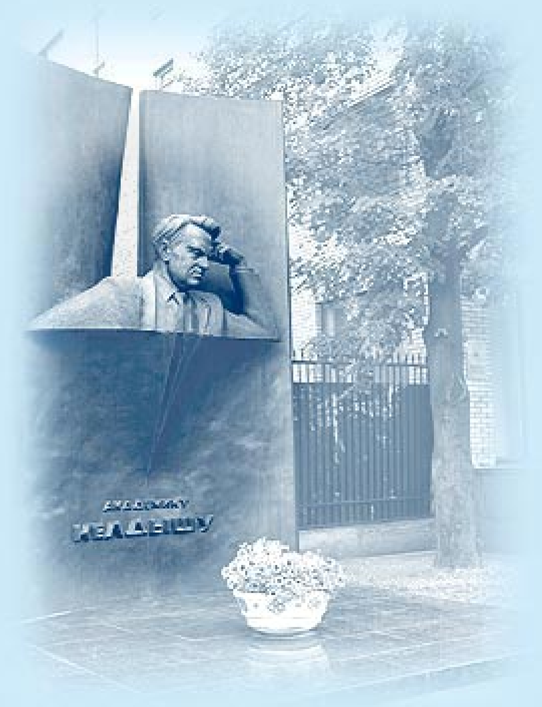

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов,
Д. Н. Туляков

Трехлистные римановы поверхности рода 0 с фиксированными проекциями точек ветвления

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША

А. И. АПТЕКАРЕВ, В. Г. ЛЫСОВ, Д. Н. ТУЛЯКОВ

ТРЕХЛИСТНЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ РОДА 0 С ФИКСИРОВАННЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ

МОСКВА, 2007 г.

Аптекарев А. И., Лысов В. Г., Туляков Д. Н.

Трехлистные римановы поверхности рода 0 с фиксированными проекциями точек ветвления. [1]

Аннотация

Предложены конструктивные процедуры нахождения уравнений для алгебраических функций 3-го порядка, рода 0, с фиксированными проекциями точек ветвления. Обнаружено, что существует четыре типа римановых поверхностей для этих функций, отличающиеся группами перестановок листов в точках ветвления. По коэффициентам уравнений строятся экстремальные разрезы этих римановых поверхностей. Эти кривые являются притягивающими множествами для полюсов в задачах аппроксимации Эрмита – Паде.

Aptekarev A. I., Lysov V. G., Tulyakov D. N.

Three-sheeted Riemann surfaces of genus 0 with fixed projections of the branch points.

Abstract

New constructive procedures for determination of the equations for the algebraic functions of the third order and of genus zero are proposed. We discovered that there exist four types of the Riemann surfaces for these functions, which are distinguished by the groups of permutations of the sheets in the branch points. Using the coefficients of the equations we compute the extremal cuts of the Riemann surfaces. These cuts are the attractive sets for the poles of the Hermite – Pade approximants.

[1] Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой i1 ОМН РАН, грантами РФФИ-05-01-00522, РФФИ-05-01-00697 и ИНТАС-03-51-6637

1 Постановка задачи.

Пусть $\mathcal{R}$ — трехлистная риманова поверхность, то есть комплексная алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$. Обозначим $B \subset \mathcal{R}$ — множество ее точек ветвления, а $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}_z$ — проекцию на z-ось. Фиксируем множество из четырех точек на комплексной плоскости:

$$A := \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}_z \,. \tag{1}$$

Требуется с помощью конструктивной процедуры описать трехлистные поверхности $\mathcal{R}$, для которых выполнены два условия:

$$\begin{cases} \mathrm{genus}(\mathcal{R}) = 0; \\ \pi(B) = A. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что по формуле Римана – Гурвица множество B также состоит из четырех точек:

$$B = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4\} \subset \mathcal{R}.$$

Пусть поверхность $\mathcal{R}$ удовлетворяет условиям (2). Фиксируем нумерацию трех прообразов окрестности ∞ при отображении π:

$$\infty^{(j)} \in \mathcal{R}, \quad \pi(\infty^{(j)}) = \infty, \quad j = 0, 1, 2.$$

На поверхности $\mathcal{R}$ определим рациональную функцию Φ, имеющую дивизор

$$\frac{(\infty^{(0)})^2}{\infty^{(1)} \times \infty^{(2)}} \,,$$

т. е.

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0 \zeta^2} + \cdots\,, \quad \zeta \to \infty^{(0)}, \\ \dfrac{\zeta}{C_j} + \cdots\,, \qquad \zeta \to \infty^{(j)},\ j = 1, 2, \end{cases} \tag{3}$$

и некоторую нормировку

$$(\Phi_0 \Phi_1 \Phi_2)(\infty) = C, \quad \Phi_j(z) := \Phi(\pi_j^{-1}(z)), \quad j = 0, 1, 2.$$

Требуется построить множество

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |\Phi_j(z)| = |\Phi_k(z)|, j \neq k, j, k = 0, 1, 2\}. \tag{4}$$

Задача (1) $\to$ (2) мотивирована приложениями к теории рациональных аппроксимаций Эрмита – Паде (см. [1]). Алгебраическая функция $\Phi(z)$ (см. (3)) описывает главный член асимптотик этих аппроксимаций, множество Γ (см. (4)) содержит предельные распределения полюсов и интерполяционных точек. Ранее, задача нахождения уравнения для функции Φ рассматривалась в [2].

2 Конформное отображение римановой поверхности.

Пусть $\varphi : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ есть конформное отображение римановой поверхности, удовлетворяющей условиям (2), на комплексную сферу, а $\pi : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{C}}_z$ — проекция поверхности на z-плоскость. Тогда функция $R := \pi \circ \varphi^{-1}$ является рациональной функцией третьего порядка, т. е. имеет вид $R(w) = \frac{P_3(w)}{Q_3(w)}$. Рассмотрим частный случай, когда множество A имеет вид:

$$A = \{0, 1, y, \infty\}.$$

Упорядочим точки ветвления $\mathcal{P}_j$ следующим образом:

$$\pi(\mathcal{P}_1) = 0, \pi(\mathcal{P}_2) = 1, \pi(\mathcal{P}_3) = y, \pi(\mathcal{P}_4) = \infty,$$

С точностью до дробно-линейных преобразований комплексной сферы можно считать, что функция φ переводит точки $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_4$ соответственно в $0, 1$ и ∞. Обозначим $x := \varphi(\mathcal{P}_3)$. Таким образом,

$$\varphi(\mathcal{P}_1) = 0, \varphi(\mathcal{P}_2) = 1, \varphi(\mathcal{P}_3) = x, \varphi(\mathcal{P}_4) = \infty,$$

Сначала найдем функцию R в этом частном случае.

2.1 Частный случай.

Функция R принимает критические значения 0 и ∞ соответственно в точках 0 и ∞. Поэтому

$$R(w) = \lambda w^2 \frac{w - \alpha}{w - \beta}.$$

Далее,

$$R'(1) = R'(x) = 0,$$
$$R(1) = 1,\ R(x) = y\,.$$

Условие $R' = 0$ эквивалентно $2w^2 - (\alpha + 3\beta)w + 2\alpha\beta = 0$. Корнями этого уравнения являются числа 1 и x. По теореме Виета,

$$x = \alpha\beta, \quad x + 1 = \frac{\alpha + 3\beta}{2}.$$

Отсюда, $(2\alpha - 3)(2\beta - 1) = -1$. Положим $\alpha = t + 1$, тогда

$$\beta = \frac{t - 1}{2t - 1} \quad \text{и} \quad x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}.$$

Так как $R(1) = 1$, то $\lambda = \frac{1-\beta}{1-\alpha}$. Отсюда,

$$R(w) = \frac{w^2(w + t - 2)}{(2t - 1)w - t}. \tag{5}$$

Переменную y выразим из условия $R(x) = y$:

$$y = -\frac{t(t-2)^3}{(2t-1)^3}. \tag{6}$$

Таким образом, по заданному y находим четыре решения уравнения (6) :

$$t^4 + (8y-6)t^3 + (12-12y)t^2 + (6y-8)t - y = 0, \tag{7}$$

подставляя которые в (5), получим 4 римановы поверхности, решающие задачу (1) $\to$ (2) в специальном случае $A = \{0, 1, y, \infty\}$.

Заметим, что такой выбор t в качестве параметра функции $R(w)$ обладает следующим свойством. При автоморфизмах сферы $\overline{\mathbb{C}}_z$, переводящих множество $\{0, 1, \infty\}$ в себя, точка y перейдет в одну из точек: $y, 1-y$, $\frac{1}{y}, \frac{1}{1-y}, \frac{1-y}{y}, \frac{y}{1-y}$. Параметр t преобразуется точно также, то есть t перейдет соответственно в $t, 1-t, \frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}, \frac{1-t}{t}, \frac{t}{1-t}$.

2.2 Решение задачи в общем случае.

В случае произвольного множества $A = \{a, b, c, d\}$, рассмотрим дробно-линейное преобразование, переводящее точки a, b, d соответственно в точки $0, 1, \infty$:

$$\tilde{z} = \frac{z-a}{b-a}\,\frac{d-b}{d-z}. \tag{8}$$

Положим, значение y равным образу точки c:

$$y = \frac{c-a}{b-a}\,\frac{d-b}{d-c}. \tag{9}$$

По формуле (5), в координатах $\tilde{z}$ искомая функция имеет вид

$$\tilde{z} = \frac{w^2(w+t-2)}{(2t-1)w-t},$$

где t зависит от y (см. (9)). Переходя к координате z, обращая уравнение (8), получаем:

$$z = R(w) = \frac{d(a-b)w^3 + (t-2)d(a-b)w^2 + (2t-1)a(b-d)w - ta(b-d)}{(a-b)w^3 + (t-2)(a-b)w^2 + (2t-1)(b-d)w - t(b-d)}, \tag{10}$$

где t есть корень уравнения (7) :

$$t^4 + (8y-6)t^3 + (12-12y)t^2 + (6y-8)t - y = 0,$$

с подстановкой (9). Таким образом (10) дает конформное отображение на $\overline{\mathbb{C}}$ всех 4-х римановых поверхностей рода 0 с точками ветвления над $A = \{a, b, c, d\}$.

2.3 Классификация поверхностей.

Докажем, что существуют ровно 4 топологически неэквивалентных поверхности (рода 0 по формуле Римана – Гурвица) с тремя листами и точками ветвления порядка 2 над 4 заданными фиксированными точками комплексной плоскости, если при деформации запрещено сдвигать проекции точек ветвления.

Пусть $A = \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}$ — проекции точек ветвления (они попарно различны). Выберем точку O, отличную от a, b, c, d, соединим эту точку с каждой из точек a, b, c, d гладкими путями с условиями:
1) пути несамопересекающиеся;
2) пути к разным точкам не имеют общих точек, кроме точки O;
3) в точке O направляющие векторы путей различны и при обходе точки O пути пересекаются в заданном порядке: путь к a, затем путь к b, далее к c, далее к d.

Фиксируем эту четвёрку гладких путей, проводим через них разрезы комплексной плоскости, и определяем листы как связные компоненты прообраза комплексной плоскости с выброшенными разрезами при проектировании. Теперь фиксируем некоторую нумерацию листов элементами набора $\{1, 2, 3\}$. Тогда каждой точке $X \in A$ соответствует элемент группы S_3 — перестановка, соответствующая смене листов при обходе вокруг этой точки (по любому пути, обходящему точку X 1 раз в положительном направлении, пересекающему разрез OX и не пересекающему остальные разрезы). Поскольку мы фиксировали порядок точек a, b, c, d , но нам не важна нумерация листов, то мы можем охарактеризовать риманову поверхность классом эквивалентности упорядоченных наборов 4 перестановок из группы S_3. Допустимыми являются наборы $[g_1, g_2, g_3, g_4]$ со следующими свойствами:

1) для каждого $i = \overline{1..4}$ $\;g_i$ — транспозиция (поскольку все точки ветвления 2 порядка);

2) $g_1 g_2 g_3 g_4 = e$ (поскольку обход вокруг точки O соответствует тождественной перестановке листов);

3) группа, порождённая множеством $\{g_i | \, i = \overline{1..4}\}$, транзитивна на множестве $\{1, 2, 3\}$ (поскольку риманова поверхность связна).

Наборы эквивалентны, если один из них получается из другого покомпонентным преобразованием вида $g_i \to h g_i h^{-1}$, где $h \in S_3$ одно и то же для всех i.

Теперь подсчитаем число таких классов наборов. Заметим, что $g_4 = g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1}$ однозначно определяется по g_1, g_2, g_3. При этом поскольку

g_1, g_2, g_3 транспозиции, то g_4 — нечётная перестановка, а в S_3 все нечётные перестановки являются транспозициями.

Рассмотрим представителей из классов эквивалентностей наборов, в которых такие нумерации листов, что $g_1 = (12)$. Таких нумераций всегда 2, поэтому из каждого класса у нас будет 2 представителя. Тогда для транзитивности группы необходимо и достаточно, чтобы $\{g_2, g_3\} \cap \{(13), (23)\} \neq \emptyset$. Остальные условия будут выполнены автоматически. Выписывая все варианты, получаем 4 пары эквивалентных представителей:

$$\begin{matrix} [(12), (12), (13), (13)] \\ [(12), (12), (23), (23)] \end{matrix}, \quad \begin{matrix} [(12), (13), (12), (23)] \\ [(12), (23), (12), (13)] \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} [(12), (13), (13), (12)] \\ [(12), (23), (23), (12)] \end{matrix}, \quad \begin{matrix} [(12), (13), (23), (13)] \\ [(12), (23), (13), (23)] \end{matrix},$$

соответствующих 4 видам римановых поверхностей рода ноль, с фиксированными проекциями точек ветвления.

3 Алгебраические функции, связанные с $\mathcal{R}$.

3.1 Униформизации рациональных функций на $\mathcal{R}$.

Найденная параметризация римановой поверхности $\mathcal{R}$ (см. (10), (7), (9)) униформизует алгебраическую функцию $\Phi(z)$, заданную условиями (3). Действительно, фиксируем нумерацию ветвей функции $w(z)$ (см. (10)) в окрестности точки $z = \infty$. Тогда $\Phi(R(w))$ является рациональной функцией с двойным нулем в точке

$$w(\infty^{(0)}) =: W_0$$

и простыми полюсами в точках

$$w(\infty^{(1)}) =: W_1 \quad \text{и} \quad w(\infty^{(2)}) =: W_2,$$

где W_0, W_1, W_2 — прообразы бесконечности функции $R(w)$, удовлетворяют (см. (10)) уравнению:

$$(a-b)W^3 + (t-2)(a-b)W^2 + (2t-1)(b-d)W - t(b-d). \qquad (11)$$

Таким образом, с точностью до нормирующего множителя

$$\begin{cases} \Phi = \mathrm{const}\, \frac{(w-W_0)^2}{(w-W_1)(w-W_2)}, \\ z = R(w). \end{cases} \qquad (12)$$

Далее мы принимаем величину const равной единице.

Наряду с функцией Φ нас будет интересовать её логарифмическая производная

$$h(z) := \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,. \tag{13}$$

Функция h имеет три ветви h_0, h_1, h_2, которые мы фиксируем в бесконечности как

$$\begin{cases} h_0(z) = -\dfrac{2}{z} + \cdots\,, & \\ h_j(z) = \dfrac{1}{z} + \cdots\,, \qquad j = 1, 2. & \end{cases} \qquad z \to \infty. \tag{14}$$

Исходя из (12), функция h униформизуется следующим образом:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{R'(w)}[\frac{2}{(w-W_0)} - \frac{1}{(w-W_1)} - \frac{1}{(w-W_2)}], \\ z = R(w). \end{cases} \tag{15}$$

3.2 Уравнение для функции Φ.

Для получения коэффициентов уравнения функции Φ мы выразим симметрические функции его корней. Эти симметрические функции (ввиду (12)) выражаются через $\{W_j\}_{j=0,1,2}$ — корни уравнения (11) и симметрические функции корней уравнения для функции $w(z)$, которое имеет вид (см. (10)):

$$U(w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} w^3 + (t-2)w^2 + \frac{b-d}{a-b}\,\frac{z-a}{z-d}\,\big((2t-1)w - t\big) = 0 \tag{16}$$

Обозначая

$$\begin{cases} s_0 := w_0 w_1 w_2 = \frac{b-d}{a-b}\ \frac{z-a}{z-d}\ t; \\ s_1 := w_0 w_1 + w_1 w_2 + w_2 w_0 = \frac{b-d}{a-b}\ \frac{z-a}{z-d}\ (2t-1); \\ s_2 := w_0 + w_1 + w_2 = -(t-2), \end{cases} \tag{17}$$

получим

$$\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{N_2}{D_2}, \tag{18}$$

где

$$\begin{gathered}N_2 = 3s_0^2 - 2(W_0 + W_1 + W_2)s_0 s_1 + (2W_1W_2 + W_0^2)(s_1^2 - 2s_0s_2) + \\ + (W_1 + W_2)(W_1 + W_2 + 4W_0)s_0s_2 - 6W_0(W_1 + W_2)^2 s_0 - \\ - (2W_0W_1W_2 - W_0^2W_0 - W_0^2W_0 - W_0^2W_0 - W_0^2W_0)(s_1s_2 - 3s_0) + \\ + W_0(W_1 + W_2)(W_0W_1 + 4W_1W_2 + W_0W_2)s_1 + \\ + W_1W_2(W_1W_2 + 2W_0^2)(s_2^2 - 2s_1) - \\ - 2W_0W_1W_2(W_0W_1 + W_1W_2 + W_0W_2)s_2 + 3(W_0W_1W_2)^2 \quad ,\end{gathered}$$

и (с учетом (16))

$$\begin{gathered}D_2 = (W_1^3 - s_2W_1^2 + s_1W_1 - s_0)(W_2^3 - s_2W_2^2 + s_1W_2 - s_0) = \\ = \left(\frac{(a-d)(b-d)}{(a-b)(z-d)}\right)^2 ((2t-1)W_1 - t)((2t-1)W_2 - t)\,.\end{gathered}$$

Аналогично,

$$\Phi_0\Phi_1 + \Phi_1\Phi_2 + \Phi_2\Phi_0 = \frac{N_1}{D_2}, \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered}N_1 = 3s_0^2 - (4W_0 + W_1 + W_2)s_0s_1 + (W_1W_2 + 2W_0^2)(s_1^2 - 2s_0s_2) + \\ + 4W_0(W_1 + W_2 + W_0)s_0s_2 - 12W_0^2(W_1 + W_2)s_0 - \\ - W_0(2W_0^2 + W_0W_1 + 2W_1W_2 + W_0W_2)(s_1s_2 - 3s_0) + \\ + 4W_0^2(W_0W_1 + W_1W_2 + W_0W_2)s_1 \; + \; W_0^2(2W_1W_2 + W_0^2)(s_2^2 - 2s_1) - \\ - W_0^3(W_0W_1 + 4W_1W_2 + W_0W_2)s_2 + 3W_0^4W_1W_2 \quad .\end{gathered}$$

Наконец,

$$\begin{gathered}\Phi_0\Phi_1\Phi_2 = \frac{(W_0^3 - s_2W_0^2 + s_2W_0 - s_0)^2}{(W_1^3 - s_2W_1^2 + s_2W_1 - s_0)(W_1^3 - s_2W_1^2 + s_2W_1 - s_0)} = \\ = \frac{((2t-1)W_0 - t)^2}{((2t-1)W_1 - t)((2t-1)W_2 - t)}\,. \end{gathered} \tag{20}$$

Итак, алгебраическая функция удовлетворяет уравнению

$$\Phi^3(z)+q_1(z)\Phi^2(z)+q_2(z)\Phi(z)+q_0=0, \tag{21}$$

где коэффициенты $q_1(z), q_2(z), q_0$ определены в (18), (19), (20) с подстановкой (17).

Выражения для коэффициентов уравнения (21) допускают дальнейшее упрощение. Величины $W_k := w_k(\infty)$ являются корнями знаменателя Q_3 в (10), поэтому

$$\prod_{k=0}^{2}(w-w_k(\infty))=\frac{Q_3(w)}{a-b}=w^3+(t-2)w^2+\frac{b-d}{a-b}\big((2t-1)w-t\big). \tag{22}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi_i=\frac{(w_i-W_0)^2}{(w_i-W_1)(w_i-W_2)}&=\frac{(w_i-W_0)^3}{w_i^3+(t-2)w_i^2+\frac{b-d}{a-b}\big((2t-1)w_i-t\big)}=\\ =\frac{(w_i-W_0)^3}{\frac{b-d}{a-b}\big(1-\frac{z-a}{z-d}\big)\big((2t-1)w_i-t\big)}&=\frac{(a-b)}{(b-d)(a-d)}\,\frac{z-d}{2t-1}\,\frac{(w_i-W_0)^3}{w_i-\frac{t}{2t-1}}\end{aligned} \tag{23}$$

Теперь мы можем получить выражения для коэффициентов уравнения (21) через входные данные (17) и один параметр W_0. Учитывая, что w_i являются корнями $U(w)$ (см. (16)), а W_0 является корнем $Q_3(w)$ (см. (22)), подсчитаем $\Phi_0\Phi_1\Phi_2$.

$$\Phi_0\Phi_1\Phi_2=\left[\frac{(a-b)}{(b-d)(a-d)}\,\frac{z-d}{2t-1}\right]^3\frac{\big[-U(W_0)\big]^3}{-U\big(\frac{t}{2t-1}\big)}=\frac{-\big((2t-1)W_0-t\big)^3}{2t^2(t-1)^2}$$

Аналогично, из (23) находим остальные симметрические функции от Φ_i. Для вычисления

$$\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2=\frac{(a-b)}{(b-d)(a-d)}\,\frac{z-d}{2t-1}\sum_{i=0}^{2}\frac{(w_i-W_0)^3}{w_i-\frac{t}{2t-1}}\,,$$

упростим следующую сумму:

$$\sum_{i=0}^{2}\frac{(w_i{-}W_0)^3}{w_i-\frac{t}{2t-1}}=\sum_{i=0}^{2}\frac{(w_i{-}W_0)^3-(\frac{t}{2t-1}{-}W_0)^3}{w_i-\frac{t}{2t-1}}+\sum_{i=0}^{2}\frac{(\frac{t}{2t-1}{-}W_0)^3}{w_i-\frac{t}{2t-1}}=$$
$$=\sum_{i=0}^{2}\Big[w_i^2+\Big(\frac{t}{2t{-}1}{-}3W_0\Big)w_i+\Big(\frac{t}{2t{-}1}\Big)^2-3\Big(\frac{t}{2t{-}1}\Big)W_0+3W_0^2\Big]+$$
$$+\frac{-U'\big(\frac{t}{2t-1}\big)}{U\big(\frac{t}{2t-1}\big)}\Big(\frac{t}{2t{-}1}{-}W_0\Big)^3=(t{-}2)^2{-}2\frac{b{-}d}{a{-}b}\,\frac{z{-}a}{z{-}d}(2t{-}1){-}(t{-}2)\Big(\frac{t}{2t{-}1}{-}3W_0\Big)+$$
$$+\Big(W_0{-}\frac{t}{2t{-}1}\Big)^3\Big[\frac{b{-}d}{a{-}b}\,\frac{z{-}a}{z{-}d}\,\frac{(2t{-}1)^4}{2t^2(t{-}1)^2}+\frac{(2t{-}1)(4t^2{-}7t{+}4)}{2t(t{-}1)^2}\Big]+$$
$$+3\Big[\Big(\frac{t}{2t{-}1}\Big)^2{-}3\Big(\frac{t}{2t{-}1}\Big)W_0{+}3W_0^2\Big]=\frac{(2t{-}1)W_0{-}t}{2t^2(t{-}1)^2}\Big[4t^3{-}7t^2{+}4t{+}\frac{z{-}a}{a{-}b}(2t{-}1)^3\Big]+$$
$$+\frac{(t{+}1)^2}{2t^2(t{-}1)}\,\frac{z{-}a}{a{-}d}\big(2(2t{-}1)W_0^2{-}(5t{-}1)W_0{+}t(t{+}1)\big)+$$
$$\frac{(t{-}2)^2}{2t(t{-}1)^2}\,\frac{z{-}b}{b{-}d}\,\big(2(2t{-}1)W_0^2{-}3tW_0{-}t(t{-}2)\big)$$

Для вычисления

$$\Phi_0\Phi_1{+}\Phi_1\Phi_2{+}\Phi_2\Phi_0=\Phi_0\Phi_1\Phi_2\Big(\frac{1}{\Phi_0}{+}\frac{1}{\Phi_1}{+}\frac{1}{\Phi_2}\Big)=\frac{(b{-}d)(a{-}d)}{(a{-}b)}\,\frac{2t{-}1}{z{-}d}\sum_{i=0}^{2}\frac{w_i-\frac{t}{2t-1}}{(w_i{-}W_0)^3},$$

нужно упростить следующую сумму

$$\sum_{i=0}^{2}\frac{w_i-\frac{t}{2t-1}}{(w_i{-}W_0)^3}=\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{(w_i{-}W_0)^2}+\sum_{i=0}^{2}\frac{W_0-\frac{t}{2t-1}}{(w_i{-}W_0)^3}=\Big(\frac{-U'(w)}{U(w)}\Big)'\Big|_{w=W_0}+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(W_0{-}\frac{t}{2t{-}1}\Big)\Big(\frac{-U'(w)}{U(w)}\Big)''\Big|_{w=W_0}=\frac{z{-}d}{a{-}d}\,\frac{a{-}b}{b{-}d}\,\frac{9W_0+\frac{4t^2-13t+4}{2t-1}}{(2t{-}1)W_0{-}t}+$$
$$+\frac{z{-}d}{a{-}d}\,\frac{a{-}b}{b{-}d}\,\frac{3(3W_0{+}t{-}2)}{2t{-}1}\,\frac{3W_0^2{+}2(t{-}2)W_0+(2t{-}1)\frac{z-a}{z-d}\,\frac{b-d}{a-b}}{W_0^3{+}(t{-}2)W_0^2+\frac{z-a}{z-d}\frac{b-d}{a-b}\big((2t{-}1)W_0{-}t\big)}+$$
$$+\frac{z{-}d}{a{-}d}\Big(\frac{a{-}b}{b{-}d}(2t{-}1)W_0(3W_0{+}2t{+}4){+}1\Big)\Big[\frac{3W_0^2{+}2(t{-}2)W_0+(2t{-}1)\frac{z-a}{z-d}\,\frac{b-d}{a-b}}{W_0^3{+}(t{-}2)W_0^2+\frac{z-a}{z-d}\frac{b-d}{a-b}\big((2t{-}1)W_0{-}t\big)}\Big]^2.$$

3.3 Уравнение для функции $h=\Phi'/\Phi$.

Рассмотрим уравнение для функции h, равной логарифмической производной функции Φ (см. (13), (14), (15)). Она определена на той же поверхности $\mathcal{R}$, что и Φ и является решением алгебраического уравнения вида:

$$h^3-\frac{3P_2(z)}{\Pi_4(z)}h+\frac{2P_1(z)}{\Pi_4(z)}=0, \qquad (24)$$

где

$$\Pi_4(z) = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d),$$
$$P_2(z) = z^2 + p_1 z + p_0, \quad P_1(z) = z - \tilde{c}.$$

Дискриминант этого уравнения имеет вид

$$\Delta = \frac{P_2^3 - P_1^2 \Pi_4}{\Pi_4^3} \tag{25}$$

Старшие коэффициенты полиномов P_1, P_2, Π_4 равны единице, поэтому степень числителя Δ не превосходит 5. Так как h имеет ветвления только в точках a, b, c, d, то все корни дискриминанта должны иметь четную кратность. Таким образом,

$$P_2^3 - P_1^2 \Pi_4 = (d_2 z^2 + d_1 z + d_0)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях z, получим систему 6 алгебраических уравнений относительно 6 неизвестных $\tilde{c}, p_0, p_1, d_0, d_1, d_2$:

$$\begin{cases} 3p_1 + 2\tilde{c} - \alpha_3 = 0, \\ 3p_1^2 + 3p_0 - \tilde{c}^2 + 2\alpha_3 \tilde{c} - \alpha_2 = d_2^2, \\ p_1^3 + 6p_0 p_1 - \alpha_3 \tilde{c}^2 + 2\alpha_2 \tilde{c} - \alpha_1 = 2d_1 d_2, \\ 3p_0 p_1^2 + 3p_0^2 - \alpha_2 \tilde{c}^2 + 2\alpha_1 \tilde{c} - \alpha_0 = d_1^2 + 2d_0 d_2, \\ 3p_0^2 p_1 - \alpha_1 \tilde{c}^2 + 2\alpha_0 \tilde{c} = 2d_0 d_1, \\ p_0^3 - \alpha_0 \tilde{c}^2 = d_0^2, \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — симметрические функции исходных данных a, b, c, d:

$$\Pi_4(z) =: z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0.$$

В общем положении эта система имеет 18 различных решений, которые могут быть найдены численно. 12 из этих решений соответствуют четырем найденным поверхностям и трем вариантам нумерации листов. Остальные 6 соответствуют положительному роду функции h, то есть случаю, когда один из кратных нулей дискриминанта (равный $\tilde{c}$) является кубической точкой ветвления h.

3.4 Уравнения для функций Φ и h в координатах связанных с дивизором дискриминанта.

Рассмотрим класс алгебраических кривых (24)

$$h^3 - \frac{3P_2(z)}{\Pi_4(z)} h + \frac{2P_1(z)}{\Pi_4(z)} = 0,$$

у которых дискриминант (25)

$$\Delta = \frac{\widetilde{\Delta}}{\Pi_4^3(z)}, \quad \widetilde{\Delta} = P_2^3 - \Pi_4 P_1^2,$$

имеет нули только четной кратности. Для этого класса, вместо проекций точек ветвления $A = \{a, b, c, d\}$, можно использовать другие четыре параметра $\widetilde{A} = \{k, p, s, \tilde{c}\}$, с помощью которых коэффициенты уравнения (24) определяются следующим образом:

$$P_1(z) := (z - \tilde{c}), \quad P_2(z) := P_1^2(z) + 2pP_1(z) + s^2.$$

Полагая также

$$\widetilde{\Delta}(z) = (kP_1^2(z) + 3psP_1(z) + s^3)^2,$$

получаем, что

$$\Pi_4(z) = \frac{P_2^3(z) - \widetilde{\Delta}(z)}{P_1^2(z)}$$

оказывается полиномом переменной z степени 4 :

$$\Pi_4 = P_1^4 + 6pP_1^3 + (3s^2 + 12p^2 - k^2)P_1^2 + (8p^3 + 12s^2p - 6psk)P_1 + 3s^4 + 3p^2s^2 - 2s^3k.$$

Тем самым, алгебраическая функция h, определяемая уравнением (24) с этими коэффициентами P_1, P_2, Π_4, имеет дискриминант с нулями четной кратности.

С помощью координат этого класса $\widetilde{A} = \{k, p, s, \tilde{c}\}$, мы также можем выразить коэффициенты уравнения функции Φ (см. (3), (21)):

$$\Phi^3(z) + q_1(z)\Phi^2(z) + q_2(z)\Phi(z) + q_0 = 0,$$

где q_j задаются следующим образом

$$\begin{aligned} q_1(z) &= -6\sqrt{3}pP_1(z) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(k - 2\sqrt{3}p)\kappa_+ + (k + 2\sqrt{3}p)\kappa_-\right], \\ q_2(z) &= -\kappa_+\kappa_-\left(P_1^2(z) + 4pP_1(z) + \frac{9s^2 - 4k^2 + 36p^2}{9}\right), \\ q_0 &= \frac{2\sqrt{3}}{243}(3s - 2k)^2\kappa_+^2\kappa_-^2, \end{aligned} \tag{26}$$

здесь $P_1(z) = z - \tilde{c}$ и

$$\kappa_\pm = 3s + k \pm 3\sqrt{3}p.$$

4 Экстремальные разрезы.

4.1 Алгебраическая параметризация множества Γ.

Если нам известны коэффициенты алгебраического уравнения (21) функции Φ, то мы можем получить алгебраическую параметризацию экстремального множества Γ, заданного в (4). Действительно, обозначая

$$J(\nu,z)=-\left(\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}+\frac{\Phi_1(z)}{\Phi_0(z)}-\nu\right)\left(\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_2(z)}+\frac{\Phi_2(z)}{\Phi_0(z)}-\nu\right)\left(\frac{\Phi_1(z)}{\Phi_2(z)}+\frac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)}-\nu\right),$$

видим, что Γ является объединением траекторий корней $z(\nu)$ уравнения

$$J(\nu,z)=0,\qquad \nu\in[-2,2].$$

Так как Φ — алгебраическая функция, то симметрические функции её ветвей суть полиномы:

$$\Phi_0\Phi_1\Phi_2=-q_0,\quad \Phi_0\Phi_1+\Phi_0\Phi_2+\Phi_1\Phi_2=q_2,\quad \Phi_0+\Phi_1+\Phi_2=-q_1.$$

Таким образом, получаем, что множество Γ, определенное в (4), описывается следующим образом:

$$\Gamma=\{z:\ J(\nu,z)=\nu^3+A(z)\nu^2+B(z)\nu+C(z)=0,\nu\in[-2,2]\},\qquad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
A(z) &= \frac{3q_0-q_1(z)q_2(z)}{q_0},\\
B(z) &= \frac{q_0q_1^3(z)+q_2^3(z)-5q_0q_1(z)q_2(z)+3q_0^2}{q_0^2},\qquad (28)\\
C(z) &= \frac{2q_0q_1^3(z)-q_1^2(z)q_2^2(z)+2q_2^3(z)-4q_0q_1(z)q_2(z)+q_0^2}{q_0^2},
\end{aligned}$$

и q_0,q_1,q_2 суть коэффициенты (21) или (26) уравнения для функции Φ.

Ниже на рисунках, приведены примеры множеств Γ, полученных различными способами.

На Рисунках 1 – 4 изображено множество Γ для всех четырех римановых поверхностей с проекциями точек ветвления $A:=\{0,I,2,1.5+1.5I\}$. Каждый из этих рисунков соответствует фиксированной римановой поверхности (т. е. одному и тому же t — фиксированному корню уравнения (7)). На каждом из этих четырех рисунков приведены три варианта множеств Γ, соответствующих различной нумерации листов фиксированной римановой поверхности (т. е. W_0 принимает по очереди значения корней уравнения (11)). Множество Γ на этих рисунках получено с помощью алгебраической параметризации (27), (28), коэффициенты уравнения функции Φ получены методами секции 3.2.

Рис. 1: Риманова поверхность i1. Множество Γ для $\mathcal{R}$ при различных нумерациях листов.

Рис. 2: Риманова поверхность i2. Множество Γ для $\mathcal{R}$ при различных нумерациях листов.

Рис. 3: Риманова поверхность i3. Множество Γ для $\mathcal{R}$ при различных нумерациях листов.

Рис. 4: Риманова поверхность i4. Множество Γ для $\mathcal{R}$ при различных нумерациях листов.

Рис. 5: Множество Г, полюсы и дополнительные интерполяции аппроксимаций Эрмита – Паде.

На Рисунке 5 изображено множество Г для специальных римановых поверхностей с проекциями точек ветвления $A := \{a_1, b_1, a_2, b_2, \}$. Выбор римановой поверхности обусловлен задачей аппроксимаций Эрмита – Паде для двух функций :

$$\ln\left(\frac{z-a_j}{z-b_j}\right) \qquad j = 1, 2\,.$$

Здесь отрезки (a_1, b_1), (a_2, b_2) выбраны параллельными и единичной длины. Полюса аппроксимаций изображены кружочками. При уменьшении расстояния $[Dist]$ между отрезками (a_1, b_1), (a_2, b_2), на рисунке появляются точки дополнительной интерполяции, изображенные квадратиками. Множество Г на этих рисунках получено с помощью алгебраической параметризации (27), (28), коэффициенты уравнения функции Φ получены формулами (27) при $s := -1$; $\quad p := 0$; $\quad k := 1.733,\ 0.76,\ 0.411,\ 0$ $\quad$ (см. секцию 3.4).

Рис. 6: Множество Γ построенное с помощью траекторий $(h_j - h_k)^2(z)dz^2$.

4.2 Множество Γ и траектории квадратичных дифференциалов.

Продемонстрируем ещё один метод конструктивного получения множества экстремальных разрезов с помощью функции h (см.(24)). Множество Γ, на котором равны по модулю различные ветви функции Φ, состоит из траекторий квадратичных дифференциалов вида $(h_j - h_k)^2(z)dz^2$. Действительно, условие $|\Phi_j|/|\Phi_k| = \mathrm{const}$ равносильно $\mathrm{Re}\,[d(\ln \Phi_j/\Phi_k)] = 0$. Последнее равно $\mathrm{Re}\,[(h_j - h_k)(z)dz] = 0$, или, эквивалентно, $(h_j - h_k)^2(z)dz^2 < 0$. Численно решая дифференциальное уравнение

$$\mathrm{Re}\,(h_j - h_k)(z)dx - \mathrm{Im}\,(h_j - h_k)(z)dy = 0, \quad z = x + iy \tag{29}$$

для различных пар j, k и соответствующих начальных данных $z_0 : |\Phi_j(z_0)| = |\Phi_k(z_0)|$ (например, в качестве z_0 можно брать точки из A), находим множество Γ.

На Рисунке 6 приведено одно из множеств Γ, построенное с помощью траекторий дифференциального уравнения (29). При этом, ветви функции h вычислялись по уравнению (24), коэффициенты для которого находились численным решением нелинейной системы алгебраических уравнений (см. секцию 3.3). Множество проекций точек ветвления в этом примере то же, что и в примерах на Рисунках 1 – 4, (т. е. $A := \{0, I, 2, 1.5 + 1.5I\}$, сравни Рис.6 с третьей картинкой Рис.1).

Список литературы

[1] J. Nuttall, *Asymptotics of diagonal Hermite-Pade polynomials*, J. Approx. Theory **42** (1984), no. 4, 299–386.

[2] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, *Asymptotic behavior of an n-th degree root of polynomials of simultaneous orthogonality, and algebraic functions*, Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint (1986), no. 60 (in Russian), (MR 0870267).