Асимптотика γ-форм генерируемых совместно ортогональными многочленами*

Аптекарев А.И., Лысов В.Г.

1 Введение

Рассмотрим постоянную Эйлера γ

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = -\int\limits_0^\infty \ln x\, e^{-x}dx.$$

Интегрирование полиномиальных последовательностей $\{Q_n\}$ генерирует γ-формы

$$f_n = p_n - \gamma q_n = \int_0^\infty Q_n(x)\ln x\, e^{-x}dx\,, \tag{1}$$

причем, коэффициент при γ в форме (1) равен

$$q_n = \int_0^\infty Q_n(x)e^{-x}dx. \tag{2}$$

Настоящая работа посвящена получению асимптотики γ-форм генерируемых последовательностью многочленов

$$Q_n(x) = \frac{1}{(n!)^2}\frac{e^x}{x-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-1)^{2n+1}x^ne^{-x} \tag{3}$$

Эти многочлены, впервые, появились в работе [1]. Они являются общими знаменателями рациональных аппроксимаций Эрмита-Паде для системы из четырех функций

$$\hat\mu_k(x) := \int_0^1 \frac{w_k(x)}{z-x}\,dx\,, \qquad \hat S_k(x) := \int_1^\infty \frac{w_k(x)}{z-x}\,dx\,, \qquad k=1,2\,,$$

задаваемых весами

$$w_1(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)}\,, \qquad w_2(x) = \frac{\ln(x)e^{-x}}{(1-x)}\,.$$

*Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой №1 ОМН РАН, грантами РФФИ-05-01-00522 и ИНТАС-03-51-6637

Результатом работы является

Теорема 1. *Пусть q_n и f_n определены в* (2) *и в* (1) *соответственно. Тогда справедливы асимптотические формулы*

$$
\begin{aligned}
q_n = (2n)! \quad \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(4e)^{3/8}} + O\left(n^{-1/2}\right) \right), \\
f_n = p_n - \gamma q_n = (2n)! \quad \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{(4e)^{3/8}} + O\left(n^{-1/2}\right) \right),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2 Доказательство Теоремы

Идея доказательства состоит в получении контурных интегральных представлений для q_n и f_n, с последующим применением метода перевала. Напомним основное соотношение метода перевала

$$
\int \phi(t) e^{n\psi(t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{-n\psi''(t_0)}} \phi(t_0) e^{n\psi(t_0)} \left(1 + O\left(n^{-3/2}\right)\right) \tag{5}
$$

где контур интегрирования в левой части (5) и точка t_0 в правой части выбирается так, чтобы

$$
\psi'(t_0) = 0 \quad \psi''(t_0) < 0 \, .
$$

2.1 Асимптотика q_n.

Вначале, получим интегральное представление для последовательности q_n. Подставим выражение (3) в (2) и применим формулу интегрирования по частям $2n$ раз. Заметив, что все внеинтегральные члены равны нулю, имеем

$$
q_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{x^n}{(x-1)^{n+1}} \, dx. \tag{6}
$$

Производную в последнем интеграле запишем в виде формулы Коши, получим

$$
q_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_0^\infty (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} dx \int_{\gamma_x} \frac{t^n dt}{(t-1)^{n+1}(t-x)^{n+1}}, \tag{7}
$$

где γ_x – контур, обходящий точку x против часовой стрелки.

Полагая $x = ny$ и $t = \sqrt{n}s$, получаем

$$
q_n = \frac{n^{2n+1}}{2\pi i} \int_0^\infty (y - 1/n)^{2n+1} y^{-1} e^{-ny} dy \int_{\gamma_{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \frac{s^n ds}{(s - \frac{1}{\sqrt{n}})^{n+1} (1 - \frac{s}{\sqrt{n} y})^{n+1}}. \tag{8}
$$

Найдем асимптотику внутреннего интеграла методом перевала. Обозначим,

$$F_1(s) = \frac{s}{(s-\frac{1}{\sqrt{n}})(1-\frac{s}{\sqrt{ny}})}, \quad \varphi_1(s) = (s-\frac{1}{\sqrt{n}})^{-1}(1-\frac{s}{\sqrt{ny}})^{-1}, \tag{9}$$

где $y > 0$. Функция $F_1(s)$ имеет две точки перевала: $s = \pm\sqrt{y}$, в которых принимает значения: $F_1(\pm\sqrt{y}) = \frac{y}{(\pm\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{n}})^2}$. Таким образом, $|F_1(\sqrt{y})| > |F_1(-\sqrt{y})|$. Как легко видеть из графика функции $F(s)$ при вещественных s, контур $\gamma_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ можно деформировать в контур, проходящий через точку $\sqrt{y}$ на котором выполняется $|F_1(s)| \le |F_1(\sqrt{y})|$, причем равенство достигается только при $s = \sqrt{y}$. Значения $\ln F_1(\sqrt{y})$, $\frac{d^2 \ln F_1}{ds^2}(\sqrt{y})$ и $\varphi(\sqrt{y})$ равны соответственно

$$\ln F_1(\sqrt{y}) = \frac{2}{\sqrt{ny}} + \frac{1}{ny} + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \tag{10}$$

$$\frac{d^2 \ln F_1}{ds^2}(\sqrt{y}) = \frac{2}{\sqrt{ny^3}} + \mathcal{O}(n^{-1}), \tag{11}$$

$$\varphi_1(\sqrt{y}) = \sqrt{y} + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \tag{12}$$

Таким образом, равномерно по y на компактах в $(0,\infty)$, имеем

$$\int_{\gamma_{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \frac{s^n ds}{(s-\frac{1}{\sqrt{n}})^{n+1}(1-\frac{s}{\sqrt{ny}})^{n+1}} = \sqrt{\pi} i n^{-1/4} y^{1/4} e^{2\sqrt{n/y}+1/y}(1+\mathcal{O}(n^{-1/2})). \tag{13}$$

Подставляя полученную формулу в (8), получаем

$$q_n = \frac{n^{2n+3/4}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (y-1/n)^{2n+1} y^{-3/4} e^{-ny+2\sqrt{n/y}+1/y} dy (1+\mathcal{O}(n^{-1/2})). \tag{14}$$

Найдем теперь асимптотику q_n. Пусть

$$\psi_2(y) = 2\ln(y-1/n) - y + 2/\sqrt{ny}, \quad \varphi_2(y) = (y-1/n) y^{-3/4} e^{1/y}. \tag{15}$$

На положительной полуоси ψ_2 достигает глобального максимума в точке $y_0 = 2 - 1/\sqrt{2n} + 7/(8n) + \mathcal{O}(n^{-3/2})$.

$$\psi_2(y_0) = 2\ln 2 - 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} - \frac{7}{8n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \tag{16}$$

$$\psi_2''(y_0) = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \tag{17}$$

$$\varphi_2(y_0) = 2^{1/4} e^{1/2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \tag{18}$$

Таким образом, асимптотическая формула для q_n имеет вид

$$\begin{aligned} q_n = (2n)^{2n+1/4} e^{-2n+\sqrt{2n}-3/8}(1+\mathcal{O}(n^{-1/2})) = \\ \pi^{-1/2}(2n)!(8n)^{-1/4} e^{\sqrt{2n}-3/8}(1+\mathcal{O}(n^{-1/2})). \end{aligned} \tag{19}$$

2.2 Асимптотика f_n.

Аналогично предыдущему пункту, получаем интегральное выражение для f_n:

$$f_n = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^\infty (x-1)^{2n+1}x^n e^{-x}dx \int_{\gamma_x}\frac{s^n ds}{(s-x)^{n+1}}\int_{\gamma_s}\frac{\ln t\,dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}}. \tag{20}$$

Преобразуем интеграл по γ_s:

$$\int_{\gamma_s}\frac{\ln t\,dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}} = 2\pi i\int_{-\infty}^0\frac{dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}} = (-1)^n 2\pi i\int_0^\infty\frac{dt}{(t+1)(t+s)^{n+1}}. \tag{21}$$

По теореме Фубини, поменяем порядок интегрирования:

$$f_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_0^\infty (x-1)^{2n+1}x^n e^{-x}dx\int_0^\infty\frac{dt}{t+1}\int_{\gamma_x}\frac{s^n ds}{(t+s)^{n+1}(s-x)^{n+1}}. \tag{22}$$

Сделаем замену переменных $x = ny$, $s = \sqrt{n}u$:

$$f_n = \frac{-n^{2n+1}}{2\pi i}\int_0^\infty (y-1/n)^{2n+1}y^n e^{-ny}dy\int_0^\infty\frac{dt}{t+1}\int_{\gamma_{\frac{-t}{\sqrt{n}}}}\frac{u^n du}{(u+t/\sqrt{n})^{n+1}(y-u/\sqrt{n})^{n+1}}. \tag{23}$$

Найдем асимптотику внутреннего интеграла. Положим,

$$\psi_3(u) = \ln u - \ln(u+t/\sqrt{n}) - \ln(y-u/\sqrt{n}), \quad \varphi_3(u) = (u+t/\sqrt{n})^{-1}(y-u/\sqrt{n})^{-1}. \tag{24}$$

Производная функции $\psi_3(u)$ обращается в нуль в точках $u_0^\pm = \pm i\sqrt{ty}$. Через эти точки проведем контур, эквивалентный $\gamma_{\frac{-t}{\sqrt{n}}}$, так, чтобы наибольшее значение $\operatorname{Re}\psi_3(u)$ на контуре достигалось в точках перевала $u_0^\pm$. Соответствующие направления наибыстрейшего спуска ($\psi_3''(u_0^\pm)(\varepsilon e^{i\theta} - u_0^\pm)^2 \le 0$, при $\varepsilon > 0$) задаются углами $\theta = 3\pi/4$, в точке u_0^+ и $\theta = \pi/4$, в точке u_0^-. Далее,

$$\psi_3(u_0^\pm) = -\ln y \pm 2i\sqrt{\frac{t}{ny}} - \frac{t}{ny} + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \tag{25}$$

$$\psi_3''(u_0^\pm) = \frac{\mp 2i}{\sqrt{ny^3t}} + \mathcal{O}(n^{-1}), \tag{26}$$

$$\varphi_3(u_0^\pm) = \frac{\mp i}{\sqrt{y^3t}} + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \tag{27}$$

Сложим вклады в асимптотику интеграла верхней и нижней точек перевала

$$\pi^{1/2}n^{-1/4}t^{-1/4}y^{-n-3/4}e^{-t/y}(e^{2i(nt/y)^{1/2}+\pi i/4} - e^{-2i(nt/y)^{1/2}-\pi i/4}). \tag{28}$$

То есть

$$\int_{\gamma_{\frac{-t}{\sqrt{n}}}} \frac{u^n du}{(u+t/\sqrt{n})^{n+1}(y-u/\sqrt{n})^{n+1}} = \\ \frac{2i\pi^{1/2}n^{-1/4}e^{-t/y}}{t^{1/4}y^{n+3/4}}(\sin(2\sqrt{nt/y}+\pi/4)+\mathcal{O}(n^{-1/2})). \tag{29}$$

Подставляем это значение в формулу для f_n (23):

$$f_n = \frac{n^{2n+3/4}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{(y-1/n)^{2n+1}e^{-ny}dy}{y^{3/4}}\int_0^\infty \frac{(\sin(2\sqrt{nt/y}+\pi/4)+\mathcal{O}(n^{-1/2}))e^{-t/y}dt}{(t+1)t^{1/4}}. \tag{30}$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2\sqrt{nt/y}+\pi/4)e^{-t/y}dt}{(t+1)t^{1/4}} = \frac{1}{2i}(I-\bar{I}), \tag{31}$$

где

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-t/y+2i\sqrt{nt/y}+\pi i/4}dt}{(t+1)t^{1/4}}. \tag{32}$$

Можно считать, что ветви радикалов, входящих в определение I, голоморфны в $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ и положительны при подходе к $\mathbb{R}_+$ сверху. Таким образом, заменяя контур интегрирования на эквивалентный, имеем

$$I = \int_{(0,\infty)_+} \frac{e^{-t/y+2i\sqrt{nt/y}+\pi i/4}dt}{(t+1)t^{1/4}} = \int_{(0,-\infty)_+} \frac{e^{-t/y+2i\sqrt{nt/y}+\pi i/4}dt}{(t+1)t^{1/4}}. \tag{33}$$

По теореме о вычетах,

$$I = \int_{(0,-\infty)_-} \frac{e^{-t/y+2i\sqrt{nt/y}+\pi i/4}dt}{(t+1)t^{1/4}} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{t=-1} \frac{e^{-t/y+2i\sqrt{nt/y}+\pi i/4}}{(t+1)t^{1/4}}. \tag{34}$$

Последнее выражение преобразуется к виду

$$I = \int_{(0,\infty)_-} \frac{e^{-t/y+2i\sqrt{nt/y}+\pi i/4}dt}{(t+1)t^{1/4}} + 2\pi i e^{-2\sqrt{n/y}+1/y}. \tag{35}$$

С другой стороны, на $\mathbb{R}_+$, $t_-^{1/2} = -t_+^{1/2}$ и $t_-^{1/4} = it_+^{1/4}$. Поэтому,

$$I = \int_{(0,\infty)_+} \frac{e^{-t/y-2i\sqrt{nt/y}-\pi i/4}dt}{(t+1)t^{1/4}} + 2\pi i e^{-2\sqrt{n/y}+1/y} = \bar{I} + 2\pi i e^{-2\sqrt{n/y}+1/y}. \tag{36}$$

Подставим это выражение в (31), получим:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2\sqrt{nt/y}+\pi/4)e^{-t/y}dt}{(t+1)t^{1/4}} = \pi e^{-2\sqrt{n/y}+1/y}. \tag{37}$$

Далее,

$$f_n = n^{2n+3/4}\sqrt{\pi}\int_0^\infty (y-1/n)^{2n+1}y^{-3/4}e^{1/y-2\sqrt{n/y}-ny}dy(1+O(n^{-1/2})). \tag{38}$$

Асимптотику этого интеграла, находим аналогично (14). Обозначим,

$$\psi_4(y) = 2\ln(y-1/n) - y - 2/\sqrt{ny}, \quad \varphi_4(y) = (y-1/n)y^{-3/4}e^{1/y}. \tag{39}$$

На положительной полуоси ψ_4 достигает глобального максимума в точке $y_0 = 2 + 1/\sqrt{2n} + 7/(8n) + \mathcal{O}(n^{-3/2})$.

$$\psi_4(y_0) = 2\ln 2 - 2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} - \frac{7}{8n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \tag{40}$$

$$\psi_4''(y_0) = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \tag{41}$$

$$\varphi_4(y_0) = 2^{1/4}e^{1/2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \tag{42}$$

Таким образом, асимптотическая формула для f_n имеет вид

$$\begin{aligned} f_n = 2\pi(2n)^{2n+1/4}e^{-2n-\sqrt{2n}-3/8}(1+\mathcal{O}(n^{-1/2})) = \\ 2\pi^{1/2}(2n)!(8n)^{-1/4}e^{-\sqrt{2n}-3/8}(1+\mathcal{O}(n^{-1/2})). \end{aligned} \tag{43}$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho and W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc., **355** - (10), (2003), 3887–3914.