] = 0. \quad (1.2)$$

Второе уравнение (1.2) означает, что

$$\ddot{\mathbf{r}}_b = \frac{ml_cl}{J} \mathbf{g} + \left(1 - \frac{ml_cl}{J} \right) \ddot{\mathbf{r}}_s + \lambda \boldsymbol{\rho}_b. \quad (1.3)$$

Это и есть искомое векторное уравнение движения, где множитель λ отвечает за выполнение связи $\boldsymbol{\rho}_b^2 = l^2$. При $l = J/(ml_c)$ уравнение (1.3) упрощается

$$\ddot{\mathbf{r}}_b = \mathbf{g} + \lambda \boldsymbol{\rho}_b. \quad (1.4)$$

Множитель λ найдем, продифференцировав дважды уравнение связи $\boldsymbol{\rho}_b^2 = (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s)^2 = l^2$ и подставив в результат вместо $\ddot{\mathbf{r}}_b$ правую часть уравнения (1.4):

$$(\dot{\mathbf{r}}_b - \dot{\mathbf{r}}_s)^2 + (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s) \cdot (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{r}}_s) + \lambda l^2 = 0. \quad (1.5)$$

Поставив задачу найти такое движение точки опоры, чтобы стержень оставался вблизи вертикали, предположим, что во все время движения квадрат относительной скорости $(\dot{\mathbf{r}}_b - \dot{\mathbf{r}}_s)^2$ остается малым и что

$$(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{g} \approx -lg, \quad (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_s \approx -\frac{l\mathbf{g} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_s}{g}.$$

Тогда

$$\lambda \approx \frac{1}{l} \left(g - \frac{\mathbf{g} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_s}{g} \right). \quad (1.6)$$

Выберем неподвижную правую ортогональную систему координат $O\xi\eta\zeta$. Ось $O\zeta$ направим вертикально вверх, а оси $O\xi$ и $O\eta$ произвольно в горизонтальной плоскости. Тогда из (1.6) найдем

$$\lambda \approx \frac{g + \ddot{\zeta}_s}{l}. \quad (1.7)$$

Проекция уравнения (1.4) на выбранные оси примут вид

$$\ddot{\xi}_b = \lambda(\xi_b - \xi_s), \quad \ddot{\eta}_b = \lambda(\eta_b - \eta_s), \quad \ddot{\zeta}_b = -g + \lambda(\zeta_b - \zeta_s). \quad (1.8)$$

Третье уравнение системы (1.8) означает, что когда положение стержня близко к вертикали, т.е. $\zeta_b - \zeta_s \approx l$, очевидно будем иметь $\ddot{\zeta}_b \approx \ddot{\zeta}_s$.

Уравнения (1.8) дают возможность определить движение точки опоры, обеспечивающее требуемое движение точки B . Например, они показывают, что движение точки B с постоянной горизонтальной скоростью возможно лишь, если стержень стоит вертикально. Если задать закон движения точки B по эллипсу вида

$$\xi_b = R_\xi \cos \sigma t + \alpha, \quad \eta_b = R_\eta \sin \sigma t + \beta, \quad \zeta = \zeta_0,$$

тогда из (1.8) получим

$$\xi_s = \left(\frac{\sigma^2}{\lambda} + 1 \right) R_\xi \cos \sigma t + \alpha, \quad \eta_s = \left(\frac{\sigma^2}{\lambda} + 1 \right) R_\eta \sin \sigma t + \beta, \quad \zeta_s = \zeta_0 - \frac{g}{\lambda}.$$

Другими словами, движение горизонтальной проекции точки A будет происходить по эллипсу, соосному с эллипсом точки B , но с пропорционально увеличенными полуосями. Точка A будет опущена вниз по сравнению с точкой B приблизительно на величину l . Стержень при этом будет наклонен в сторону центра эллипса. Его движение будет неустойчивым. Стабилизация может быть получена методами, изложенными, например, в [16].

В дальнейшем будет решаться задача о быстрейшем приведении точки $\mathbf{r}_s$ в требуемое положение так, чтобы в нем стержень оказался вертикальным. Если принять, что точка A может смещаться по вертикали с ограничением $|\ddot{\zeta}_s| \leq M_\zeta$, где M_ζ — постоянная, то [13] оптимальное быстроедействие по вертикальной координате оказывается кусочно-постоянным и состоит из двух участков противоположных по знаку предельных значений вертикального ускорения. Соответственно значение множителя λ тоже будет кусочно-постоянным. На участке постоянства λ система (1.8) распадается на три независимых уравнения. Каждое из первых двух уравнений (1.8) можно представить в виде следующей

системы уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= \lambda(q_1 - q_3), \\ \dot{q}_3 &= Mu, \quad |u| \leq 1.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Здесь для простоты принято, что управление горизонтальным смещением точки $\mathbf{r}_s$ осуществляется по скорости, абсолютная величина которой ограничена постоянной $M > 0$.

Систему (1.9) можно представить в матричном виде

$$\dot{\mathbf{q}} = A\mathbf{q} + Bu, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу управляемости [14]

$$(B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda M \\ 0 & -\lambda M & 0 \\ M & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\det(B, AB, A^2B) = -\lambda^2 M^3 \neq 0$. Поэтому система (1.9) вполне управляема. Требуется найти такое управление $u(t)$, чтобы система (1.9) из заданного в момент времени t_0 начального фазового состояния $\mathbf{q}^T(t_0) = (d, 0, d)$ перешла в заданное конечное состояние $\mathbf{q}^T(t_k) = (d - a, b, d - a)$ за минимальное время $T = t_k - t_0$.

2. Необходимые условия оптимальности

Рассмотрим задачу о приведении системы (1.9) из заданной в начальный момент времени t_0 некоторой точки фазового пространства в другую заданную точку фазового пространства, соответствующую конечному моменту времени t_k , за минимальное время $T = t_k - t_0$. В соответствии с методом Охотимского-Понтрягина [13, 15] составим гамильтониан

$$\mathcal{H} = 1 + \psi_1 q_2 + \lambda \psi_2 (q_1 - q_3) + \psi_3 Mu,$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 — сопряженные переменные [13], определяемые из системы уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\lambda\psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = \lambda\psi_2\tag{2.1}$$

при следующих произвольных конечных условиях

$$\psi_1(t_k) = k_1, \quad \psi_2(t_k) = k_2, \quad \psi_3(t_k) = k_3.$$

Пусть $\lambda = \omega^2$. Тогда решение (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_1 &= k_1 \operatorname{ch} \omega(t - t_k) - \omega k_2 \operatorname{sh} \omega(t - t_k), \\ \psi_2 &= -\frac{k_1}{\omega} \operatorname{sh} \omega(t - t_k) + k_2 \operatorname{ch} \omega(t - t_k), \\ \psi_3 &= k_3 + k_1[1 - \operatorname{ch} \omega(t - t_k)] + \omega k_2 \operatorname{sh} \omega(t - t_k).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Необходимое условие оптимальности означает [13], что

$$u = -\operatorname{sign} \psi_3(t).\tag{2.3}$$

Как и следовало ожидать, управление оказывается релейным с переключениями в моменты перемены знака функции $\psi_3(t)$. Для исследования свойств $\psi_3(t)$ используем обратное время $\tau = t_k - t$. Тогда

$$\psi_3(\tau) = k - (k_1 \operatorname{ch} \omega\tau + \omega k_2 \operatorname{sh} \omega\tau), \quad k = k_1 + k_3.\tag{2.4}$$

Рассмотрим различные варианты значений параметров.

Вариант 1. $k_1 > 0$, $k_1 > \omega|k_2|$. Формула (2.4) преобразуется к виду

$$\psi_3 = k - \sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2} \operatorname{ch}(\omega\tau + \alpha),$$

где α удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}}, \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{\omega k_2}{\sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}}.$$

Если $k > \sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}$, то уравнение $\psi_3(\tau) = 0$ имеет два действительных корня $\tau_1 < \tau_2$, и оптимальное управление выражается формулой

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau < \tau_1, \\ -1, & \text{при } \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \\ 1, & \text{при } \tau_2 \leq \tau. \end{cases}\tag{2.5}$$

Если $k = \sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}$, то уравнение $\psi_3(\tau) = 0$ имеет один кратный корень, в котором функция $\psi_3(\tau)$ достигает максимума. Поэтому оптимальным будет управление $u = 1$.

Если $k < \sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}$, то уравнение $\psi(\tau) = 0$ корней не имеет, причем $\psi_3(\tau) < 0$, и оптимальным будет управление $u = 1$.

Вариант 2. $k_2 > 0$, $|k_1| < \omega k_2$. Формула (2.4) преобразуется к виду

$$\psi_3 = k - \sqrt{\omega^2 k_2^2 - k_1^2} \operatorname{sh}(\omega\tau + \alpha_1),$$

где α_1 удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = \frac{\omega k_2}{\sqrt{\omega^2 k_2^2 - k_1^2}}, \quad \operatorname{sh} \alpha_1 = \frac{k_1}{\sqrt{\omega^2 k_2^2 - k_1^2}}.$$

В этом случае уравнение $\psi_3(\tau) = 0$ имеет один корень τ_2 , при котором функция $\psi_3(\tau)$ меняет значения с положительных на отрицательные. Поэтому оптимальным будет управление

$$u(\tau) = \begin{cases} -1, & \text{при } \tau < \tau_2, \\ 1, & \text{при } \tau_2 \leq \tau. \end{cases} \quad (2.6)$$

Вариант 3. $k_1 = \omega k_2$. Формула (2.4) принимает вид

$$\psi_3 = k - k_1 \exp(\omega\tau).$$

Следовательно, если $k > 0$ и $k_1 > 0$, то управление принимает вид (2.6), где τ_2 единственный корень уравнения $\psi_3(\tau) = 0$. Если $k \leq 0$ и $k_1 > 0$, то $u = 1$. Если $k < 0$ и $k_1 < 0$, то управление принимает вид

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau < \tau_1, \\ -1, & \text{при } \tau_1 \leq \tau, \end{cases} \quad (2.7)$$

где τ_1 единственный корень уравнения $\psi_3(\tau) = 0$. Если же $k \geq 0$ и $k_1 < 0$, то тогда $u = -1$.

Вариант 4. $k_1 < 0$, $|k_1| > \omega|k_2|$. Тогда

$$\psi_3 = k + \sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2} \operatorname{ch}(\omega\tau + \alpha),$$

где α удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{|k_1|}{\sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}}, \quad \operatorname{sh} \alpha = -\frac{\omega k_2}{\sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}}.$$

Если $k < -\sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}$, то уравнение $\psi_3(\tau) = 0$ имеет два действительных корня $\tau_1 < \tau_2$, и оптимальное управление выражается формулой

$$u(\tau) = \begin{cases} -1, & \text{при } \tau < \tau_1, \\ 1, & \text{при } \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \\ -1, & \text{при } \tau_2 \leq \tau. \end{cases} \quad (2.8)$$

Если $k = -\sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}$, то уравнение $\psi_3(\tau) = 0$ имеет один кратный корень, в котором функция $\psi_3(\tau)$ достигает минимума. Поэтому оптимальным будет управление $u = -1$.

Если $k > -\sqrt{k_1^2 - \omega^2 k_2^2}$, то уравнение $\psi_3(\tau) = 0$ корней не имеет, причем $\psi_3(\tau) > 0$, и оптимальным будет управление $u = -1$.

Вариант 5. $k_2 < 0$, $|k_1| < \omega|k_2|$. Тогда

$$\psi_3 = k + \sqrt{\omega^2 k_2^2 - k_1^2} \operatorname{sh}(\omega\tau + \alpha_1),$$

где α_1 удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = \frac{\omega|k_2|}{\sqrt{\omega^2 k_2^2 - k_1^2}}, \quad \operatorname{sh} \alpha_1 = -\frac{k_1}{\sqrt{\omega^2 k_2^2 - k_1^2}}.$$

В этом случае уравнение $\psi_3(\tau) = 0$ имеет один корень τ_1 , при котором функция $\psi_3(\tau)$ меняет значения с отрицательных на положительные. Поэтому оптимальным будет управление (2.7)

Поскольку конечное время движения не фиксировано, должно быть выполнено

$$\mathcal{H}(t_k) = 1 + k_1 q_2(t_k) + k_2 [q_1(t_k) - q_3(t_k)] + k_3 M u(t_k) = 0.$$

Отсюда ясно, что все коэффициенты k_1 , k_2 , k_3 не могут одновременно обратиться в нуль, и представленный набор вариантов исчерпывает все возможные случаи.

3. Быстродействие в начало фазовых координат

Будем искать решения, которые переводят стержень из начального положения

$$q_1(t_0) = q_3(t_0) = a, \quad q_2(t_0) = 0 \quad (3.1)$$

в конечное

$$q_1(t_k) = q_2(t_k) = q_3(t_k) = 0.$$

Тогда обратное время τ меняется в пределах $0 \leq \tau \leq T = t_k - t_0$, а начальная позиция (3.1) отвечает положению стержня в вертикальной плоскости, проходящей через точку опоры и дополнительную к q_1 координатную ось. При $\tau = 0$ должно быть $u = \pm 1$. Выберем сначала $u = 1$ и проинтегрируем по τ уравнения движения от значения $\tau = 0$

$$\begin{aligned} q_1' &= -q_2, \\ q_2' &= -\omega^2(q_1 - q_3), \\ q_3' &= -Mu, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где штрих означает дифференцирование по τ . Начальными условиями интегрирования будут

$$q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0. \quad (3.3)$$

Соответствующее решение имеет вид

$$q_1(\tau) = \frac{M}{\omega} \operatorname{sh} \omega \tau - M\tau, \quad q_2(\tau) = M(1 - \operatorname{ch} \omega \tau), \quad q_3(\tau) = -M\tau. \quad (3.4)$$

Поскольку функция $\operatorname{sh} \omega \tau$ обращается в нуль только при $\tau = 0$, равенство $q_1 = q_3$ может быть достигнуто лишь при наличии переключения

управления с $u = 1$ на $u = -1$. Пусть τ_1 отвечает моменту такого переключения. Тогда при $\tau \geq \tau_1$ и $u = -1$ получим решение

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= \frac{M}{\omega} [\operatorname{sh} \omega \tau - 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_1)] + M(\tau - 2\tau_1), \\ q_2(\tau) &= M[2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_1) - \operatorname{ch} \omega \tau - 1], \\ q_3(\tau) &= M(\tau - 2\tau_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Имея 2 параметра τ_1 и $\tau > \tau_1$, попробуем удовлетворить условиям (3.1), отвечающим конечному значению $\tau = T$. Требования $q_1(T) = q_3(T)$ и $q_2(T) = 0$ приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \omega T - 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1) &= 0, \\ \operatorname{ch} \omega T - 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_1) &= -1. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений несовместна. Чтобы убедиться в этом, достаточно в первом уравнении уединить $\operatorname{sh} \omega T$, во втором уединить $\operatorname{ch} \omega T$, полученные уравнения почленно возвести в квадрат и из второго почленно вычесть первое. В итоге получим $\operatorname{ch} \omega(T - \tau_1) = 1$, что возможно только при $T = \tau_1$. Но тогда должно быть $\tau_1 = 0$, что противоречиво.

Рассмотрим вариант, когда помимо первого переключения при $\tau = \tau_1$ имеется еще одно переключение при $\tau = \tau_2$ со значения $u = -1$ на значение $u = 1$. Соответствующее решение системы (3.2) имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{M}{\omega} [\operatorname{sh} \omega \tau - 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_1) + 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_2)] + M[2(\tau_2 - \tau_1) - \tau], \\ q_2 &= M[1 - \operatorname{ch} \omega \tau + 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_1) - 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_2)], \\ q_3 &= M[2(\tau_2 - \tau_1) - \tau]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Потребовав, чтобы в конечный момент $\tau = T$ времени было выполнено $q_1(T) = q_3(T)$ и $q_2(T) = 0$, получим следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \omega T - 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1) + 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_2) &= 0, \\ \operatorname{ch} \omega T - 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_1) + 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_2) &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Обозначим

$$x = e^{\omega T}, \quad y = e^{\omega \tau_1}, \quad z = e^{\omega \tau_2}. \quad (3.8)$$

Система уравнений (3.7) эквивалентна следующей

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + 2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) &= 1, \\ x + 2(y - z) &= 1. \end{aligned}$$

С учетом того, что нас интересуют лишь положительные решения этой системы, найдем

$$y = \frac{-(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 16x}}{4}, \quad z = \frac{(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 16x}}{4}. \quad (3.9)$$

По смыслу обозначений должно быть $1 < y < z < x$. Это условие выполняется только при $x > 1$.

Потребуем, наконец, чтобы при $\tau = T$ было выполнено краевое условие $q_3(T) = a$. Из третьего равенства (3.5) тогда получим

$$M[2(\tau_2 - \tau_1) - T] = a,$$

что можно преобразовать к уравнению

$$f(x) = \frac{z^2}{y^2 x} = e^{a\omega/M}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{z}{y} = \frac{[(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 16x}]^2}{16x}.$$

Дифференцируя ее по x , найдем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{(x+1)\varphi}{x\sqrt{(x-1)^2 + 16x}}.$$

Воспользовавшись этим выражением, получим

$$\frac{df}{dx} = \frac{[2(x+1) - \sqrt{(x-1)^2 + 16x}]\varphi^2}{x^2\sqrt{(x-1)^2 + 16x}}.$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$2x(x+1) - \sqrt{(x-1)^2 + 16x} \geq 0,$$

причем равенство нулю достигается только при $x = 1$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x > 1$. Кроме того, $f(1) = 1$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{16}.$$

Отсюда ясно, что уравнение (3.10) имеет единственное решение при любом $a > 0$.

Интересно отметить, что

$$\text{при } x \rightarrow \infty \text{ имеем } y \rightarrow 2, \quad z \rightarrow \frac{x}{2}.$$

Этим исчерпывается исследование случая, когда управление начинается и заканчивается значением $u = 1$.

Рассмотрим вариант, когда при $\tau = 0$ выполнено $u(0) = -1$. Обозначив, как и прежде, τ_1 момент первого переключения, найдем решение системы (3.2) с начальными условиями (3.3) в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_1$:

$$q_1(\tau) = -\frac{M}{\omega} \operatorname{sh} \omega \tau + M\tau, \quad q_2(\tau) = M(\operatorname{ch} \omega \tau - 1), \quad q_3(\tau) = M\tau. \quad (3.11)$$

Оно не допускает равенства $q_1 = q_3$ ни при каком $\tau = T \neq 0$. Поэтому возьмем решение, для которого имеется переключение в момент $\tau = \tau_1$ со значения $u(\tau_1 - 0) = -1$ на значение $u(\tau_1 + 0) = 1$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= \frac{M}{\omega} [2 \operatorname{sh}(\tau - \tau_1) - \operatorname{sh} \omega \tau] + M(2\tau_1 - \tau), \\ q_2(\tau) &= M[\operatorname{ch} \omega \tau - 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_1) + 1], \\ q_3(\tau) &= M(2\tau_1 - \tau). \end{aligned} \quad (3.12)$$

С помощью этого решения удовлетворить условиям $q_1(T) = q_3(T)$ и $q_2(T) = 0$ невозможно.

Возьмем решение со вторым переключением в момент $\tau = \tau_2$, так что $u(\tau_2 - 0) = 1$, а $u(\tau_2 + 0) = -1$. Оно приводится к виду.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{M}{\omega} [2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_1) - \operatorname{sh} \omega \tau - 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_2)] + M[\tau - 2(\tau_2 - \tau_1)], \\ q_2 &= M[-1 + \operatorname{ch} \omega \tau - 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_1) + 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_2)], \\ q_3 &= M[\tau - 2(\tau_2 - \tau_1)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Требование $q_1(T) = q_3(T)$ и $q_2(T) = 0$ по-прежнему приводит к системе (3.7), решение которой выражается формулами (3.9). Условие $q_3(T) = a$ приводит к уравнению

$$f(x) = \frac{z^2}{y^2 x} = e^{-a\omega/M}, \quad (3.14)$$

которое в условиях задачи может быть удовлетворено для любых отрицательных значений a .

Подведем итоги сказанному в данном разделе в виде следующего утверждения. Суммарное время быстрогодействия в начало фазовых координат и моменты переключения управления определяются в виде

$$T = \frac{\ln x}{\omega}, \quad t_1 - t_0 = T - \tau_2 = T - \frac{\ln z}{\omega}, \quad t_2 - t_0 = T - \tau_1 = T - \frac{\ln y}{\omega},$$

где y и z определены формулами (3.9). При этом, если $q_3(t_0) = a > 0$, то последовательность переключений есть $(1, -1, 1)$, и значение x находится из уравнения (3.10), а если $q_3(t_0) = a < 0$, то последовательность

переключений есть $(-1, 1, -1)$, и значение x находится из уравнения (3.14).

4. Свойства быстрогодействия в начало координат

Обозначим $\chi(\tau) = [q_1(\tau) - q_3(\tau)]\omega/M$.

4.1. $T - \tau_2 = \tau_1$. В самом деле, из формул (3.9) следует

$$\frac{x}{z} = \frac{4x}{(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 16x}} = \frac{-(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 16x}}{4} = y.$$

Приняв во внимание обозначения (3.8), найдем

$$e^{\omega(T-\tau_2)} = e^{\omega\tau_1}.$$

4.2. $\chi(T - \tau) = -\chi(\tau)$. Чтобы доказать это свойство, предположим сначала, что порядок переключений имеет вид $(1, -1, 1)$, и рассмотрим изменение τ в отдельных диапазонах.

а). $0 \leq \tau < \tau_1$. В соответствии с первым свойством тогда заключаем, что $T - \tau_1 > \tau_2$. Поэтому для подсчетов следует воспользоваться формулами (3.6). Из них получим

$$\begin{aligned} \chi(T - \tau) &= [\operatorname{sh} \omega(T - \tau) - 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1 - \tau) + 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_2 - \tau)] = \\ &= [\operatorname{sh} \omega T - 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1) + 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_2)] \operatorname{ch} \omega\tau - \\ &\quad - [\operatorname{ch} \omega T - 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_1) + 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_2)] \operatorname{sh} \omega\tau. \end{aligned}$$

С учетом равенств (3.7) и выражений (3.4), получаем требуемое равенство.

б). $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. С учетом первого свойства найдем $\tau_1 \leq T - \tau \leq \tau_2$. Поэтому для подсчетов следует воспользоваться формулами (3.5).

$$\begin{aligned} \chi(T - \tau) &= \operatorname{sh} \omega(T - \tau) - 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1 - \tau) = \\ &= [\operatorname{sh} \omega T - 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1)] \operatorname{ch} \omega\tau - \\ &\quad - [\operatorname{ch} \omega T - 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_1)] \operatorname{sh} \omega\tau. \end{aligned}$$

С помощью условий (3.7) имеем

$$\begin{aligned} \chi(T - \tau) &= -2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_2) \operatorname{ch} \omega\tau - [1 - 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_2)] \operatorname{sh} \omega\tau = \\ &= -[\operatorname{sh} \omega\tau - 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - T + \tau_2)]. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться равенством $T - \tau_2 = \tau_1$ и сравнить с первой формулой (3.5).

4.3. $\chi(T/2) = 0$. Это непосредственно следует из свойства 4.2.

4.4. Функция $\chi(\tau)$ достигает экстремумов только в точках $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$. В этих точках производная $d\chi/d\tau$ терпит скачок и меняет знак.

Во всех других точках диапазонов $[0, \tau_1)$, (τ_1, τ_2) , $(\tau_2, T]$ производная $d\chi/d\tau$ остается непрерывной и нигде не обращается в нуль. Чтобы это доказать достаточно в силу свойства 4.2 исследовать окрестность точки $\tau = \tau_1$. Из формул (3.4) и (3.5) следует

$$\left. \frac{d\chi}{d\tau} \right|_{\tau_1-0} = \omega \operatorname{ch} \omega \tau_1 > 0, \quad \left. \frac{d\chi}{d\tau} \right|_{\tau_1+0} = \omega (\operatorname{ch} \omega \tau_1 - 2) = \frac{\omega}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) - 2 < 0,$$

т.к. $1 < y < 2$.

Далее, как следует из формул (3.4), в диапазоне $[0, \tau_1)$ производная $d\chi/d\tau$ не может обратиться в ноль. Рассмотрим диапазон (τ_1, τ_2) . В нем функция $\xi(\tau)$ непрерывна, равенство нулю производной означает справедливость выражения

$$\operatorname{ch} \omega \tau = 2 \operatorname{ch} \omega (\tau - \tau_1).$$

Обозначим $\sigma = \exp(\omega \tau)$. Нетрудно видеть, что тогда должно быть

$$\sigma^2 [1 - 2(\operatorname{ch} \omega \tau_1 - \operatorname{sh} \omega \tau_1)] = 2(\operatorname{ch} \omega \tau_1 + \operatorname{sh} \omega \tau_1) - 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{y(2y - 1)}{y - 2},$$

Но это невозможно, т.к. $1 < y < 2$. Тем самым доказательство пункта 4.4 исчерпывается.

4.5. Справедлива оценка

$$\max_{\tau} |q_1(\tau) - q_3(\tau)| = \frac{M}{2\omega} \left(y - \frac{1}{y} \right) < \frac{3M}{4} \sqrt{\frac{J}{mgl_c}}.$$

Для доказательства пункта 4.5 заметим, что

$$q_1(\tau) - q_3(\tau) = \frac{M}{\omega} \xi(\tau).$$

Функция $\chi(\tau)$ имеет экстремумы лишь в точках $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$, причем $\chi(\tau_1) = -\chi(\tau_2) > 0$. Учитывая определение значения y , получим

$$\chi(\tau_1) = \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right).$$

Осталось принять во внимание определение величин ω и l , а также то, что $1 < y < 2$.

Свойство 4.5 означает, что существует такое значение предельной скорости основания, что стержень будет отклоняться от вертикали в пределах, согласующихся с предположением о возможности линейного приближения в уравнениях движения при всех $a > 0$.

4.6. Если $a < 0$, то сформулированные выше свойства функции $\chi(\tau)$ остаются справедливыми. Это следует из формул (3.11), (3.12), (3.13).

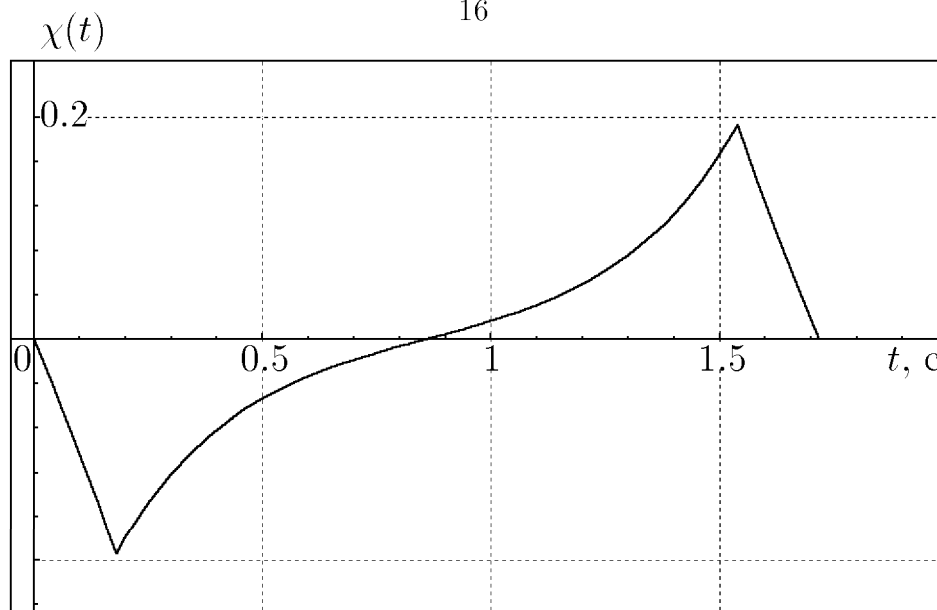


Рис. 4.1. Отклонение точки B от опоры при идеальном управлении

В частности, оценка пункта 4.5 будет справедливой и для всех значений $a < 0$.

Таким образом, при любом значении a , выбирая умеренные предельные скорости движения основания, можно обеспечить требуемую степень аккуратности линейного приближения принятого в данной работе для построения управления.

На рис. 4.1 представлена зависимость $\chi(t)$ для значений параметров $m = 2\text{кг}$, $L = 1\text{м}$, $J = 0.67\text{кг м}^2$, $a = 1\text{м}$, $l = 0.67\text{м}$, $M = 1\text{м/с}$. Видны изломы функции в моменты переключений t_1 и t_2 . В реальном движении такие изломы не могут быть реализованы из-за инерционности стержня. Если реальный стержень поставить на подставку, то при описанном выше безынерционном движении подставки, точка стержня, совпадающая с A , будет проскальзывать относительно подставки, а другие точки стержня вместо необходимого скачка скорости получают ускорения. Поэтому движение точки B будет происходить с некоторым запаздыванием. Этот эффект в связи с экспоненциальной неустойчивостью системы приведет к быстрому разрушению правильного движения. Вместе с тем интересно изучить, какие коррективы следует ввести в закон управления, чтобы обеспечить перенос стержня в требуемую точку с учетом отмеченных особенностей реального движения. С этой целью в комплексе "Универсальный механизм" [17] была набрана система, состоящая из стержня и опорной площадки, между которыми было организовано силовое взаимодействие по закону вязкоупругой модели кулоновского трения с коэффициентом трения 10. В качестве компенсирующего параметра было выбрано ускорение g_3 , ко-

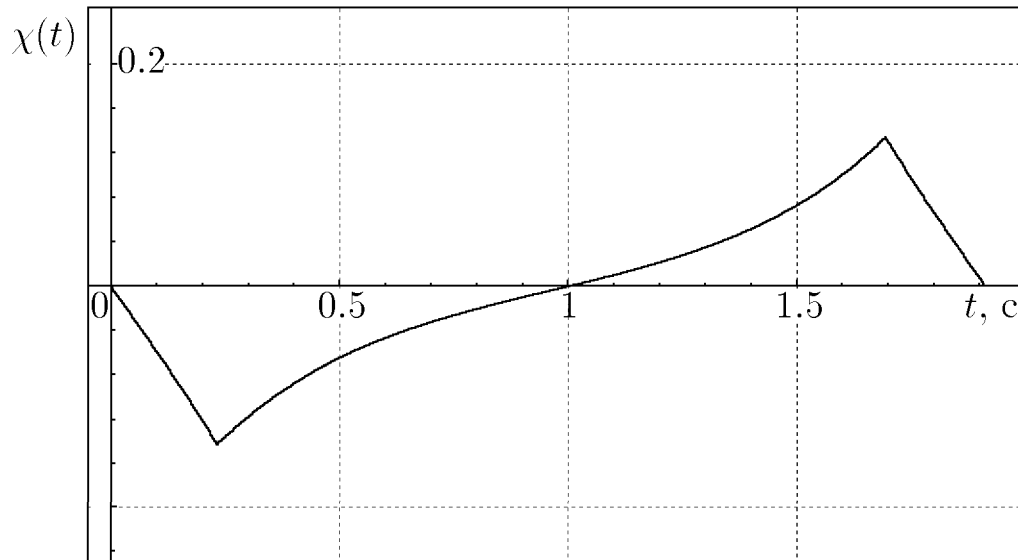


Рис. 4.2. Отклонение точки B от опоры с учетом инерционности

торое принималось вместо g в формулах (3.9) и уравнении (3.10) для расчета моментов времени t_1 , t_2 и T . Значение $g_3 \approx 5,8 \text{ м/с}^2$ оказалось достаточно удачным, о чем свидетельствует график на рис. 4.2. Здесь в моменты скачкообразного переключения скорости подставки уже не происходит скачка относительной скорости точки B , хотя изменение скорости точки B происходит, судя по графику, достаточно быстро. Имеется также и проскальзывание стержня в точке опоры в пределах 2 мм. Тем не менее, маневр переноса стержня оказывается выполненным.

Рис. 4.3 позволяет оценить предположения, принятые при формировании закона управления. На этом рисунке показано изменение величины $\hat{g}(t) = \lambda l$, полученное при движении с учетом инерционности. На уровне $g = 9,8 \text{ мс}^{-2}$ для сравнения проведена прямая, параллельная оси времени. Видно, что значения функции $\hat{g}(t)$ меньше g , что в соответствии с формулой (1.5) объясняется влиянием относительной скорости точки B и наклоном стержня. В моменты переключений t_1 и t_2 , как и следовало ожидать, наблюдается резкое изменение функции $\hat{g}(t)$. На этом же графике изображена прямая, соответствующая g_3 . Сравнительно большая разница значений g_3 и $\hat{g}(t)$ вызвана наличием инерционности стержня и проскальзыванием его относительно опоры. Следует отметить, что заданием лишь одного параметра g_3 удалось определить необходимые для выполнения маневра в условиях помех три параметра: два момента переключения и полное время выполнения маневра.

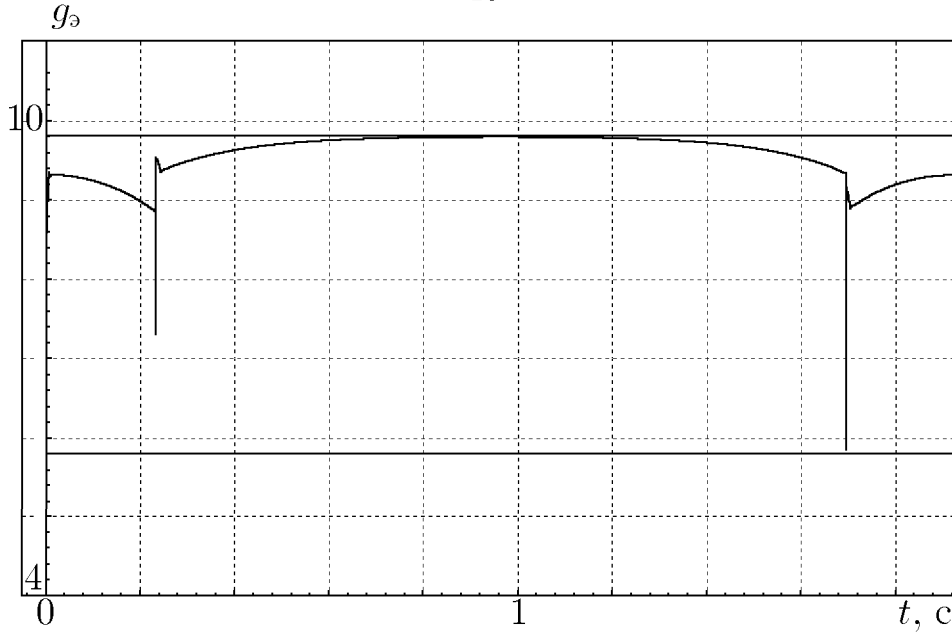


Рис. 4.3. Оценка точности модели

5. Быстродействие к поступательному движению

Потребуем, чтобы стержень из состояния покоя в вертикальном положении при $q_1(t_0) = q_3(t_0) = a$, $q_2(t_0) = 0$ перешел в конечное положение $q_1(t_k) = q_3(t_k) = 0$ с ненулевой скоростью $q_2(t_k) = b$. Из соображений целесообразности примем

$$\left| \frac{b}{M} \right| < 1 \quad \rightarrow \quad 0 < \beta = 1 - \frac{b}{M} < 2. \quad (5.1)$$

Будем интегрировать уравнения (3.2) по обращенному времени τ и выберем сначала управление типа $(1, -1, 1)$.

5.1. $0 \leq \tau < \tau_1$, $u = 1$. Соответствующее решение имеет вид

$$q_1 = \frac{M\beta}{\omega} \operatorname{sh} \omega \tau - M\tau, \quad q_2 = M(1 - \beta \operatorname{ch} \omega \tau), \quad q_3 = -M\tau. \quad (5.2)$$

Для этого решения равенство $q_1 = q_3$ при $\tau \neq 0$ не может быть достигнуто.

5.2. $\tau_1 \leq \tau < \tau_2$, $u = -1$. Решение представляется следующим образом

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= \frac{M}{\omega} [\beta \operatorname{sh} \omega \tau - 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_1)] + M(\tau - 2\tau_1), \\ q_2(\tau) &= M[2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_1) - \beta \operatorname{ch} \omega \tau - 1], \\ q_3(\tau) &= M(\tau - 2\tau_1). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Если отказаться от второго переключения, то при $\tau = T$ должно быть

обеспечено $q_1(T) = q_3(T)$, $q_2(T) = 0$ или

$$\begin{aligned}\beta \operatorname{sh} \omega T &= 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1), \\ \beta \operatorname{ch} \omega T + 1 &= 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_1).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Возведем оба уравнения почленно в квадрат и из второго вычтем первое:

$$\operatorname{ch} \omega T = \frac{3 - \beta^2}{2\beta} > 1 \rightarrow 0 < \beta < 1.$$

Другими словами, управление с одним переключением $(1, -1)$ способно обеспечить заданные краевые условия лишь при положительных значениях параметра b . Перейдем к обозначениям (3.8). Уравнения (5.4) эквивалентны следующим

$$x^2 - \frac{3 - \beta^2}{\beta}x + 1 = 0, \quad y = \frac{\beta + x}{2}.$$

Условие $y < x$ означает, что $x > \beta$. При $x = \beta$ левая часть уравнения относительно x отрицательна. Поэтому следует взять наибольший корень этого уравнения:

$$x = \frac{3 - \beta^2}{2\beta} + \sqrt{\left(\frac{3 - \beta^2}{2\beta}\right)^2 - 1}$$

и соответствующее ему значение

$$y = \frac{x + \beta}{2}.$$

При этом обеспечивается единственное значение

$$a = \frac{M}{\omega} \ln \frac{x}{y^2} = \frac{M}{\omega} \ln \left(\frac{4\beta x}{(3 + \beta^2)x + \beta(\beta^2 - 1)} \right) < 0.$$

5.3. $\tau_2 \leq \tau$, $u = 1$. Решение записывается в виде

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{M}{\omega} [\beta \operatorname{sh} \omega \tau - 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_1) + 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_2)] + M[2(\tau_2 - \tau_1) - \tau], \\ q_2 &= M[1 - \beta \operatorname{ch} \omega \tau + 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_1) - 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_2)], \\ q_3 &= M[2(\tau_2 - \tau_1) - \tau].\end{aligned}\tag{5.5}$$

Напишем систему уравнений, обеспечивающую при $\tau = T$ выполнение равенств $q_1(T) = q_3(T)$ и $q_2(T) = 0$.

$$\begin{aligned}\beta \operatorname{sh} \omega T - 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1) + 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_2) &= 0, \\ \beta \operatorname{ch} \omega T - 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_1) + 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_2) &= 1,\end{aligned}\tag{5.6}$$

которая с учетом обозначений (3.8) эквивалентна следующей системе

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + 2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) &= \beta, \\ x + 2(y - z) &= \beta.\end{aligned}\tag{5.7}$$

По смыслу обозначений должно быть $1 < y < z < x$. Из полученной системы уравнений тогда следует, что $x > \beta$ и $x > \beta^{-1}$, а ее решение выражается формулами

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{4} \left[-(x - \beta) + \sqrt{(x - \beta)^2 + 16 \frac{x(x - \beta)}{\beta x - 1}} \right], \\ z &= \frac{1}{4} \left[(x - \beta) + \sqrt{(x - \beta)^2 + 16 \frac{x(x - \beta)}{\beta x - 1}} \right].\end{aligned}\tag{5.8}$$

Требование $y > 1$ приводит к неравенству

$$(2 - \beta)x^2 + [(2 - \beta)^2 - 3]x + 2 - \beta > 0.$$

Это неравенство выполнено при любом $x > 1$, если $0 < \beta \leq 1$, и при

$$x > \frac{3 - (2 - \beta)^2 + \sqrt{(2 - \beta)^4 - 10(2 - \beta)^2 + 9}}{2(2 - \beta)} > \beta, \text{ если } 1 < \beta < 2. \tag{5.9}$$

С другой стороны, требование $z < x$ приводит к неравенству

$$\beta x^2 + (\beta^2 - 3)x + \beta > 0,$$

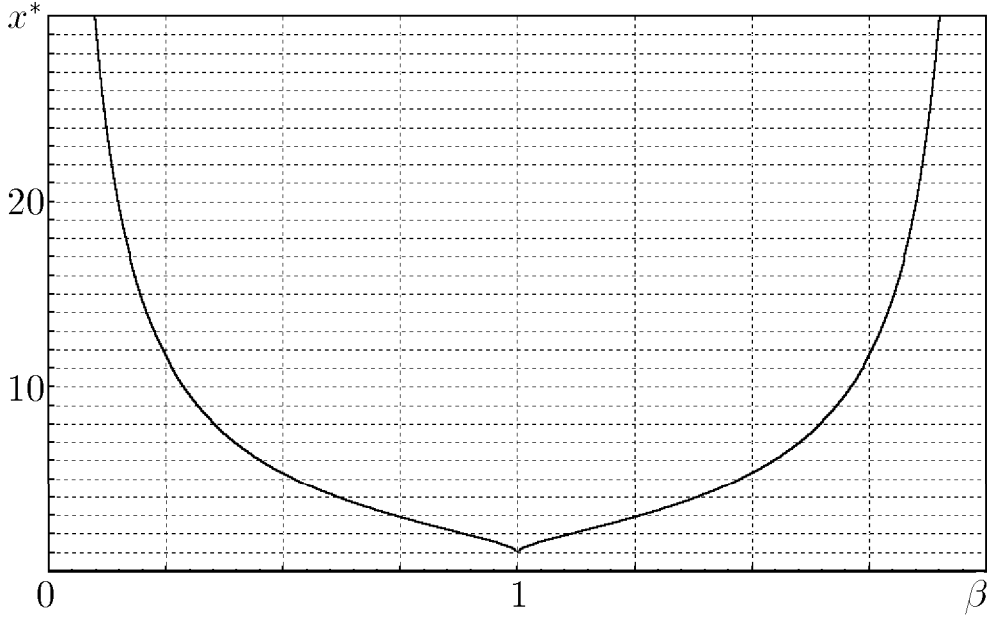
которое выполнено при любом $x > 1$, если $1 < \beta \leq 2$, и при

$$x > \frac{3 - \beta^2 + \sqrt{\beta^4 - 10\beta^2 + 9}}{2\beta} > \frac{1}{\beta}, \text{ если } 0 < \beta \leq 1. \tag{5.10}$$

Объединив формулы (5.9) и (5.10) получим ограничение на область изменения x

$$x > x^* = \begin{cases} \frac{3 - \beta^2 + \sqrt{\beta^4 - 10\beta^2 + 9}}{2\beta}, & 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{3 - (2 - \beta)^2 + \sqrt{(2 - \beta)^4 - 10(2 - \beta)^2 + 9}}{2(2 - \beta)}, & 1 < \beta < 2. \end{cases} \tag{5.11}$$

График функции $x^*(\beta)$ показан на рис. 5.1. Видно, что $x^* \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 2$. При $\beta = 1$ функция $x^*(\beta)$ имеет точку возврата с вертикальной касательной.

Рис. 5.1. Функция $x^*(\beta)$

В соответствии с формулой (3.10) изучим диапазон изменения функции $f(x) = z^2/(xy^2)$. Как следует из первого уравнения системы (5.7) справедливо равенство

$$\varphi = \frac{z}{y} = \frac{z(\beta x - 1)}{2x} + 1 \rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\beta(x^2 - 1)\varphi}{x(\beta x - 1)(4z - x + \beta)}$$

Следовательно,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\varphi^2}{x^2} \left[\frac{2\beta(x^2 - 1)}{(\beta x - 1)(4z - x + \beta)} - 1 \right]. \quad (5.12)$$

Таким образом, при $x \rightarrow \infty$ имеем $y \rightarrow 2/\beta$, $z/x \rightarrow 1/2$, $f(x)/x \rightarrow \beta^2/16$.

На рис. 5.2 показаны графики зависимостей $y(x)$ и $z(x)/x$ при $\beta = 0,5$. Наблюдается асимптотика $y(x) \rightarrow 4$, $z(x)/x \rightarrow 0,5$. Из рис. 5.1 можно увидеть, что в данном случае допустимыми будут значения $x > x^* \approx 5,5$.

Рис. 5.3 дает представление о поведении функции $f(x)$ при $\beta = 0,5$. Видим, что при допустимых значениях $x > x^* \approx 5,5$ она монотонно возрастает, а функция $f(x)/x$ медленно стремится к постоянной $1/64$. Кроме того, имеются значения x , при которых функция $f(x)$ меньше единицы. Следовательно, управление типа $(1, -1, 1)$ для сравнительно небольших значений T будет применимо, когда $a < 0$.

На рис. 5.4 изображены графики функций $y(x)$ и $z(x)/x$ при $\beta = 1,5$. В силу симметрии функции $x^*(\beta)$ допустимыми здесь будут, как и в предыдущем случае, значения $x > x^* \approx 5,5$. Наблюдается асимптотика $y \rightarrow 4/3$ и $z/x \rightarrow 1/2$ при $x \rightarrow \infty$.

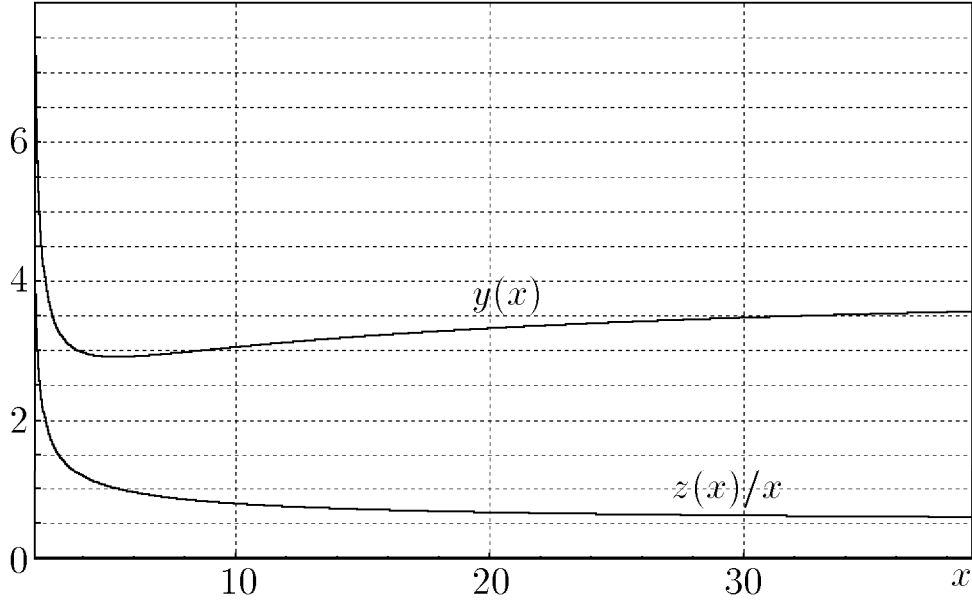


Рис. 5.2. Зависимости $y(x)$ и $z(x)/x$ при $\beta = 0,5$

Рис. 5.5 показывает графики функций $f(x)$ и $f(x)/x$ при $\beta = 1,5$. Видим, что в допустимой области $x > x^* \approx 5,5$ функция $f(x)$ превосходит 1, а значит при $\beta = 1,5$ управление типа $(1, -1, 1)$ обслуживает только достаточно большие положительные значения параметра a . Функция $f(x)/x$ медленно стремится к пределу $9/64$.

Рассмотрим управления типа $(-1, 1, -1)$. Обозначим $\beta' = 2 - \beta$ и будем интегрировать уравнения (3.2) по обращенному времени τ .

5.4. $0 \leq \tau < \tau_1$, $u = -1$. Соответствующее решение имеет вид

$$q_1 = -\frac{M\beta'}{\omega} \operatorname{sh} \omega \tau + M\tau, \quad q_2 = M(\beta' \operatorname{ch} \omega \tau - 1), \quad q_3 = M\tau. \quad (5.13)$$

Как и ранее, для этого решения равенство $q_1 = q_3$ при $\tau \neq 0$ не может быть достигнуто.

5.5. $\tau_1 \leq \tau < \tau_2$, $u = 1$. Решение представляется следующим образом

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= \frac{M}{\omega} [2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_1) - \beta' \operatorname{sh} \omega \tau] + M(2\tau_1 - \tau), \\ q_2(\tau) &= M[\beta' \operatorname{ch} \omega \tau - 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_1) + 1], \\ q_3(\tau) &= M(2\tau_1 - \tau). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Если отказаться от второго переключения, то при $\tau = T$ должно быть обеспечено $q_1(T) = q_3(T)$, $q_2(T) = 0$ или

$$\begin{aligned} \beta' \operatorname{sh} \omega T &= 2 \operatorname{sh} \omega(T - \tau_1), \\ \beta' \operatorname{ch} \omega T + 1 &= 2 \operatorname{ch} \omega(T - \tau_1). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Эти уравнения с точностью до коэффициента β' совпадают с уравнениями (5.4). Поэтому они могут иметь решение лишь при $0 < \beta' < 1$, т.е.

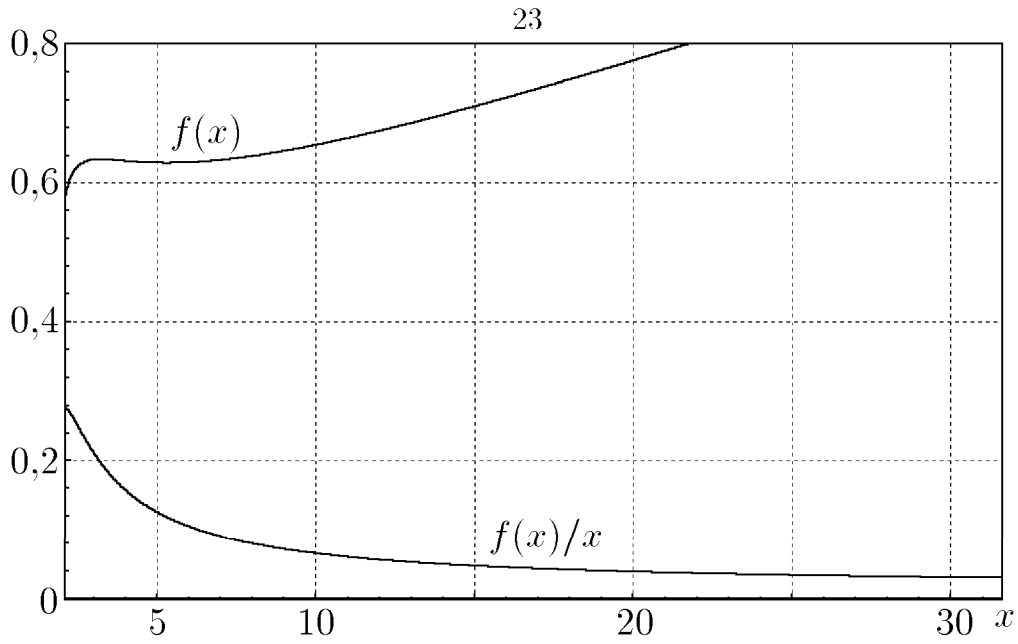


Рис. 5.3. Зависимости $f(x)$ и $f(x)/x$ при $\beta = 0,5$

управление с одним переключением $(1, -1)$ способно обеспечить заданные краевые условия лишь при отрицательных значениях параметра b . Остальные следствия уравнений (5.15) совпадают с полученными для уравнений (5.4) при замене β на β' и a на $-a$.

5.6. $\tau_2 \leq \tau$, $u = -1$.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{M}{\omega} [2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_1) - \beta' \operatorname{sh} \omega \tau - 2 \operatorname{sh} \omega(\tau - \tau_2)] + M[\tau - 2(\tau_2 - \tau_1)], \\ q_2 &= M[-1 + \beta' \operatorname{ch} \omega \tau - 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_1) + 2 \operatorname{ch} \omega(\tau - \tau_2)], \\ q_3 &= M[\tau - 2(\tau_2 - \tau_1)]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Требование $q_1(T) = q_3(T)$ и $q_2(T) = 0$ по-прежнему приводит к системе (5.6), в которой следует заменить β на β' решение которой выражается формулами (5.8) с заменой β на β' . Условие $q_3(T) = a$ приводит к уравнению (3.14), которое в условиях задачи может быть удовлетворено для a , дополнительных по знаку к тем, которые обеспечивались пунктом 5.5. Поскольку справедливо соотношение $\beta + \beta' = 2$ получаем, что имеет место симметрия управлений типа $(1, -1, 1)$ и $(-1, 1, -1)$ для положительных и отрицательных значений параметра b .

Заключение

Основные результаты исследования, выполненного в настоящей работе, состоят в следующем.

1. Найдена точка на стержне, декартовы координаты которой, будучи приняты в качестве лагранжевых координат системы неустойчивый

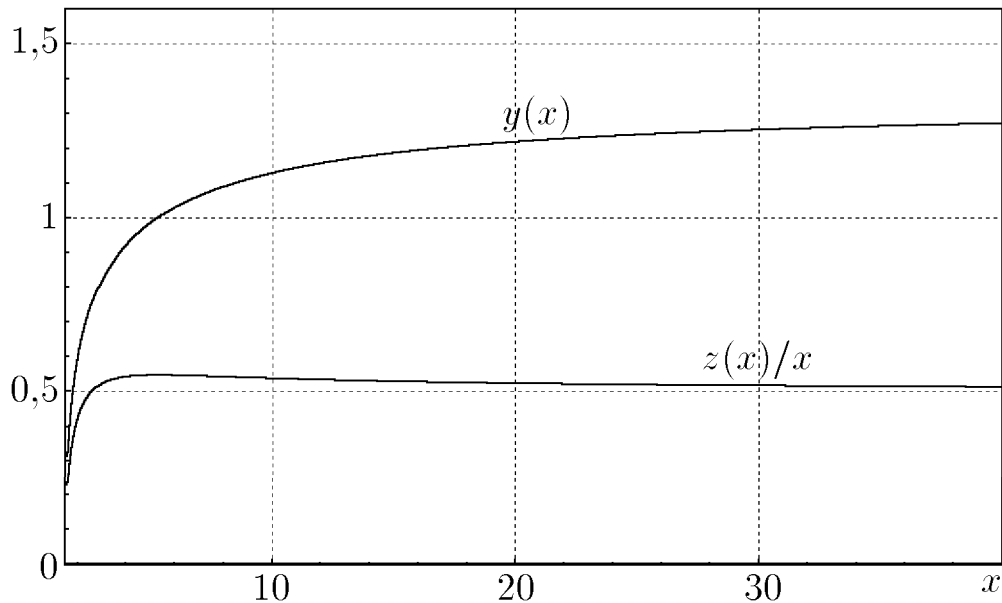


Рис. 5.4. Зависимости $y(x)$ и $z(x)/x$ при $\beta = 1,5$

стержень – подвижная платформа, позволяют существенно упростить нелинейные уравнения движения стержня с учетом управляемого движения платформы и развязать степени свободы системы.

2. В предположении о возможности безынерционного движения платформы с ограниченным модулем скорости, малого отклонения стержня от вертикали и отсутствии проскальзывания в точке опоры показано, что задача о быстродействии перемещения стержня при фиксированных граничных условиях решается за счет не более двух перемен знаков предельных значений скорости.

3. Получен программный закон движения стержня в задаче о быстродействии приведения стержня из состояния неустойчивого равновесия в некоторой начальной опорной точке в состояние неустойчивого равновесия в другой заданной точке опоры за счет соответствующего оптимального перемещения платформы. Показано, что для решения этой задачи необходимо и достаточно двух переключений скорости платформы. Найдены конечные формулы для расчета времени быстродействия и моментов переключения в зависимости от величины требуемого конечного перемещения точки опоры. Отмечена кососимметричность оптимального решения относительно середины процесса быстродействия. Показано, что отклонение стержня от вертикали находится в ограниченных пределах и прямо пропорционально величине предельной скорости платформы.

4. Найден программный закон движения в задаче о быстродействии из неустойчивого состояния равновесия стержня в другое состояние с измененной опорной точкой и с ненулевой конечной поступательной

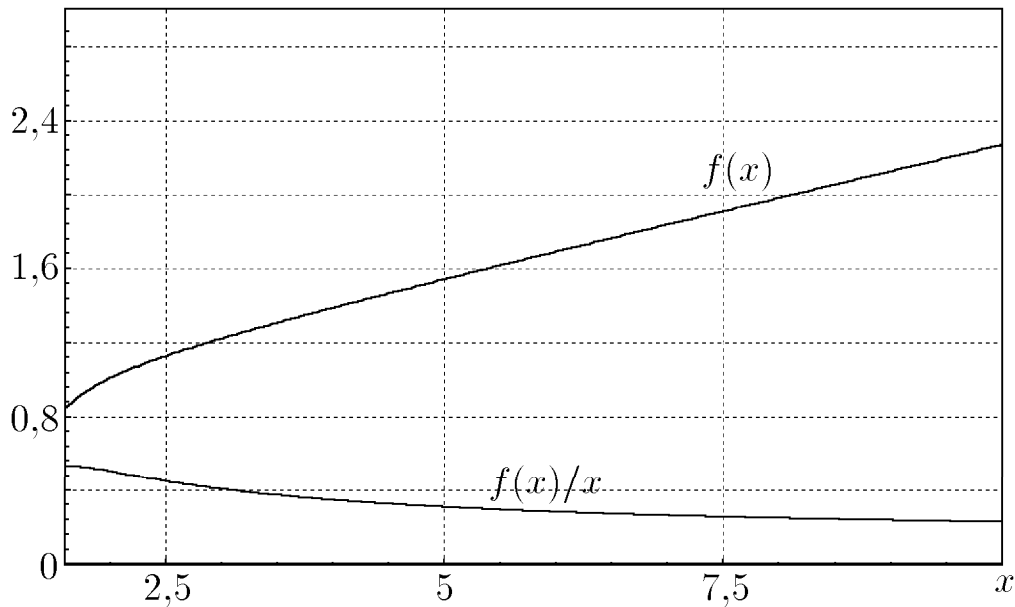


Рис. 5.5. Зависимости $f(x)$ и $f(x)/x$ при $\beta = 1,5$

скоростью. Показано, что в зависимости от величины конечной скорости существует единственное предельное значение координаты переноса точки опоры, при котором оптимальным будет одноразовое переключение управления. Для остальных допустимых значений этой координаты оптимальным будет двухразовое переключение. Найдены конечные формулы для расчета времени быстрогодействия и моментов переключения в зависимости от заданного допустимого перемещения точки опоры.

5. Было выполнено компьютерное моделирование для задачи о переводе стержня из начального состояния в удаленное состояние равновесия при условии, что точка опоры стержня не может мгновенно изменить направление скорости и может проскальзывать относительно платформы. Предложен метод введения поправок в расчетные формулы, позволяющий компенсировать влияние упрощающих предположений. Компьютерное моделирование подтвердило работоспособность развитого метода решения рассмотренной задачи быстрогодействия.

Литература

1. Stephenson A. On a New Type of Dynamical Stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, Vol.52, No.8, Part II, 1908.—p. 1-10.
2. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, т.21, вып.5, 1951.—с. 588-597.

3. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибрации. Доклады АН СССР, т. 110, № 3, 1956. — с. 345-347.
4. Åström K.J., Block D.J., Spong M.W. The Reaction Wheel Pendulum. www.prairienet.org/msu/, 2001.—111 p.
5. Охоцимский Д.Е., Гришин А.А., Ленский А.В., Панин Д.А., Формальский А.М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник. Известия РАН, Теория и системы управления, № 5, 2002.—с.
6. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом. ПММ т. 68, № 4, 2005, с. 569
7. Колесников А.А., Медведев М.Ю. Современные методы синтеза систем управления. учебное пособие. Таганрог: из-во ТРТУ, 2003, 128 с.
8. <http://matlab.krasu.ru/fuzzylogic/book2/4/slcp.asp.htm>
9. <http://www.segway.com>
10. Черноусько Ф.Л. Оптимальное перемещение маятника. ПММ, т. 39, вып. 5, 1975. — с. 806-816.
11. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980. — 348 с.
12. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд., пераб. и дополн.—М.: Изд-во МГУ, 2000.—719 с. ISBN 5-211-04244-1
13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1961. — 391 с.
14. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением: Учебное пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 376 с. ISBN 5-9221-0401-2.
15. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли// Успехи физических наук. 1957. Т. 63. № 1а. С. 5-32.
16. Голубев Ю.Ф. Механические системы с сервосвязями.—М.: Наука. ПММ, т. 65 вып.2, 2001.—с. 211-224.
17. <http://www.umlab.ru>.