О РОЛИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В СТРУКТУРИРОВАНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ.

© *А.В. Колесниченко*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-02-16288; № 06-01-00114)

Конечной целью работы является разработка континуальной теории развитой структурированной турбулентности сдвиговых течений сжимаемой жидкости, которая моделируется суммой двух взаимопроникающих континуумов, из которых первый относится к осредненному полю турбулентного движения, а второй – к турбулентному пространственно-временному хаосу, ассоциированному с мелкозернистым флуктуационным движением. Введение в термогидродинамическое описание подсистемы турбулентного хаоса набора стохастических внутренних координат q_k (типа локально осредненной скорости диссипации турбулентной энергии), характеризующих структуру и временную эволюцию завихренности пульсационного гидродинамического поля, дало возможность получить методами статистической неравновесной термодинамики стохастические дифференциальные уравнения для этих параметров и соответствующие им уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятности перехода. В соответствии с модифицированной теорией подобия Колмогорова [21] считается, что положительные флуктуирующие параметры $q_k(t)$ распределены в стационарном состоянии хаоса по логнормальному закону. В качестве модели силового воздействия шума хаоса на эволюцию случайного процесса $q_k(t)$ используется гауссовский белый шум с нулевой памятью, являющийся идеализацией реального шума вихревого хаоса с очень малой, но все же конечной памятью. Сформулирована общая концепция рождения когерентных структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса, связанная с явлением неравновесных "фазовых" переходов, индуцированных мультипликативным шумом хаоса при увеличении надкритичности. Обсуждается взаимосвязь подобных переходов с процессом самоорганизации турбулентного течения – возникновения упорядоченных "многомолекулярных" образований, обладающих более низкой симметрией, чем исходное состояние. Предпринятое исследование нацелено, в конечном итоге, на совершенствование ряда репрезентативных гидродинамических моделей космических природных сред, включая возникновение галактик и галактических скоплений, рождение звезд из диффузной среды газопылевых облаков, образование аккреционных дисков, последующую аккумуляцию планетных систем и т.п. Оно является продолжением стохастико-термодинамического подхода к синергетическому описанию структурированной турбулентности астро-геофизических систем, развиваемого автором в серии работ [1-3].

THE ROLE OF NONEQUILIBRIUM PHASE TRANSITIONS IN THE STRUCTURIZATION OF HYDRODYNAMIC TURBULENCE.

A.V Kolesnichenko.

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia Academy of Sciences

The aim of this paper is to develop a continual theory of developed structurized turbulence in shear flows in a compressible fluid modeled by a superposition of two mutually penetrating continuums, where the first continuum refers to the averaged field of turbulent motion, and the second, to the turbulent spacetime chaos associated with the fine-grained fluctuation motion. Incorporating into the thermohydrodynamic description of the subsystem of turbulent chaos a set of internal stochastic coordinates $q_k(t)$ (like the locally averaged rate of turbulent energy dissipation), which characterize the structure and temporal evolution of the vorticity of the pulsational hydrodynamic field, has made it possible to use methods of statistical nonequilibrium thermodynamics to derive stochastic differential equations for these parameters and the corresponding Fokker–Planck–Kolmogorov equations for the probability density of transition. In accordance with the modified Kolmogorov similarity theory, positive fluctuating parameters $q_k(t)$ are believed to obey the lognormal distribution in the stationary state of chaos. The Gaussian white noise with zero memory, which provides an idealized description of the real noise of vortex chaos with a very short but still finite memory, is used to model the force effect of the noise of chaos. A general concept of the birth of coherent structures in the thermodynamically open subsystem of turbulent chaos is formulated, which attributes the formation of such structures to the phenomenon of nonequilibrium phase transitions induced by the multiplicative noise of chaos during an increase of supercriticality. The interrelation between such transitions and the process of self-organization–the development of ordered “multimolecular” formations with lower symmetry as compared to that of the initial state–is discussed. The ultimate aim of this study is to refine a number of representative hydrodynamic models of natural space environments, including the formation of galaxies and galactic clusters; the birth of stars from the diffuse medium of gas and dust clouds; the formation of accretion disks and subsequent accumulation of planetary systems, etc. The study continues the stochastically thermodynamic approach to the synergetic description of structurized turbulence in astrogeophysical systems that the author has been developing in a series of previous papers [1-3].

Введение. В работах [1-4] была начата разработка феноменологической макроскопической модели развитой структурированной турбулентности в сжимаемой жидкости с учетом происходящих в ней кооперативных процессов. Для удобства читателя уместно кратко напомнить и резюмировать наиболее существенные особенности развиваемого в них синергетического подхода. Использование концепции двухуровневого макроскопического описания турбулизованной жидкости в виде двух взаимосвязанных континуумов (открытых подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства непрерывно – подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса (мелкомасштабного пульсационного движения жидкости и внедренного в него ансамбля мезомасштабных когерентных структур), явилось той отправной точкой, которая позволила начать разработку феноменологической гидродинамической модели структурированной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытых неравновесных системах, связанных с флуктуирующими средами. Континуум осредненного движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений, предназначен для исследования эволюции осредненных полей термогидродинамических величин, включая также крупные вихревые образования [4]. Подсистема турбулентного хаоса (вихревой континуум с внутренней структурой), состоит в свою очередь из двух составляющих (фаз): собственно турбулентного хаоса (так называемой некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости, и внедренной в такое почти однородное пульсирующее поле когерентной составляющей[1)] – ансамбля мезомасштабных упорядоченных вихревых структур (многомолекулярных образований, образом которых в пространстве состояний эквивалентной динамической системы, являются, например, предельные циклы). Подобное деление реального турбулизованного течения жидкости на воображаемые осредненное и вихревое, зависит, вообще говоря, от выбора пространственно-временной области, для которой установлены средние значения локальных гидродинамических переменных, являющихся непрерывными функциями координат $\mathbf{x}$ и времени t, т.е. имеет до некоторой степени условный характер. Гидродинамический

[1)] В соответствии с имеющимися на сегодня экспериментальными данными (основательный обзор соответствующих публикаций приведен, например, в монографии [5]), когерентная турбулентная структура может быть определена как связная, жидкая масса с завихренностью, скоррелированной по фазе (т.е. когерентной) во всей области координатного пространства, занимаемой структурой. Образование гранул в солнечной фотосфере служит наглядным примером существования обширного семейства когерентных структур в турбулентном потоке, которые появляются на фоне мелкомасштабного турбулентного движения.

масштаб осредненного движения Λ, лежащий в инерционном интервале $\eta < \Lambda << L$ и определяемый размером $d\mathbf{x} \sim \Lambda^3$ области осреднения, предполагается далее таким, что подсистема турбулентного хаоса содержит всю совокупность мезомасштабных когерентных структур (КС), размер которых меньше области осреднения[2)]. С учетом сделанных предположений было показано, что в вихревом континууме, отвечающем мелкомасштабной турбулентности, устанавливается такой квазистационарный режим между отбором энергии у источника (связанного с осредненным течением) и диссипацией, при котором производство энтропии турбулизации $\sigma_{\text{turb}}(\mathbf{x},t)$ из-за внутренних диссипативных процессов [6] компенсируется ее оттоком, так что суммарное возникновение энтропии хаоса $S_{\text{turb}}(\mathbf{x},t)$ минимально; следовательно подсистема турбулентного хаоса экспортирует энтропию во “внешнюю среду” (т.е. отдает ее подсистеме осредненного движения). Как известно, такого рода условие является достаточным для возникновения диссипативных когерентных структур (КС) в вихревом континууме (см. [7]).

Крупномасштабные флуктуации собственно турбулентного хаоса следует отличать от статистических молекулярных флуктуаций, обусловленных атомной структурой среды. В отличие от молекулярных флуктуаций (пренебрежимо малых для любых макроскопических систем[3)]) стохастичность подсистемы вихревого хаоса имеет не микроскопическое происхождение, а является проявлением его турбулентной природы и отражает большое число взаимосвязанных факторов турбулизации среды. Вследствие этого турбулентные флуктуации хаоса (естественный шум) ведут себя не как обратные степени характерного размера системы V^{-1}, а могут достигать величины порядка V^0 и потому не исчезают на макроскопическом уровне описания системы. В связи с этим и возникла необходимость уточнения статистико-термодинамического описания подсистемы турбулентного хаоса с тем, чтобы можно было включить эффекты стохастичности моделирующего его континуума [1]. С влиянием случайных свойств хаоса (естественного шума) связаны варианты динамического поведения различных неотрицательных мелкомасштабных характеристик турбулентности при увеличении надкритичности. Следующий шаг в процедуре моделирования вихревого континуума состоял в явной привязке вероятностных характеристик пульсаций мелкомасштабных характеристик турбулентности к физическим свойствам собственно турбулентного хаоса.

При феноменологическом описании квазистационарной подсистемы структурированного турбулентного хаоса в цитируемых работах использован формализм обобщенной статистической термодинамики [8], предполагающий исследование статистического ансамбля макроскопически одинаковых подсистем хаоса (с одними и теми же обобщенными экстенсивными параметрами состояния типа внутренней энергии $U_{\text{turb}}(\mathbf{x},t)$, энтропии $S_{\text{turb}}(\mathbf{x},t)$, удельного объема[4)] $1/\overline{\rho}(\mathbf{x},t)$ и некоторого числа внутренних переменных) и требующий вероятностного подхода. Причиной последнего являются крупномасштабные турбулентные флуктуации (относительно средних значений) так называемых внутренних координат $\mathrm{q}_k(\mathbf{x},t)$ ($k=\overline{1,n}$) состояния хаоса, которые и служат мерой различий в любом множестве подобных термодинамически тождественных систем. К числу внутренних координат, описывающих макроскопи-

---

[2)] Согласно существующим оценкам, чтобы осредненному потоку содержать основную долю (80% или 90%) полной энергии турбулизованного течения нужно, чтобы масштаб осреднения Λ был в десять-двадцать раз меньше интегрального масштаба L .

[3)] В частности, в окрестности устойчивого макроскопического состояния амплитуды молекулярных флуктуаций концентрации (если принять их за переменные) ведут себя как $1/V$, где V – объем системы. В критической точке эти флуктуации нарастают как величины порядка $V^{-1/2}$ и, следовательно, в термодинамическом пределе $V\to\infty$ они становятся пренебрежимо малыми.

[4)] Имея ввиду разнообразные астрофизические приложения развиваемого подхода, когда отношение характерной скорости жидкости к осредненной скорости звука (мера значимости флуктуаций плотности) намного больше единицы, далее будем предполагать переменность массовой плотности.

ческое состояние хаоса, будем относить непрерывно изменяющиеся локальные случайные параметры, адекватно характеризующие завихренную жидкость внутри физически бесконечно малого объема $d\mathbf{x}$, включая и пространственно-временную эволюцию различных мезомасштабных когерентных образований. В частности, в качестве стохастических координат q_k могут быть выбраны следующие положительно-определенные величины[5]: скорость диссипации турбулентной энергии в тепло ε_r, обобщенные угловые скорости (характеризующие мезомасштабные вращательные возбуждения), энстрофия, собственные завихренности[6] поля пульсаций скорости, относящиеся к структурам k-го типа (фундаментальные величины для характеристики КС), и т.п. В соответствии с развиваемым подходом предполагалось, что для полного статистического описания совокупного (векторного) случайного процесса $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)=\{\mathrm{q}_k(\mathbf{x},t),\ k=\overline{1,n}\}$ (набора из n параметров состояния q_k) в вихревом континууме, достаточно знать одноточечную плотность вероятности $W_1(\mathbf{q},t)$ и совместную двухточечную плотность распределения вероятности $W_2(\mathbf{q}_0,t_0;\mathbf{q},t)$. Как известно, стохастические процессы, полностью описываемые только этими двумя функциями, являются марковскими процессами[7]. Кроме этого использовалась двухточечная плотность условной вероятности, $P_2(\mathbf{q}_0,t_0|\mathbf{q},t)=W_2(\mathbf{q}_0,t_0;\mathbf{q},t)/W_1(\mathbf{q}_0,t_0)$, которая устанавливает вероятное значение стохастических характеристик вихревых образований $\mathbf{q}$ в пространстве внутренних координат в момент времени t, если в момент времени t_0, с вероятностью равной единице, $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0$.

Методами статистической неравновесной термодинамики в цитируемых выше работах было показано, что когерентное поведение подсистемы турбулентного хаоса, приводящее к появлению диссипативных структур[8], можно моделировать в пространстве внутренних координат $\mathbf{q}$ марковскими диффузионными процессами, которые являются решениями уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), определяющих эволюцию плотности вероятности перехода $P_2\equiv P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)$ для стационарных случайных процессов (все статистические характеристики которых не изменяются при сдвиге времени, $P_2(\mathbf{q}_0,t_0|\mathbf{q},t')\equiv P_2(\mathbf{q}_0,0|\mathbf{q},t'-t_0)\equiv$ $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)$)). Эти уравнения позволяют, в частности, проанализировать процессы перехода из одного стационарно- неравновесного состояния хаоса в другое, происходящие в результате последовательной потери устойчивости при некотором изменении управляющих параметров (например, числа Рейнольдса $\mathbf{Re}$), и рассчитать, как действительно выглядит плотность вероятности в окрестностях точек бифуркации. Был также рассмотрен альтернативный подход к исследованию бифуркационных переходов подобного рода, основанный на стохастических дифференциальных уравнениях ланжевеновского типа, статистически эквивалентных выведенным кинетическим уравнениям ФПК [2]. При этом мы исходили из того, что возможна замена реального шума турбулентного хаоса (флуктуации которого, обусловлены кумулятивным действием многочисленных факторов, определяющих состояние турбулизованной среды и не могут быть приписаны какой-нибудь одной вполне определенной причине)

---

5) Заметим, что часть внутренних координат q_k может относится к некогерентной составляющей подсистемы турбулентного хаоса, а другая часть– характеризовать индивидуальные КС.

6) Завихренность играет в механике турбулентности решающую роль, создавая возможность каскадного процесса порождения мелких вихрей более крупными.

7) Можно сказать, что это кардинальное предположение определяет класс случайных процессов, к которому применима рассматриваемая стохастико-термодинамическая модель структурированной турбулентности.

8) Переход к упорядоченному состоянию связан с неустойчивостью и нарушением симметрии: самоорганизация возникает, когда стационарное состояние $\mathbf{q}^{st}$ становится неустойчивым и сменяется новым состоянием, обладающим более низкой симметрией, чем исходное состояние.

гауссовским белым шумом, используемым в качестве модели интенсивности случайного силового воздействия хаоса на динамику рассматриваемого случайного процесса $\mathbf{q}(t)$.

Возникает вопрос: являются ли стационарные состояния турбулентного хаоса действительно устойчивыми, подобно термодинамически равновесным состояниям в классической термодинамике? Для ответа на этот ключевой для развиваемого стохастико-термодинамического подхода вопрос необходимо, прежде всего, иметь принципиальную возможность “приготовить” исходный стационарный статистический ансамбль, отвечающий макроскопической подсистеме турбулентного хаоса. Ясно, что возможность сформировать подобный ансамбль появляется, например, при наличии асимптотически устойчивых стационарных состояний, имеющих конечные области притяжения. В случае среды с молекулярными флуктуациями, когда стационарное состояние является статистически равновесным, асимптотическую устойчивость равновесного состояния обеспечивает существование соответствующей термодинамической функции Ляпунова. Было показано [1], что аналогичная связь с термодинамикой существует и для стационарных состояний континуума с турбулентными флуктуациями. В частности, предложен в явном виде неравновесный термодинамический потенциал, обобщающий известное соотношение Больцмана-Планка для функции распределения равновесного состояния на стационарные состояния ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса, и доказано, что он является функцией Ляпунова для асимптотически устойчивых стационарных состояний. Таким образом, все стационарно-неравновесные состояния $\mathbf{q}^{st}$ (являющееся аналогом термодинамического равновесия в слабо неравновесной области) вихревого континуума, не являющиеся критическими точками $\mathbf{q}_{crit}$, асимптотически устойчивы, $\lim_{t\to\infty}\mathbf{q}(\mathbf{q}_0,t)=\mathbf{q}^{st}$. Если они составлены из устойчивых фокусов $\mathbf{q}_1^{st}$, $\mathbf{q}_2^{st}$,..., $\mathbf{q}_p^{st}$, то система будет стремиться к одной их точек устойчивого равновесия и в этом смысле можно говорить о множественности стационарных состояний турбулентного хаоса. Если расстояние от равновесия превышает некоторое критическое значение (порог самоорганизации), то стационарные состояния могут стать неустойчивыми, когда обобщенная термодинамическая ветвь претерпевает бифуркацию.

Вместе с тем, самоорганизующаяся подсистема турбулентного хаоса может обладать и гораздо более сложным поведением, чем множественные стационарно-неравновесные состояния $\mathbf{q}_k^{st}$. В критических точках[9)] динамика хаоса определяется существующими в системе нелинейностями (см. [2]). Другими словами, за термодинамическим порогом самоорганизации система вступает в область синергетики: огромное число макроскопических степеней свободы хаоса резко сокращается, миллиарды и более возбуждений оказываются подчинены небольшому числу мод, т.е. турбулентность определяется конечным числом коллективных возбуждений (связанных, например, с предельным циклом), поскольку остальные возбуждения просто подстраиваются под них, выполняя роль более интенсивной диссипации. В процессе дальнейшей временной эволюции подсистемы турбулентного хаоса возможны различные бифуркации и периодических состояний, типа бифуркации удвоения периода, возникновения инвариантного тора, бифуркации с потерей симметрии и т.д. Поэтому при выходе подсистемы флуктуирующего хаоса из некоторого аттрактора вследствие турбулентных пульсаций

[9)] В критической точке существует по крайней мере одна релаксационная мода, которая либо постоянна, либо осциллирует с частотой, равной мнимой части собственного значения этой моды. В другом возможном случае, когда мнимую ось пересекает пара комплексно-сопряженных собственных значений, одной из двух типичных ситуаций в критической точке является нормальная бифуркации Андронова-Хопфа (бифуркация рождения цикла), при которой соответствующее детерминированное уравнение имеет изолированное устойчивое периодическое решение $\mathbf{q}^c(t)=\mathbf{q}^c(t+\tau^c)$ с периодом τ^c. Это означает, что фазовая точка равновесия из устойчивого фокуса (стационарное состояние) в момент потери устойчивости скачком переходит на асимптотически устойчивый предельный цикл (аттрактор), к которому при $t\to\infty$ стремятся все траектории из его окрестности.

она может эволюционировать к одному из возможных аттракторов (зона притяжения которого покрывает точку начального состояния системы), включая и странные аттракторы.

Таким образом, при изменении управляющих параметров могут развертываться различные сценарии эволюции внутренних координат, описывающих макроскопические состояния флуктуирующей среды (аттракторы, связанные с некими вихревыми структурами): в зависимости от случайных флуктуаций в каждый момент времени соответствующая динамическая система, действующая в конфигурационном пространстве, посетит одни аттракторы и обойдет стороной другие[10]. Более того, естественный мультипликативный шум хаоса (шум, зависящий от параметров $\mathbf{q}$) может приводить к возникновению новых состояний и тем самым изменять и сами свойства (в частности, бифуркационные диаграммы) локальной устойчивости хаоса – точки перехода могут сдвигаться под влиянием естественного шума турбулентного хаоса. Подобные переходы, которые обычно называют, распространяя понятие фазового перехода на новый класс неравновесных явлений, индуцированными шумом неравновесными фазовыми переходами, несут на себе "родимое пятно" своего турбулентного происхождения.

В настоящей работе будут проанализированы связи индуцированных естественным шумом флуктуирующего турбулентного хаоса неустойчивостей и фазовых переходов (вызванных изменением управляющих параметров) с явлениями самоорганизации в развитом турбулизованном течении – возникновения крупномасштабных "многомолекулярных" упорядоченных вихревых образований в $\mathbf{q}$-пространстве. Свойства фазовых переходов исследуются для случайной среды с гауссовским белым шумом, используемым в качестве модели случайного силового воздействия вихревого хаоса на эволюцию флуктуирующих мелкомасштабных характеристик турбулентности. Подобные переходы возможны в тех случаях, когда качественно изменяется вид функциональной зависимости случайной величины, описывающей стационарное поведение системы. Как известно это качественное изменение наиболее непосредственно отражается в экстремумах стационарной плотности вероятности[11]. В работе предполагается, что внутренние координаты турбулентного хаоса, характеризующие завихренную жидкость внутри физически малого объема, распределены в стационарном состоянии по логнормальному закону (см. [9]). Рассмотрено воздействие управляющих параметров течения (числа $\mathbf{Re}$) на величину крупномасштабных турбулентных флуктуаций в окрестностях критических точек перехода, приводящее к качественному изменению стационарного состояния рассматриваемого случайного процесса, в частности флуктуирующей скорости диссипации турбулентной энергии.

Кратко резюмируем теперь наиболее существенные особенности математического аппарата, на котором основан данный подход [1-3].

Математический аппарат. Для избежания ненужных осложнений в описании индуцированных естественным шумом видоизменений макроскопических свойств подсистемы флуктуирующего турбулентного хаоса (а именно, возникновения индуцированных шумом фазовых переходов и критических точек при росте числа Рейнольдса), в данной работе мы ограничимся рассмотрением временной эволюции хаоса, т.е. будем предполагать полную идентичность вихревых движений во всех точках пространства. Кроме этого, будем считать, что удовлетворительное описание стохастических свойств хаоса возможно с помощью только одной непрерывно изменяющейся интенсивной переменной, например, скорости диссипации турбу-

---

[10]) Как известно, переходы от одной диссипативной структуры к другой по своим свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам и переходам, встречающимся в неравновесных системах (см., например, [10]).

[11]) Согласно Хорстхемке и Лефевру [11] эти экстремумы являются наиболее подходящими индикаторами перехода: экстремумы стационарной плотности вероятности соответствуют макроскопическим "фазам" системы и служат параметром порядка перехода.

лентной энергии в вихрях $\mathrm{q} = \varepsilon_r$, или любой другой родственной ей величины (см. [9]). Подобное предположение связано, в частности, с тем, что при исследовании индуцированных шумом переходов нежелательно использование приближенных методов[12)], а точные аналитические решения удается получить, как известно, в основном для одномерных систем (см., например, [12]). При этих допущениях в основу описания диффузионного марковского однородного по времени случайного процесса $\mathrm{q}(t)$ может быть положено стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ)[13)]

$$\frac{d\mathrm{q}(t)}{dt} = K(\mathrm{q}) + \varepsilon\sqrt{Q(\mathrm{q})}\cdot\xi(t)\,, \tag{1}$$

либо эквивалентное ему прямое уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial P_2(\mathrm{q}_0|\mathrm{q},t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{J}(\mathrm{q}_0|\mathrm{q},t)}{\partial \mathrm{q}} = 0\,, \tag{2}$$

определяющее эволюцию плотности вероятности перехода $P_2 \equiv P_2(\mathrm{q}_0|\mathrm{q},t)$ для стационарного случайного процесса $\mathrm{q}(t)$. Здесь

$$\mathrm{J}(\mathrm{q}_0|\mathrm{q},t) \equiv \left[K(\mathrm{q},\varepsilon)P_2(\mathrm{q}_0|\mathrm{q},t)\right] - \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}}\left[Q(\mathrm{q})P_2(\mathrm{q}_0|\mathrm{q},t)\right] \tag{3}$$

– поток условной вероятности для процесса $\mathrm{q}(t)$, принимающего в начальный момент времени $t_0 = 0$ значение $\mathrm{q}(0) = \mathrm{q}_0$; $\varepsilon^2 Q(\mathrm{q})$ и

$$K(\mathrm{q},\varepsilon) \equiv \begin{cases} K(\mathrm{q}) & \text{– в случае Ито,} \\ K(\mathrm{q}) + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2\partial Q(\mathrm{q})/\partial \mathrm{q} & \text{– в случае Стратоновича} \end{cases} \tag{4}$$

– соответственно не зависящие от времени коэффициенты диффузии и сноса в пространстве конфигураций; $K(\mathrm{q}) = -\partial V(\mathrm{q})/\partial \mathrm{q}$ – противодействующая флуктуациям хаоса “сила трения”, порожденная локальным детерминированным потенциалом $V(\mathrm{q}) = -\left[\int^{\mathrm{q}} K(x)\,dx\right]$ подсистемы вихревого хаоса в предельном случае $\varepsilon^2 \to 0$ слабого шума; $\xi(t)$ – обусловленная крупномасштабными турбулентными флуктуациями относительно среднего состояния среды, отвечающей подсистеме турбулентного хаоса[14)], случайная сила (источник “естественного” шу-

---

[12)] Использование приближенных методов нежелательно, поскольку даже малые погрешности численного метода могут приводить к качественной перестройке поведения системы.

[13)] В зависимости от того, в каком смысле понимаются соответствующие стохастические интегральные соотношения (в смысле Ито, или Стратоновича), выписанные для СДУ уравнения, зависит вид коэффициента сноса в уравнении ФПК (2), а также вид регулярного члена в уравнении Ланжевена (1).

[14)] Турбулентный хаос далек от полного хаоса термодинамического равновесия, поскольку он обладает некоторой упорядоченностью: даже развитая локально-изотропная турбулентность в инерционном интервале масштабов имеет далекий от равномерного ($F(k) = const$) колмогоровский спектр $F(k) \sim k^{-11/3}$ распределения кинетической энергии (пульсационного движения) по пространству волновых чисел k.

ма), которую далее мы будем аппроксимировать гауссовским белым шумом[15)] с нулевым средним значением $<\xi(t)>=0$ и дельтаобразной по времени корреляционной функцией $<\xi(t)\xi(t_1)>=\delta(t-t_1)$ (здесь среднее берется по стохастическому процессу $\xi(t)$); $\varepsilon^2 \equiv \gamma \mathrm{k} T_{\mathrm{turb}}$ – параметр, характеризующий интенсивность воздействия шума подсистемы турбулентного хаоса, порожденного его “тепловой” структурой, на случайный процесс $\mathrm{q}(t)$; T_{turb} – термодинамическая температура хаоса[16)], связанная с осредненной по Фавру пульсационной кинетической энергией течения турбулизованной жидкости $\widetilde{e} \equiv \overline{\rho(\mathbf{u}'')^2}/2\overline{\rho}$ соотношением $\frac{3}{2}\gamma \mathrm{k} T_{\mathrm{turb}} = \widetilde{e}$ (энергия турбулентности $\widetilde{e}$ по предположению совпадает с термодинамической внутренней энергией хаоса, $U_{\mathrm{turb}} \equiv \widetilde{e}$ (см.[4]). Коэффициент сноса $K(\mathrm{q})$ в соотношении (4) соответствует вырожденному ($\varepsilon^2 \to 0$) случайному процессу $\mathrm{q}(t)$, описываемому детерминированным динамическим уравнением[17)] (автономным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка по времени)

$$d\mathrm{q}(t)/dt = K(\mathrm{q}), \tag{5}$$

с начальным условием $\mathrm{q}(0)=\mathrm{q}_0$, а слагаемое $\frac{1}{4}\varepsilon^2 \partial Q(\mathrm{q})/\partial \mathrm{q}$ учитывает индуцированный мультипликативным ($Q(\mathrm{q}) \neq const$) шумом[18)] снос, когда влияние случайной силы $\widetilde{f}(\mathrm{q}) \equiv \varepsilon\sqrt{Q(\mathrm{q})}\cdot\xi(t)$ зависит от состояния процесса $\mathrm{q}(t)$. Уравнение ФПК (2) предназначено для анализа временной эволюции марковских диффузионных процессов, связанных с начальными условиями типа $P_2(\mathrm{q}_0|\mathrm{q},0)=\delta(\mathrm{q}-\mathrm{q}_0)$, которые соответствуют дельтаобразной плотности вероятности, сосредоточенной в точке $\mathrm{q}=\mathrm{q}_0$ [19)]. Сверх этого, на функцию $P_2(\mathrm{q}_0|\mathrm{q},t)$ должны быть наложены те или иные граничные условия по q, которые определяются существом физической задачи. Ниже мы будем предполагать, что пространством состояний диффузионного процесса $\mathrm{q}(t)$ служит интервал $[\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2]$, причем верхняя граница может обращаться в бесконечность, $\mathrm{q}_2=\infty$.

---

15) Аргументом в пользу такого выбора случайной силы в СДУ является то обстоятельство, что только для модели белого шума результирующий стохастический процесс $\mathrm{q}(t)$ будет марковским и единственно этот выбор приводит к полной эквивалентности метода СДУ методу уравнения ФПК для вероятности перехода. Отметим, что белый шум – удобная математическая идеализация реального шума, является обобщенным случайным процессом, он не дифференцируем и имеет бесконечную дисперсию.

16) Термодинамическая температура подсистемы турбулентного хаоса, не сводится в общем случае к абсолютной температуре (см. [1]).

17) В дальнейшем будем предполагать, что детерминированное уравнение (5) устойчиво, понимая под устойчивостью ограниченность решения $\mathrm{q}(t)$.

18) Вид коэффициента сноса в уравнении (ФПК) зависит от того, в каком смысле понимаются соответствующие стохастические интегральные соотношения (в смысле Ито, или Стратоновича), выписанные для СДУ (см., например, [12]). Для определения наиболее подходящего коэффициента сноса и диффузии случайного процесса $\mathrm{q}(t)$ необходимо привлекать физические соображения.

19) Если в начальный момент времени $t=0$ задано не начальное состояние $\mathrm{q}(0)=\mathrm{q}_0$, а начальное распределение $W(\mathrm{q})$, то удобно искать решение уравнения ФПК для одноточечной плотности вероятности $W_1(\mathrm{q},t)$. При использовании соотношения $\int W_1(\mathrm{q}_0,t_0)P_2(\mathrm{q}_0,t_0|\mathrm{q},t)d\mathrm{q}_0 = W_1(\mathrm{q},t)$, легко можно убедиться в том, что одноточечная плотность вероятности $W_1(\mathrm{q},t)$ марковского диффузионного процесса также удовлетворяет уравнению ФПК в форме (2)–(3).

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением процессов $\mathrm{q}(t)$, которые никогда не достигают границ своего пространства состояний и, следовательно, на функцию $P_2(\mathrm{q}_0 | \mathrm{q}, t)$ граничные условия можно не накладывать. Как известно, в этом случае гарантируется существование и единственность решения СДУ (1) на $[\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2]$ при $\forall t$ (см., например, [12]). К числу недостижимых границ q_i относятся естественные границы (достижимые лишь при $t \to \infty$ с нулевой вероятностью, $\lim_{t\to\infty,\, \mathrm{q}\to\mathrm{q}_i} P_2(q,t) = 0$) и притягивающие границы, когда $\mathrm{q}(t) \to \mathrm{q}_i$ при $t \to \infty$. Согласно классификации Гихмана-Скорохода [13], например, нижняя граница q_1 будет естественной, если $L_1(\mathrm{q}_1) = +\infty$, и притягивающей , если $L_1(\mathrm{q}_1) < +\infty$ и $L_2(\mathrm{q}_1) = +\infty$. Здесь постоянные L_1 и L_2 определяются соотношениями

$$L_1(\mathrm{q}_1) = \int_{\mathrm{q}_1}^{\beta} \phi(x)dx\,, \quad L_2(\mathrm{q}_1) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathrm{q}_1}^{\beta} \frac{1}{Q(y)\phi(y)} \left\{ \int_{\mathrm{q}_1}^{y} \phi(x)dx \right\} dy\,, \tag{6}$$

в которых β – точка вблизи границы q_1, а

$$\phi(x) = \exp\left\{ -\int_{\beta}^{x} \frac{2K(z)}{\varepsilon^2 Q(z)} dz \right\}, \quad \beta \in (\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2)\,. \tag{7}$$

– неинтегрируемая в окрестности границы q_1 функция.

Кроме этого, в данной работе мы будем оперировать СДУ (1), записанными в симметризованной форме Стратоновича [8], когда определение соответствующих стохастических интегралов согласуется с привычными правилами математического анализа. Известно, что от интерпретации СДУ по Стратоновичу к интерпретации СДУ по Ито всегда можно перейти, прибавляя $\frac{1}{4}\varepsilon^2 \partial Q(\mathrm{q}) / \partial \mathrm{q}$ к $K(\mathrm{q})$. Заметим также, что в случае аддитивного шума (т.е. при $Q(\mathrm{q}) = const$) не существует различия между интегралом Ито и интегралом Стратоновича (см., например, [14]).

По поводу использования интерпретации СДУ по Стратоновичу отметим следующее. В общем случае сильно нелинейных флуктуирующих полей скорости и других термогидродинамических параметров в реальной турбулизованной жидкости статистика подсистемы турбулентного хаоса не носит ни гауссовского, ни марковского характера, особенно на больших масштабах (см. [9]). Вместе с тем, в рассматриваемом подходе мы исходим из того, что гауссовский белый шум, используемый в качестве модели интенсивности случайного силового воздействия $\widetilde{f}(\mathrm{q})$ хаоса (флуктуации которого, обусловлены кумулятивным действием многочисленных факторов, определяющих состояние турбулизованной среды и не могут быть приписаны какой-нибудь одной вполне определенной причине), представляет собой приемлемое приближение при моделировании корреляции между случайными процессами $\mathrm{q}(t)$ и $\xi(t)$. Другими словами предполагается, что возможна замена реального шума хаоса с короткой памятью белом шумом с нулевой памятью. Как известно (см., например, [8]), подобное замещение допустимо, если время корреляции $\tau_{\text{корр}}$ (время памяти шума) случайного процесса $\xi(t)$ много меньше временного масштаба макроскопической эволюции хаоса $\tau_{\text{макро}}$ (который обычно отождествляется с временем релаксации подсистемы вихревого хаоса к опорному стационарному состоянию), $\tau_{\text{корр}} << \tau_{\text{макро}}$. В случае принятой нами идеализации белого шума, для которого $\tau_{\text{корр}} \to 0$, понимаемые в смысле Стратоновича СДУ типа (1), могут быть интерпретированы как пределы неких уравнений, записанных для немарковских (но близких к марковским) случайных процессов $\mathrm{q}(t)$ в реальном турбулизованном потоке и используемых в качестве модели воздействия шума флуктуирующего хаоса на процесс $\mathrm{q}(t)$. Собственно поэтому в данной работе и используется интерпретация СДУ по Стратоновичу, которую, как известно, следует применять всякий раз, когда дельта-коррелированный гауссовский белый шум в СДУ является идеализацией реального случайного процесса $\xi(t)$ с очень малым, но все же конечным временем корреляции (см. [14]). Это позволяет использовать мощный аппарат теории марковских диффузионных процессов и получить благодаря этому точные аналитические результаты, описывающие поведение систем, находящихся под действием шума.

Стационарное решение уравнения ФПК. Применительно к рассматриваемым одномерным процессам весьма просто найти стационарную плотность вероятности $P^{st}(\mathrm{q}) = \lim\limits_{t\to\infty} P_2(\mathrm{q},t)$, характеризующую стационарное поведение системы, находящейся под воздействием белого шума, по истечении достаточно большого интервала времени. Одномерная стационарная плотность вероятности $P^{st}(\mathrm{q})$, если она существует, по определению не зависит от времени t и от начальных условий $\mathrm{q}(0)=\mathrm{q}_0$. Поэтому в стационарном состоянии уравнение ФПК (2) вырождается в уравнение $\partial P^{st}(\mathrm{q})/\partial t = 0$, из которого следует, что стационарный поток вероятности $\mathrm{J}^{st}(\mathrm{q})$ постоянен при любых состояний $\mathrm{q}\in[\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2]$, т.е. $\mathrm{J}^{st}(\mathrm{q}) \equiv \mathrm{J}^{st} = const$. Таким образом, в стационарном случае уравнение ФПК переходит в уравнение первого порядка для $P^{st}(\mathrm{q})$:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}}\left[Q(\mathrm{q})P^{st}(\mathrm{q})\right] - 2\left[K(\mathrm{q},\varepsilon)P^{st}(\mathrm{q})\right] = -2\,\mathrm{J}^{st}, \tag{8}$$

причем поток вероятности внутри пространства состояний равен потоку через границы: $\mathrm{J}^{st} = \mathrm{J}(\mathrm{q}_1) = \mathrm{J}(\mathrm{q}_2)$. Далее мы будем рассматривать ситуацию, когда не существует потока вероятности из пространства состояний[20], и поэтому $\mathrm{J}^{st}=0$. Тогда стационарная плотность вероятности – решение уравнения (8), имеет вид

$$P^{st}(\mathrm{q}) = \frac{N}{Q(\mathrm{q})}\exp\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{q}} dx \frac{K(x,\varepsilon)}{Q(x)}\right] = \frac{N}{\sqrt{Q(\mathrm{q})}}\exp\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{q}} dx \frac{K(x)}{Q(x)}\right], \tag{9}$$

где постоянная интегрирования N определяется из условия нормировки

$$N^{-1} = \int_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{q}_2} \frac{1}{Q(\mathrm{q})}\exp\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{q}} dx \frac{K(x,\varepsilon)}{Q(x)}\right]\mathrm{dq} < \infty\,. \tag{10}$$

Выражение для $P^{st}(\mathrm{q})$, с учетом формулы (9), может быть преобразовано к виду

---

[20]) При выводе уравнения ФПК для описания эволюции функций распределения неотрицательных мелкомасштабных характеристик турбулентности в работе [1] предполагались нулевые граничные условия: $\mathrm{J}(\mathrm{q}_1) = \mathrm{J}(\mathrm{q}_2) = 0$.

$$P^{st}(\mathrm{q}) = N\exp\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{q}} dx\left(\frac{K(x)}{Q(x)}\right) - \ln\sqrt{Q(\mathrm{q})}\right] = \\ = N\exp\left[-2\Phi(\mathrm{q})/\varepsilon^2\right] = N\exp\left[-2\Phi(\mathrm{q})/\gamma \mathrm{k}T_{\mathrm{turb}}\right], \tag{11}$$

где

$$\Phi(\mathrm{q}) = -\left[\int_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{q}} \frac{K(x)}{Q(x)}dx - \frac{\varepsilon^2}{2}\ln\sqrt{Q(\mathrm{q})}\right] \tag{12}$$

– так называемый вероятностный потенциал.

Важно отметить, что распределение (11) распространяет обычную формулу Больцмана-Планка (для равновесного состояния термодинамических параметров замкнутой системы, когда $\Phi = -S$) на стационарные состояния ансамбля, отвечающего открытой подсистеме турбулентного хаоса. Инвертированная формула

$$2\Phi(\mathrm{q}) = -\varepsilon^2 \ln\left(P^{st}(\mathrm{q})/N\right) \tag{13}$$

позволяет, в частности, конкретизировать уравнения (1) и (2) для выбранных стохастических характеристик мелкомасштабной турбулентности, если относительно последних приняты какие-либо гипотезы распределения в стационарном состоянии.

Н-теорема для стационарных состояний. При изучении вероятностных аспектов макроскопических стационарных состояний рассматриваемой динамической системы, требуется иметь исходный физический ансамбль, соответствующий подсистеме турбулентного хаоса. Если изучается вполне конкретное стационарное состояние[21)] q^{st}, то необходимо, чтобы представленные ансамблем начальные условия q_0 были сосредоточены в области именно его притяжения. Возникает вопрос: является ли данное стационарное состояние q^{st} действительно устойчивым по Ляпунову при начальном условии q_0 (или орбитально устойчивым по Пуанкаре), подобно термодинамически равновесным состояниям в классической термодинамике? В противном случае фазовые траектории $\mathrm{q}(t)$, которые начинаются вблизи q^{st}, не выйдут на нужное стационарное состояние. А это с высокой вероятностью означает, что неустойчивые стационарные состояния, не имеющие области притяжения, не могут быть описаны стационарным статистическим ансамблем, поскольку его невозможно даже организовать подобающим образом.

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим следующий функционал от $P_2(\mathrm{q},t)$

[21)] Стационарными состояниями в данной работе называются не зависящие от времени решения q^{st} детерминированного уравнения (5). Вместе с тем слова “стационарное состояние” могут употребляться и по отношению к распределению по возможным состояниям. Так, мы можем назвать (9) стационарным распределением состояний. В случае аддитивного шума хаоса можно не делать различия между детерминированным стационарным состоянием q^{st} и экстремумами стационарного распределения P^{st}, хотя и надо иметь в виду, что система в стационарном состоянии на самом деле флуктуирует около некоторого среднего состояния. Это связано с тем, что в этом случае распределение состояний (9) имеет столь острый максимум, что, по существу, только стационарное состояние q^{st} дает основной вклад в это распределение. В случае мультипликативного шума хаоса случайная величина, определяющая стационарное состояние системы, качественно весьма отличается от вырожденной случайной величины, соответствующей детерминированному состоянию (см. ниже).

$$H(t) = \gamma \mathrm{k} T_{\mathrm{turb}} \int_{q_1}^{q_2} d\mathrm{q} P_2(\mathrm{q},t) \ln\left[P_2(\mathrm{q},t) / P^{st}(\mathrm{q}) \right]. \tag{14}$$

Величины подобного рода впервые были введены Кульбаком [15]. Поэтому $H(t)$ можно назвать энтропией Кульбака, которая, однако, в отличие от обычной энтропии, не является мерой неопределенности параметров q (характеризующей их статистический разброс), а является мерой близости распределений P_2 и P^{st}. Действительно, легко показать, что функционал H является функционалом Ляпунова, поскольку он обладает следующими двумя свойствами: $H(t) \ge 0$ и $\partial H(t)/\partial t \le 0$ при $\forall t$, причем знак равенства имеет место только при $P_2(\mathrm{q},t) \equiv P^{st}(\mathrm{q})$).

В самом деле, вследствие неравенства $\ln(1/x) \ge 1 - x$, справедливого при $x > 0$ и условия нормировки функций $P_2(\mathrm{q},t)$ и $P^{st}(\mathrm{q})$ имеем

$$H(t) = \gamma \mathrm{k} T_{\mathrm{turb}} \int_{q_1}^{q_2} d\mathrm{q} P_2(\mathrm{q},t) \left\{ \ln\left[P_2(\mathrm{q},t) / P^{st}(\mathrm{q}) + P^{st} / P_2(\mathrm{q},t) - 1 \right] \right\} \ge 0, \tag{15}$$

причем неравенство (15) переходит в равенство только при $P_2(\mathrm{q},t) \equiv P^{st}(\mathrm{q})$.

Покажем теперь, что $H(t)$ монотонно убывает. Продифференцируем для этого соотношение (14) по времени и воспользуемся уравнением ФПК (2) и соотношением (3) для потока вероятности, который по предположению равен нулю на границе. Тогда, интегрируя по частям, в результате будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(t)}{\partial t} &= \varepsilon^2 \int_{q_1}^{q_2} \ln\left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) \frac{\partial P_2(\mathrm{q},t)}{\partial t} d\mathrm{q} = -\varepsilon^2 \int_{q_1}^{q_2} \ln\left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) \frac{\partial \mathrm{J}(\mathrm{q},t)}{\partial \mathrm{q}} d\mathrm{q} = \\
&= \varepsilon^2 \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{J}(\mathrm{q},t) \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}} \ln\left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) d\mathrm{q} = \varepsilon^2 \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{J}(\mathrm{q},t) \frac{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})}{P_2(\mathrm{q},t)} \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}} \left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) d\mathrm{q} = \\
&= \varepsilon^2 \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{J}^{\mathrm{st}}(\mathrm{q}) \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}} \left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) d\mathrm{q} - \frac{\varepsilon^4}{2} \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{Q}(\mathrm{q}) \frac{\left[P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q}) \right]^2}{P_2(\mathrm{q},t)} \left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}} \left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) \right]^2 d\mathrm{q} \le 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

поскольку первый интеграл равен нулю, в чем нетрудно убедиться, используя условие $\mathrm{J}^{st} = 0$, и выполнив интегрирование по частям:

$$\int_{q_1}^{q_2} \mathrm{J}^{\mathrm{st}}(\mathrm{q}) \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}} \left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) d\mathrm{q} = -\int_{q_1}^{q_2} d\mathrm{q} \left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) \frac{\partial \mathrm{J}^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})}{\partial \mathrm{q}} = \int_{q_1}^{q_2} d\mathrm{q} \left(\frac{P_2(\mathrm{q},t)}{P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})} \right) \frac{\partial P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, если внутри пространства состояний флуктуации нигде не обращаются в нуль, т.е. при $\forall \mathrm{q} \in [\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2]$ выполняется неравенство $\mathrm{Q}(\mathrm{q}) > 0$, то $\partial H(t)/\partial t \le 0$.

Итак, функционал $H(t)$ строго положителен и убывает со временем. Отсюда вытекает, что $H(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а так как $H(t) = 0$ в том и только в том случае, если $P_2(\mathrm{q},t) = P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q})$, мы приходим к равенству $P^{\mathrm{st}}(\mathrm{q}) = \lim_{t \to \infty} P_2(\mathrm{q},t)$. Другими словами, из факта существования функционала Ляпунова следует глобальная асимптотическая устойчивость стационарного состояния q^{st}. Кроме этого, можно показать (см., например, [12,13]), что если стационарная плотность вероятности $P^{st}(q)$ существует и диффузионный процесс при $t=0$ начинается с нее, то $q(t)$ – эргодический процесс[22)]. В этом случае произведение $P^{st}(q)dq$ равно доле времени, которое произвольная траектория диффузионного процесса проводит в бесконечно малой окрестности состояния q.

<u>*Аддитивный шум турбулентного хаоса.*</u> Если шум хаоса аддитивный, т.е. $Q(q) = const$, то вероятностный потенциал $\Phi(q)$ и детерминированный потенциал $V(q)$ совпадают с точностью до несущественной постоянной. В этом случае из уравнения (6) $\varepsilon^2 const \cdot \partial P^{st}(q)/\partial q - 2K(q)P^{st}(q) = 0$ следует, что экстремумы q_{ext} стационарной плотности вероятности, определяемые из условия

$$\partial P^{st}(q)/\partial q = 0, \tag{17}$$

совпадают с стационарными решениями

$$\frac{\partial q^{st}}{\partial t} = K(q^{st}) = 0 \tag{18}$$

детерминированного уравнения (5), отвечающего вырожденному случаю $\varepsilon^2 \to 0$ отсутствия влияния на процесс $q(t)$ естественного шума турбулентного хаоса. Таким образом, детерминированные стационарные состояния q^{st} (напомним, что образом стационарного состояния в пространстве конфигураций служит особая точка определенного типа – центр, устойчивый фокус, седло, неустойчивый узел и т.п.) определяются либо нулями функции $K(q^{st})$ (соответственно экстремумами детерминированного потенциала $V(q)$), либо экстремумами q_{ext} стационарной плотности вероятности $P^{st}(q)$.

В детерминированном случае (т.е. для вырожденной турбулентности, $\varepsilon^2 = 0$) неравновесный фазовый переход происходит в точке, в которой претерпевает качественные изменения потенциал $V(q)$, например изменяется число локальных экстремумов. Простейший способ исследования такой возможности состоит в проверке устойчивости состояния q_k^{st} относительно малых возмущений δq_k. При анализе по первому приближению на асимптотическую устойчивость $\lim\limits_{t\to\infty} q(q_0, t) = q_k^{st}$ изолированного стационарного состояния q_k^{st}, временная эволюция возмущения δq_k задается решением уравнения $\partial\, \delta q_k / \partial t = -\partial^2 V(q)/\partial q \partial q\big|_{q=q_k^{st}} \delta q_k$, полученного путем отбрасывания нелинейных членов разложения в ряд Тейлора правой части уравнения (5). Решения этого уравнения $\delta q_k(t) = A_k \exp(\omega_k t)$ (где $\omega_k = -\partial^2 V(q)/\partial q \partial q\big|_{q=q_k^{st}}$ – нормальная мода) могут обладать более низкой симметрией, чем исходное стационарное со-

---

[22)] Это означает, что математическое ожидание $E\{\varphi(q)\}$ стационарного диффузионного процесса $q(t)$ может быть определено по наблюдению лишь одной произвольной траектории процесса –взятием средней по времени, $E\{\varphi(q)\} \equiv \int \varphi(q) P^{st}(q) dq = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int \varphi\{q(t)\} dt$ ·

стояние q_k^{st}, причем устойчивые стационарные состояния, для которых $\partial^2 V(q)/\partial q \partial q\big|_{q=q_k^{st}} > 0$, соответствуют максимумам функции $P^{st}(q)$, а неустойчивые стационарные состояния ($\partial^2 V(q)/\partial q \partial q\big|_{q=q_k^{st}} < 0$) – минимумам $P^{st}(q)$. Следовательно, качественное изменение стационарного состояния однозначно отражается на экстремумах плотности вероятности. Как известно (см. [16]) в детерминированном случае стационарная плотность вероятности $P^{st}(q)$ состоит из дельтообразных пиков, сосредоточенных на стационарных состояниях. В стохастическом случае аддитивный шум хаоса, по аналогии с молекулярными флуктуациями, также приводит к некоторому (в зависимости от интенсивности ε^2) размыванию распределения вероятности $P^{st}(q)$ в окрестности точки $q_{\min}^{st}$, соответствующей минимуму потенциала $V(q)$. Тем не менее, можно ожидать, что плотность вероятности перехода достигает максимума именно в этой точке ($P^{st}(q_{\min}^{st}) > P^{st}(q)$). Если существует более чем один минимум потенциала $V(q)$, то будем иметь многомодовую плотность вероятности $P^{st}(q)$ с вершинами, соответствующим различным локальным минимумам детерминированного потенциала[23)], причем наибольший максимум функции и положение самой глубокой ямы потенциала $V(q)$ не смещены относительно друг друга. Таким образом, число и положение экстремумов плотности вероятности $P^{st}(q)$ в стохастическом случае и потенциала $V(q)$ в детерминированном случае являются наиболее характерными отличительными особенностями стационарного поведения системы, т.е. экстремумы, соответствующие макроскопическим фазам системы, являются до некоторой степени индикаторами перехода- параметрами порядка (см. [11]).

В заключение подчеркнем еще раз, что аддитивный шум не изменяет качественно стационарное поведение системы. Экстремумы плотности вероятности всегда совпадают с детерминированными стационарными состояниями независимо от интенсивности белого шума. Поэтому в случае аддитивного шума, для того чтобы решить, например, для какого из локально устойчивых состояний неравенство $P^{st}(q_{\min}^{st}) > P^{st}(q)$ выполняется при $\forall q \neq q_{\min}^{st}$, вполне достаточно анализа на основе лишь детерминированного описания. Воздействие аддитивного шума турбулентного хаоса на эволюцию многомерного диффузионного марковского процесса $\mathbf{q}(t)$ было проанализировано в работе [2].

Мультипликативный шум. Мультипликативный шум турбулентного хаоса, флуктуации которого зависят от эволюции случайного процесса $q(t)$ (т.е. $Q(q) \neq const$), требует уже некоторой модификации соответствия между макроскопическими стационарными состояниями q^{st} и экстремумами q_{ext} стационарной плотности вероятности $P^{st}(q)$. Экстремумы функции $P^{st}(q)$ могут быть найдены из условия (см. формулу (11))

$$h(q_{ext}, \varepsilon) = K(q_{ext}) - \frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt{Q(q_{ext})}\frac{\partial\sqrt{Q(q)}}{\partial q}\bigg|_{q=q_{ext}} = 0\,. \qquad (19)$$

---

23) При $t \to \infty$ (этот предельный переход необходим, чтобы найти стационарное распределение плотности вероятности) непременно произойдут сильные флуктуации (тем менее вероятные, чем выше их интенсивность) и система побывает (причем бесконечно много раз) во всех минимумах потенциала $V(q)$.

Это основное уравнение для анализа влияния естественного шума хаоса на стационарное поведение рассматриваемой стохастической системы (1). Первый член, если его положить равным нулю, соответствует уравнению (18) для детерминированных стационарных состояний, а второй член описывает воздействие мультипликативного шума. Таким образом, интенсивность ε^2 шума оказывается важным параметром системы.

Стационарная плотность вероятности имеет максимум при $\partial h(\mathrm{q})/\partial \mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=\mathrm{q}_{ext}} < 0$ и минимум при $\partial h(\mathrm{q})/\partial \mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=\mathrm{q}_{ext}} > 0$. Множество точек в пространстве конфигураций для которых $\partial h(\mathrm{q})/\partial \mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=\mathrm{q}_{ext}} = 0$, соответствует структурно-неустойчивым ситуациям (которые называют P-бифуркациями). Благодаря P-бифуркациям нарушается соответствие между аттракторами детерминированной системы и максимумами стационарной плотности вероятности. Если величина ε^2 достаточна мала, то корни уравнения (19) ни по числу, ни по положению не отличаются от детерминированных стационарных состояний. Но если интенсивность ε^2 шума достаточно велика, то экстремумы плотности вероятности $P^{st}(\mathrm{q})$ и по числу и по положению могут существенно отличаться от детерминированного стационарного состояния. А это означает, что (в отличие от аддитивного шума) мультипликативный шум не только оказывает дезорганизующее воздействие на систему, но может стабилизировать новые макроскопические состояния и вызывать новые неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках детерминированного подхода.

Далее будут проанализированы специфические особенности переходов, индуцированных мультипликативным шумом турбулентного хаоса, в случае распределения флуктуирующих параметров q в стационарном состоянии хаоса по логнормальному закону.

Феноменология мелкомасштабной турбулентности. В дальнейшем будем исходить из того, что в основу макроскопической модели собственно турбулентного хаоса, связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости, могут быть положены основные идеи каскадной теории Колмогорова [17] мелкомасштабной вихревой турбулентности, которая по этой причине заслуживает здесь краткого обзора.

В случае турбулизованной жидкости, рассматриваемой как сплошная среда, мелкомасштабная структура турбулентности определяется, согласно этой теории, каскадным характером передачи энергии по спектру вихрей различных пространственно-временных масштабов через инерционный интервал от энергетического к вязкому, где и происходит ее диссипация в тепло. Мелкие вихри получают энергию в результате последовательного дробления крупных вихрей при росте управляющего параметра − числа Рейнольдса $\mathbf{Re} = Lu_0/\nu$, соответствующего крупномасштабным движениям в потоке (L − интегральный масштаб турбулентности, u_0 − характерная скорость течения, ν − кинематическая молекулярная вязкость). При этом происходит непрерывное перераспределение удельной кинетической энергии несущего потока ($\sim u_0^3/L$) от крупномасштабных вихрей к более мелким вплоть до самых мелких с характерным размером порядка внутреннего масштаба турбулентности $\eta \sim (\nu^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}$, который характеризует влияние вязких эффектов на структуру мелкомасштабной турбулентности. Важно отметить, что в пределе больших чисел Рейнольдса $\mathbf{Re}$, несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного течения, случайный характер дробления вихрей и хаотичность передачи их энергии по каскаду вниз приводят к тому, что стохастический режим турбулентных флуктуаций в границах пространственно-временной области осреднения мгновенных гидродинамических уравнений, является почти локально изотропным[24)] – одно-

[24)] Полной локальной изотропии из-за наличия мезомасштабных когерентных структур естественно быть не может.

родным, изотропным и квазистационарным, т.е. изменяющимся в зависимости лишь от числа **Re**, определяющего, в конечном счете, и само число каскадов в иерархии вихрей различных порядков.

Теория турбулентности Колмогорова. Напомним некоторые результаты первоначальной теории турбулентности Колмогорова [17], которые нам понадобятся ниже**.** Теория Колмогорова 1941 года касается статистических свойств однородной и изотропной турбулентности при больших числах Рейнольдса. Согласно первой гипотезы подобия, статистический режим мелкомасштабной локально изотропной турбулентности на масштабах $r << L$ однозначно определяется тремя размерными параметрами: средней по ансамблю возможных реализаций течения среды скоростью диссипации энергии $\bar{\varepsilon}$ (ключевой характеристики локально изотропной турбулентности), вязкостью ν и самим масштабом r. Приведенная выше оценка для диссипационного масштаба длины η является следствием как раз этой гипотезы. В то же время, в инерционном интервале ($\eta < r << L$) не происходит заметного продуцирования и диссипации кинетической энергии, здесь устанавливается квазистационарный режим турбулентности, который универсален и зависит только от величин $\bar{\varepsilon}$ и r (вторая гипотеза подобия Колмогорова).

Количественное описание мелкомасштабной локально изотропной турбулентности в инерционном интервале основано на использовании структурных функций[25)]

$$S_p(\mathbf{r}) = \overline{[u''_r(\mathbf{x}) - u''_r(\mathbf{x}+\mathbf{r})]^p} \qquad (20)$$

и их спектров. Из второй гипотезы подобия и предположения о том, что параметры турбулентности слабо меняются на расстояниях порядка $r = |\mathbf{r}|$, если $r < \Lambda << L$, вытекает один из важнейших законов мелкомасштабных турбулентных движений (закон двух третей): в любом турбулентном течении с достаточно большим числом Рейнольдса **Re** средний квадрат разности скоростей в двух точках на расстоянии r друг от друга при не слишком малых, но и не слишком больших значениях r (сравнимых с гидродинамическим масштабом длины Λ соответствующего осредненного течения) должен быть пропорционален $r^{2/3}$: $S_2(r) \sim (\bar{\varepsilon}\, r)^{2/3}$. Этот закон в настоящее время хорошо подтвержден экспериментально для самых разнообразных турбулентных течений (см. [9]).

Что касается структурных функций p-го порядка, то теория подобия Колмогорова [17] приводит к соотношению

$$S_p(r) \sim (\bar{\varepsilon}\, r)^{p/3}, \qquad (21)$$

которое, вообще говоря, не подтверждается экспериментально, в особенности для $p >> 1$, и является в лучшем случае их слабой оценкой. Недостаток гипотез подобия для локально изотропной турбулентности в их первоначальной форме связан с существенным предположением о постоянстве притока энергии к мелкомасштабным возмущениям, лежащим в инерционном интервале, когда считалось, что параметр Колмогорова $\bar{\varepsilon}$, точное определение которого $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = \overline{\frac{\nu}{2}\left(\partial u''_i/\partial x_j + \partial u''_j/\partial x_i\right)^2}$, является универсальной константой для заданного течения и характеризует поток энергии, прокачиваемый вдоль всего инерционного интервала до диссипативных масштабов. Однако, в действительности $\bar{\varepsilon}$ не является постоянной, а представляет собой случайную величину, характеризуемую собственной функцией распределения.

[25)] В силу изотропии течения структурные функции не зависят от направления отрезка $\mathbf{r}$.

Таким образом, экспериментальные измерения структурных функций относительно невысоких порядков подтвердили справедливость “казанского” замечания Ландау – локальные вариации скорости диссипации энергии нарушают колмогоровский сценарий однородной турбулентности (см., например, [18,19]). Это нарушение однородной турбулентности связано, в частности, с так называемой перемежаемостью потока, когда при сколь угодно больших числах Рейнольдса турбулизованные области сосуществуют с квазиламинарными.

Логнормальная модель. В связи с приведенными выше затруднениями, представления Колмогорова [17] о случайном вихревом каскаде были уточнены Обуховым [20], который предложил отказаться от условия $\bar{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = const$ в области $d\mathbf{x}$ (с центром в точке $\mathbf{x}$ и характерным масштабом $\Lambda << L$) и для учета структуры поля диссипации энергии исходить из того, что статистические характеристики мелкомасштабных движений (например, структурные функции) определяются не теоретико-вероятностным средним значением $\bar{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ случайной величины ε , а зависят от значений локальной диссипации $\varepsilon_r(\mathbf{x},t)$, осредненной по некоторому объему V_r с характерным размером r , малым по сравнению с типичным масштабом неоднородности осредненного течения, $r << \Lambda$ [26]. Если в качестве области осреднения, лежащей в пределах $d\mathbf{x}$, выбрать шар радиуса r (получаемые результаты слабо зависят от формы области осреднения), то

$$\varepsilon_r(\mathbf{x},t) = \frac{3}{4\pi r^3} \int\limits_{|\mathbf{r}^*| \le r} d\mathbf{r}^* \frac{1}{2} \nu \sum\nolimits_{i,j} \left(\partial u_i''(\mathbf{x}+\mathbf{r}^*)/\partial x_j + \partial u_j''(\mathbf{x}+\mathbf{r}^*)/\partial x_i \right)^2 \ . \tag{22}$$

Используя параметр ε_r , Колмогоров [21] переформулировал первую и вторую гипотезы подобия (установив, так называемые, уточненные гипотезы, в которых постоянная величина $\bar{\varepsilon}$ заменена на случайную величину ε_r) и, кроме этого, дополнил их еще и третьей гипотезой, постулирующей (при большом отношении масштабов $L:r$) логарифмически нормальное распределение плотности вероятности величины ε_r и линейность зависимости дисперсии $\sigma^2{}_{\ln\varepsilon_r}$ от $\ln(L/r)$:

$$W_1(\varepsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \varepsilon_r \sigma_{\ln\varepsilon_r}} \exp\left[-\frac{\ln^2(\varepsilon_r / m_{\ln\varepsilon_r})}{2\sigma^2_{\ln\varepsilon_r}} \right], \quad (\ln m_{\ln\varepsilon_r} = -\sigma^2_{\ln\varepsilon}/2 + \ln\overline{\varepsilon_r}), \tag{23}$$

$$\sigma^2_{\ln\varepsilon_r} = \mu \ln\frac{L}{r} + B(\mathbf{x},t) \,, \tag{24}$$

где $\sigma^2_{\ln\varepsilon_r}$ – дисперсия случайной величины $\ln\varepsilon_r$; $m_{\ln\varepsilon_r} = \exp\left(\overline{\ln\varepsilon_r}\right)$ – медиана распределения случайной переменной $\ln\varepsilon_r$; $\overline{\varepsilon_r} = \bar{\varepsilon}$; μ – универсальный параметр (перемежаемости)[27]; $B(\mathbf{x},t)$ – слагаемое, зависящее от характеристик осредненного (крупномасштабного) движения жидкости. Подобное стационарное распределение плотности вероятности $W_1^{st}(\varepsilon_r)$ в уточненной теории Колмогорова [21] может быть дополнительно оправдано тем обстоятельством, что модель каскадного процесса последовательных дроблений турбулентных вихрей

---

[26]) Соответствующая такому подходу турбулентность получила название локально-однородной.

[27]) В логнормальной модели коэффициент μ является подгоночным параметром, первоначальная оценка которого была $\mu \approx 0.5$, а затем эта оценка понизилась до $\mu \approx 0.2$ (см. [9,22]).

родственна процессу дробления пылевых частиц, которому асимптотически отвечает логарифмически нормальное распределение по размерам. Кроме этого, имеются многочисленные экспериментальные подтверждения логнормального распределения вероятностей диссипации энергии или связанных с ней неотрицательных мелкомасштабных характеристик турбулентности в широком интервале умеренных значений аргумента[28]. Основательный обзор соответствующих работ приведен, например, в монографии [9], к которой и отсылаем интересующегося читателя.

Часто предполагают, что формула (23) дает плотность распределения вероятностей неосредненной диссипации и в случае, если $r \approx \eta$ [23]. Это допущение позволяет, при использовании известной формулы $\eta = L\mathbf{Re}^{-3/4}$, выражающей диссипативный масштаб турбулентности через макропараметры турбулентности (см. [9]), связать дисперсию $\sigma^2_{\ln \varepsilon_r}$ с логарифмом числа Рейнольдса:

$$\sigma^2_{\ln \varepsilon_r} \cong 0.75\mu \ln \mathbf{Re} + B(\mathbf{x},t) . \qquad (24^*)$$

Распределение (23) позволяет рассчитать важные статистические характеристики стационарной мелкомасштабной турбулентности, в частности, моменты скорости диссипации $\overline{\varepsilon_r{}^p}$:

$$\overline{\varepsilon_r{}^p} = \int_0^\infty \varepsilon_r{}^n W_1(\varepsilon_r) d\varepsilon_r = (\overline{\varepsilon_r})^p \exp\left[\tfrac{1}{2} p(p-1)\sigma^2_{\ln\varepsilon_r}\right] = F_p(\mathbf{x},t)(\bar{\varepsilon})^p (r/L)^{-\mu p(p-1)/2} \qquad (25)$$

(коэффициенты $F_p(\mathbf{x},t)$ зависят от макроструктуры турбулентного течения). Отсюда следует простой физический смысл коэффициента перемежаемости μ – с точностью до знака это показатель степени r для момента второго порядка поля диссипации энергии. Используя (25), можно получить уточненное выражение для структурной функции $S_p(r) \sim \overline{\varepsilon^{p/3}} \cdot r^{p/3}$ p-го порядка[29] :

$$S_p(r) \sim F_p(\mathbf{x},t)(\bar{\varepsilon})^{p/3} (r/L)^{\mu p(3-p)/18} (r)^{p/3} , \qquad (26)$$

которое, например, в случае $p = 2$, оказывается близким к пределам точности имеющихся экспериментальных данных, а в применении к структурным функциям высших порядков сильно отличается от зависимости, предсказываемой первоначальной теорией Колмогорова для локально изотропной турбулентности (но в то же время неплохо согласуется с имеющи-

---

[28]) В ряде публикаций справедливость логнормального распределения для неотрицательных мелкомасштабных характеристик турбулентности подвергнута сомнению, поскольку она предполагает, в частности, появление сверхзвуковых скоростей при очень больших числах Рейнольдса [19]. В последние годы были сделаны попытки описать случайные турбулентные поля с помощью других функций распределения, например, логпуассоновских, логлеви и т.п. (см., например, [24-25]). Однако вполне окончательного ответа на вопрос о истинных законах распределения вероятности величин типа ε в турбулентных потоках все еще не получено. В связи с этим, нам представляется естественным использовать в данном подходе в качестве первоначального шага предположение Колмогорова о логнормальности распределения для ε .

[29]) Формула $S_p(r) \sim \overline{\varepsilon^{p/3}} \cdot r^{p/3}$ обобщает формулу (21) в том смысле, что теперь в правой части стоит не постоянная величина ε в степени $p/3$, а статистический момент порядка $p/3$, характеризующий структуру случайного поля диссипации энергии на соответствующих масштабах r .

мися экспериментальными данными). Аналогичным образом была поправлена теория локальной структуры пульсационных полей температуры, плотности и концентрации химически активной примеси, перемешиваемых турбулентностью (см., например, [9]).

Есть ещё одна причина, по которой наиболее удобно использовать флуктуирующую локально осредненную диссипацию ε_r при феноменологическом описании мелкомасштабной турбулентности, в том числе и турбулентного хаоса в рамках развиваемой нами двухуровневой макроскопической модели, учитывающей процессы самоорганизации. Она связана с тем, что первоначальная теория каскада [17], подразумевающая равномерное заполнение физического пространства вихрями каждого масштаба, не пригодна для этой цели, поскольку не рассматривает в явном виде какие-либо мезомасштабные КС (например, такие как вихревые спирали, вихревые нити, “стрики”, “берстинги” и т.п.), в которых и происходит наиболее интенсивная вязкая диссипация энергии. Между тем, любая адекватная теория турбулентности, как показали последние эксперименты (см., например, [5,26,27]), обязана принимать во внимание существование подобных КС, а также неравномерность их пространственно-временного распределения в пульсирующем потоке. Кроме этого, с хаотическим характером передачи кинетической энергии по каскаду вихрей связано явление гидродинамической перемежаемости, при которой области, занятые так называемыми турбулентными пятнами (где наблюдаются интенсивные пульсации градиентов скорости, $\bar{\varepsilon}_r > 0$), тесно переплетаются с областями со слабо турбулизованной или полностью безвихревой жидкостью (в которых такие пульсации практически отсутствуют, $\bar{\varepsilon}_r \cong 0$). Другими словами, в развитых турбулентных полях образуется многомасштабная система (фрактальное множество) взаимодействующих активных и пассивных областей, с различными законами масштабного подобия (скейлинга). Как известно, (мульти)фрактальность может быть определена и измерена в терминах флуктуаций локальной диссипации (см. [19]). Таким образом, диссипация энергии ε_r, или родственные ей величины (квадратичные по градиентам скорости) могут служить, как важной характеристикой структурирования турбулентного потока, так и индикатором перемежаемости.

<u>Модельные СДУ и уравнение ФПК.</u> В связи со всем сказанным, представляется наиболее рациональным использовать в качестве единой флуктуирующей координаты турбулентного хаоса локально осредненную скорость диссипации турбулентной энергии, $\mathrm{q} \equiv \varepsilon_r > 0$, что далее и предполагается. В этом случае, используя формулу (23) для стационарного распределения величины ε_r и вводя обозначение $\alpha \equiv N\sqrt{\pi}\sigma_{\ln \mathrm{q}}$, можно конкретизировать выражения для вероятностного потенциала (12) и коэффициентов диффузии и сноса в уравнении (2). В результате получим:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{q}) &= \frac{\varepsilon^2}{2}\ln\sqrt{Q(\mathrm{q})} - \int^{\mathrm{q}} \frac{K(x)}{Q(x)}dx = -\frac{\varepsilon^2}{2}\ln\left(P^{st}(\mathrm{q})/N\right) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\ln(\alpha\,\mathrm{q}) + \frac{1}{2\alpha}\ln^2\left(\frac{\mathrm{q}}{m_{\ln \mathrm{q}}}\right),\end{aligned} \tag{27}$$

$$Q(\mathrm{q}) = \alpha^2\mathrm{q}^2, \quad K(\mathrm{q}) = -\alpha\,\mathrm{q}\ln\left(\frac{\mathrm{q}}{m_{\ln \mathrm{q}}}\right), \quad K(\mathrm{q},\varepsilon) = -\alpha\,\mathrm{q}\left[\ln\left(\frac{\mathrm{q}}{m_{\ln \mathrm{q}}}\right) - \sigma^2_{\ln \mathrm{q}}\right] \tag{28}$$

где

$$\sigma^2_{\ln \mathrm{q}} = \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2. \tag{29}$$

Следовательно, в основу эволюционного описания марковского диффузионного процесса $q(t) \equiv \varepsilon_r(t)$, моделирующего стохастическое поведение подсистемы турбулентного хаоса с мультипликативным шумом ($Q(q) = \alpha^2 q^2$), могут быть положены СДУ

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t} = -\alpha\, q(t) \ln\left(\frac{q(t)}{m_{\ln q}}\right) + \varepsilon\alpha\, q(t)\cdot\xi(t), \tag{30}$$

которое мы будем интерпретировать в смысле Стратоновича, и соответствующее ему уравнение ФПК для плотности вероятности перехода $P_2 \equiv P_2(q_0 | q, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_2(q,t) = -\alpha \frac{\partial}{\partial q}\left\{\left[\ln\left(\frac{q}{m_{\ln q}}\right) - \frac{\alpha}{2}\varepsilon^2\right] q P_2(q,t)\right\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial q_2}\left[q^2 P_2(q,t)\right]. \tag{31}$$

Описание турбулентного хаоса в единых терминах моделей [17] *и* [21]**.** Вернемся теперь к нашей основной задаче – исследованию механизма синергетического рождения КС в пространстве внутренних координат (в результате изменения числа Рейнольдса), связанного с явлением неравновесных “фазовых” переходов, индуцированных шумом турбулентного хаоса. Как уже отмечалось выше, некогерентная (мелкозернистая) составляющая хаоса, возникающая в результате последовательного каскада большого числа пространственных и временных бифуркаций, в конце концов оказывается устроенной настолько сложным образом, что для характеристики ее статистических свойств (в инерционном и диссипативном интервалах) можно использовать концепцию теории (К41) об однородной и изотропной турбулентности при постоянстве параметра Колмогорова $\bar{\varepsilon}$. Вместе с тем, с целью исследования возможных процессов самоорганизации в системе (т.е. возникновения КС в реальном турбулизованном течении) необходимо, как было показано, отступить от подобной высокой симметрии и ввести в рассмотрение случайную скорость диссипации ε_r, флуктуации которой нарушают колмогоровский сценарий однородной турбулентности.

Для того чтобы иметь возможность описания локально изотропного состояния (фоновое детерминированное состояние) турбулентного хаоса и механизмы его структурирования в единых терминах, условимся далее считать, что в детерминированном случае состояние хаоса описывается вырожденной случайной величиной $\bar{\varepsilon}_r = const$, которая характеризуется своим распределением вероятности. Казалось бы, о каком “распределении” может идти речь, если допустимых значений всего одно, т.е. исследуемая переменная – константа. Тем не менее, подобное распределение, как известно (см., например, [28]), можно интерпретировать как предел непрерывного распределения, когда область существования функции плотности $P(\varepsilon_r)$ стягивается в единственную точку $\bar{\varepsilon}_r$, т.е.

$$P(\varepsilon_r) = \delta(\varepsilon_r - \bar{\varepsilon}_r) = \begin{cases} \infty & \text{при } \varepsilon_r = \bar{\varepsilon}_r \\ 0 & \text{при } \varepsilon_r \neq \bar{\varepsilon}_r, \end{cases} \tag{32}$$

и при этом под случайной переменной понимается такая величина, которая почти всегда равна значению $\bar{\varepsilon}_r$. Для вырожденного распределения (32) имеют место соотношения $\mathrm{M}(\varepsilon_r) = \bar{\varepsilon}_r$, $\mathrm{D}(\varepsilon_r) = 0$ [30] [28]. Таким образом, в детерминированном случае стационарная “плотность ве-

---

[30]) Справедливо и обратное: если дисперсия какого-либо распределения с конечным средним равна нулю, то оно может быть только вырожденным.

роятности” состоит из дельтообразных пиков, сосредоточенных на стационарном состоянии $\bar{\varepsilon}_r$. Заметим, что логарифмически нормальное распределение (23) стремится при $\sigma^2_{\ln\varepsilon_r} \to 0$ к вырожденному распределению (32) с дисперсией $\mathrm{D}(\varepsilon_{\mathrm{r}}) = 0$ и средним $\mathrm{M}(\varepsilon_{\mathrm{r}}) = \exp(\ln m_{\ln\varepsilon_r}) = \bar{\varepsilon}_r$.

Определим теперь коэффициент α в уравнениях (30) и (31). Используя формулы (24*) и (29), получим соотношение $\sigma^2_{\ln\varepsilon_r} = \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2 = \frac{3}{4}\mu\ln\mathbf{Re} + B$, которое в частном случае вырожденной турбулентности ($\sigma^2_{\ln\varepsilon_r} \to 0, \mathbf{Re} = \mathbf{Re}_{\det}$) позволяет представить универсальное слагаемое B (зависящее от характеристик крупномасштабного движения) в виде $B = -\frac{3}{4}\mu\ln\mathbf{Re}_{\det}$. Здесь $\mathbf{Re}_{\det}$ – некоторое предельное значение числа Рейнольдса, при котором возможен не структурированный турбулентный хаос (наше фоновое состояние). Тогда для внешнего параметра α будем иметь

$$\alpha = \frac{3}{2\varepsilon^2}\mu\ln(1+\gamma)\,, \tag{33}$$

где $\gamma = (\mathbf{Re} - \mathbf{Re}_{\det})/\mathbf{Re}_{\det}$ – показатель надкритичности. Таким образом, коэффициент α является управляющим параметром для уравнений (30) и (31). Специфика этих уравнений такова, что при некотором режиме осредненного движения ($\alpha \ge \alpha_{crit}$) крупномасштабные флуктуации турбулентного хаоса могут достигать таких критических значений, при которых фазовые траектории случайного процесса $\mathrm{q}(t)$ скачком переходят на другой аттрактор. В результате происходит и определенная перестройка состояния подсистемы турбулентного хаоса, связанная, в частности, с образованием новых относительно устойчивых коллективных движений (мезомасштабных вихревых структур), которая , в свою очередь, изменяет макроскопическое поведение турбулизованной жидкости в целом.

Индуцированные мультипликативным шумом турбулентного хаоса фазовые переходы. Рассмотрим сначала вырожденный случай ($\sigma^2_{\ln\varepsilon_r} \to 0$), когда интенсивность белого шума турбулентного хаоса чрезвычайно мала, т.е. $\varepsilon^2 \to 0$. В этом случае СДУ (30) сводится к следующему детерминированному уравнению

$$\frac{\partial \mathrm{q}(t)}{\partial t} = -\alpha\,\mathrm{q}(t)\left[\ln\left(\frac{\mathrm{q}(t)}{\bar{\mathrm{q}}}\right) + \frac{\sigma^2_{\ln\varepsilon_r}}{2}\right] \cong -\alpha\,\mathrm{q}(t)\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{q}(t)}{\bar{\mathrm{q}}}\right), \quad \mathrm{q}(0) = \bar{\mathrm{q}}\,. \tag{34}$$

Как было отмечено, изменения, происходящие в режиме осредненного движения жидкости, воздействуют на “случайный” процесс $\mathrm{q}(t)$ через внешний (управляющий) параметр α. Зависящее от времени решение детерминированного уравнения (34) можно найти в явном виде: $\mathrm{q} = \bar{\mathrm{q}}\exp[\exp(-\alpha t)]$. Отсюда следует, что макроскопический временной масштаб эволюции системы к опорному состоянию (время жизни возможных возмущений) есть величина порядка $\tau_{\text{макро}} = 1/\alpha$. При $\alpha < 0$ (т.е. при $\mathbf{Re} < \mathbf{Re}_{\det}$) уравнение (34) допускает единственное асимптотическое устойчивое стационарное решение $\mathrm{q}_1^{st} = 0$ (об условиях устойчивости (неустойчивости) стационарных состояний смотри текст, расположенный ниже формулы (18)), которое соответствует ламинарному режиму течения, обладающему самой высокой симметрией. В точке $\alpha = 0$ ($\mathbf{Re} = \mathbf{Re}_{\det}$) время жизни флуктуаций в первом приближении стремится к бесконечности, решение $q_1^{st} = 0$ становится неустойчивым и претерпевает бифуркацию, т.е. происходит фазовый переход, поскольку при $\alpha > 0$ ($\mathbf{Re} > \mathbf{Re}_{\det}$) стационарная точка $q_1^{st} = 0$ становится неустойчивой, но возникает новое устойчивое стационарное состояние $q_2^{st} = \overline{q}$). Следовательно, значение $\alpha = 0$ является бифуркационным значением параметра: величина q скачком переходит с нижней ветви стационарных состояний $q_1^{st} = 0$ на верхнюю ветвь стационарных состояний $q_2^{st} = \overline{q}$. Таким образом, детерминированная система (34) претерпевает равновесный фазовый переход первого рода, что соответствует спонтанному возникновению (при $\mathbf{Re} = \mathbf{Re}_{\det}$) некогерентной фоновой (однородной изотропной) турбулентности − течению, в котором с ростом числа Рейнольдса вдали от границ появляется тенденция к восстановлению в статистическом смысле всех симметрий.

<u>*Критические точки, индуцированные шумом.*</u> Приступим теперь к исследованию стационарного поведения стохастической системы при шуме хаоса произвольной интенсивности ε^2. Будем далее предполагать, что флуктуации реального турбулентного хаоса, воздействующие на систему, протекают быстро по сравнению с величиной $\tau_{\text{макро}} = 1/\alpha$. Это позволяет перейти к пределу белого шума и моделировать истинно случайный процесс $q(t)$ с помощью СДУ (30) и соответствующего ему уравнения ФПК (31). Отметим, что стационарное решение (23) уравнения (31) существует в том и только том случае, если $\alpha > 0$. Пространство состояний, которым должен быть ограничен процесс $q(t)$, представляет собой неотрицательную вещественную полупрямую[31)]. Из выражения (6) видно, что границы процесса ($q_1 = 0$ и $q_2 = \infty$) будут естественны, если при $\beta > 0$ (β –точка вблизи границы, нижней или верхней)

$$L_1(0) = \int_0^{\beta} \phi(x)dx = C\int_0^{\beta} x^{\left(\frac{1}{2} - \frac{2\ln\bar{\varepsilon}_r}{\varepsilon^2\alpha}\right)} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2\alpha}\ln^2 x\right] dx = \infty\,, \quad \beta \in (0,\infty) \tag{35}$$

и

$$L_1(\infty) = \int_0^{\infty} \phi(x)dx = C\int_0^{\infty} x^{\left(\frac{1}{2} - \frac{2\ln\bar{\varepsilon}_r}{\varepsilon^2\alpha}\right)} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2\alpha}\ln^2 x\right] dx = \infty\,. \tag{36}$$

Условие (36) всегда выполняется, т.е. бесконечность является естественной границей при всех значениях α и ε. Из соотношения (35) видно, что нуль − естественная граница, если только $\alpha > 0$, что совпадает с условием существования стационарной плотности вероятности (23) (при $\alpha > 0$ и $\sigma_{\ln q}^2 > 0$). С другой стороны, при $\alpha < 0$ из (7) и (35) следует, что $L_1(0) < \infty$ и $L_2(0) = \infty$, т.е. нуль − притягивающая граница. Кроме того следует иметь в виду, что нуль

[31)] С физической точки зрения уравнения (30) и (31) вряд ли справедливы при произвольно больших значениях q. Поэтому правильней было бы ограничить пространство состояний q интервалом $[0, q_{\max}]$, где $q_{\max}$ – наибольшая локальная диссипация, которая физически достигается в системе. Однако подобная процедура не нужна, поскольку стационарная плотность вероятности экспоненциально уменьшается при $q \to \infty$, т.е. переход к большим значениям q с физической точки зрения совершенно безопасен.

является не только граничной, но и стационарной точкой случайного процесса $\mathrm{q}(t)$: при $\mathrm{q}=0$ снос и диффузия одновременно обращаются в нуль. Так как нуль притягивающая точка, то вся стационарная “масса” вероятности должна быть сосредоточена в нуле. В терминах плотности вероятности это означает, что $P^{st}(\mathrm{q})=\delta(\mathrm{q})$, при $\alpha<0$ (см. (32)).

Как было отмечено ранее, число и положение экстремумов стационарной плотности вероятности $P^{st}(\mathrm{q})$ в стохастическом случае являются наиболее характерными отличительными особенностями стационарного поведения системы, т.е. могут являться параметрами порядка для неравновесных фазовых переходов. В нашей модели экстремумы плотности вероятности $P^{st}(\mathrm{q})$ совпадают с нулями уравнения (19)

$$h(\mathrm{q},\varepsilon)\equiv-\alpha\mathrm{q}(t)\ln\left(\frac{\mathrm{q}(t)}{\overline{\mathrm{q}}}\right)-\frac{3}{4}\varepsilon^2\alpha^2\mathrm{q}(t)=0\,, \tag{37}$$

т.е. с

$$(\mathrm{q}_{ext})_1=0 \tag{38}$$

и

$$(\mathrm{q}_{ext})_2=\overline{\mathrm{q}}\exp\left[-\frac{3}{4}\varepsilon^2\alpha\right]=\overline{\mathrm{q}}\exp\left[-\frac{9}{8}\mu\ln(1+\gamma)\right] \tag{39}$$

(второй корень существует при условии $\alpha>0$). Точки в пространстве конфигураций, для которых $\partial h(\mathrm{q},\varepsilon)/\partial\mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=\mathrm{q}_{ext}}=-\alpha\ln(\mathrm{q}_{\mathrm{ext}}/\overline{\mathrm{q}})-\alpha-(3/4)\varepsilon^2\alpha^2=0$, соответствуют структурно-неустойчивым ситуациям, когда возможны фазовые переходы. Так как $\partial h(\mathrm{q},\varepsilon)/\partial\mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=(\mathrm{q}_{ext})_2}\equiv-\alpha$ всегда меньше нуля, то в точке $(\mathrm{q}_{ext})_2$ стационарная плотность вероятности достигает своего максимума, $P^{st}(\mathrm{q})=(1/\sqrt{2\pi}\overline{\mathrm{q}}\sigma_{\ln\mathrm{q}})\exp(\alpha\varepsilon^2/2)$; производная $\partial h(\mathrm{q},\phi)/\partial\mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=(\mathrm{q}_{ext})_1}\equiv -\alpha\ln[(\mathrm{q}_{\mathrm{ext}})_1/\overline{\mathrm{q}}]-\alpha-(3/4)\varepsilon^2\alpha^2$ и, следовательно, корень $(\mathrm{q}_{ext})_1$ будет максимумом только при $\alpha<0$ (когда $\partial h(\mathrm{q})/\partial\mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=(\mathrm{q}_{ext})_1}<0$). Отсюда следует, что при переходе параметра α через нуль слева направо устойчивый фокус $(\mathrm{q}_{ext})_1$ становится неустойчивым, и система переходит на новый стационарный режим $(\mathrm{q}_{ext})_2$, т.е. во флуктуирующем турбулентном хаосе в отличие от детерминированного случая имеется две точки перехода. Переход при $\alpha=0$ ($\mathbf{Re}=\mathbf{Re}_{\det}$) обусловлен природой границы в нуле.

Резюмируя сказанное можно утверждать, что плотность вероятности характеризуется следующими особенностями.

1) Если $\alpha<0$ ($\mathbf{Re}<\mathbf{Re}_{\det}$), то стационарная точка $(\mathrm{q}_{ext})_1=0$ (соответствующая ламинарному режиму течения) устойчива.

2) В точке $\alpha=0$ ($\mathbf{Re}=\mathbf{Re}_{\det}$) стационарная точка $(\mathrm{q}_{ext})_1=0$ становится неустойчивой, происходит фазовый переход, обусловленный природой границы в нуле.

3) При $\alpha=0$ возникает новое устойчивое стационарное решение $\mathrm{q}_2^{\mathrm{st}}=\overline{\mathrm{q}}$, соответствующее некогерентной (фоновой) турбулентности, параметр q скачком переходит с нижней ветви стационарных состояний $\mathrm{q}_1^{st}=0$ на верхнюю ветвь стационарных состояний $\mathrm{q}_2^{\mathrm{st}}=\overline{\mathrm{q}}$. Логарифмически нормальное распределение (23) обращается при этом в вырожденное распределение (32) с дисперсией $\mathrm{D}(\mathrm{q})=0$ и средним $\mathrm{M}(\mathrm{q})=\overline{\mathrm{q}}$. Хотя стационарное состояние $\mathrm{q}_2^{\mathrm{st}}=\overline{\mathrm{q}}$ не является в присутствии шума устойчивым состоянием, оно все же остается наибо-

лее вероятным значением. В некотором смысле δ -функция (32) начинает расплываться вправо, когда α минует эту точку перехода.

4) Если параметр α становится больше нуля (т.е. при $\mathbf{Re} > \mathbf{Re}_{\det}$), то характер распределения (32) резко изменяется, возникает новая ветвь стационарных состояний $(\mathrm{q}_{ext})_2 = \overline{\mathrm{q}}\exp\left[-\frac{3}{4}\varepsilon^2\alpha\right] = \overline{\mathrm{q}}\exp\left[-(9/8)\mu\ln(\mathbf{Re}/\mathbf{Re}_{\det})\right]$, смещенная относительно детерминированного случая $(\mathrm{q}_{ext})_2 = \overline{\mathrm{q}}$. Таким образом, мультипликативный шум хаоса, индуцируя неравновесный фазовый переход, приводит к сдвигу детерминированной точки перехода к турбулентности. Этот переход соответствует ситуациям, в которых система более не приспосабливает свое макроскопическое поведение к средним свойствам среды (как это имеет место в детерминированном случае), а реагирует на изменение параметра $\mathbf{Re}$ более определенным и активным образом. Случайная величина (39), определяющая стационарное состояние системы в стохастическом случае качественно отличается от вырожденной случайной величины $(\mathrm{q}_{ext})_2 = \overline{\mathrm{q}}$, соответствующей фоновой турбулентности. Таким образом, здесь мы имеем нетривиальный истинно шумовой эффект: шум (когда его интенсивность возрастает) понижает порог перехода стохастической системы в истинно стационарное состояние.

<u>*Модель Ферхюльста*</u>. Для того чтобы подвергнуть более детальному рассмотрению индуцированные шумом переходы в окрестности среднего состояния $\overline{\mathrm{q}}$, обратимся к известной модели Ферхюльста, детерминированный (вырожденный) вариант которой имеет вид

$$\partial\mathrm{q}(t)/\partial t = \lambda\,\mathrm{q}(t) - \mathrm{q}^2(t) \tag{40}$$

(здесь $\forall\mathrm{q}\in[0,\infty)$; λ – управляющий параметр) (см. [26]). Эта модель предназначалась первоначально для описания роста биологической популяции, но со временем нашла применение во многих весьма различных областях науки. При $\lambda < 0$ уравнение (40) допускает единственное асимптотическое устойчивое решение $\mathrm{q}^{st} = 0$, которое соответствует режиму, обладающему самой высокой (совместимой с наложенными на систему связями) симметрией. В точке $\lambda = 0$ решение $\mathrm{q}^{st} = 0$ становится неустойчивым и претерпевает бифуркацию: от него непрерывным (но не дифференцируемым) образом отделяется новая ветвь стационарных состояний $\mathrm{q}^{st} = \lambda$. Таким образом детерминированная система претерпевает равновесный фазовый переход второго рода, что соответствует возникновению равновесной когерентной структуры с более низкой симметрией.

Покажем, как эту модель можно использовать в нашем случае, когда флуктуации скорости диссипации энергии $\delta\varepsilon_r = \varepsilon_r - \overline{\varepsilon}_r$ малы по сравнению с ее средним значением, $\delta\varepsilon_r/\overline{\varepsilon}_r << 1$. Применяя формулы (23) и (29) преобразуем выражения (28) для коэффициентов сноса следующим образом:

$$K(\mathrm{q}) = -\alpha\mathrm{q}\left(\ln\frac{\mathrm{q}}{\overline{\mathrm{q}}} + \frac{\alpha\varepsilon^2}{4}\right) \approx \frac{\alpha}{\overline{\mathrm{q}}}\left[\overline{\mathrm{q}}\left(1 - \frac{\alpha\varepsilon^2}{4}\right)\mathrm{q} - \mathrm{q}^2\right] = \frac{\alpha}{\overline{\mathrm{q}}}(\lambda\mathrm{q} - \mathrm{q}^2), \tag{41}$$

и

$$K(\mathrm{q},\varepsilon) = K(\mathrm{q}) + \frac{1}{2}\alpha^2\varepsilon^2\,\mathrm{q} \approx \frac{\alpha}{\overline{\mathrm{q}}}\left(\lambda\mathrm{q} - \mathrm{q}^2 + \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2\overline{\mathrm{q}}\,\mathrm{q}\right). \tag{42}$$

Здесь использовано разложение в ряд логарифмической функции $\ln(\mathrm{q}/\bar{\mathrm{q}})$ в окрестности среднего значения $\bar{\mathrm{q}}$: $\ln(\mathrm{q}/\bar{\mathrm{q}}) \approx \Delta\mathrm{q}/\bar{\mathrm{q}} = -1 + \mathrm{q}/\bar{\mathrm{q}}$ и введен следующий (внешний) параметр

$$\lambda \equiv \bar{\mathrm{q}}\left(1-\alpha\varepsilon^2/4\right) = \bar{\mathrm{q}}\left[1-\frac{3}{8}\mu\ln(\mathbf{Re}/\mathbf{Re}_{\det})\right], \tag{43}$$

описывающий воздействие подсистемы осредненного движения на случайный процесс $\mathrm{q}(t)$. Тогда, с помощью преобразования подобия по времени $t' = t\alpha/\bar{\mathrm{q}}$ и применения обозначений $\varepsilon' = \sqrt{\alpha\bar{\mathrm{q}}}\,\varepsilon$ и $\xi'(t) = \sqrt{\bar{\mathrm{q}}/\alpha}\,\xi(t)$, уравнения (30) и (31) приводятся к следующему стандартному виду стохастической системы Ферхюльста

$$\frac{\partial \mathrm{q}(t)}{\partial t} = \lambda\mathrm{q}(t) - \mathrm{q}^2(t) + \varepsilon'\mathrm{q}(t)\cdot\xi'(t), \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_2(\mathrm{q},t) = -\frac{\partial}{\partial\mathrm{q}}\left\{\left[\lambda\mathrm{q}-\mathrm{q}^2+\frac{\varepsilon'^2}{2}\mathrm{q}\right]P_2(\mathrm{q},t)\right\} + \frac{\varepsilon'^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{q}^2}\left[\mathrm{q}^2P_2(\mathrm{q},t)\right]. \tag{45}$$

Стационарное решение $P^{st}(\mathrm{q})$ уравнения (45) определяется выражением

$$P^{st}(\mathrm{q}) = \begin{cases} N\mathrm{q}^{2(\lambda/\varepsilon'^2)-1}\exp(-2\mathrm{q}/\varepsilon'^2), & \lambda > 0 \\ \delta(\mathrm{q}), & \lambda < 0 \end{cases},$$

$$N^{-1} = \left(2/\varepsilon'^2\right)^{-2(\lambda/\varepsilon^2)}\Gamma(2\lambda/\varepsilon'^2). \tag{46}$$

где $\Gamma(x)$ – Гамма -функция. Отсюда видно, что стационарное решение существует (т.е. величина $P^{st}(\mathrm{q})$ интегрируема на интервале $[0,\infty)$) в том и только том случае, если $2\lambda/\varepsilon'^2$, т.е. если $\lambda > 0$. Кроме этого следует иметь в виду, что нуль ($\mathrm{q}=0$) является не только граничной, но и стационарной точкой, поэтому вся стационарная “масса” вероятности должна быть сосредоточена в нуле.

В модели Ферхюльста экстремумы плотности вероятности $P^{st}(\mathrm{q})$ совпадают с нулями уравнения

$$h(\mathrm{q},\varepsilon') \equiv \lambda\mathrm{q} - \mathrm{q}^2 - \frac{\varepsilon'^2}{2}\mathrm{q} = 0, \tag{47}$$

т.е. с

$$(\mathrm{q}_{ext})_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad (\mathrm{q}_{ext})_2 = \lambda - \varepsilon'^2/2 \tag{48}$$

(второй корень существует при условии $\lambda > \varepsilon'^2/2$). Точки в пространстве конфигураций, для которых $\partial h(\mathrm{q})/\partial\mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=\mathrm{q}_{ext}} = \lambda - 2\mathrm{q}_{\mathrm{ext}} - \varepsilon'^2/2 = 0$, соответствуют структурно-неустойчивым ситуациям, когда возможны фазовые переходы. Так как $\partial h(\mathrm{q})/\partial\mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=(\mathrm{q}_{ext})_2} \equiv -\lambda + \varepsilon'^2/2$ всегда меньше нуля, то корень $(\mathrm{q}_{ext})_2$ есть максимум стационарной плотности вероятности $P^{st}(\mathrm{q})$; производная $\partial h(\mathrm{q})/\partial\mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=(\mathrm{q}_{ext})_1} \equiv \lambda - \varepsilon'^2/2$ и, следовательно, корень $(\mathrm{q}_{ext})_1$ будет максимумом только при $0 < \lambda < \varepsilon'^2/2$ (когда $\partial h(\mathrm{q})/\partial \mathrm{q}\big|_{\mathrm{q}=(\mathrm{q}_{ext})_1} < 0$). Отсюда следует, что во флуктуирующем турбулентном хаосе (в рамках модели Ферхюльста) в отличие от детерминированного случая имеется две точки перехода. Таким образом можно утверждать следующее:

1) если $\lambda < 0$ (при этом $\alpha > 4/\varepsilon^2$), то стационарная точка нуль устойчива;

2) в точке $\lambda = 0$ (когда $\alpha = 4/\varepsilon^2$) происходит переход, так как при $\lambda > 0$ стационарная точка $(\mathrm{q}_{ext})_1 = 0$ становится неустойчивой и возникает новая подлино стационарная плотность вероятности;

3) в нуле стационарная плотность вероятности обращается в бесконечность, если $0 < \lambda < \varepsilon'^2/2$ (или $4/\varepsilon^2 > \alpha > 4/3\varepsilon^2$), т.е. сохраняет часть свойств δ-функции;

4) если параметр λ становится больше, чем $\varepsilon'^2/2$ ($\alpha < 4/3\varepsilon^2$), то характер распределения плотности снова резко меняется, т.е. $\lambda = \varepsilon'^2/2$ ($\alpha = 4/3\varepsilon^2$) – вторая точка перехода. Таким образом, переход в системе можно вызвать, поддерживая среднее состояние флуктуирующего хаоса, но увеличивая или уменьшая интенсивность шума в нем.

Заключение. Кратко суммируем основные результаты предпринятого исследования. Использование концепции двухуровневого описания турбулизованной жидкости в виде двух взаимодействующих континуумов (подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства непрерывно – подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса (мелкомасштабного пульсационного движения жидкости и внедренного в него ансамбля мезомасштабных КС) – позволяет построить феноменологическую гидродинамическую модель структурированной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытых системах. Введение в термодинамическое описание подсистемы турбулентного хаоса набора стохастических внутренних параметров, адекватно характеризующих структуру и временную эволюцию завихренной жидкости (включая ансамбль мезомасштабных КС) внутри физически бесконечно малого объема, дало возможность получить методами статистической неравновесной термодинамики уравнения ФПК для функций распределения вероятностей стохастических характеристик вихревых образований в пространстве внутренних координат. Эти уравнения предназначены для анализа марковских диффузионных процессов перехода из одного стационарно- неравновесного состояния в пространстве внутренних координат в другое в результате последовательной потери устойчивости при некотором росте надкритичности и выяснения того, как действительно выглядит плотность вероятности в окрестностях критических точек. Одновременно рассмотрен альтернативный метод исследования бифуркационных переходов подобного рода, основанный на стохастических уравнениях ланжевеновского типа, статистически эквивалентных выведенным кинетическим уравнениям.

Конечной целью развиваемого нами подхода является разработка макроскопической модели турбулентного движения жидкости, максимально приближенной к реальности и отвечающей различным динамическим условиям в природных средах. На этом пути предстоит еще преодолеть немало трудностей, поскольку создание универсальной модели представляется проблематичным. На это важное обстоятельство обращено, в частности, внимание в рецензии известного американского учёного А. Букингема на цитировавшуюся выше монографию М.Я. Марова и А.В. Колесниченко [3]: "...При исследовании проблемы турбулентности важно делать упор не только на выяснении её природы, но и на разработке моделей, позволяющих изучать влияние турбулентности на эволюцию сопутствующих физических процессов ─ задача, которая не только имеет огромный академический интерес, но и чревата возможными разочарованиями …" [29].

В настоящей работе соображения подобного рода были использованы при синергетическом моделировании развитой структурированной турбулентности. Продемонстрирована принципиальная возможность самоорганизации потока, когда в процессе временной эволюции квазиравновесной вихревой подсистемы, вероятно генерирование когерентных образований, связанное с эффектом фазовых переходов, индуцированных естественным шумом флуктуирующего турбулентного хаоса. Показано, что если шум хаоса мультипликативен и его интенсивность достаточно велика, то экстремумы плотности вероятности, характеризующей стационарное поведение стохастической системы, и по числу и по положению существенно отличаются от стационарных состояний соответствующей детерминированной системы. А это означает, что шум турбулентного хаоса не только оказывает дезорганизующее воздействие на систему определяющих параметров, но может как стабилизировать новые макроскопические состояния, так и вызывать новые неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках детерминированного подхода.

Один из конкретных механизмов формирования и эволюции мезомасштабных КС в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса был рассмотрен ранее в работе автора [30], в которой сформулирована общая концепция синергетического рождения мезомасштабных КС из турбулентного хаоса, связанная с явлением фазово-частотной синхронизации автоколебаний той части внутренних координат, которая относится к когерентной составляющей хаоса, а также рассмотрены некоторые сценарии динамического влияния некогерентной составляющей (мелкозернистого флуктуационного поля) турбулентного хаоса на образование и эволюцию мезомасштабных вихревых структур.

Список литературы

1. Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности// Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 1. С. 37-66.

2. Колесниченко А.В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии//Астрон. Вестник. 2004. Т.38. № 2. С. 144-170.

3. Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers, 2002. 375 p.

4. Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность многокомпонентных сред. М.: Наука, 1999. 336 с.

5. Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. М.: МФТИ. 2002. 267 с.

6. Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Methods of nonequilibrium thermodynamics for description of multicomponent turbulens gas mixture//Arch.Mech. 1985. V. 37. № 1-2. P. 3-19.

7. Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа "Прогресс", 1994. 240 с.

8. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961. 558 с.

9. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.2. С-Пб: Гидрометеоиздат, 1996. 742 с.

10. Кадомцев Б.Б., Рязанов А.И. Что такое синергетика?// Природа.1983. № 8. С.2-11.

11. Horsthemke W., Lefever R. Noise Induced Transitions. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. 1984. 395 p.

12. Гардинер К.В. Стохастические задачи в естественных науках. М.: Мир, 1986. 526 с.

13. Гихман И. И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка. 1968. 354 с.

14. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.

15. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука. 1967. 408 с.

16. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

17. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса//ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299-303.

18. Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1988. 733 с.

19. Frisch U. Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press. 1995. 296 p.

20. Obukhov A.M. Some specific features of atmospheric turbulence// J. Fluid Mech. 1962. V.13 Pt. 1. P.77-81.

21. Колмогоров А.Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса//In: Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout - sept. 1961/ На рус. и фр. яз. Paris. 1962. P. 447-458.

22. Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E.J. & Antonia R.A. High-order velocity structure functions in turbulent shear flow// J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 63-89.

23. Frenkiel F.N., Klebanoff P.S. On the log-normality of the small-scale structure of turbulence// Bound. Layer Meteorol. 1975. V.8. №2. P. 173-200.

24. She Z.S., Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence// Physical Review Letters.1994. V. 72. P.336-339.

25. Dubrulle B. Intermittency in fully developed turbulence: log-Poisson statistics and generalized scale covariance// Physical Review Letters. 1994. V. 73. P. 959-962.

26. Crow S.C., Champagne F.H. Orderly structures in jet turbulence// J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 547-591.

27. Brown G. L., Roshko A. On density effects and large structures in turbulent mixing layers// J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775-816.

28. Бостанджиян В.А. Пособие по статистическим распределениям. Черниголовка, 2000. 1007 с.

29. Buckingham A. 1R38. Mechanics of turbulence of multicomponent gases//Appl. Mechanics Rev. 2003. V.56. №1. P. 811-813.

30. Колесниченко А.В. О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности//Астроном. вестн. 2004. Т. 38. №. 5. С. 405-427.