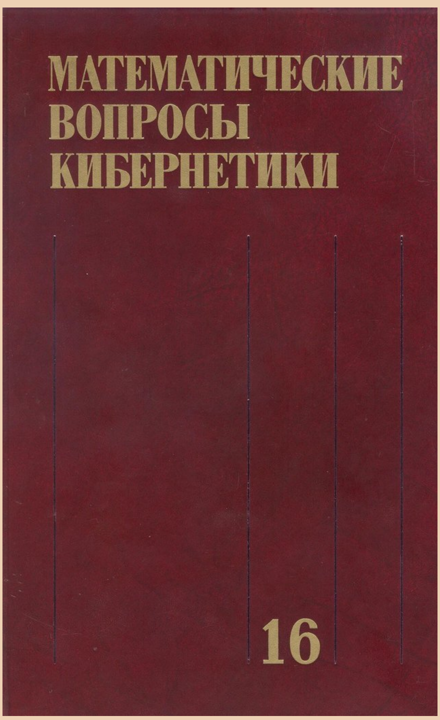

М. Ю. Мошков

Оценки сложности и алгоритмы построения детерминированных условных тестов

ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ УСЛОВНЫХ ТЕСТОВ

М. Ю. МОШКОВ

(СОСНОВЕЦ, ПОЛЬША)

§ 1. Введение

Деревья решений используются в различных приложениях как алгоритмы решения задач и как способ представления информации. Один из основных подходов к исследованию деревьев решений состоит в применении методов математической теории тестов, берущей свое начало с работ С. В. Яблонского и И. А. Чегис [3, 4]. При этом моделью задачи служит тестовая таблица, а моделью дерева решений — условный тест. В работе понятие тестовой таблицы обобщается с целью моделирования задач, у которых имеется несколько решений и требуется найти хотя бы одно из них. К числу таких задач относятся, например, многие задачи дискретной оптимизации. Обобщенные тестовые таблицы возникают естественным образом и в теории грубых множеств [5, 6] при изучении задач классификации и предсказания, в которых исходная информация не всегда достаточна для однозначного выбора решения.

Тестовая таблица — заполненная числами из $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ прямоугольная таблица, в которой строки попарно различны, и каждой строке приписано непустое конечное подмножество множества ω. Тестовой таблице сопоставляется игра двух игроков: первый игрок загадывает строку таблицы, а второй игрок должен найти некоторое число из множества, приписанного строке. Для этого он задает вопросы: выбрав столбец таблицы, спрашивает, какое число содержит выбранный столбец на пересечении с загаданной строкой. Детерминированные стратегии второго игрока, представленные в виде конечных ориентированных деревьев с корнем, называются детерминированными условными тестами таблицы.

В работе изучаются верхние оценки временной сложности и алгоритмы построения детерминированных условных тестов тестовых таблиц.

Работа состоит из пяти параграфов. Во втором параграфе обсуждаются основные понятия. В третьем параграфе приводятся нижние оценки сложности условных тестов, полученные в работе [2] и используемые в дальнейшем. В четвертом и пятом параграфах рассматриваются два подхода к получению верхних оценок сложности и разработке алгоритмов построения условных тестов. Некоторые из полученных результатов обобщают результаты работы [1].

§ 2. Основные понятия

В этом параграфе приводятся определения тестовой таблицы, схемы дерева решений, детерминированного условного теста, функции сложности и нумерованной сигнатуры.

Обозначим $\mathscr{P}(\omega)$ — множество всевозможных непустых конечных подмножеств множества ω. Для $k\in\omega$, $k\geqslant 2$, обозначим $E_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$.

Пару $\rho=(F,k)$ будем называть *сигнатурой*, если F — непустое множество и $k\in\omega$, $k\geqslant 2$. Множество F интерпретируется как множество имен проверок (атрибутов), принимающих значения из множества E_k.

Для произвольного непустого множества A обозначим A^* множество всевозможных конечных слов в алфавите A, которое содержит пустое слово λ и на котором определена операция приписывания слов. Обозначим $\Omega_\rho=\{(f,\delta):f\in F,\delta\in E_k\}^*$.

Определим на множестве 2^ω две частичные функции min и max, принимающие значения из ω. Пусть $B\subseteq\omega$. Если $B=\varnothing$, то значение $\min B$ не определено, а если $B\neq\varnothing$, то $\min B$ — минимальное число из B. Если B — пустое или бесконечное множество, то значение $\max B$ не определено, а если B — непустое конечное множество, то $\max B$ — максимальное число из B.

2.1. Тестовые таблицы. Тройку $T=(\Delta,\nu,\mu)$ будем называть *тестовой таблицей сигнатуры* $\rho=(F,k)$, если существует $n\geqslant 1$ такое, что $\Delta\subseteq E_k^n$, $\nu:\Delta\to\mathscr{P}(\omega)$, $\mu:\{1,\ldots,n\}\to F$, и для любых $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, если $i\neq j$, то $\mu(i)\neq\mu(j)$.

Тестовую таблицу T можно представить в виде прямоугольной таблицы с n столбцами, которым приписаны имена проверок $\mu(1),\ldots,\mu(n)$. Множество строк таблицы T совпадает с множеством наборов Δ. Строки интерпретируются как наборы значений соответствующих проверок. Каждой строке $\bar\delta\in\Delta$ приписано множество решений $\nu(\bar\delta)$.

В дальнейшем множество Δ и функции ν, μ, определяющие таблицу T, будем обозначать $\Delta(T)$, ν_T и μ_T соответственно. Число n будем называть *размерностью таблицы* T и обозначать $\dim T$.

Обозначим $P(T)=\{\mu_T(i):i=1,\ldots,n\}$, $\Pi(T)=\bigcap\limits_{\bar\delta\in\Delta(T)}\nu_T(\bar\delta)$ и $\Omega_\rho(T)=$ $=\{(f,\delta):f\in P(T),\delta\in E_k\}^*$.

Пусть $\alpha\in\Omega_\rho(T)$. Таблице T и слову α сопоставим тестовую таблицу $T\alpha$ сигнатуры ρ. Если $\alpha=\lambda$, то $T_\alpha=T$. Пусть $\alpha\neq\lambda$, $\alpha=(f_1,\delta_1)\ldots(f_m,\delta_m)$ и $i_1,\ldots,i_m$ — числа из $\{1,\ldots,n\}$, для которых $\mu(i_1)=f_1,\ldots,\mu(i_m)=f_m$. Тогда $\Delta(T_\alpha)=\{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n):(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in\Delta(T),\sigma_{i_1}=\delta_1,\ldots,\sigma_{i_m}=\delta_m\}$, ν_{T_α} — ограничение отображения ν_T на множество $\Delta(T_\alpha)$ и μ_α — отображение, совпадающее с отображением μ.

Обозначим $\mathscr{M}_\rho$ множество всевозможных тестовых таблиц сигнатуры ρ и обозначим $\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}=\{T:T\in\mathscr{M}_\rho,\Pi(T)\neq\varnothing\}\cup\{T:T\in\mathscr{M}_\rho,\Delta(T)=\varnothing\}$. Для $m\in\omega\setminus\{0\}$ обозначим $\mathscr{M}_\rho(m)$ множество всевозможных таблиц T из $\mathscr{M}_\rho$ таких, что $\left|\nu_T(\bar\delta)\right|\leqslant m$ для любого $\bar\delta\in\Delta(T)$.

Обозначим $\mathscr{M}_\rho\mathscr{F}$ множество всевозможных таблиц T из $\mathscr{M}_\rho(1)$ таких, что $\Delta(T)=E_k^{\dim T}$.

Таблицу $T\in\mathscr{M}_\rho$ будем называть *диагностической*, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\Delta(T)\neq\varnothing$;

б) для любых $\bar\delta_1,\bar\delta_2\in\Delta(T)$, если $\bar\delta_1\neq\bar\delta_2$, то $\nu_T(\bar\delta_1)\cap\nu_T(\bar\delta_2)=\varnothing$.

2.2. Схемы деревьев решений. *Конечным ориентированным деревом с корнем* будем называть конечное ориентированное дерево, в котором ровно в одну вершину не входят дуги. Эту вершину будем называть *корнем*. Вершины дерева, из которых не выходят дуги, будем называть *концевыми вершинами*. *Полным путем* конечного ориентированного дерева с корнем G будем называть последовательность $\xi = w_0, d_0, \ldots, w_m, d_m, w_{m+1}$ вершин и дуг дерева G, в которой w_0 — корень G, w_{m+1} — концевая вершина G, и для $i=0,\ldots,m$ дуга d_i выходит из вершины w_i и входит в вершину w_{i+1}.

Схемой дерева решений сигнатуры ρ (*схемой сигнатуры* ρ) будем называть содержащее не менее двух вершин помеченное конечное ориентированное дерево с корнем, в котором:

а) корню и выходящим из него дугам ничего не приписано;

б) каждой вершине, не являющейся ни корнем, ни концевой вершиной, приписан элемент множества F;

в) каждой дуге, выходящей из вершины, не являющейся корнем, приписано число из E_k;

г) каждой концевой вершине приписано число из ω.

Обозначим $\mathscr{C}_\rho$ множество всевозможных схем деревьев решений сигнатуры ρ. Схему из $\mathscr{C}_\rho$ будем называть *детерминированной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) из корня схемы выходит ровно одна дуга;

б) для любой вершины схемы, не являющейся ни корнем, ни концевой вершиной, дугам, выходящим из этой вершины, приписаны попарно различные числа.

Пусть $\Gamma \in \mathscr{C}_\rho$. Обозначим $P(\Gamma)$ множество элементов из F, приписанных вершинам Γ, не являющимся ни корнем, ни концевой вершиной. Обозначим $\Omega_\rho(\Gamma) = \{(f,\delta) : f \in P(\Gamma), \delta \in E_k\}^*$. Каждой вершине w схемы Γ сопоставим слово $\pi_\Gamma(w) \in \Omega_\rho(\Gamma)$. Корню Γ и вершине, в которую входит дуга, выходящая из корня, сопоставим слово λ. Пусть из вершины w_1 выходит дуга, которая входит в вершину w_2 и которой приписано число δ. Пусть вершине w_1 приписан элемент f. Тогда $\pi_\Gamma(w_2) = \pi_\Gamma(w_1)(f,\delta)$. В дальнейшем, когда из изложения будет ясно, о какой схеме Γ идет речь, часто будем опускать индекс Γ и обозначать $\pi(w)$ слово $\pi_\Gamma(w)$.

Пусть $\xi = w_0, d_0, \ldots, w_m, d_m, w_{m+1}$ — полный путь схемы Γ. Обозначим $\pi(\xi) = \pi_\Gamma(w_{m+1})$. Если $m = 0$, то $\pi(\xi) = \lambda$. Пусть $m > 0$ и для i, $i = 1, \ldots, m$, вершине w_i приписан элемент f_i, а дуге d_i приписано число δ_i. Тогда $\pi(\xi) = (f_1, \delta_1) \ldots (f_m, \delta_m)$. Обозначим $\Xi(\Gamma)$ множество всевозможных полных путей схемы Γ.

2.3. Детерминированные условные тесты. Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$. Схему $\Gamma \in \mathscr{C}_\rho$ будем называть *детерминированным условным тестом таблицы* T, если она обладает следующими свойствами:

а) Γ — детерминированная схема;

б) $P(\Gamma) \subseteq P(T)$;

в) $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi(\Gamma)} \Delta(T\pi(\xi)) = \Delta(T)$;

г) для любого $\xi \in \Xi(\Gamma)$ выполняется соотношение $T\pi(\xi) \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и, если $\Delta(T\pi(\xi)) \neq \varnothing$, то число, приписанное концевой вершине пути ξ, принадлежит множеству $\Pi(T\pi(\xi))$.

2.4. Функции сложности. *Функцией сложности сигнатуры* ρ будем называть произвольное отображение $\psi : F^* \to \omega$. Продолжим функцию сложности ψ на множества Ω_ρ и $\mathscr{C}_\rho$. Значения ψ на пустых словах из Ω_ρ и F^* совпадают. Пусть $\alpha \in \Omega_\rho$, $\alpha \neq \lambda$ и $\alpha = (f_1, \delta_1)\ldots(f_m, \delta_m)$. Тогда $\psi(\alpha) = \psi(f_1 \ldots f_m)$. Пусть $\Gamma \in \mathscr{C}_\rho$. Тогда $\psi(\Gamma) = \max\{\psi(\pi(\xi)) : \xi \in \Xi(\Gamma)\}$.

Определим отношение $R_\rho^d \subseteq \mathscr{C}_\rho \times \mathscr{M}_\rho$. Пусть $(\Gamma, T) \in \mathscr{C}_\rho \times \mathscr{M}_\rho$. Тогда $(\Gamma, T) \in R_\rho^d$ в том и только в том случае, когда Γ является детерминированным условным тестом таблицы T.

Сопоставим функции сложности ψ функции $\psi_\rho^i : \mathscr{M}_\rho \to \omega$ и $\psi_\rho^d : \mathscr{M}_\rho \to \omega$. Пусть T — таблица из $\mathscr{M}_\rho$ размерности n. Тогда

$$\psi_\rho^i(T) = \psi(\mu_T(1) \ldots \mu_T(n)), \quad \psi_\rho^d(T) = \min\{\psi(\Gamma) : (\Gamma, T) \in R_\rho^d\}.$$

В ряде случаев будем требовать, чтобы функция сложности ψ обладала некоторыми из перечисленных ниже свойств:

$\Lambda 1$ $\psi(\alpha_1\alpha_2) \leqslant \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in F^*$;

$\Lambda 2$ $\psi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \geqslant \psi(\alpha_1\alpha_3)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F^*$;

$\Lambda 3$ $\psi(\alpha) \geqslant |\alpha|$ для любого $\alpha \in F^*$, где $|\alpha|$ — длина слова α.

Приведем примеры функций сложности.

1) *Взвешенной глубиной* будем называть произвольную функцию $\psi : F^* \to \omega$, обладающую следующими свойствами: $\psi(\lambda) = 0$, $\psi(f) > 0$ для любого элемента $f \in F$, и

$$\psi(f_1 \ldots f_m) = \sum_{i=1}^{m} \psi(f_i)$$

для любого непустого слова $f_1 \ldots f_m \in F^*$. Взвешенную глубину ψ, для которой $\psi(f) = 1$ для любого $f \in F$, будем называть *глубиной* и будем обозначать h. Нетрудно заметить, что взвешенная глубина обладает свойствами $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ и $\Lambda 3$.

2) *Экстремальной* функцией сложности будем называть произвольную функцию $\psi : F^* \to \omega$, обладающую следующими свойствами: $\psi(\lambda) = 0$ и

$$\psi(f_1 \ldots f_m) = \max\{\psi(f_1), \ldots, \psi(f_1)\}$$

для любого непустого слова $f_1 \ldots f_m \in F^*$. Нетрудно заметить, что экстремальная функция сложности обладает свойствами $\Lambda 1$ и $\Lambda 2$.

Пусть ψ_1, ψ_2 — функции сложности сигнатуры ρ и $i \in \{1, 2\}$. Непосредственно проверяется, что, если функции ψ_1 и ψ_2 обладают свойством Λi, то свойством Λi обладают и функции сложности ψ_3 и ψ_4, где $\psi_3(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha)$ и $\psi_4(\alpha) = \max\{\psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha)\}$ для любого $\alpha \in F^*$. Если функция ψ_1 обладает свойством $\Lambda 3$, то функции ψ_3 и ψ_4 также обладают свойством $\Lambda 3$.

2.5. Нумерованные сигнатуры. Обозначим $[i]_2$ запись числа $i \in \omega$ в двоичной системе счисления. Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура, и существует буква f, для которой $f \notin \{0, 1\}^*$ и $F = \{f[i]_2 : i \in \omega\}$. В этом случае сигнатуру ρ будем называть *нумерованной*. Элемент $f[i]_2$ из F часто будем обозначать f_i. Обозначим $A = \{(,),^{,}, f, 0, 1\}$.

Пусть $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m} \in F$ и $\delta_1, \ldots, \delta_m \in E_k$. Слово

$$(f[i_1]_2, [\delta_1]_2) \ldots (f[i_m]_2, [\delta_m]_2)$$

в алфавите A будем называть *бинарной формой слова* $(f_{i_1}, \delta_1) \ldots (f_{i_m}, \delta_m)$.

Для набора $\bar\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ из E_k^n обозначим $[\bar\delta]_2 = ([\delta_1]_2, \ldots, [\delta_n]_2)$. Для конечного непустого множества $D = \{d_1, \ldots, d_r\}$, $\{d_1, \ldots, d_r\} \subset \omega$, обозначим $[D]_2 = ([d_1]_2, \ldots, [d_r]_2)$. Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$, $\dim T = n$ и $\Delta(T) = \{\bar\delta_1, \ldots, \bar\delta_m\}$. Слово

$$(([\bar\delta_1]_2, [\nu_T(\bar\delta_1)]_2), \ldots, ([\bar\delta_m]_2, [\nu_T(\bar\delta_m)]_2), (\mu_T(1), \ldots, \mu_T(n)))$$

в алфавите A будем называть *бинарной формой таблицы* T.

В дальнейшем, когда речь пойдет об алгоритмах над тестовыми таблицами, обычно будем предполагать, что рассматриваемая сигнатура ρ является нумерованной, любая таблица $T \in \mathcal{M}_\rho$ представлена в бинарной форме и любое слово из $\Omega_\rho(T)$ также представлено в бинарной форме.

§ 3. Нижние оценки сложности условных тестов

В этом параграфе рассматриваются некоторые параметры тестовых таблиц, вспомогательные утверждения и нижние оценки сложности детерминированных условных тестов из [2], используемые в дальнейшем.

3.1. Параметры таблиц. Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура. Пусть $\alpha \in \Omega_\rho$. Обозначим $\chi(\alpha)$ множество букв алфавита $\{(f, \delta) : f \in F, \delta \in E_k\}$, входящих в слово α. Будем говорить, что слово α *противоречиво*, если существуют элемент $f \in F$ и числа $\sigma, \delta \in E_k$ такие, что $(f, \sigma) \in \chi(\alpha)$, $(f, \delta) \in \chi(\alpha)$ и $\sigma \neq \delta$. Если слово α не является противоречивым, то будем говорить, что оно *непротиворечиво*. Пусть $\alpha, \beta \in \Omega_\rho$. Если слово $\alpha\beta$ непротиворечиво, то будем говорить, что слова α и β *совместимы*. В противном случае будем говорить, что слова α и β *несовместимы*.

Пусть ψ — функция сложности сигнатуры ρ, и Ω — непустое конечное подмножество множества Ω_ρ. Обозначим $\psi(\Omega) = \max\{\psi(\alpha) : \alpha \in \Omega\}$. Пусть T — таблица размерности n из $\mathcal{M}_\rho$ и $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$. Обозначим $\widehat{\Omega}_\rho(T)$ множество всевозможных непротиворечивых слов из $\Omega_\rho(T)$.

Конечное множество $\Omega \subseteq \widehat{\Omega}_\rho(T)$ будем называть *надпокрытием таблицы* T, если выполняются следующие условия:

а) для любого набора $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$ существует слово $\alpha \in \Omega$ такое, что $\chi(\alpha) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$;

б) $T\alpha \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любого $\alpha \in \Omega$.

Обозначим $SC_\rho(T)$ множество всевозможных надпокрытий таблицы T. Определим функции $M_{\rho,\psi} : \mathcal{M}_\rho \to \omega$ и $l_\rho : \mathcal{M}_\rho \to \omega$. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$. Тогда

$$M_{\rho,\psi}(T) = \min\{\psi(\Omega) : \Omega \in SC_\rho(T)\}, \quad l_\rho(T) = \min\{|\Omega| : \Omega \in SC_\rho(T)\}.$$

Приведем еще одно определение величины $M_{\rho,\psi}(T)$. Обозначим для $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$

$$M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta}) = \min\{\psi(\alpha) : \alpha \in \Omega_\rho(T), \chi(\alpha) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}, \\ T\alpha \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}\}.$$

Ниже (см. лемму 3) будет показано, что

$$M_{\rho,\psi}(T) = \max\{M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta}) : \bar{\delta} \in E_k^n\}.$$

Конечное множество $\Omega \subseteq \widehat{\Omega}_\rho(T)$ будем называть *надразбиением таблицы* T, если выполняются следующие условия:

а) множество Ω является надпокрытием таблицы T;

б) для любых $\alpha, \beta \in \Omega$, если $\alpha \neq \beta$, то слова α и β несовместимы.

Обозначим $SP_\rho(T)$ множество всевозможных надразбиений таблицы T. Определим функции $\widehat{M}_{\rho,\psi} : \mathcal{M}_\rho \to \omega$ и $\widehat{l}_\rho : \mathcal{M}_\rho \to \omega$. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$. Тогда

$$\widehat{M}_{\rho,\psi}(T) = \min\{\psi(\Omega) : \Omega \in SP_\rho(T)\}, \quad \widehat{l}_\rho(T) = \min\{|\Omega| : \Omega \in SP_\rho(T)\}.$$

Подмножество B множества $P(T)$ будем называть *тестом таблицы* T, если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) если $B=\varnothing$, то $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$;

б) если $B\neq\varnothing$ и $B=\{f_{i_1},\ldots,f_{i_m}\}$, то $T(f_{i_1},\delta_1),\ldots,(f_{i_m},\delta_m)\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любых $\delta_1,\ldots,\delta_m\in E_k$.

Слово $\alpha\in P(T)^*$ будем называть *безусловным тестом таблицы* T, если множество букв алфавита F, входящих в α, является тестом таблицы T. Обозначим $UC_\rho(T)$ множество всевозможных безусловных тестов таблицы T. Определим функцию $\Theta_{\rho,\psi}:\mathcal{M}_\rho\to\omega$. Пусть $T\in\mathcal{M}_\rho$. Тогда

$$\Theta_{\rho,\psi}(T)=\min\{\psi(\alpha):\alpha\in UC_\rho(T)\}.$$

Ясно, что $\Theta_{\rho,h}(T)$ — минимальная мощность теста таблицы T.

Конечное непустое подмножество D множества ω будем называть *системой представителей для таблицы* T, если $D\cap\nu_T(\bar\delta)\neq\varnothing$ для любого $\bar\delta\in\Delta(T)$. По определению, пустое множество является системой представителей для таблицы T в том и только в том случае, когда $\Delta(T)=\varnothing$. Обозначим $l^r(T)$ минимальную мощность системы представителей для таблицы T.

Пусть $\alpha\in F^*$. Определим детерминированную схему $G_\rho(\alpha)$ из C_ρ, используемую в дальнейшем. Если $\alpha=\lambda$, то $G_\rho(\alpha)$ содержит ровно две вершины: корень и концевую вершину, которой приписано число 0. Пусть $\alpha\neq\lambda$ и $\alpha=f_{i_1}\ldots f_{i_m}$. Тогда $G_\rho(\alpha)$ — схема, множество вершин которой разбито на $m+2$ яруса. Нулевой ярус состоит из корня схемы. Дуга, выходящая из корня, входит в вершину первого яруса. Для $j=1,\ldots,m+1$ ярус с номером j содержит k^{j-1} вершин. Для $j=1,\ldots,m$ каждой вершине яруса с номером j приписан элемент f_{i_j}, и из каждой вершины рассматриваемого яруса выходит k дуг, входящих в вершины яруса с номером $j+1$. Этим дугам приписаны числа $0,\ldots,k-1$ соответственно. Каждой вершине яруса с номером $m+1$ приписано число 0.

3.2. Вспомогательные утверждения. Зафиксируем сигнатуру $\rho=(F,k)$.

Лемма 1. *Для любой функции сложности ψ сигнатуры ρ и для любой таблицы $T\in\mathcal{M}_\rho$ значения $\psi^d_\rho(T)$ и $\Theta_{\rho,\psi}(T)$ определены, и выполняются неравенства*

$$\psi^d_\rho(T)\leqslant\Theta_{\rho,\psi}(T)\leqslant\psi^i_\rho(T).$$

Доказательство. Пусть T — таблица из $\mathcal{M}_\rho$ размерности n. Очевидно, слово $\mu_T(1)\ldots\mu_T(n)$ является безусловным тестом таблицы T. Следовательно, значение $\Theta_{\rho,\psi}(T)$ определено, $\Theta_{\rho,\psi}(T)\leqslant\psi^i_\rho(T)$ и существует безусловный тест α таблицы T такой, что $\psi(\alpha)=\Theta_{\rho,\psi}(T)$. Определим детерминированную схему Γ_α из C_ρ. Схема Γ_α совпадает со схемой $G_\rho(\alpha)$ (определенной в конце п. 3.1), в которой для каждой концевой вершины w число, приписанное этой вершине, заменено следующим образом. Пусть ξ — полный путь схемы $G_\rho(\alpha)$, заканчивающийся в вершине w. Если $\Delta(T\pi(\xi))=\varnothing$, то вершине w приписано число 0. Если $\Delta(T\pi(\xi))\neq\varnothing$, то вершине w приписано минимальное число из множества $\Pi(T\pi(\xi))$. Нетрудно проверить, что схема Γ_α является детерминированным условным тестом таблицы T. Следовательно, значение $\psi^d_\rho(T)$ определено. Очевидно, $\psi^d_\rho(T)\leqslant\psi(\Gamma_\alpha)$ и $\psi(\Gamma_\alpha)=\psi(\alpha)$. Используя равенство $\psi(\alpha)=\Theta_{\rho,\psi}(T)$, получаем, что $\psi^d_\rho(T)\leqslant\Theta_{\rho,\psi}(T)$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Для любой функции сложности ψ сигнатуры ρ и для любой таблицы $T \in \mathcal{M}_\rho$ значения $M_{\rho,\psi}(T)$, $l_\rho(T)$, $\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)$, $\widehat{l}_\rho(T)$ и $l^r(T)$ определены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть размерность таблицы T равна n. Нетрудно проверить, что множество

$$\{(\mu_T(1), \delta_1), \ldots, (\mu_T(n), \delta_n) : (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n\}$$

является надпокрытием и надразбиением таблицы T. Очевидно, множество $\bigcup\limits_{\bar{\delta} \in \Delta(T)} v_T(\bar{\delta})$ является системой представителей для таблицы T. Следовательно, значения $M_{\rho,\psi}(T)$, $l_\rho(T)$, $\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)$, $\widehat{l}_\rho(T)$ и $l^r(T)$ определены. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Пусть ψ — функция сложности сигнатуры $\rho = (F, k)$, и T — таблица размерности n из $\mathcal{M}_\rho$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

а) *для любого $\bar{\delta} \in E_k^n$ значение $M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta})$ определено;*

б) $M_{\rho,\psi}(T) = \max\{M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta}) : \bar{\delta} \in E_k^n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$, $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$, и $\beta = (f_1, \delta_1) \ldots (f_n, \delta_n)$. Очевидно, $\chi(\beta) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$ и $T\beta \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Следовательно, значение $M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta})$ определено. Поэтому для любого набора $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ из E_k^n существует слово $\alpha(\bar{\delta})$ такое, что $\chi(\alpha(\bar{\delta})) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$, $T\alpha(\bar{\delta}) \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и $\psi(\alpha(\bar{\delta})) = M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta})$.

Обозначим $\Omega_0 = \{\alpha(\bar{\delta}) : \bar{\delta} \in E_k^n\}$. Очевидно, множество Ω_0 является надпокрытием таблицы T и $\psi(\Omega_0) = \max\{M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta}) : \bar{\delta} \in E_k^n\}$. Поэтому $M_{\rho,\psi}(T) \leqslant \max\{M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta}) : \bar{\delta} \in E_k^n\}$. Из леммы 2 следует, что существует надпокрытие Ω таблицы T такое, что $\psi(\Omega) = M_{\rho,\psi}(T)$. Пусть $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$. Тогда существует слово $\alpha \in \Omega$, для которого $\chi(\alpha) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$ и $T\alpha \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Очевидно, $\psi(\alpha) \leqslant M_{\rho,\psi}(T)$. Следовательно, $M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta}) \leqslant M_{\rho,\psi}(T)$. Учитывая, что $\bar{\delta}$ — произвольный набор из E_k^n, получаем, что $\max\{M_{\rho,\psi}(T, \bar{\delta}) : \bar{\delta} \in E_k^n\} \leqslant M_{\rho,\psi}(T)$. Лемма доказана.

Л е м м а 4 [2, лемма 1]. *Пусть ψ — функция сложности сигнатуры $\rho = (F, k)$, обладающая свойством $\Lambda 3$, $T \in \mathcal{M}_\rho$ и Ω — надразбиение таблицы T. Тогда $|\Omega| \leqslant k^{\psi(\Omega)}$.*

3.3. Оценки.

Т е о р е м а 1 [2, теорема 1]. *Для любой функции сложности ψ сигнатуры ρ и для любой таблицы $T \in \mathcal{M}_\rho$*

$$\psi_\rho^d(T) \geqslant \widehat{M}_{\rho,\psi}(T) \geqslant M_{\rho,\psi}(T).$$

Т е о р е м а 2 [2, теорема 2]. *Пусть ψ — функция сложности сигнатуры $\rho = (F, k)$, обладающая свойством $\Lambda 3$, и T — таблица из $\mathcal{M}_\rho$ такая, что $\Delta(T) \neq \varnothing$. Тогда*

$$\psi_\rho^d(T) \geqslant \log_k \widehat{l}_\rho(T) \geqslant \log_k l_\rho(T) \geqslant \log_k l^r(T).$$

Приведем утверждение, являющееся простым следствием теоремы 2. Определим функцию $N_\rho : \mathcal{M}_\rho \to \omega$. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$. Тогда $N_\rho(T) = |\Delta(T)|$.

Предложение 1 [2, предложение 2]. *Для любой функции сложности ψ сигнатуры $\rho=(F,k)$, обладающей свойством $\Lambda3$, и для любой диагностической таблицы $T\in\mathscr{M}_\rho$*

$$\psi_\rho^d(T)\geqslant\log_k N_\rho(T).$$

Теорема 3 [2, теорема 3]. *Для любой функции сложности ψ сигнатуры $\rho=(F,k)$, обладающей свойством $\Lambda3$, и для любой таблицы $T\in\mathscr{M}_\rho$*

$$\psi_\rho^d(T)\geqslant\log_k((k-1)\Theta_{\rho,h}(T)+1).$$

§ 4. Верхние оценки сложности и алгоритмы построения условных тестов. Первый подход

В этом параграфе для функций сложности, обладающих свойствами $\Lambda1$, $\Lambda2$ и $\Lambda3$, рассматриваются верхние оценки минимальной сложности и алгоритмы построения детерминированных условных тестов таблиц, основанные на использовании понятия разностно ограниченной меры неопределенности таблицы.

4.1. Разностно ограниченные меры неопределенности. Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура, $T\in\mathscr{M}_\rho$, $\dim T=n$ и $\mu_T(1)=f_1,\ldots,\mu_T(n)=f_n$. Слово $\alpha\in\Omega_\rho(T)$ будем называть *полным для таблицы* T, если

$$\{(f_1,\delta_1),\ldots,(f_n,\delta_n)\}\subseteq\chi(\alpha)$$

для некоторых $\delta_1,\ldots,\delta_n\in E_k$.

Функцию $\gamma:\Omega_\rho(T)\to\omega$ будем называть *разностно ограниченной мерой неопределенности таблицы* T, если она обладает следующими свойствами:

а) для любых $\alpha,\beta,(f_i,\delta)\in\Omega_\rho(T)$, если $\beta(f_i,\delta)\in\widehat{\Omega}_\rho(T)$ (если $\beta(f_i,\delta)$ — непротиворечивое слово из $\Omega_\rho(T)$), то $\gamma(\alpha)-\gamma(\alpha(f_i,\delta))\geqslant\gamma(\alpha\beta)-\gamma(\alpha\beta(f_i,\delta))$ — свойство *разностной ограниченности*;

б) для любого $\alpha\in\Omega_\rho(T)$, если $\gamma(\alpha)=0$, то $T\in\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ — свойство *частичной согласованности*;

в) $\gamma(\alpha)=0$ для любого полного для таблицы T слова $\alpha\in\Omega_\rho(T)$ — свойство *полноты*;

г) для любых $\alpha,\beta\in\Omega_\rho(T)$, если $\gamma(\beta)=0$, то и $\gamma(\alpha\beta)=0$ — свойство *монотонности*.

Разностно ограниченную меру неопределенности γ таблицы T будем называть *согласованной*, если она обладает свойством *согласованности*: для любого $\alpha\in\Omega_\rho(T)$ равенство $\gamma(\alpha)=0$ выполняется в том и только в том случае, когда $T\in\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$.

Пусть $p,q\in\omega$ и $p+q\geqslant1$. Непосредственно проверяется, что, если функции γ_1 и γ_2 являются разностно ограниченными мерами неопределенности таблицы T, то функция $\gamma_3=p\gamma_1+q\gamma_2$ является разностно ограниченной мерой неопределенности таблицы T. Если функции γ_1 и γ_2 обладают свойством согласованности, то и функция γ_3 обладает этим свойством.

Замечание 1. Пусть $T\in\mathscr{M}_\rho$ и $\gamma:\Omega_\rho(T)\to\omega$. Нетрудно заметить, что, если функция γ обладает свойством согласованности, то она обладает свойствами частичной согласованности, полноты и монотонности.

Приведем примеры разностно ограниченных мер неопределенности.

Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$. Таблицу $T' \in \mathcal{M}_\rho$ будем называть *отделимой подтаблицей* таблицы T, если существует слово $\alpha \in \Omega_\rho(T)$ такое, что $T' = T\alpha$. Таблицу T будем называть *граничной таблицей*, если $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, и $T(f_i, \delta) = T$ или $T(f_i, \delta) \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любых $f_i \in P(T)$ и $\delta \in E_k$.

Пусть $A \subseteq \Delta(T)$ и $A \neq \varnothing$. Обозначим $\Pi(A, T) = \bigcap_{\bar\delta \in A} \nu_T(\bar\delta)$. Пусть $I = \{(f_i, \delta) : (f_i, \delta) \in \Omega_\rho(T), A \subseteq \Delta(T(f_i, \delta))\}$. Определим слово $\alpha(A)$ из $\Omega_\rho(T)$. Если $I = \varnothing$, то $\alpha(A) = \lambda$. Если $I \neq \varnothing$ и $I = \{(f_{i_1}, \delta_1), \ldots, (f_{i_m}, \delta_m)\}$, то $\alpha(A) = (f_{i_1}, \delta_1)\ldots(f_{i_m}, \delta_m)$. Будем говорить, что множество A *отделяет* подтаблицу $T\alpha(A)$ таблицы T.

Пусть $m \in \omega \setminus \{0, 1\}$. Опишем функции GH_ρ, RH_ρ^m и H_ρ^m, определенные на $\mathcal{M}_\rho$ и принимающие значения из ω. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$. Тогда

а) $GH_\rho(T)$ — число различных отделимых подтаблиц таблицы T, являющихся граничными таблицами;

б) $RH_\rho^m(T)$ — число различных непустых подмножеств A множества $\Delta(T)$ таких, что $|A| \leqslant m$ и $\Pi(A, T) = \varnothing$;

в) $H_\rho^m(T)$ — число различных непустых подмножеств A множества $\Delta(T)$, обладающих следующими свойствами: $|A| \leqslant m$, $\Pi(A, T) = \varnothing$, и подтаблица $T\alpha(A)$ таблицы T, которую отделяет множество A, является граничной таблицей.

Пусть $f : \mathcal{M}_\rho \to \omega$ и $T \in \mathcal{M}_\rho$. Определим функцию $T * f : \Omega_\rho(T) \to \omega$. Пусть $\alpha \in \Omega_\rho(T)$. Тогда $T * f(\alpha) = f(T\alpha)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Для любой таблицы $T \in \mathcal{M}_\rho$ функция $T * GH_\rho$ является согласованной разностно ограниченной мерой неопределенности таблицы T.*

Пусть $m \in \omega \setminus \{0\}$. Тогда для любой таблицы T из $\mathcal{M}_\rho(m)$ функции $T * RH_\rho^{m+1}$ и $T * H_\rho^{m+1}$ являются согласованными разностно ограниченными мерами неопределенности таблицы T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$, $\alpha, \beta, (f_i, \delta) \in \Omega_\rho(T)$ и $\beta(f_i, \delta) \in \in \widehat{\Omega}_\rho(T)$.

а) Обозначим G функцию $T * GH_\rho$. Обозначим B (соответственно B_β) множество граничных таблиц, являющихся отделимыми подтаблицами таблицы $T\alpha$ (соответственно $T\alpha\beta$), но не являющихся отделимыми подтаблицами таблицы $T\alpha(f_i, \delta)$ (соответственно $T\alpha\beta(f_i, \delta)$). Нетрудно заметить, что $T' \in B$ (соответственно $T' \in B_\beta$) в том и только в том случае, когда таблица T' является граничной таблицей, T' является отделимой подтаблицей таблицы $T\alpha$ (соответственно $T\alpha\beta$) и $T'(f_i, \delta) \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Нетрудно также заметить, что, если T' является отделимой подтаблицей таблицы $T\alpha\beta$, то T' является отделимой подтаблицей таблицы $T\alpha$. Поэтому $B_\beta \subseteq B$. Нетрудно показать, что $|B| = G(\alpha) - G(\alpha(f_i, \delta))$ и $|B_\beta| = G(\alpha\beta) - G(\alpha\beta(f_i, \delta))$. Следовательно, $G(\alpha) - G(\alpha(f_i, \delta)) \geqslant G(\alpha\beta) - G(\alpha\beta(f_i, \delta))$. Таким образом, функция G обладает свойством разностной ограниченности.

Очевидно, если $T\alpha \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то $G(\alpha) = 0$. Пусть $T\alpha \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Тогда либо $T\alpha$ — граничная таблица и, следовательно, $G(\alpha) \geqslant 1$, либо существуют $f_j \in P(T)$ и $\sigma \in E_k$ такие, что $T\alpha(f_j, \sigma) \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и $T\alpha(f_j, \sigma) \neq T\alpha$. В последнем случае рассмотрим вместо таблицы $T\alpha$ таблицу $T\alpha(f_j, \sigma)$ и будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не придем к некоторой граничной таблице, являющейся отделимой подтаблицей таблицы $T\alpha$. Процесс конечен и приводит к граничной таблице, так как на каждом шаге полученная таблица не принадлежит множеству $\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и для нее значение функции N_ρ

строго меньше, чем для предыдущей. Следовательно, $G(\alpha) \geqslant 1$. Тем самым доказано, что функция G обладает свойством согласованности. Учитывая замечание 1, получаем, что G — согласованная разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T.

б) Обозначим R функцию $T * RH_\rho^{m+1}$. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho(m)$. Обозначим D (соответственно D_β) множество всевозможных непустых подмножеств A множества $\Delta(T\alpha)$ (соответственно $\Delta(T\alpha\beta)$), обладающих следующими свойствами: $|A| \leqslant m+1$, $\Pi(A,T) = \varnothing$ и $A \not\subseteq \Delta(T(f_i,\delta))$. Нетрудно заметить, что $D_\beta \subseteq D$, $|D| = R(\alpha) - R(\alpha(f_i,\delta))$ и $|D_\beta| = R(\alpha\beta) - R(\alpha\beta(f_i,\delta))$. Поэтому $R(\alpha) - R(\alpha(f_i,\delta)) \geqslant R(\alpha\beta) - R(\alpha\beta(f_i,\delta))$. Следовательно, функция R обладает свойством разностной ограниченности.

Если $T\alpha \in \mathcal{M}_\rho\mathscr{C}$, то, очевидно, $R(\alpha) = 0$. Пусть $T\alpha \notin \mathcal{M}_\rho\mathscr{C}$ и $\bar\delta \in \Delta(T\alpha)$. Тогда для каждого $j \in \nu_T(\bar\delta)$ существует $\bar\delta_j \in \Delta(T\alpha)$, для которого $j \notin \nu_T(\bar\delta)$. Обозначим $A = \{\bar\delta\} \cup \{\bar\delta_j : j \in \nu_T(\bar\delta)\}$. Так как $T \in \mathcal{M}_\rho(m)$, то $|A| \leqslant m+1$. Очевидно, $\Pi(A, T\alpha) = \varnothing$. Следовательно, $R(\alpha) \geqslant 1$. Тем самым доказано, что функция R обладает свойством согласованности. Учитывая замечание 1, получаем, что R — согласованная разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T.

в) Рассмотрим функцию $T * H_\rho^{m+1}$. Пусть $Q \in \mathcal{M}_\rho$, A — непустое подмножество множества $\Delta(Q)$, $\Pi(A,Q) = \varnothing$ и Q' — отделимая подтаблица таблицы Q, являющаяся граничной таблицей. Покажем, что множество A отделяет подтаблицу Q' в том и только в том случае, когда $A \subseteq \Delta(Q')$.

Пусть множество A отделяет подтаблицу Q'. Тогда, очевидно, $A \subseteq \Delta(Q')$.

Пусть $A \subseteq \Delta(Q')$. Обозначим

$$I = \{(f_j,\sigma) : (f_j,\sigma) \in \Omega_\rho(Q), A \subseteq \Delta(Q(f_j,\sigma)\}.$$

Пусть $I \neq \varnothing$ и $I = \{(f_{i_1},\sigma_1),\ldots,(f_{i_p},\sigma_p)\}$. Обозначим $\alpha = (f_{i_1},\sigma_1)\ldots(f_{i_p},\sigma_p)$. Покажем, что $Q' = Q\alpha$. Из того, что Q' — отделимая подтаблица таблицы Q, следует, что равенство $Q' = Q\beta$ выполняется для некоторого слова β из $\Omega_\rho(Q)$. Из соотношения $A \subseteq \Delta(Q\beta)$ следует, что $\chi(\beta) \subseteq \chi(\alpha)$. Поэтому $\Delta(Q\alpha) \subseteq \Delta(Q\beta)$. Покажем, что $\Delta(Q\beta) \subseteq \Delta(Q\alpha)$. Предположим противное. Тогда существует пара $(f_{i_j},\sigma_j) \in \chi(\alpha)$ такая, что $Q'(f_{i_j},\sigma_j) \neq Q'$ и $Q'(f_{i_j},\sigma_j) \notin \mathcal{M}_\rho\mathscr{C}$, а это противоречит предположению о том, что таблица Q' является граничной таблицей. Следовательно, $Q' = Q\alpha$. В случае $I = \varnothing$ доказательство аналогично. Тем самым рассматриваемое утверждение доказано. Из него вытекает справедливое для любой таблицы Q из $\mathcal{M}_\rho$ равенство:

$$H_\rho^{m+1}(Q) = \sum_{Q' \in g_\rho(Q)} RH_\rho^{m+1}(Q'), \tag{1}$$

где $g_\rho(Q)$ — множество всевозможных отделимых подтаблиц таблицы Q, являющихся граничными таблицами.

Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho(m)$. Определим множества B и B_β так же, как в части а) доказательства. Тогда, используя (1), получаем, что

$$T * H_\rho^{m+1}(\alpha) - T * H_\rho^{m+1}(\alpha(f_i,\delta)) = \sum_{T' \in B} RH_\rho^{m+1}(T'),$$
$$T * H_\rho^{m+1}(\alpha\beta) - T * H_\rho^{m+1}(\alpha\beta(f_i,\delta)) = \sum_{T' \in B_\beta} RH_\rho^{m+1}(T').$$

Из этих равенств и из включения $B_\beta \subseteq B$ следует, что функция $T * H_\rho^{m+1}$ обладает свойством разностной ограниченности.

Если $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$, то $T * H_\rho^{m+1}(\alpha) = 0$. Пусть $T * H_\rho^{m+1}(\alpha) = 0$. Из этого равенства, из (1) и из того, что для любой таблицы $T' \in \mathscr{M}_\rho(m)$ функция $T' * RH_\rho^{m+1}$ обладает свойством согласованности, следует, что $g_\rho(T\alpha) = \varnothing$. Поэтому $T * GH_\rho(\alpha) = 0$. Из этого равенства и из того, что функция $T * GH_\rho$ обладает свойством согласованности, следует, что $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Поэтому функция $T * H_\rho^{m+1}$ обладает свойством согласованности. Учитывая замечание 1, получаем, что $T*H_\rho^{m+1}$ — согласованная разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T. Предложение доказано.

Замечание 2. Пусть $m \in \omega \setminus \{0\}$ и $T \in \mathscr{M}_\rho(m)$. Тогда $GH_\rho(T) \leqslant H_\rho^{m+1}(T) \leqslant RH_\rho^{m+1}(T)$. Неравенство $H_\rho^{m+1}(T) \leqslant RH_\rho^{m+1}(T)$ очевидно. Неравенство $GH_\rho(T) \leqslant H_\rho^{m+1}(T)$ следует из (1) и того факта, что для любой таблицы T' из $\mathscr{M}_\rho(m)$ функция $T' * RH_\rho^{m+1}$ обладает свойством согласованности.

Замечание 3. Пусть ρ — нумерованная сигнатура и $m \in \omega \setminus \{0\}$. Нетрудно показать, что существуют вычисляющие на $\mathscr{M}_\rho(m)$ функции H_ρ^{m+1} и RH_ρ^{m+1} алгоритмы, время работы которых ограничено сверху некоторыми полиномами от длины бинарной формы таблицы, поступающей на вход алгоритма. Простой анализ доказательства предложения 2 показывает, что любая граничная отделимая подтаблица таблицы T из $\mathscr{M}_\rho(m)$ отделяется некоторым непустым подмножеством A множества $\Delta(T)$, для которого $|A| \leqslant m+1$ и $\Pi(A, T) = \varnothing$. Используя этот факт, нетрудно доказать, что существует вычисляющий на $\mathscr{M}_\rho(m)$ функцию GH_ρ алгоритм, время работы которого ограничено сверху некоторым полиномом от длины бинарной формы таблицы, поступающей на вход алгоритма.

Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$. Обозначим $\mathscr{P}(\widehat{\Omega}_\rho(T))$ множество всевозможных непустых конечных подмножеств множества $\widehat{\Omega}_\rho(T)$. Непустое конечное подмножество D множества $\mathscr{P}(\widehat{\Omega}_\rho(T))$ будем называть *правильным покрытием таблицы* T, если оно обладает следующими свойствами:

а) для любого $\bar{\delta} \in \Delta(T)$ существует слово α из $\bigcup\limits_{d\in D} d$ такое, что $\bar{\delta} \in \Delta(T\alpha)$;

б) $\bigcap\limits_{\alpha\in d} \Pi(T\alpha) \neq \varnothing$ или $\bigcup\limits_{\alpha\in d} \Delta(T\alpha) = \varnothing$ для любого $d \in D$;

в) для любых $d_1, d_2 \in D$ и $\alpha_1 \in d_1$, $\alpha_2 \in d_2$, если $d_1 \neq d_2$, то слова α_1 и α_2 несовместимы.

Пусть D — правильное покрытие таблицы T и $\alpha \in \Omega_\rho(T)$. Для произвольного $d \in D$ обозначим $d[\alpha]$ множество всевозможных слов из d, совместимых со словом α. Обозначим

$$\eta(D, \alpha) = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in d_1[\alpha], \alpha_2 \in d_2[\alpha], d_1, d_2 \in D, d_1 \neq d_2\}.$$

Определим функцию $\gamma_D : \Omega_\rho(T) \to \omega$: для произвольного $\alpha \in \Omega_\rho(T)$

$$\gamma_D(\alpha) = |\eta(D, \alpha)|\,.$$

Предложение 3. *Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$ и D — правильное покрытие таблицы T. Тогда функция γ_D является разностно ограниченной мерой неопределенности таблицы T.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$, $\dim T = n$ и $\mu_T(1) = f_1, \ldots$ $\ldots, \mu_T(n) = f_n$. Обозначим γ функцию γ_D.

Пусть $a, b \in \Omega_\rho(T)$. Нетрудно заметить, что $\eta(D, ab) \subseteq \eta(D, a)$. Поэтому для произвольных $a, b \in \Omega_\rho(T)$

$$\gamma(a) \geqslant \gamma(ab). \tag{2}$$

Пусть $\alpha, \beta, (f_i, \delta) \in \Omega_\rho(T)$ и $\beta(f_i, \delta) \in \widehat{\Omega}_\rho(T)$. Покажем, что

$$\gamma(\alpha) - \gamma(\alpha(f_i, \delta)) \geqslant \gamma(\alpha\beta) - \gamma(\alpha\beta(f_i, \delta)). \tag{3}$$

Пусть $\alpha\beta(f_i, \delta) \notin \widehat{\Omega}_\rho(T)$. Так как $\beta(f_i, \delta) \in \widehat{\Omega}_\rho(T)$, то $\alpha\beta \notin \widehat{\Omega}_\rho(T)$ или $\alpha(f_i, \delta) \notin \widehat{\Omega}_\rho(T)$. Пусть $\alpha\beta \notin \widehat{\Omega}_\rho(T)$. Тогда $\gamma(\alpha\beta) = \gamma(\alpha\beta(f_i, \delta)) = 0$. Из (2) следует, что $\gamma(\alpha) \geqslant \gamma(\alpha(f_i, \delta))$. Поэтому (3) выполняется. Пусть $\alpha(f_i, \delta) \notin \widehat{\Omega}_\rho(T)$. Тогда $\gamma(\alpha(f_i, \delta)) = \gamma(\alpha\beta(f_i, \delta)) = 0$. Из (2) следует, что $\gamma(\alpha) \geqslant \gamma(\alpha\beta)$. Поэтому (3) выполняется.

Пусть $\alpha\beta(f_i, \delta) \in \widehat{\Omega}_\rho(T)$. Обозначим B_α (соответственно $B_{\alpha\beta}$) множество всевозможных пар слов из $\eta(D, \alpha)$ (соответственно из $\eta(D, \alpha\beta)$), в каждой из которых хотя бы одно слово для некоторого $\sigma \in E_k$, $\sigma \neq \delta$, содержит букву (f_i, σ). Нетрудно заметить, что $\eta(D, \alpha\beta) \subseteq \eta(D, \alpha)$. Поэтому $B_{\alpha\beta} \subseteq B_\alpha$. Учитывая, что $\alpha\beta(f_i, \delta) \in \widehat{\Omega}_\rho(T)$, нетрудно показать, что $\gamma(\alpha) - \gamma(\alpha(f_i, \delta)) = |B_\alpha|$ и $\gamma(\alpha\beta) - \gamma(\alpha\beta(f_i, \delta)) = |B_{\alpha\beta}|$. Из этих равенств и из включения $B_{\alpha\beta} \subseteq B_\alpha$ следует неравенство (3). Таким образом, функция γ обладает свойством разностной ограниченности.

Пусть $\alpha \in \Omega_\rho(T)$. Обозначим $D[\alpha] = \bigcup_{d \in D} d[\alpha]$. Покажем, что

$$\Delta(T\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta \in D[\alpha]} \Delta(T\beta). \tag{4}$$

Если $\Delta(T) = \varnothing$, то (4), очевидно, выполняется. Пусть $\Delta(T) \neq \varnothing$ и $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Delta(T\alpha)$. Используя свойство а) правильного покрытия D, получаем, что существует слово $\tau \in \bigcup_{d \in D} d$ такое, что $\bar{\delta} \in \Delta(T\tau)$. Очевидно, $\chi(\alpha) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$ и $\chi(\tau) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$. Поэтому слова α и β совместимы. Следовательно, $\tau \in D[\alpha]$. Поэтому $\bar{\delta} \in \bigcup_{\beta \in D[\alpha]} \Delta(T\beta)$. Учитывая, что $\bar{\delta}$ — произвольный набор из $\Delta(T\alpha)$, получаем, что включение (4) выполняется.

Пусть $\gamma(\alpha) = 0$. Тогда $D[\alpha] = d[\alpha]$ для некоторого $d \in D$. Используя (4), получаем, что $\Delta(T\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta \in d[\alpha]} \Delta(T\beta) \subseteq \bigcup_{\beta \in d} \Delta(T\beta)$. Используя свойство б) правильного покрытия D, получаем, что $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Таким образом, функция γ обладает свойством частичной согласованности.

Пусть α — полное для таблицы T слово. Если α — противоречивое слово, то, очевидно, $\gamma(\alpha) = 0$. Пусть α — непротиворечивое слово. Тогда, как нетрудно заметить, любые два слова из множества $D[\alpha]$ совместимы. Используя свойство в) правильного покрытия D, получаем, что $\gamma(\alpha) = 0$. Таким образом, функция γ обладает свойством полноты.

Пусть $\alpha, \beta \in \Omega_\rho(T)$ и $\gamma(\beta) = 0$. Очевидно, $\eta(D, \alpha\beta) \subseteq \eta(D, \beta)$. Поэтому $\gamma(\alpha\beta) = 0$. Таким образом, функция γ обладает свойством монотонности. Предложение доказано.

Следующее утверждение дает примеры правильных покрытий тестовых таблиц.

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$ и Ω — надразбиение таблицы T. Тогда множество $D = \{\{\alpha\} : \alpha \in \Omega\}$ является правильным покрытием таблицы T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\dim T = n$ и $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$. Очевидно, D — непустое конечное подмножество множества $\mathscr{P}(\widehat{\Omega}_\rho(T))$.

Пусть $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Delta(T)$. Тогда существует слово $\alpha \in \Omega$ такое, что $\chi(\alpha) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$. Очевидно, $\bar{\delta} \in \Delta(T\alpha)$. Следовательно, множество D обладает свойством а) правильного покрытия таблицы T.

Так как $T\alpha \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любого $\alpha \in \Omega$, то множество D обладает свойством б) правильного покрытия.

Поскольку для любых $\alpha, \beta \in \Omega$, если $\alpha \neq \beta$, то слова α и β несовместимы, множество D обладает свойством в) правильного покрытия.

Таким образом, D — правильное покрытие таблицы T. Предложение доказано.

4.2. Процесс построения схем U_ρ. Опишем процесс U_ρ построения по произвольной таблице $T \in \mathcal{M}_\rho$, произвольной разностно ограниченной мере неопределенности γ таблицы T и произвольной функции сложности ψ сигнатуры $\rho = (F, k)$ схемы $U_\rho(T, \gamma, \psi)$, являющейся детерминированным условным тестом таблицы T. Так как таблица T и функции γ, ψ могут не быть конструктивными объектами, то в общем случае процесс U_ρ является не алгоритмом, а лишь способом описания схемы $U_\rho(T, \gamma, \psi)$.

1-й шаг. Построим дерево, содержащее вершины w_1, w_2 и дугу, которая выходит из w_1 и входит в w_2.

Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Если $\Delta(T) = \varnothing$, то вершине w_2 припишем число 0. Если $\Delta(T) \neq \varnothing$, то вершине w_2 припишем минимальное число из множества $\Pi(T)$. Обозначим полученное дерево $U_\rho(T, \gamma, \psi)$. Процесс U_ρ завершен.

Пусть $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Припишем вершине w_2 слово λ и перейдем ко второму шагу.

Пусть уже сделано t шагов. Обозначим D дерево, построенное на шаге t.

$(t+1)$-й шаг. Если в дереве D ни одной вершине не приписано слово из $\Omega_\rho(T)$, то обозначим $U_\rho(T, \gamma, \psi)$ дерево D. Процесс U_ρ завершен.

В противном случае выберем в дереве D некоторую вершину w, которой приписано слово из $\Omega_\rho(T)$. Пусть вершине w приписано слово α. Если $T\alpha \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то вместо слова α припишем вершине w минимальное число из множество $\Pi(T\alpha)$ и перейдем к $(t+2)$-му шагу. Пусть $T\alpha \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Для каждого $f_i \in P(T)$ пусть σ_i — минимальное число из E_k такое, что

$$\gamma(\alpha(f_i, \sigma_i)) = \max\{\gamma(\alpha(f_i, \sigma)) : \sigma \in E_k\}.$$

Положим $I\alpha = \{f_i : f_i \in P(T), \gamma(\alpha) > \gamma(\alpha(f_i, \sigma_i))\}$. Для каждого $f_i \in I\alpha$ положим

$$d_{f_i} = \max\left\{\psi(f_i), \frac{\gamma(\alpha)}{\gamma(\alpha) - \gamma(\alpha(f_i, \sigma_i))}\right\}.$$

Пусть j — минимальное число из $\{1, \ldots, \dim T\}$ такое, что $\mu_T(j) \in I\alpha$ и $d_{\mu_T(j)} = \min\{d_{f_i} : f_i \in I\alpha\}$. Пусть $\mu_T(j) = f_{i_0}$. Вместо слова α припишем вершине w элемент f_{i_0}. Для каждого $\delta \in E_k$ такого, что $\Delta(T\alpha(f_{i_0}, \delta)) \neq \varnothing$, добавим к дереву D вершину $w(\delta)$, в которую из вершины w проведем дугу. Этой дуге припишем число δ, а вершине $w(\delta)$ припишем слово $\alpha(f_{i_0}, \delta)$. Перейдем к $(t+2)$-му шагу.

Отметим, что для глубины h в качестве величины d_{f_i} можно рассматривать величину $\gamma(\alpha(f_i, \sigma_i))$. Построенная схема будет совпадать со схемой $U_\rho(T, \gamma, h)$.

Рассмотрим ход процесса U_ρ при построении схемы $U_\rho(T, \gamma, \psi)$. Покажем, что множество $I\alpha$ (см. описание $(t+1)$-го шага) не пусто.

Лемма 5. *Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура, $T \in \mathcal{M}_\rho$, $\dim T = n$, $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$, γ — разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T, $\alpha \in \Omega_\rho(T)$ и $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Тогда существует элемент*

$f_i \in P(T)$ *такой, что*

$$\gamma(\alpha) > \max\{\gamma(\alpha(f_i, \delta)) : \delta \in E_k\}.$$

Доказательство. Для каждого $f_i \in P(T)$ обозначим σ_i минимальное число из E_k, обладающее следующим свойством:

$$\gamma(\alpha(f_i, \sigma_i)) = \max\{\gamma(\alpha(f_i, \sigma)) : \sigma \in E_k\}.$$

Обозначим $\beta_0 = \lambda$ и для $j = 1, \ldots, n$ обозначим $\beta_j = (f_1, \sigma_1) \ldots (f_j, \sigma_j)$. Используя свойство частичной согласованности функции γ и соотношение $T \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}$, получаем, что $\gamma(\alpha\beta_0) > 0$. Очевидно, $\alpha\beta_n$ — полное для таблицы T слово. Используя свойство полноты функции γ, получаем, что $\gamma(\alpha\beta_n) = 0$. Следовательно, существует $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ такое, что $\gamma(\alpha\beta_j) > 0$ и $\gamma(\alpha\beta_{j+1}) = 0$. Используя свойство разностной ограниченности функции γ и очевидное включение $\beta_{j+1} \in \widehat{\Omega}_\rho(T)$, получаем, что $\gamma(\alpha) - \gamma(\alpha(f_{j+1}, \sigma_{j+1})) \geqslant \gamma(\alpha\beta_j) - \gamma(\alpha\beta_{j+1}) > 0$. Лемма доказана.

Используя описание процесса U_ρ, свойства функции γ, лемму 5 и определение детерминированного условного теста, нетрудно доказать следующее утверждение.

Предложение 5. *Для любой таблицы $T \in \mathcal{M}_\rho$, любой разностно ограниченной меры неопределенности γ таблицы T и любой функции сложности ψ сигнатуры ρ процесс U_ρ завершается после выполнения конечного числа шагов. Построенная им схема $U_\rho(T, \gamma, \psi)$ является детерминированным условным тестом таблицы T.*

Следствие 1. *Для любой таблицы T из $\mathcal{M}_\rho$, любой разностно ограниченной меры неопределенности γ таблицы T и любой функции сложности ψ сигнатуры ρ выполняется неравенство $\psi_\rho^d(T) \leqslant \psi(U_\rho(T, \gamma, \psi))$.*

4.3. Вспомогательные утверждения. Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура, $T \in \mathcal{M}_\rho$, $\dim T = n$, $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$, γ — разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T, $\alpha \in \Omega_\rho(T)$, $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$ и ψ — функция сложности сигнатуры ρ. Обозначим

$$\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha, \bar{\delta}) = \min\{\psi(\beta) : \chi(\beta) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}, \gamma(\alpha, \beta) = 0\}$$

и

$$\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha) = \max\{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha, \bar{\delta}) : \bar{\delta} \in E_k^n\}.$$

Лемма 6. *Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура, $T \in \mathcal{M}_\rho$, $\dim T = n$, $\alpha \in \Omega_\rho(T)$, $\bar{\delta} \in E_k^n$, γ — разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T и ψ — функция сложности сигнатуры ρ. Тогда*

а) *значение $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha, \bar{\delta})$ определено;*

б) *если функция γ обладает свойством согласованности, то*

$$\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha) = M_{\rho,\psi}(T\alpha).$$

Доказательство. Пусть $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$. Обозначим $\beta = (f_1, \delta_1) \ldots (f_n, \delta_n)$. Очевидно, $\chi(\beta) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$ и $\alpha\beta$ — полное для таблицы T слово. Поскольку функция γ обладает свойством полноты, $\gamma(\alpha\beta) = 0$. Следовательно, значение $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha, \bar{\delta})$ определено.

Пусть функция γ обладает свойством согласованности. Можно показать, что в этом случае $M_{\rho,\psi}(T\alpha,\bar{\delta}) = \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha,\bar{\delta})$. Учитывая, что $\bar{\delta}$ — произвольный набор из E_k^n, и, используя лемму 3, получаем, что $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha) = M_{\rho,\psi}(T\alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$, $\alpha \in \Omega_\rho(T)$, γ — разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T и ψ — функция сложности сигнатуры ρ. Тогда $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda) \geqslant \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $\dim T = n$, $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$ и $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$. Из леммы 6 следует, что существует слово β из $\Omega_\rho(T)$ такое, что $\chi(\beta) \subseteq \{(f_1,\delta_1), \ldots, (f_n,\delta_n)\}$, $\gamma(\beta) = 0$ и $\psi(\beta) = \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda,\bar{\delta})$. Используя свойство монотонности функции γ, получаем, что $\gamma(\alpha\beta) = 0$. Следовательно, $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha,\bar{\delta}) \leqslant \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda,\bar{\delta})$. Учитывая, что $\bar{\delta}$ — произвольный набор из E_k^n, получаем, что $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha) \leqslant \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho \setminus \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, γ — разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T, ψ — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda 2$ и $\Lambda 3$, и $\xi = w_0, d_0, \ldots, w_m, d_m, w_{m+1}$ — произвольный полный путь схемы $U_\rho(T,\gamma,\psi)$. Пусть для $j = 1, \ldots, m$ вершине w_j приписан элемент f_{t_j}, и дуге d_j приписано число δ_j. Пусть $\alpha_0 = \lambda$ и $\alpha_j = (f_{t_1}\delta_1)\ldots(f_{t_j}\delta_j)$ для $j = 1, \ldots, m$. Тогда для $j = 0, \ldots, m-1$*

$$\psi(f_{t_{j+1}}) \leqslant \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha_j) \quad \text{и} \quad \gamma(\alpha_{j+1}) \leqslant \gamma(\alpha_j)\frac{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha_j) - 1}{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha_j)}.$$

Доказательство. Для $j = 0, \ldots, m$ обозначим $M_j = \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha_j)$. Зафиксируем некоторое $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. Пусть $\dim T = n$ и $\mu_T(1) = f_1, \ldots$ $\ldots, \mu_T(n) = f_n$. Для каждого $f_i \in P(T)$ обозначим σ_i минимальное число из E_k^n, обладающее следующим свойством:

$$\gamma(\alpha_j(f_i,\sigma_i)) = \max\{\gamma(\alpha_j(f_i,\sigma)) : \sigma \in E_k\}.$$

Из леммы 6 следует, что существует слово $\beta \in \Omega_\rho(T)$ такое, что $\chi(\beta) \subseteq \{(f_1,\sigma_1), \ldots, (f_n,\sigma_n)\}$, $\gamma(\alpha_j\beta) = 0$ и $\psi(\beta) = \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\alpha_j,(\sigma_1,\ldots,\sigma_n))$. Пусть $\beta = (f_{l_1},\sigma_{l_1})\ldots(f_{l_r},\sigma_{l_r})$. Из описания схемы $U_\rho(T,\gamma,\psi)$ следует, что $T\alpha_j \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Используя свойство частичной согласованности функции γ, получаем, что $\gamma(\alpha_j) > 0$. Отсюда и из равенства $\gamma(\alpha_j\beta) = 0$ следует, что

$$1 \leqslant r. \tag{5}$$

Из свойства $\Lambda 3$ функции ψ следует, что

$$r \leqslant \psi(\beta). \tag{6}$$

Из выбора слова β и из определения величины M_j следует, что

$$\psi(\beta) \leqslant M_j. \tag{7}$$

Так как $\gamma(\alpha_j\beta) = 0$, то

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha_j) - (\gamma(\alpha_j) - \gamma(\alpha_j(f_{l_1},\sigma_{l_1})))-&\\ -(\gamma(\alpha_j(f_{l_1},\sigma_{l_1})) - \gamma(\alpha_j(f_{l_1},\sigma_{l_1})(f_{l_2},\sigma_{l_2}))) - \ldots&\\ \ldots - (\gamma(\alpha_j(f_{l_1},\sigma_{l_1})\ldots(f_{l_{r-1}},\sigma_{l_{r-1}})) - \gamma(\alpha_j\beta)) = 0.&\end{aligned} \tag{8}$$

Выберем некоторое $q\in\{l_1,\ldots,l_r\}$, для которого

$$\gamma(\alpha_j(f_q,\sigma_q))=\min\{\gamma(\alpha_j(f_p,\sigma_p)):p\in\{l_1,\ldots,l_r\}\}.$$

Очевидно, $(f_{l_1},\sigma_{l_1})\ldots(f_{l_s},\sigma_{l_s})\in\widehat{\Omega}_\rho(T)$ для $s=2,\ldots,r$. Используя свойство разностной ограниченности функции γ, получаем, что для $s=2,\ldots,r$

$$\gamma(\alpha_j(f_{l_1},\sigma_{l_1})\ldots(f_{l_{s-1}},\sigma_{l_{s-1}}))-\gamma(\alpha_j(f_{l_1},\sigma_{l_1})\ldots(f_{l_s},\sigma_{l_s}))\leqslant \\ \leqslant\gamma(\alpha_j)-\gamma(\alpha_j(f_{l_s},\sigma_{l_s})).$$

Из выбора q следует, что $\gamma(\alpha_j)-\gamma(\alpha_j(f_{l_s},\sigma_{l_s}))\leqslant\gamma(\alpha_j)-\gamma(\alpha_j(f_q,\sigma_q))$ для $s=1,\ldots,r$. Из этих неравенств и из (8) следует, что $\gamma(\alpha_j)-$ $-r(\gamma(\alpha_j)-\gamma(\alpha_j(f_q,\sigma_q)))\leqslant 0$. Из этого неравенства и из (5) следует, что $\gamma(\alpha_j(f_q,\sigma_q))\leqslant\gamma(\alpha_j)\dfrac{r-1}{r}$. Из этого неравенства, из (6) и из (7) следует, что

$$\gamma(\alpha_j(f_q,\sigma_q))\leqslant\gamma(\alpha_j)\frac{M_j-1}{M_j}. \tag{9}$$

Из включения $q\in\{l_1,\ldots,l_r\}$ и из свойства $\Lambda2$ функции ψ следует, что $\psi(f_q)\leqslant\psi(\beta)$. Из этого неравенства и из (7) следует, что

$$\psi(f_q)\leqslant M_j. \tag{10}$$

Из описания схемы $U_\rho(T,\gamma,\psi)$ видно, что элемент $f_{t_{j+1}}$ определяется следующим образом. Пусть $I\alpha_j=\{f_i:f_i\in P(T),\gamma(\alpha_j)>\gamma(\alpha_j(f_i,\sigma_i))\}$. Для каждого $f_i\in I\alpha_j$ обозначим

$$d_{f_i}=\max\left\{\psi(f_i),\frac{\gamma(\alpha_j)}{\gamma(\alpha_j)-\gamma(\alpha_j(f_i,\sigma_i))}\right\}.$$

Пусть i_0 — минимальное число из $\{1,\ldots,n\}$ такое, что $f_{i_0}\in I\alpha_j$ и $d_{f_{i_0}}=$ $=\min\{d_{f_i}:f_i\in I\alpha_j\}$. Тогда $f_{t_{j+1}}=f_{i_0}$.

Из (5)–(7), (9) и неравенства $\gamma(\alpha_j)>0$ следует, что $f_q\in I\alpha_j$. Нетрудно заметить, что $d_{f_j}>0$ для любого $f_i\in I\alpha_j$, и d_{f_i} — минимальное число среди всех чисел d таких, что $\psi(f_i)\leqslant d$ и $\gamma(\alpha_j(f_i,\sigma_i))\leqslant\gamma(\alpha_j)\dfrac{d-1}{d}$. Отсюда, из (9) и из (10) следует, что $d_{f_q}\leqslant M_j$. Поэтому $d_{f_{t_{j+1}}}\leqslant M_j$. Из этого неравенства и из определения величины $d_{f_{t_{j+1}}}$ следует, что $\psi(f_{t_{j+1}})\leqslant M_j$ и $\gamma(\alpha_j(f_{t_{j+1}},\sigma_{t_{j+1}}))\leqslant\gamma(\alpha_j)\dfrac{M_j-1}{M_j}$. Утверждение леммы следует из этих неравенств и из выбора $\sigma_{t_{j+1}}$, по которому $\gamma(\alpha_{j+1})\leqslant\gamma(\alpha_j(f_{t_{j+1}},\sigma_{t_{j+1}}))$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура, $T\in\mathcal{M}_\rho$ и $r\in\{0,1\}$. Тогда*

а) $M_{\rho,h}(T)=r$ *в том и только в том случае, когда* $h^d_\rho(T)=r$;

б) *если $M_{\rho,h}(T)=1$, то существует элемент $f_i\in P(T)$ такой, что $T(f_i,\delta)\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любого $\delta\in E_k$.*

Доказательство. Пусть $M_{\rho,h}(T)=0$. Тогда, очевидно, $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Можно показать, что в этом случае $h^d_\rho(T)=0$. Пусть $h^d_\rho(T)=0$. Используя теорему 1, получаем, что $M_{\rho,h}(T)=0$.

Пусть $M_{\rho,h}(T)=1$. Покажем, что существует элемент $f_i\in P(T)$ такой, что $T(f_i,\delta)\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любого $\delta\in E_k$. Предположим противное. Пусть

$\dim T = n$, $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$ и для любого элемента $f_i \in P(T)$ существует $\delta_i \in E_k$, для которого $T(f_i, \delta_i) \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Обозначим $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Можно показать, что $M_{\rho,h}(T, \bar{\delta}) \geqslant 2$, а этого не может быть, так как $M_{\rho,h}(T, \bar{\delta}) \leqslant M_{\rho,h}(T) = 1$. Следовательно, существует $f_i \in P(T)$ такой, что $T(f_i, \delta) \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любого $\delta \in E_k$. Используя этот факт, нетрудно показать, что существует детерминированный условный тест Γ таблицы T такой, что $h(\Gamma) = 1$. Следовательно, $h^d_\rho(T) \leqslant 1$. Используя равенство $M_{\rho,h}(T) = 1$ и теорему 1, получаем, что $h^d_\rho(T) = 1$. Пусть $h^d_\rho(T) = 1$. Используя теорему 1, получаем, что $M_{\rho,h}(T) \leqslant 1$. Предположим, что $M_{\rho,h}(T) = 0$. Тогда по доказанному выше $h^d_\rho(T) = 0$, что не может быть. Следовательно, $M_{\rho,h}(T) = 1$. Лемма доказана.

4.4. Верхние оценки величины $\psi(U_\rho(T, \gamma, \psi))$. В этом пункте приводятся верхние оценки величины $\psi(U_\rho(T, \gamma, \psi))$, которые в силу следствия 1 являются также верхними оценками величины $\psi^d_\rho(T)$. Отдельно рассматриваются согласованные разностно ограниченные меры неопределенности таблиц и функция сложности h.

Теорема 4. *Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$, γ — разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T и ψ — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами* $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ *и* $\Lambda 3$. *Тогда* $\psi^d_\rho(T) \leqslant \psi(U_\rho(T, \gamma, \psi))$ *и*

$$\psi(U_\rho(T, \gamma, \psi)) \leqslant \begin{cases} \psi(\lambda), & \text{если } T \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}; \\ (\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \lambda))^2 \ln \gamma(\lambda) + \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \lambda), & \text{если } T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Можно показать, что в этом случае $\psi(U_\rho(T, \gamma, \psi)) = \psi(\lambda)$.

Пусть $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, $\dim T = n$ и $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$. Рассмотрим произвольный полный путь $\xi = w_0, d_0, \ldots, w_m, d_m, w_{m+1}$ схемы $U_\rho(T, \gamma, \psi)$. Используя предложение 5, получаем, что схема $U_\rho(T, \gamma, \psi)$ является детерминированным условным тестом таблицы T. Так как $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то $m \geqslant 1$. Пусть для $j = 1, \ldots, m$ вершине w_j приписан элемент f_{t_j}, а дуге d_j приписано число δ_j. Обозначим $\alpha_0 = \lambda$ и для $j = 1, \ldots, m$ обозначим $\alpha_j = (f_{t_1}, \delta_1) \ldots (f_{t_j}, \delta_j)$. Покажем, что

$$m \leqslant \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \lambda) \ln \gamma(\lambda) + 1. \tag{11}$$

Из условия $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и из свойства частичной согласованности функции γ следует, что $\gamma(\lambda) \geqslant 1$. Очевидно, $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \lambda) \geqslant 0$. Поэтому при $m = 1$ неравенство (11) выполняется. Пусть $m \geqslant 2$. Из леммы 8 следует, что

$$\gamma(\alpha_{m-1}) \leqslant \gamma(\lambda) \prod_{j=0}^{m-2} \frac{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha_j) - 1}{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha_j)}. \tag{12}$$

Из описания схемы $U_\rho(T, \gamma, \psi)$ следует, что $T\alpha_{m-1} \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Отсюда и из свойства частичной согласованности функции γ следует, что $\gamma(\alpha_{m-1}) \geqslant 1$. Из этого неравенства и из (12) следует, что

$$\prod_{j=0}^{m-2} \frac{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha_j)}{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha_j) - 1} \leqslant \gamma(\lambda). \tag{13}$$

Из леммы 7 следует, что

$$\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \alpha_j) \leqslant \widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma, \lambda) \tag{14}$$

для $j=0,\ldots,m$. Из (13) и (14) следует, что

$$(m-1)\ln\left(1+\frac{1}{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)-1}\right)\leqslant\ln\gamma(\lambda). \tag{15}$$

Покажем, что $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)\geqslant 2$. Из (5)–(7) следует, что $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)\geqslant 1$. Из неравенства $m\geqslant 2$ и из леммы 8 следует, что

$$\gamma(\alpha_1)\leqslant\gamma(\lambda)\frac{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)-1}{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)}.$$

Так как $m\geqslant 2$, то $T\alpha_1\notin\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Используя свойство частичной согласованности функции γ, получаем, что $\gamma(\alpha_1)\geqslant 1$. Следовательно, $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)\neq 1$. Поэтому $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)\geqslant 2$. Учитывая это неравенство, а также известное неравенство $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$, справедливое для любого натурального n, получаем, что

$$\ln\left(1+\frac{1}{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)-1}\right)>\frac{1}{\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)}.$$

Из этого неравенства и из (15) следует (11). Из леммы 8, из (11), (14) и из свойства $\Lambda 1$ функции ψ следует, что

$$\psi(\pi(\xi))=\psi(f_{t_1}\ldots f_{t_m})\leqslant(\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda))^2\ln\gamma(\lambda)+\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda).$$

Учитывая, что ξ — произвольный полный путь схемы $U_\rho(T,\gamma,\psi)$, получаем, что

$$\psi(U_\rho(T,\gamma,\psi))\leqslant(\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda))^2\ln\gamma(\lambda)+\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda).$$

Используя следствие 1, получаем, что $\psi^d_\rho(T)\leqslant\psi(U_\rho(T,\gamma,\psi))$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $T\in\mathscr{M}_\rho$, γ — согласованная разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T и ψ — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ и $\Lambda 3$. Тогда $\psi^d_\rho(T)\leqslant\psi(U_\rho(T,\gamma,\psi))$ и*

$$\psi(U_\rho(T,\gamma,\psi))\leqslant\begin{cases}\psi(\lambda), & \text{если } T\in\mathscr{M}_\rho\mathscr{C};\\ (M_{\rho,\psi}(T))^2\ln\gamma(\lambda)+M_{\rho,\psi}(T), & \text{если } T\notin\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}.\end{cases}$$

Утверждение непосредственно следует из теоремы 4 и леммы 6.

С л е д с т в и е 3. *Пусть $T\in\mathscr{M}_\rho$ и γ — разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T. Тогда*

$$h^d_\rho(T)\leqslant h(U_\rho(T,\gamma,h))\leqslant\begin{cases}0, & \text{если } T\in\mathscr{M}_\rho\mathscr{C};\\ \widetilde{M}_{\rho,h}(\gamma,\lambda)\ln\gamma(\lambda)+1, & \text{если } T\notin\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, функция h обладает свойствами $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ и $\Lambda 3$. Пусть $T\in\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Из теоремы 4 следует, что $h(U_\rho(T,\gamma,h))\leqslant h(\lambda)=0$. Пусть $T\notin\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и $\xi=w_0,d_0,\ldots,w_m,d_m,w_{m+1}$ — произвольный полный путь схемы $U_\rho(T,\gamma,h)$. Из (11) следует, что $h(\pi(\xi))=m\leqslant\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)\ln\gamma(\lambda)+1$. Учитывая, что ξ — произвольный полный путь схемы $U_\rho(T,\gamma,h)$, получаем, что $h(U_\rho(T,\gamma,h))\leqslant\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma,\lambda)\ln\gamma(\lambda)+1$. Неравенство $h^d_\rho(T)\leqslant h(U_\rho(T,\gamma,h))$ следует из теоремы 4. Следствие доказано.

Теорема 5. *Для любой таблицы $T \in \mathcal{M}_\rho$ и для любой согласованной разностно ограниченной меры неопределенности γ таблицы T выполняются неравенства $h_\rho^d(T) \leqslant h(U_\rho(T,\gamma,h))$ и*

$$h(U_\rho(T,\gamma,h)) \leqslant \begin{cases} M_{\rho,h}(T), & \text{если } M_{\rho,h}(T) \leqslant 1; \\ M_{\rho,h}(T)(\ln\gamma(\lambda) - \ln M_{\rho,h}(T) + 1), & \text{если } M_{\rho,h}(T) \geqslant 2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $M_{\rho,h}(T) = 0$. Тогда, очевидно, $T \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Используя следствие 3, получаем, что $h(U_\rho(T,\gamma,h)) \leqslant 0$.

Пусть $M_{\rho,h}(T) = 1$. Используя лемму 9, получаем, что существует элемент f_i из $P(T)$ такой, что $T(f_i,\delta) \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любого $\delta \in E_k$. Поскольку функция γ обладает свойством согласованности,

$$\max\left\{h(f_i),\ \frac{\gamma(\lambda)}{\gamma(\lambda) - \max\{\gamma((f_i,\delta)) : \delta \in E_k\}}\right\} = 1.$$

Отсюда и из описания процесса U_ρ следует, что в схеме $U_\rho(T,\gamma,h)$ вершине w, в которую входит дуга, выходящая из корня этой схемы, приписан некоторый элемент $f_j \in P(T)$ такой, что

$$\max\left\{h(f_j),\ \frac{\gamma(\lambda)}{\gamma(\lambda) - \max\{\gamma((f_j,\delta)) : \delta \in E_k\}}\right\} = 1.$$

Учитывая, что функция γ обладает свойством согласованности, получаем, что $T(f_j,\delta) \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любого $\delta \in E_k$. Отсюда и из описания процесса U_ρ, следует, что за исключением корня и вершины w все вершины схемы $U_\rho(T,\gamma,h)$ являются концевыми вершинами. Поэтому $U_\rho(T,\gamma,h) = 1$.

Пусть $M_{\rho,h}(T) \geqslant 2$. Пусть $\xi = w_0, d_0, \ldots, w_m, d_m, w_{m+1}$ — самый длинный полный путь схемы $U_\rho(T,\gamma,h)$. Очевидно, $h(U_\rho(T,\gamma,h)) = m$. Из того, что схема $U_\rho(T,\gamma,h)$ является детерминированным условным тестом таблицы T, из неравенства $M_{\rho,h}(T) \geqslant 2$ и из теоремы 1 следует, что $m \geqslant 2$. Пусть для $j = 1,\ldots,m$ вершине w_j приписан элемент f_{t_j}, а дуге d_j приписано число δ_j. Обозначим $\alpha_0 = \lambda$ и для $j = 1,\ldots,m$ обозначим $\alpha_j = (f_{t_1},\delta_1)\ldots(f_{t_j},\delta_j)$.

Для $j = 0,\ldots,m$ обозначим $M_j = \widetilde{M}_{\rho,h}(\gamma,\alpha_j)$. Покажем, что для $i = 0,\ldots,m$

$$M_{m-i} \leqslant i. \tag{16}$$

Обозначим Γ_i' поддерево дерева $U_\rho(T,\gamma,h)$, корнем которого является вершина w_{m-i+1}. Добавим к Γ_i' новую вершину и дугу, выходящую из этой вершины и входящую в вершину w_{m-i+1}. Обозначим полученную схему Γ_i. Нетрудно заметить, что Γ_i — детерминированный условный тест таблицы $T\alpha_{m-i}$. Учитывая, что ξ — самый длинный полный путь схемы $U_\rho(T,\gamma,h)$, получаем, что $h(\Gamma_i) = i$. Так как Γ_i — детерминированный условный тест таблицы $T\alpha_{m-i}$, то $h_\rho^d(T\alpha_{m-i}) \leqslant h(\Gamma_i) = i$. Используя теорему 1, получаем, что $M_{\rho,h}(T\alpha_{m-i}) \leqslant h_\rho^d(T\alpha_{m-i})$. Поэтому $M_{\rho,h}(T\alpha_{m-i}) \leqslant i$. Из того, что функция γ обладает свойством согласованности, и из леммы 6 следует, что $M_{m-i} = M_{\rho,h}(T\alpha_{m-i})$. Поэтому $M_{m-i} \leqslant i$. Тем самым неравенство (16) доказано.

Очевидно, функция h обладает свойствами $\Lambda 2$ и $\Lambda 3$. Из неравенства $m \geqslant 2$ и из леммы 8 следует, что

$$\gamma(\alpha_{m-1}) \leqslant \gamma(\lambda) \cdot \prod_{j=0}^{m-2} \frac{M_j - 1}{M_j}. \tag{17}$$

Из описания схемы $U_\rho(T,\gamma,h)$ следует, что $T\alpha_{m-1}\notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Отсюда и из свойства частичной согласованности функции γ следует, что $\gamma(\alpha_{m-1})\geqslant 1$. Из этого неравенства и из (17) следует, что

$$\prod_{j=0}^{m-2}\frac{M_j}{M_j-1}\leqslant \gamma(\lambda). \tag{18}$$

Из леммы 7 следует, что для $j=1,\ldots,m$

$$M_j\leqslant M_0. \tag{19}$$

Из (16), (18) и (19) следует, что

$$\left(\frac{M_0}{M_0-1}\right)^{m-M_0}\cdot\prod_{j=0}^{M_0-2}\frac{M_0-j}{M_0-j-1}\leqslant \gamma(\lambda).$$

Логарифмируя обе части этого неравенства, получаем, что

$$(m-M_0)\ln\left(1+\frac{1}{M_0-1}\right)\leqslant \ln\gamma(\lambda)-\ln M_0. \tag{20}$$

Используя известное неравенство $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$, которое выполняется для любого натурального n, и соотношения $M_0=M_{\rho,h}(T)\geqslant 2$, получаем

$$\ln\left(1+\frac{1}{M_0-1}\right)>\frac{1}{M_0}.$$

Из этого неравенства и из (20) следует, что $m<M_0(\ln\gamma(\lambda)-\ln M_0+1)$. Учитывая, что $m=h(U_\rho(T,\gamma,h))$ и $M_0=M_{\rho,h}(T)$, получаем $h(U_\rho(T,\gamma,h))<$ $<M_{\rho,h}(T)(\ln\gamma(\lambda)-\ln M_{\rho,h}(T)+1)$. Используя следствие 3, получаем, что $h_\rho^d(T)\leqslant h(U_\rho(T,\gamma,h))$. Теорема доказана.

4.5. Следствия. В этом пункте для таблиц из $\mathcal{M}_\rho$ приводятся верхние и нижние оценки величины $\psi_\rho^d(T)$ в зависимости от величины $\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)$. Для таблиц из $\mathcal{M}_\rho\mathcal{F}$ приводятся верхние и нижние оценки величины $\psi_\rho^d(T)$ в зависимости от величин $M_{\rho,\psi}(T)$ и $\Theta_{\rho,h}(T)$.

Теорема 6. *Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура, $T\in\mathcal{M}_\rho$ и ψ — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами* $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ *и* $\Lambda 3$. *Тогда*

$$\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)\leqslant\psi_\rho^d(T)\leqslant\begin{cases}\psi(\lambda), & \text{если } T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C};\\ 2(\widehat{M}_{\rho,\psi}(T))^3\ln k+\widehat{M}_{\rho,\psi}(T), & \text{если } T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\dim T=n$ и $\mu_T(1)=f_1,\ldots,\mu_T(n)=f_n$. Из леммы 2 следует, что существует надразбиение Ω таблицы T такое, что $\psi(\Omega)=\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)$. Обозначим $D=\{\{\alpha\}:\alpha\in\Omega\}$. Используя предложения 3 и 4, получаем, что функция γ_D является разностно ограниченной мерой неопределенности таблицы T. Покажем, что

$$\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma_D,\lambda)\leqslant\widehat{M}_{\rho,\psi}(T). \tag{21}$$

Пусть $\bar\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in E_k^n$. Тогда существует слово $\beta\in\Omega$ такое, что $\chi(\beta)\subseteq\{(f_1,\delta_1),\ldots,(f_n,\delta_n)\}$. Поскольку любые два различные слова из Ω

несовместимы, $\gamma_D(\beta)=0$. Очевидно, $\psi(\beta)\leqslant\psi(\Omega)=\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)$. Следовательно, $\widetilde{M}_{\rho,\psi}(\gamma_D,\lambda,\bar\delta)\leqslant\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)$. Учитывая, что $\bar\delta$ — произвольный набор из E_k^n, получаем, что неравенство (21) выполняется. Из леммы 4 следует, что $|\Omega|\leqslant k^{\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)}$. Поэтому $\gamma_D(\lambda)\leqslant k^{2\widehat{M}_{\rho,\psi}(T)}$. Из этого неравенства, из (21) и из теоремы 4 следует, что

$$\psi_\rho^d(T)\leqslant\begin{cases}\psi(\lambda), & \text{если } T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C};\\ 2(\widehat{M}_{\rho,\psi}(T))^3\ln k+\widehat{M}_{\rho,\psi}(T), & \text{если } T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}.\end{cases}$$

Нижняя оценка величины $\psi_\rho^d(T)$ следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть* $\rho=(F,k)$ — *сигнатура и* $T\in\mathcal{M}_\rho$. *Тогда*

$$\widehat{M}_{\rho,h}(T)\leqslant h_\rho^d(T)\leqslant\begin{cases}0, & \textit{если } T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C};\\ 2(\widehat{M}_{\rho,h}(T))^2\ln k+1, & \textit{если } T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}.\end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, h — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda1$, $\Lambda2$ и $\Lambda3$. Пусть $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Из теоремы 6 следует, что $h_\rho^d(T)\leqslant h(\lambda)=0$. Пусть $T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Из леммы 2 следует, что существует надразбиение Ω таблицы T такое, что $h(\Omega)=\widehat{M}_{\rho,h}(T)$. Обозначим $D=\{\{\alpha\}:\alpha\in\Omega\}$. Из (21) следует, что $\widetilde{M}_{\rho,h}(\gamma_D,\lambda)\leqslant\widehat{M}_{\rho,h}(T)$. Используя лемму 4, получаем, что $\gamma_D(\lambda)\leqslant(|\Omega|)^2\leqslant k^{2\widehat{M}_{\rho,h}(T)}$. Из этих неравенств и из следствия 3 вытекает, что $h_\rho^d(T)\leqslant 2(\widehat{M}_{\rho,h}(T))^2\ln k+1$. Нижняя оценка величины $h_\rho^d(T)$ следует из теоремы 1. Следствие доказано.

Предложение 6. *Пусть* $\rho=(F,k)$ — *сигнатура. Тогда для любой таблицы* T *из* $\mathcal{M}_\rho\mathcal{F}$ *и для любой функции сложности* ψ *сигнатуры* ρ, *обладающей свойствами* $\Lambda1$, $\Lambda2$ *и* $\Lambda3$,

$$\max\{M_{\rho,\psi}(T),\log_k(\Theta_{\rho,h}(T)+1)\}\leqslant\psi_\rho^d(T)\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases}\psi(\lambda), & \textit{если } T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C};\\ 2(M_{\rho,\psi}(T))^3(\ln\Theta_{\rho,h}(T)+\ln k)+M_{\rho,\psi}(T), & \textit{если } T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}.\end{cases}$$

Доказательство. Нижняя оценка величины $\psi_\rho^d(T)$ следует из теорем 1 и 3.

Пусть $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Тогда из теоремы 4 следует, что $\psi_\rho^d(T)\leqslant\psi(\lambda)$.

Пусть $T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, $\dim T=n$ и $\mu_T(1)=f_1,\ldots,\mu_T(n)=f_n$. Для $\bar\delta=(\delta_1,\ldots$ $\ldots,\delta_n)\in\Delta(T)$ обозначим $B(\bar\delta)=\{\beta:\chi(\beta)\subseteq\{(f_1,\delta_1),\ldots,(f_n,\delta_n)\},T\beta\in$ $\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C},\psi(\beta)\leqslant M_{\rho,\psi}(T,\bar\delta)\}$. Из леммы 3 следует, что $B(\bar\delta)\neq\varnothing$. Для каждого $\bar\delta\in\Delta(T)$ выберем во множестве $B(\bar\delta)$ слово минимальной длины и обозначим его $\alpha(\bar\delta)$. Для каждого $i\in\nu_T(T)=\bigcup\limits_{\bar\delta\in\Delta(T)}\nu_T(\bar\delta)$ обозначим $d_i=\{\alpha(\bar\delta):\bar\delta\in\Delta(T),\nu_T(\bar\delta)=\{i\}\}$. Обозначим $D=\{d_i:i\in\nu_T(T)\}$. Покажем, что множество D является правильным покрытием таблицы T. Очевидно, D — непустое конечное подмножество множества $\mathcal{P}(\widehat{\Omega}_\rho(T))$. Ясно, что $\bar\delta\in\Delta(T\alpha(\bar\delta))$ для любого $\bar\delta\in\Delta(T)$. Поэтому множество D обладает свойством а) правильного покрытия таблицы T. Пусть $d_i\in D$ и $\alpha\in d_i$. Очевидно, существует $\bar\delta\in\Delta(T)$, для которого $\alpha=\alpha(\bar\delta)$ и $\nu_T(\bar\delta)=\{i\}$. Учитывая, что $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{F}$, $T\alpha\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и $\bar\delta\in\Delta(T\alpha)$, получаем, что $\Pi(T\alpha)=\{i\}$. Следовательно, $\bigcap\limits_{\alpha\in d_i}\Pi(T\alpha)=\{i\}$. Поэтому множество D обладает свойством б) правильного покрытия таблицы T. Пусть $i,j\in\nu_T(T)$, $i\neq j$, $\alpha\in d_i$ и $\beta\in d_j$. Предположим, что слова α и β совместимы. Тогда, учитывая, что $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{F}$, получаем, что $\Delta(T\alpha)\cap\Delta(T\beta)\neq\varnothing$, а этого не может быть, так как $\nu_T(\bar\delta)=\{i\}$ для любого $\bar\delta\in\Delta(T\alpha)$, и $\nu_T(\bar\sigma)=\{j\}$ для любого $\bar\sigma\in\Delta(T\beta)$. Следовательно, множество D обладает свойством в) правильного покрытия таблицы T. Таким образом, множество D является правильным покрытием таблицы T. Используя предложение 3, получаем, что функция γ_D является разностно ограниченной мерой неопределенности таблицы T.

Покажем, что функция γ_D обладает свойством согласованности. Пусть $\alpha\in\Omega_\rho(T)$. Если $\gamma_D(\alpha)=0$, то, используя свойство частичной согласованности функции γ_D, получаем, что $T\alpha\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Пусть $T\alpha\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Если $\alpha\notin\widehat{\Omega}_\rho(T)$, то, очевидно, $d_i[\alpha]=\varnothing$ для любого $d_i\in D$ ($d_i[\alpha]$ — множество всевозможных слов из d_i, совместимых со словом α). Следовательно, $\gamma_D(\alpha)=0$. Пусть $\alpha\in\widehat{\Omega}_\rho(T)$. Так как $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{F}$, то $\Delta(T\alpha)\neq\varnothing$. Следовательно, существует $i\in\nu_T(T)$ такое, что $\nu_T(\bar\delta)=\{i\}$ для любого $\bar\delta\in\Delta(T\alpha)$. Пусть $j\in\nu_T(T)$ и $j\neq i$. Покажем, что $d_j[\alpha]=\varnothing$. Предположим противное. Пусть $\beta\in d_j[\alpha]$. Тогда, так как $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{F}$, то $\Delta(T\alpha)\cap\Delta(T\beta)\neq\varnothing$, что не может быть. Следовательно, $\gamma_D(\alpha)=0$. Тем самым доказано, что γ_D — согласованная разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T.

Пусть $f_i\in P(T)$ и существуют два набора $\bar\delta$ и $\bar\sigma$ из $\Delta(T)$, которые различаются только в i-м разряде и для которых $\nu_T(\bar\delta)\neq\nu_T(\bar\sigma)$. Тогда элемент f_i будем называть *существенным* для таблицы T. Пусть B — произвольный тест таблицы T. Покажем, что $f_i\in B$. Предположим противное. Так как $T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то $B\neq\varnothing$. Пусть $B=\{f_{i_1},\ldots,f_{i_m}\}$ и $\bar\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. Поскольку $f_i\notin B$, наборы $\bar\delta$ и $\bar\sigma$ принадлежат множеству $\Delta(T(f_{i_1}\delta_{i_1})\ldots(f_{i_m}\delta_{i_m}))$. Следовательно, $T(f_{i_1}\delta_{i_1})\ldots(f_{i_m}\delta_{i_m})\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, что не может быть, поскольку B — тест таблицы T. Поэтому $f_i\in B$. Обозначим $P_0(T)$ множество всех элементов из $P(T)$, которые являются существенными для таблицы T. По доказанному выше

$$|P_0(T)|\leqslant\Theta_{\rho,h}(T). \tag{22}$$

Пусть $\bar\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in\Delta(T)$, $\alpha\in B(\bar\delta)$, $(f_j,\delta_j)\in\chi(\alpha)$ и $f_j\notin P_0(T)$. Обозначим β слово, полученное из слова α удалением всех вхождений буквы (f_j,δ_j). Покажем, что $\beta\in B(\bar\delta)$. Очевидно, $\chi(\alpha)\subseteq\{(f_1,\delta_1)\ldots(f_n,\delta_n)\}$ и $\chi(\beta)\subseteq\chi(\alpha)$. Так как функция ψ обладает свойством $\Lambda 2$, то $\psi(\beta)\leqslant\psi(\alpha)\leqslant M_{\rho,\psi}(T,\bar\delta)$. Покажем, что $T\beta\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Предположим противное. Тогда существует набор $\bar\sigma$ из $\Delta(T\beta)$ такой, что $\nu_T(\bar\sigma)\neq\nu_T(\bar\delta)$. Обозначим $\bar\tau$ набор, полученный из набора $\bar\sigma$ заменой j-го разряда на δ_j. Так как $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{F}$, то $\bar\tau\in\Delta(T\alpha)$. Поэтому $\nu_T(\bar\tau)=\nu_T(\bar\delta)$. Следовательно, $f_j\in P_0(T)$, что не может быть. Поэтому $T\beta\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Таким образом, $\beta\in B(\bar\delta)$. Рассмотрим слово $\alpha(\bar\delta)$. Так как $\alpha(\bar\delta)$ — слово минимальной длины из $B(\bar\delta)$, то $\chi(\alpha(\bar\delta))\subseteq\{(f_i,\delta_i):f_i\in P_0(T)\}$. Так как функция ψ обладает свойством $\Lambda 3$, то $\left|\alpha(\bar\delta)\right|\leqslant\psi(\alpha(\bar\delta))\leqslant M_{\rho,\psi}(T,\bar\delta)\leqslant M_{\rho,\psi}(T)$. Обозначим $A=\bigcup\limits_{d_i\in D}d_i$. Тогда $A\subseteq\{\alpha:\alpha\in\{(f_i,\delta):f_i\in P_0(T),\delta\in E_k\}^*,|\alpha|\leqslant M_{\rho,\psi}(T)\}$. Используя (22), получаем, что $|A|\leqslant(|P_0(T)|\cdot k)^{M_{\rho,\psi}(T)}\leqslant(\Theta_{\rho,h}(T)\cdot k)^{M_{\rho,\psi}(T)}$. Очевидно, $\gamma_D(\lambda)\leqslant|A|^2$.

Поэтому $\gamma_D(\lambda) \leqslant (\Theta_{\rho,h}(T)\cdot k)^{2M_{\rho,\psi}(T)}$. Используя следствие 2 и тот факт, что γ_D — согласованная разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T, получаем, что $\psi^d_\rho(T) \leqslant 2(M_{\rho,\psi}(T))^3(\ln\Theta_{\rho,h}(T)+\ln k)+M_{\rho,\psi}(T)$. Предложение доказано.

Следствие 5. *Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{F}$, где $\rho=(F,k)$. Тогда*

$$\max\{M_{\rho,h}(T), \log_k(\Theta_{\rho,h}(T)+1)\} \leqslant h^d_\rho(T)$$

и, если $M_{\rho,h}(T) \leqslant 1$, то $h^d_\rho(T) \leqslant M_{\rho,h}(T)$, а, если $M_{\rho,h}(T) \geqslant 2$, то

$$h^d_\rho(T) \ \leqslant M_{\rho,h}(T)(2M_{\rho,h}(T)(\ln\Theta_{\rho,h}(T)+\ln k)-\ln M_{\rho,h}(T)+1).$$

Доказательство. Очевидно, h — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda1$, $\Lambda2$ и $\Lambda3$. Нижняя оценка величины $h^d_\rho(T)$ непосредственно следует из предложения 6. Верхняя оценка величины $h^d_\rho(T)$ в случае $M_{\rho,h}(T) \leqslant 1$ следует из теоремы 5.

Пусть $M_{\rho,h}(T) \geqslant 2$. Тогда, очевидно, $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Определим функцию γ_D так же, как в доказательстве предложения 6. При этом в качестве функции ψ возьмем функцию h. Тогда, как показано в доказательстве предложения 6, γ_D — согласованная разностно ограниченная мера неопределенности таблицы T такая, что $\gamma_D(\lambda) \leqslant (\Theta_{\rho,h}(T)\cdot k)^{2M_{\rho,h}(T)}$. Используя теорему 5, получаем, что $h^d_\rho(T) \leqslant M_{\rho,h}(T)(2M_{\rho,h}(T)(\ln\Theta_{\rho,h}(T)+\ln k)-\ln M_{\rho,h}(T)+1)$. Следствие доказано.

4.6. Алгоритм $U_{\rho,\varphi,\psi}$. Пусть $\rho=(F,k)$ — нумерованная сигнатура, $F=\{f[i]_2 : i\in\omega\}$, ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, $\varphi\colon \mathcal{M}_\rho \to \omega$ — вычислимая функция, и $\mathcal{M}_{\rho,\varphi}$ — множество всевозможных таблиц T из $\mathcal{M}_\rho$ таких, что функция $T*\varphi$ является разностно ограниченной мерой неопределенности таблицы T. Пусть $\mathcal{M}_{\rho,\varphi} \neq \varnothing$.

Опишем алгоритм $U_{\rho,\varphi,\psi}$, который по произвольной таблице $T\in\mathcal{M}_{\rho,\varphi}$ строит схему $U_{\rho,\varphi,\psi}(T)$, являющуюся детерминированным условным тестом таблицы T.

Для таблицы T алгоритм $U_{\rho,\varphi,\psi}$ выполняет те же шаги, что и процесс U_ρ при построении схемы $U_\rho(T, T*\varphi,\psi)$. Используя предложение 5, получаем, что алгоритм $U_{\rho,\varphi,\psi}$ за конечное число шагов строит схему $U_{\rho,\varphi,\psi}(T)=U_\rho(T,T*\varphi,\psi)$, являющуюся детерминированным условным тестом таблицы T.

Очевидно, $\psi(U_{\rho,\varphi,\psi}(T))=\psi(U_\rho(T,T*\varphi,\psi))$ для любой таблицы T из $\mathcal{M}_{\rho,\varphi}$. Поэтому, если функция ψ обладает свойствами $\Lambda1$, $\Lambda2$ и $\Lambda3$, то для получения верхней оценки величины $\psi(U_{\rho,\varphi,\psi}(T))$ могут быть использованы утверждения из п. 4.4.

Оценим сверху число шагов, которые выполняет алгоритм $U_{\rho,\varphi,\psi}$ при построении схемы $U_{\rho,\varphi,\psi}(T)$.

Пусть Γ — некоторое конечное ориентированное дерево с корнем. Обозначим $L(\Gamma)$ число вершин дерева Γ, и $L_0(\Gamma)$ — число концевых вершин дерева Γ.

Лемма 10. *Пусть Γ — конечное ориентированное дерево с корнем, у которого из корня выходит ровно одна дуга, и из каждой вершины, не являющейся ни корнем, ни концевой вершиной, выходят не менее двух дуг. Тогда $L(\Gamma) \leqslant 2L_0(\Gamma)$.*

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по $L(\Gamma)$. Очевидно, если $L(\Gamma)=2$, то $L(\Gamma) \leqslant 2L_0(\Gamma)$.

Нетрудно заметить, что не существует дерево Γ, которое удовлетворяет условиям леммы и для которого $L(\Gamma)=3$.

Пусть для некоторого $n\in\omega$, $n\geqslant 3$, для любого дерева Γ, которое удовлетворяет условиям леммы и для которого $L(\Gamma)\leqslant n$, рассматриваемое неравенство выполняется. Пусть Γ — дерево, которое удовлетворяет условиям леммы и для которого $L(\Gamma)=n+1$. Покажем, что $L(\Gamma)\leqslant 2L_0(\Gamma)$. Нетрудно доказать, что существует вершина w дерева Γ, которая не является ни корнем, ни концевой вершиной и для которой каждая дуга, выходящая из w, входит в концевую вершину. Обозначим Γ' дерево, полученное из Γ удалением всех дуг, выходящих из w, и всех вершин, в которые входят эти дуги. Пусть из вершины w выходило m дуг. Ясно, что $m\geqslant 2$. Можно показать, что $L(\Gamma')=L(\Gamma)-m$, $L_0(\Gamma')=L_0(\Gamma)-m+1$ и схема Γ' удовлетворяет условиям леммы. По предположению индукции $L(\Gamma')\leqslant 2L_0(\Gamma')$. Поэтому $L(\Gamma)-m\leqslant 2(L_0(\Gamma)-m+1)=2L_0(\Gamma)-2m+2$. Следовательно, $L(\Gamma)\leqslant 2L_0(\Gamma)-2m+2\leqslant 2L_0(\Gamma)$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть $\rho=(F,k)$ — нумерованная сигнатура, ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, $\varphi:\mathcal{M}_\rho\to\omega$ — вычислимая функция и $T\in\mathcal{M}_{\rho,\varphi}$. Тогда при построении схемы $U_{\rho,\varphi,\psi}(T)$ алгоритм $U_{\rho,\varphi,\psi}$ делает не более $2N_\rho(T)+1$ шагов.*

Доказательство. Пусть $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Из описания алгоритма $U_{\rho,\varphi,\psi}$ следует, что при построении схемы $U_{\rho,\varphi,\psi}(T)$ он делает ровно один шаг. Поэтому утверждение теоремы выполняется в рассматриваемом случае.

Пусть $T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Обозначим Γ схему $U_{\rho,\varphi,\psi}(T)$. Сопоставим каждой вершине w схемы Γ слово $\pi(w)=\pi_\Gamma(w)\in\Omega_\rho(T)$ так, как это описано в п. 2.2.

Пусть w — произвольная вершина схемы Γ, которая не является ни корнем, ни концевой вершиной. Пусть вершине w приписан элемент f_i. Из описания алгоритма $U_{\rho,\varphi,\psi}$ следует, что $\Delta(T\pi(w))\neq\varnothing$ и $\varphi(T\pi(w))>\max\{\varphi(T\pi(w)(f_i,\delta)):\delta\in E_k\}$. Поэтому мощность множества $\{\delta:\delta\in E_k,\Delta(T\pi(w)(f_i,\delta))\neq\varnothing\}$ больше или равна двум. Следовательно, из вершины w выходит не менее двух дуг. Очевидно, Γ — детерминированная схема. Поэтому из корня Γ выходит ровно одна дуга. Из описания алгоритма $U_{\rho,\varphi,\psi}$ следует, что $\Delta(T\pi(\xi))\neq\varnothing$ для любого полного пути ξ схемы Γ. Очевидно, $\Delta(T\pi(\xi_1))\cap\Delta(T\pi(\xi_2))=\varnothing$ для любых двух различных полных путей ξ_1 и ξ_2 схемы Γ. Поэтому число полных путей схемы Γ не превосходит $N_\rho(T)$. Следовательно, $L_0(\Gamma)\leqslant N_\rho(T)$. Используя лемму 10, получаем, что $L(\Gamma)\leqslant 2N_\rho(T)$. Наконец, нетрудно заметить, что число шагов, выполняемых алгоритмом $U_{\rho,\varphi,\psi}$ при построении схемы Γ, совпадает с числом $L(\Gamma)+1$. Теорема доказана.

Замечание 4. Пусть $\rho=(F,k)$ — нумерованная сигнатура, ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, $\varphi:\mathcal{M}_\rho\to\omega$ — вычислимая функция, и $A\subseteq\mathcal{M}_{\rho,\varphi}$. Нетрудно показать, что алгоритм $U_{\rho,\varphi,\psi}$ имеет полиномиальную временную сложность на множестве таблиц A, если существует имеющий полиномиальную временную сложность алгоритм, который по заданному $f_i\in F$ вычисляет значение $\psi(f_i)$, и существует имеющий полиномиальную временную сложность алгоритм, который по заданным $T\in A$ и $\alpha\in\Omega_\rho(T)$ вычисляет значение $\varphi(T\alpha)$.

4.7. Алгоритмы $U_{\rho,GH_\rho,h}$, $U_{\rho,RH_\rho^{m+1},h}$ и $U_{\rho,H_\rho^{m+1},h}$. Пусть ρ — нумерованная сигнатура, $m\in\omega\setminus\{0\}$ и φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, RH_\rho^{m+1}, H_\rho^{m+1}\}$. Из предложения 2 следует, что $\mathcal{M}_\rho(m)\subseteq\mathcal{M}_{\rho,\varphi}$. В этом пункте рассматриваются верхние оценки сложности схем, построенных алгоритмом $U_{\rho,\varphi,h}$ для таблиц из $\mathcal{M}_\rho(m)$, и приводятся некоторые соображения о сложности алгоритма $U_{\rho,\varphi,h}$ на $\mathcal{M}_\rho(m)$.

Т е о р е м а 8. *Пусть ρ — нумерованная сигнатура, $m \in \omega \setminus \{0\}$, φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, RH_\rho^{m+1}, H_\rho^{m+1}\}$ и $T \in \mathcal{M}_\rho(m)$. Тогда схема $U_{\rho,\varphi,h}(T)$ является детерминированным условным тестом таблицы T, для которого*

$$h(U_{\rho,\varphi,h}(T)) \leqslant \begin{cases} M_{\rho,h}(T), & \textit{если } M_{\rho,h}(T) \leqslant 1; \\ M_{\rho,h}(T)(\ln \varphi(T) - \ln M_{\rho,h}(T) + 1), & \textit{если } M_{\rho,h}(T) \geqslant 2. \end{cases}$$

Утверждение теоремы следует из предложения 2, предложения 5, теоремы 5 и очевидного равенства $U_{\rho,\varphi,h}(T) = U_\rho(T, T * \varphi, h)$.

Пусть $\varphi \in \{GH_\rho, RH_\rho^{m+1}, H_\rho^{m+1}\}$. Рассмотрим более подробно верхние оценки величины $h(U_{\rho,\varphi,h}(T))$ для таблиц T из $\mathcal{M}_\rho(1)$.

Пусть ρ — сигнатура, A — непустое подмножество множества $\mathcal{M}_\rho$ и f, g — функции, определенные на A и принимающие значения из ω. Обозначим $B(f, g, A) = \{(f(T), g(T)) : T \in A\}$.

Используя теорему 3.3 из [1], нетрудно доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а 9. *Пусть ρ — нумерованная сигнатура и φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, RH_\rho^2, H_\rho^2\}$. Тогда*

$$B(M_{\rho,h}, \varphi, \mathcal{M}_\rho(1)) = B(h_\rho^d, \varphi, \mathcal{M}_\rho(1)) = \\ = \{(0,0)\} \cup \{(n, r) : n \in \omega \setminus \{0\}, r \in \omega \setminus \{0\}, n \leqslant r\}$$

и для любой пары $(n, r) \in B(M_{\rho,h}, \varphi, \mathcal{M}_\rho(1))$ существует таблица $T(n, r)$ из $\mathcal{M}_\rho(1)$ такая, что $M_{\rho,h}(T(n,r)) = h_\rho^d(T(n,r)) = n$, $\varphi(T(n,r)) = r$ и

$$h(U_{\rho,\varphi,h}(T(n,r))) \geqslant \begin{cases} n, & \textit{если } n < 2 \textit{ или } r < 3n; \\ (n-1)(\ln r - \ln 3n + 1), & \textit{если } n \geqslant 2 \textit{ и } r \geqslant 3n. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 5. Из теоремы 9 следует, что при $m = 1$ оценка теоремы 8 для таблиц из $\mathcal{M}_\rho(1)$ неулучшаема по порядку.

З а м е ч а н и е 6. Пусть φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, RH_\rho^2, H_\rho^2\}$. Из леммы 9 и из теорем 1, 8 и 9 следует, что для любой таблицы T из $\mathcal{M}_\rho(1)$

$$h(U_{\rho,\varphi,h}(T)) \leqslant \begin{cases} h_\rho^d(T), & \text{если } h_\rho^d(T) \leqslant 1; \\ h_\rho^d(T)(\ln \varphi(T) - \ln h_\rho^d(T) + 1), & \text{если } h_\rho^d(T) \geqslant 2 \end{cases}$$

и для таблиц из $\mathcal{M}_\rho(1)$ эта оценка неулучшаема по порядку.

З а м е ч а н и е 7. Пусть $\varphi \in \{GH_\rho, RH_\rho^2, H_\rho^2\}$. Из теоремы 9 следует, что не существует функции $q : \omega \to \omega$ такой, что $h(U_{\rho,\varphi,h}(T)) \leqslant q(h_\rho^d(T))$ для любой таблицы T из $\mathcal{M}_\rho(1)$.

Для диагностическая таблиц из $\mathcal{M}_\rho(1)$ положение иное.

П р е д л о ж е н и е 7. *Пусть $\rho = (F, k)$ — нумерованная сигнатура, φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, RH_\rho^2, H_\rho^2\}$ и T — диагностическая таблица из $\mathcal{M}_\rho(1)$. Тогда*

$$h(U_{\rho,\varphi,h}(T)) \leqslant 2 \cdot \ln k \cdot (h_\rho^d(T))^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M_{\rho,h}(T) \leqslant 1$. Тогда, используя теоремы 1 и 8, получаем, что $h(U_{\rho,\varphi,h}(T)) \leqslant M_{\rho,h}(T) \leqslant h_\rho^d(T)$. Очевидно, $h_\rho^d(T) \leqslant 2 \cdot \ln k \cdot (h_\rho^d(T))^2$.

Пусть $M_{\rho,h}(T) \geqslant 2$. Используя теорему 8, получаем, что

$$h(U_{\rho,\varphi,h}(T)) \leqslant M_{\rho,h}(T)(\ln\varphi(T) - \ln M_{\rho,h}(T) + 1).$$

Используя замечание 2, получаем, что $\varphi(T) \leqslant RH^2_\rho(T)$. Можно показать, что $RH^2_\rho(T) \leqslant \frac{N_\rho(T)^2}{2}$. Используя эти неравенства и неравенство $M_{\rho,h}(T) \geqslant 2$, получаем, что $h(U_{\rho,\varphi,h}(T)) \leqslant M_{\rho,h}(T)\cdot 2\cdot\ln N_\rho(T) = M_{\rho,h}(T)\cdot 2\cdot \ln k\cdot\log_k N_\rho(T)$. Из теоремы 1 следует, что $M_{\rho,h}(T) \leqslant h^d_\rho(T)$. Используя предложение 1, получаем, что $\log_k N_\rho(T) \leqslant h^d_\rho(T)$. Следовательно, $h(U_{\rho,\varphi,h}(T)) \leqslant 2\cdot\ln k\cdot(h^d_\rho(T))^2$. Предложение доказано.

Пусть $m \in \omega\setminus\{0\}$. Рассмотрим более подробно верхние оценки величины $h(U_{\rho,GH_\rho,h}(T))$ для таблиц $T \in \mathcal{M}_\rho(m)$.

Л е м м а 11. *Пусть $\rho = (F,k)$ — сигнатура и $T \in \mathcal{M}_\rho$. Тогда $h^d_\rho(T) \leqslant GH_\rho(T)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим G функцию GH_ρ. Утверждение леммы докажем индукцией по величине $G(T)$. Пусть $G(T) = 0$. Из предложения 2 следует, что функция $T * G$ обладает свойством согласованности. Поэтому $T \in \mathcal{M}_\rho\mathscr{C}$. Используя следствие 3, получаем, что $h^d_\rho(T) = 0$. Следовательно, в случае $G(T) = 0$ утверждение леммы выполняется. Пусть $n \in \omega\setminus\{0\}$ и пусть для любой таблицы T из $\mathcal{M}_\rho$ с $G(T) < n$ утверждение леммы выполняется. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho$ и $G(T) = n$. Пусть T' — некоторая отделимая подтаблица таблицы T, являющаяся граничной таблицей.
Выберем некоторый элемент $f_i \in P(T)$ такой, что мощность множества $\{\delta : \delta \in E_k, \Delta(T'(f_i,\delta)) \neq \varnothing\}$ больше или равна двум. Существование такого элемента следует из соотношения $T' \notin \mathcal{M}_\rho\mathscr{C}$. Из определения граничной таблицы и из выбора элемента f_i следует, что $T'(f_i,\delta) \in \mathcal{M}_\rho\mathscr{C}$ для любого $\delta \in E_k$. Пусть $\delta \in E_k$. Можно показать, что любая отделимая подтаблица таблицы $T(f_i,\delta)$ является отделимой подтаблицей таблицы T. По выбору f_i таблица T' не является отделимой подтаблицей таблицы $T(f_i,\delta)$. Следовательно, $G(T(f_i,\delta)) \leqslant n-1$. Из этого неравенства, из предположения индукции и из леммы 1 следует, что существует детерминированный условный тест Γ_δ таблицы $T(f_i,\delta)$ такой, что $h(\Gamma_\delta) \leqslant n-1$. Обозначим Γ'_δ помеченное конечное ориентированное дерево с корнем, полученное из Γ_δ удалением корня и выходящей из него дуги. Рассмотрим схему Γ, полученную из деревьев Γ'_δ следующим образом. Обозначим w вершину, в которую входит единственная дуга, выходящая из корня Γ. Вершине w приписан элемент f_i. Для каждого $\delta \in E_k$ из вершины w выходит дуга, которой приписано число δ. Эта дуга входит в вершину, являющуюся корнем дерева Γ'_δ. Можно показать, что Γ — детерминированный условный тест таблицы T и $h(\Gamma) \leqslant n$. Следовательно, $h^d_\rho(T) \leqslant n$. Лемма доказана.

Л е м м а 12. *Пусть ρ — нумерованная сигнатура и $m \in \omega\setminus\{0\}$. Тогда*

$$B(M_{\rho,h}, GH_\rho, \mathcal{M}_\rho(m)) = B(h^d_\rho, GH_\rho, \mathcal{M}_\rho(m)) = \\ = \{(0,0)\} \cup \{(n,r) : n \in \omega\setminus\{0\}, r \in \omega\setminus\{0\}, n \leqslant r\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $D = \{(0,0)\} \cup \{(n,r) : n \in \omega\setminus\{0\}, r \in \in \omega\setminus\{0\}, n \leqslant r\}$. Из теоремы 9 и включения $\mathcal{M}_\rho(1) \subseteq \mathcal{M}_\rho(m)$ следует, что $D \subseteq B(M_{\rho,h}, GH_\rho, \mathcal{M}_\rho(m))$ и $D \subseteq B(h^d_\rho, GH_\rho, \mathcal{M}_\rho(m))$. Из предложения 2 следует, что для любой таблицы $T \in \mathcal{M}_\rho(m)$ функция $T * GH_\rho$ обладает свойством согласованности. Используя этот факт, лемму 11 и теорему 1, нетрудно показать, что $B(M_{\rho,h}, GH_\rho, \mathscr{M}_\rho(m)) \subseteq D$ и $B(h^d_\rho, GH_\rho, \mathscr{M}_\rho(m)) \subseteq D$. Лемма доказана.

Замечание 8. Пусть $m \in \omega \setminus \{0\}$. Из леммы 12, включения $\mathscr{M}_\rho(1) \subseteq \mathscr{M}_\rho(m)$ и теоремы 9 следует, что оценка теоремы 8 при $\varphi = GH_\rho$ для таблиц из $\mathscr{M}_\rho(m)$ неулучшаема по порядку.

Замечание 9. Пусть $m \in \omega \setminus \{0\}$. Из включения $\mathscr{M}_\rho(1) \subseteq \mathscr{M}_\rho(m)$, из лемм 9, 11, 12 и из теорем 1, 8 и 9 следует, что для любой таблицы T из $\mathscr{M}_\rho(m)$

$$h(U_{\rho,GH_\rho,h}(T)) \leqslant \begin{cases} h^d_\rho(T), & \text{если } h^d_\rho(T) \leqslant 1, \\ h^d_\rho(T)(\ln GH_\rho(T) - \ln h^d_\rho(T) + 1), & \text{если } h^d_\rho(T) \geqslant 2, \end{cases}$$

и эта оценка для таблиц из $\mathscr{M}_\rho(m)$ неулучшаема по порядку.

Замечание 10. Пусть $m \in \omega \setminus \{0\}$. Очевидно, если $T \in \mathscr{M}_\rho(m)$ и $\alpha \in \Omega_\rho(T)$, то $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho(m)$. Используя замечания 3 и 4, получаем, что алгоритмы $U_{\rho,GH_\rho,h}$, $U_{\rho,RH^{m+1}_\rho,h}$ и $U_{\rho,H^{m+1}_\rho,h}$ имеют полиномиальную временную сложность на множестве $\mathscr{M}_\rho(m)$.

4.8. Алгоритмы $W_{\rho,GH_\rho,\psi}$, $W_{\rho,RH^2_\rho,\psi}$ и $W_{\rho,H^2_\rho,\psi}$. Рассматриваемые алгоритмы используются далее в параграфе 5.

Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура, $T \in \mathscr{M}_\rho$, $\dim T = n$, $\bar\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E^n_k$, и $i \in \omega$. Определим таблицу $T(\bar\delta, i)$ из $\mathscr{M}_\rho(1)$ следующим образом: $\Delta(T(\bar\delta, i)) = \{\bar\delta\} \cup \{\bar\sigma : \bar\sigma \in \Delta(T), i \notin \nu_T(\bar\sigma)\}$, $\mu_{T(\bar\delta,i)} \equiv \mu_T$, $\nu_{T(\bar\delta,i)}(\bar\delta) = \{1\}$ и $\nu_{T(\bar\delta,i)}(\bar\sigma) = \{0\}$ для любого $\bar\sigma \in \Delta(T(\bar\delta, i)) \setminus \{\bar\delta\}$. Обозначим $\nu_T(T) = \bigcup\limits_{\bar\delta \in \Delta(T)} \nu_T(\bar\delta)$.

Предложение 8. *Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура, ψ — функция сложности сигнатуры ρ, $T \in \mathscr{M}_\rho$, $\dim T = n$, $\mu_T(1) = f_1, \ldots, \mu_T(n) = f_n$, $\bar\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E^n_k$, t — минимальное число из множества $\omega \setminus \nu_T(T)$ и*

$$B = \begin{cases} \{t\} \cup \nu_T(T), & \textit{если } \bar\delta \notin \Delta(T); \\ \nu_T(\bar\delta), & \textit{если } \bar\delta \in \Delta(T). \end{cases}$$

Тогда выполняются следующие утверждения:

а) *если $i \in B$, Γ — детерминированный условный тест таблицы $T(\bar\delta, i)$ и ξ — полный путь схемы Γ, для которого $\bar\delta \in \Delta(T(\bar\delta, i)\pi(\xi))$, то $T\pi(\xi) \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и $\chi(\pi(\xi)) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$;*

б) $\min\{\psi^d_\rho(T(\bar\delta, i)) : i \in B\} = M_{\rho,\psi}(T, \bar\delta)$.

Доказательство. а) Так как Γ — детерминированный условный тест таблицы $T(\bar\delta, i)$, ξ — полный путь Γ и $\bar\delta \in \Delta(T(\bar\delta, i)\pi(\xi))$, то $\Delta(T(\bar\delta, i)\pi(\xi)) = \{\bar\delta\}$. Поэтому, если $i = t$, то $\Delta(T\pi(\xi)) = \varnothing$, а, если $i \neq t$, то $i \in \nu_T(\bar\sigma)$ для любого $\bar\sigma \in \Delta(T\pi(\xi))$. Следовательно, $T\pi(\xi) \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Включение $\chi(\pi(\xi)) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$ очевидно.

б) Из п. а) утверждения следует, что $\min\{\psi^d_\rho(T(\bar\delta, i)) : i \in B\} \geqslant M_{\rho,\psi}(T, \bar\delta)$. Покажем, что существует $i \in B$ такое, что $\psi^d_\rho(T) \leqslant M_{\rho,\psi}(T, \bar\delta)$. Из леммы 3 следует, что существует слово β, обладающее следующими свойствами: $\chi(\beta) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$, $T\beta \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и $\psi(\beta) = M_{\rho,\psi}(T, \bar\delta)$. Если $\Delta(T\beta) = \varnothing$, то положим i равным t. Если $\Delta(T\beta)\neq\varnothing$, то положим i равным минимальному числу из множества $\Pi(T\beta)$. Можно показать, что $i\in B$. Сопоставим слову β слово $\alpha\in F^*$. Если $\beta=\lambda$, то $\alpha=\lambda$. Если $\beta=\lambda$ и $\beta=(f_{i_1},\delta_{i_1})\dots(f_{i_m},\delta_{i_m})$, то $\alpha=f_{i_1}\dots f_{i_m}$. Обозначим G схему, полученную из схемы $G_\rho(\alpha)$ (определение этой схемы содержится в п. 3.1) следующим образом. Пусть ξ — полный путь схемы $G_\rho(\alpha)$ такой, что $\pi(\xi)=\beta$. Тогда концевой вершине пути ξ вместо числа числа 0 припишем число 1. Можно показать, что схема G является детерминированным условным тестом таблицы T и $\psi(G)=\psi(\beta)=M_{\rho,\psi}(T,\bar\delta)$. Следовательно, $\psi_\rho^d(T(\bar\delta,i))\leqslant M_{\rho,\psi}(T)$. Предложение доказано.

Пусть $\rho=(F,k)$ — нумерованная сигнатура, φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, RH_\rho^2, H_\rho^2\}$ и ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda1$, $\Lambda2$ и $\Lambda3$. Опишем алгоритм $W_{\rho,\varphi,\psi}$, строящий по произвольной таблице $T\in\mathcal{M}_\rho$ и произвольному набору $\bar\delta=(\delta_1,\dots,\delta_{\dim T})\in E_k^{\dim T}$ слово $W_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta)$, обладающее следующими свойствами: $\chi(W_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta))\subseteq\{(\mu_T(1),\delta_1),\dots,(\mu_T(\dim T),\delta_{\dim T})\}$ и $TW_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta)\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$.

Если $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то $W_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta)=\lambda$. Пусть $T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Положим t равным минимальному числу из множества $\omega\setminus\nu_T(T)$. Определим множество чисел B. Если $\bar\delta\notin\Delta(T)$, то $B=\{t\}\cup\nu_T(T)$. Если $\bar\delta\in\Delta(T)$, то $B=\nu_T(T)$. Для каждого $i\in B$ построим с помощью алгоритма $U_{\rho,\varphi,\psi}$ схему $\Gamma_i=U_{\rho,\varphi,\psi}(T(\bar\delta,i))$. Найдем минимальное число $i_0\in B$ такое, что $\psi(\Gamma_{i_0})=\min\{\psi(\Gamma_i):i\in B\}$. В схеме Γ_{i_0} найдем полный путь ξ такой, что $\bar\delta\in\Delta(T(\bar\delta,i_0)\pi(\xi))$. Положим $W_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta)$ равным слову $\pi(\xi)$.

Т е о р е м а 10. *Пусть $\rho=(F,k)$ — нумерованная сигнатура, φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, RH_\rho^2, H_\rho^2\}$, ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами* $\Lambda1$, $\Lambda2$ *и* $\Lambda3$, $T\in\mathcal{M}_\rho$, $\dim T=n$, $\mu_T(1)=f_{i_1},\dots,\mu_T(n)=f_{i_n}$ *и* $\bar\delta=(\delta_1,\dots,\delta_n)\in E_k^n$. *Тогда* $\chi(W_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta))\subseteq\{(f_{i_1},\delta_1),\dots,(f_{i_n},\delta_n)\}$, $TW_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta)\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ *и*

$$\psi(W_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta))\leqslant\begin{cases}\psi(\lambda), & \text{если } T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C};\\ (M_{\rho,\psi}(T,\bar\delta))^2\ln N_\rho(T)+M_{\rho,\psi}(T,\bar\delta), & \text{если } T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}.\end{cases}$$

Пусть $\psi=h$. Тогда

$$h(W_{\rho,\varphi,h}(T,\bar\delta))\leqslant\begin{cases}0, & \text{если } T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C},\\ M_{\rho,h}(T,\bar\delta)\ln N_\rho(T)+1, & \text{если } T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ справедливость утверждения теоремы непосредственно следует из описания алгоритма $W_{\rho,\varphi,\psi}$.

Пусть $T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Обозначим t минимальное число из множества $\omega\setminus\nu_T(T)$. Определим множество B. Если $\bar\delta\notin\Delta(T)$, то $B=\{t\}\cup\nu_T(T)$. Если $\bar\delta\in\Delta(T)$, то $B=\nu_T(T)$. Из предложений 2 и 5 следует, что для любого $i\in B$ схема $U_{\rho,\varphi,\psi}(T(\bar\delta,i))$ является детерминированным условным тестом таблицы $T(\bar\delta,i)$. Используя описание алгоритма $W_{\rho,\varphi,\psi}$ и п. а) предложения 8, получаем, что $\chi(W_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta))\subseteq\{(f_{i_1},\delta_1),\dots,(f_{i_n},\delta_n)\}$, $TW_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta)\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и $\psi(W_{\rho,\varphi,\psi}(T,\bar\delta))\leqslant\min\{\psi(U_{\rho,\varphi,\psi}(T(\bar\delta,i))):i\in B\}$.

Используя п. б) предложения 8, получаем, что существует $i \in B$ такое, что $\psi^d_\rho(T(\bar\delta, i)) = M_{\rho,\psi}(T, \bar\delta)$. Из этого равенства и из теоремы 1 следует, что $M_{\rho,\psi}(T(\bar\delta, i)) \leqslant M_{\rho,\psi}(T, \bar\delta)$. Можно показать, что $T(\bar\delta, i) \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и $RH^2_\rho(T(\bar\delta, i)) \leqslant N_\rho(T)$. Из последнего неравенства и из замечания 2 следует, что $\varphi(T(\bar\delta, i)) \leqslant N_\rho(T)$. Используя предложение 2 и следствие 2, получаем, что

$$\begin{aligned}\psi(W_{\rho,\varphi,\psi}(T, \bar\delta)) &\leqslant \psi(U_{\rho,\varphi,\psi}(T(\bar\delta, i))) \leqslant \\ &\leqslant (M_{\rho,\psi}(T(\bar\delta, i)))^2 \ln \varphi(T(\bar\delta, i)) + M_{\rho,\psi}(T(\bar\delta, i)) \leqslant \\ &\leqslant (M_{\rho,\psi}(T, \bar\delta))^2 \ln N_\rho(T) + M_{\rho,\psi}(T, \bar\delta).\end{aligned}$$

Пусть $\psi = h$. Тогда, используя предложение 2, следствие 3 и лемму 6, получаем, что $h(W_{\rho,\varphi,h}(T, \bar\delta)) \leqslant M_{\rho,h}(T, \bar\delta) \ln N_\rho(T) + 1$. Теорема доказана.

Замечание 11. Пусть φ — функция из множества $\{GH_\rho, RH^2_\rho, H^2_\rho\}$, и существует имеющий полиномиальную временную сложность алгоритм, вычисляющий функцию ψ на множестве F^*. Используя замечания 3 и 4, получаем, что алгоритм $U_{\rho,\varphi,\psi}$ имеет полиномиальную временную сложность на множестве $\mathcal{M}_\rho(1)$. Используя этот факт, нетрудно показать, что алгоритм $W_{\rho,\varphi,\psi}$ имеет полиномиальную временную сложность.

§ 5. Верхние оценки сложности и алгоритмы построения условных тестов. Второй подход

В этом параграфе рассматриваются верхние оценки минимальной сложности и алгоритмы построения детерминированных условных тестов таблиц, основанные на использовании понятия аддитивно ограниченной меры неопределенности таблицы. Оценки справедливы для произвольной функции сложности, обладающей свойством $\Lambda 1$. При построении алгоритмов предполагается, что функция сложности обладает свойствами $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ и $\Lambda 3$.

5.1. Тупиковые условные тесты. Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура, $T \in \mathcal{M}_\rho$ и Γ — детерминированный условный тест таблицы T. Сопоставим каждой вершине w схемы Γ слово $\pi(w) = \pi_\Gamma(w) \in \Omega_\rho(T)$ так, как это описано в п. 2.2.

Детерминированный условный тест Γ таблицы T будем называть *тупиковым*, если

а) $\Delta(T\pi(w)) \neq \varnothing$ для любой концевой вершины схемы Γ;

б) из любой вершины схемы Γ, не являющейся ни корнем, ни концевой вершиной, выходит не менее двух дуг;

в) $T\pi(w) \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для любой вершины схемы Γ, не являющейся ни корнем, ни концевой вершиной.

Обозначим $C^0_\rho(T)$ множество всевозможных тупиковых детерминированных условных тестов таблицы T.

Вершину w_2 схемы Γ будем называть *последователем* вершины w_1 схемы Γ, если из w_1 выходит дуга, входящая в w_2. Если этой дуге приписано число δ, то вершину w_2 будем называть *δ-последователем* вершины w_1. Вершину схемы Γ будем называть *предконцевой*, если она не является корнем и все ее последователи являются концевыми вершинами.

Лемма 13. *Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура, ψ — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойством $\Lambda 2$, $T \in \mathcal{M}_\rho$ и $\Delta(T) \neq \varnothing$. Тогда* *существует тупиковый детерминированный условный тест* Γ *таблицы* T *такой, что* $\psi(\Gamma)=\psi^d_\rho(T)$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что существует детерминированный условный тест Γ_1 таблицы T такой, что $\psi(\Gamma_1)=\psi^d_\rho(T)$. Для произвольной вершины w схемы Γ_1 обозначим $\pi(w)$ слово $\pi_{\Gamma_1}(w)$.

Пусть w — произвольная вершина схемы Γ_1, не являющаяся корнем. Если $T\pi(w)\notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то оставляем вершину w без изменений. Если $\Delta(T\pi(w))=\varnothing$, то удаляем вершину w и входящую в нее дугу из схемы Γ_1. Пусть $T\pi(w)\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и $\Delta(T\pi(w))\neq\varnothing$. Если w — последователь корня, то вместо того, что было приписано вершине w ранее, припишем ей минимальное число из множество $\Pi(T\pi(w))$. Пусть вершина w является последователем вершины w_1, не являющейся корнем схемы Γ_1. Если $T\pi(w_1)\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то удаляем из схемы Γ_1 вершину w и входящую в нее дугу. Если $T\pi(w_1)\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то вместо того, что было приписано вершине w ранее, припишем w минимальное число из множества $\Pi(T\pi(w))$. Просмотрим таким образом все вершины схемы Γ, не являющиеся корнем: сначала концевые вершины, затем те вершины, все последователи которых уже просмотрены, и т. д. вплоть до вершины, являющейся последователем корня. В результате получим некоторую схему сигнатуры ρ. Обозначим ее Γ_2.

Пусть w — произвольная вершина схемы Γ_2, не являющаяся ни корнем, ни концевой вершиной. Если вершина w имеет не менее двух последователей, то оставляем ее без изменений. Пусть вершина w имеет ровно одного последователя — вершину w_1. Удалим из схемы Γ_2 вершину w и дугу, выходящую из w. Дугу, входившую в вершину w, присоединим к вершине w_1. Просмотрим таким образом все вершины схемы Γ_2, которые не являются ни корнем, ни концевой вершиной. В результате получим некоторую схему сигнатуры ρ. Обозначим ее Γ. Нетрудно показать, что схема Γ является тупиковым детерминированным условным тестом таблицы T. Из построения схемы Γ и из свойства $\Lambda2$ функции ψ следует, что $\psi(\Gamma)\leqslant\psi(\Gamma_1)$. Учитывая выбор схемы Γ_1, получаем, что $\psi(\Gamma)=\psi^d_\rho(T)$. Лемма доказана.

5.2. Аддитивно ограниченные меры неопределенности. Пусть $T\in\mathcal{M}_\rho$. Функцию $\gamma:\Omega_\rho(T)\to\omega$ будем называть *аддитивно ограниченной мерой неопределенности таблицы* T, если она обладает следующими свойствами:

а) для любых $\alpha,(f_i,\delta_1),(f_i,\delta_2)\in\Omega_\rho(T)$, если $\delta_1\neq\delta_2$, то

$$\gamma(\alpha)\geqslant\gamma(\alpha(f_i,\delta_1))+\gamma(\alpha(f_i,\delta_2))$$

— свойство *аддитивной ограниченности*;

б) для любого $\alpha\in\Omega_\rho(T)$, если $\gamma(\alpha)=0$, то $T\alpha\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ — свойство *частичной согласованности*;

в) $\gamma(\alpha\varepsilon\beta)\leqslant\gamma(\alpha\beta)$ для любых $\alpha,\beta,\varepsilon\in\Omega_\rho(T)$ — свойство *неубывания*.

Пусть $p,q\in\omega$ и $p+q\geqslant1$. Непосредственно проверяется, что, если функции γ_1 и γ_2 являются аддитивно ограниченными мерами неопределенности таблицы $T\in\mathcal{M}_\rho$, то функции $p\gamma_1+q\gamma_2$, $\min\{\gamma_1,\gamma_2\}$ и $\gamma_1\cdot\gamma_2$ являются аддитивно ограниченными мерами неопределенности таблицы T.

Пусть $\gamma:\Omega_\rho(T)\to\omega$. Будем говорить, что функция γ обладает свойством *коммутативности*, если $\gamma(\alpha\beta)=\gamma(\beta\alpha)$ для любых $\alpha,\beta\in\Omega_\rho(T)$.

Замечание 12. Пусть $T\in\mathcal{M}_\rho$ и $\gamma:\Omega_\rho(T)\to\omega$. Если функция γ обладает свойствами коммутативности и аддитивной ограниченности, то γ обладает свойством неубывания. Действительно, пусть $\alpha,\beta,\varepsilon\in\Omega_\rho(T)$. Тогда $\gamma(\alpha\varepsilon\beta)=\gamma(\beta\alpha\varepsilon)$ в силу свойства коммутативности, $\gamma(\beta\alpha\varepsilon)\leqslant\gamma(\beta\alpha)$ в силу свойства аддитивной ограниченности, и $\gamma(\beta\alpha)=\gamma(\alpha\beta)$ в силу свойства коммутативности.

Приведем примеры аддитивно ограниченных мер неопределенности таблиц. Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$ и $n \in \omega$. Обозначим

$$\sigma(T, n) = \left|\{\bar{\delta} : \bar{\delta} \in \Delta(T), n \in \nu_T(\bar{\delta})\}\right|.$$

Опишем функции N_ρ, J_ρ, LK_ρ и K_ρ, определенные на $\mathscr{M}_\rho$ и принимающие значения из ω. Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$.

а) Функция N_ρ: $N_\rho(T) = |\Delta(T)|$.

б) Функция J_ρ: $J_\rho(T) = N_\rho(T) - \max\{\sigma(T, n) : n \in \omega\}$.

в) Функция LK_ρ. Если $\Delta(T) = \varnothing$, то $LK_\rho(T) = 0$. Пусть $\Delta(T) \neq \varnothing$. Пусть Γ — схема сигнатуры ρ. Обозначим $LK_\rho(\Gamma)$ число предконцевых вершин схемы Γ. Тогда $LK_\rho(T) = \max\{LK_\rho(\Gamma) : \Gamma \in G^0_\rho(T)\}$.

г) Функция K_ρ. Если $\Delta(T) = \varnothing$, то $K_\rho(T) = 0$. Пусть $\Delta(T) \neq \varnothing$. Пусть $\Gamma \in G^0_\rho(T)$. Каждой вершине w схемы Γ, не являющейся корнем, сопоставим число $K_\rho(w)$. Если w — концевая вершина, то $K_\rho(w) = 0$. Если w — предконцевая вершина, то $K_\rho(w) = 1$. Пусть w — вершина схемы Γ, не являющаяся ни корнем, ни концевой, ни предконцевой вершиной. Тогда $K_\rho(w) = \max\{K_\rho(w_1) + K_\rho(w_2) : w_1$ и w_1 — последователи w и $w_1 \neq w_2\}$. Обозначим $K_\rho(\Gamma) = K_\rho(w_0)$, где w_0 — последователь корня схемы Γ. Тогда $K_\rho(T) = \max\{K_\rho(\Gamma) : \Gamma \in C^0_\rho(T)\}$.

П р е д л о ж е н и е 9. *Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура и $T \in \mathscr{M}_\rho$. Тогда функции $T * N_\rho$, $T * J_\rho$, $T * LK_\rho$ и $T * K_\rho$ являются аддитивно ограниченными мерами неопределенности таблицы T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha, \beta, \varepsilon \in \Omega_\rho(T)$, $f_i \in P(T)$, $\delta_1, \delta_2 \in E_k$ и $\delta_1 \neq \delta_2$.

а) Функция $T * N_\rho$. Обозначим N функцию $T * N_\rho$. Очевидно, $N(\alpha) = \sum_{\delta \in E_k} N(\alpha(f_i, \delta))$. Из этого равенства следует, что функция N обладает свойством аддитивной ограниченности.

Если $N(\alpha) = 0$, то, очевидно, $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Поэтому функция N обладает свойством частичной согласованности.

Ясно, что функция N обладает свойством коммутативности. Используя замечание 12, получаем, что функция N обладает свойством неубывания.

б) Функция $T * J_\rho$. Обозначим J функцию $T * J_\rho$. Пусть $m \in \omega$ и $\sigma(T\alpha, m) = \max\{\sigma(T\alpha, n) : n \in \omega\}$. Тогда

$$J(\alpha) = N_\rho(T\alpha) - \sigma(T\alpha, m) = \sum_{\delta \in E_k} (N_\rho(T\alpha(f_i, \delta)) - \sigma(T\alpha(f_i, \delta), m)) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{\delta \in E_k} (N_\rho(T\alpha(f_i, \delta)) - \max\{\sigma(T\alpha(f_i, \delta), n) : n \in \omega\}) = \sum_{\delta \in E_k} J(\alpha(f_i, \delta)).$$

Из этих выражений следует, что функция J обладает свойством аддитивной ограниченности.

Пусть $J(\alpha) = 0$. Тогда $\Delta(T\alpha) = \varnothing$ или $\Pi(T\alpha) \neq \varnothing$. Следовательно, $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Поэтому функция J обладает свойством частичной согласованности.

Очевидно, функция J обладает свойством коммутативности. Используя замечание 12, получаем, что функция J обладает свойством неубывания.

в) Функция $T * LK_\rho$. Покажем, что значение $LK_\rho(T)$ определено и выполняется неравенство

$$LK_\rho(T) \leqslant \frac{N_\rho(T)}{2}. \tag{23}$$

Пусть $\Delta(T)=\varnothing$. Тогда $LK_\rho(T)=0$ и, очевидно, неравенство (23) выполняется.

Пусть $\Delta(T)\neq\varnothing$. Используя лемму 13, получаем, что $C^0_\rho(T)\neq\varnothing$. Пусть $\Gamma\in C^0_\rho(T)$. Тогда $\Delta(T\pi(\xi))\neq\varnothing$ для любого полного пути ξ схемы Γ. Очевидно, $\Delta(T\pi(\xi_1))\cap\Delta(T\pi(\xi_2))=\varnothing$ для любых различных полных путей ξ_1 и ξ_2 схемы Γ. Поэтому число концевых вершин в схеме Γ не превосходит $N_\rho(T)$. Учитывая, что из каждой предконцевой вершины схемы Γ выходит не менее двух дуг, получаем, что $LK_\rho(\Gamma)\leqslant\frac{N_\rho(T)}{2}$. Следовательно, значение $LK_\rho(T)$ определено и неравенство (23) выполняется.

Обозначим L функцию $T*LK_\rho$.

Пусть $\Delta(T)=\varnothing$. Тогда $L(\alpha)=0$ для любого $\alpha\in\Omega_\rho(T)$. Можно показать, что в этом случае функция L обладает свойствами аддитивной ограниченности, частичной согласованности и неубывания.

Пусть $\Delta(T)\neq\varnothing$. Пусть $T\alpha\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Тогда, как нетрудно проверить, $L(\alpha)=L(\alpha(f_i,\delta_1))=L(\alpha(f_i,\delta_2))=0$. Поэтому

$$L(\alpha)\geqslant L(\alpha(f_i,\delta_1))+L(\alpha(f_i,\delta_2)).$$

Пусть $T\alpha\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Обозначим $E=\{\delta:\delta\in E_k,\ \Delta(T\alpha(f_i,\delta))\neq\varnothing\}$. Пусть $|E|=1$ и $E=\{\delta\}$. Тогда $L(\alpha(f_i,\delta))=L(\alpha)$ и $L(\alpha(f_i,\sigma))=0$ для любого $\sigma\in E_k\setminus\{\delta\}$. Поэтому $L(\alpha)\geqslant L(\alpha(f_i,\delta_1))+L(\alpha(f_i,\delta_2))$. Пусть $|E|\geqslant 2$. Выберем для каждого $\delta\in E$ некоторую схему $\Gamma_\delta\in C^0_\rho(T\alpha(f_i,\delta))$ такую, что $LK_\rho(\Gamma_\delta)=L(\alpha(f_i,\delta))$. Для каждого $\delta\in E$ обозначим Γ'_δ помеченное конечное ориентированное дерево с корнем, полученное из Γ_δ удалением корня и выходящей из него дуги. Рассмотрим схему Γ, полученную из деревьев Γ'_δ следующим образом. Обозначим w вершину, являющуюся единственным последователем корня схемы Γ. Вершине w приписан элемент f_i. Для каждого $\delta\in E$ корень дерева Γ'_δ является δ-последователем вершины w, и других последователей у w нет. Можно показать, что $\Gamma\in C^0_\rho(T\alpha)$ и

$$LK_\rho(\Gamma)=\sum_{\delta\in E}LK_\rho(\Gamma_\delta)=\sum_{\delta\in E}L(\alpha(f_i,\delta)).$$

Учитывая, что $L(\alpha)\geqslant LK_\rho(\Gamma)$ и $L(\alpha(f_i,\delta))=0$ для любого $\delta\in E_k\setminus E$, получаем, что $L(\alpha)\geqslant\sum\limits_{\delta\in E_k}L(\alpha(f_i,\delta))$. Следовательно, функция L обладает свойством аддитивной ограниченности.

Пусть $L(\alpha)=0$. Если $\Delta(T\alpha)=\varnothing$, то $T\alpha\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Пусть $\Delta(T\alpha)\neq\varnothing$. Используя лемму 13, получаем, что $C^0_\rho(T\alpha)\neq\varnothing$. Пусть $\Gamma\in C^0_\rho(T\alpha)$. Тогда $LK_\rho(\Gamma)=0$. Можно показать, что в этом случае схема Γ имеет единственный полный путь ξ, и для этого полного пути $\pi(\xi)=\lambda$. Следовательно, $T\alpha\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Поэтому функция L обладает свойством частичной согласованности.

Очевидно, функция L обладает свойством коммутативности. Используя замечание 12, получаем, что функция L обладает свойством неубывания.

г) Функция $T*K_\rho$. Покажем, что значение $K_\rho(T)$ определено. Если $\Delta(T)=\varnothing$, то $K_\rho(T)=0$. Пусть $\Delta(T)\neq\varnothing$. Используя лемму 13, получаем, что $C^0_\rho(T)\neq\varnothing$. Пусть $\Gamma\in C^0_\rho(T)$. Нетрудно заметить, что $K_\rho(\Gamma)\leqslant LK_\rho(\Gamma)$. Учитывая, что значение $LK_\rho(T)$ определено, получаем, что значение $K_\rho(T)$ определено.

Обозначим K функцию $T*K_\rho$. Пусть $\Delta(T)=\varnothing$. Тогда $K(\alpha)=0$ для любого $\alpha\in\Omega_\rho(T)$. Нетрудно заметить, что в этом случае функция K_ρ обладает свойством аддитивной ограниченности, частичной согласованности и неубывания.

Пусть $\Delta(T) \neq \varnothing$. Пусть $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Тогда, как нетрудно проверить, $K(\alpha) = K(\alpha(f_i, \delta_1)) = K(\alpha(f_i, \delta_2)) = 0$. Поэтому $K(\alpha) \geqslant K(\alpha(f_i, \delta_1)) + K(\alpha(f_i, \delta_2))$. Пусть $T\alpha \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Обозначим $E = \{\delta : \delta \in E_k, \Delta(T\alpha(f_i, \delta)) \neq \varnothing\}$. Пусть $|E| = 1$ и $E = \{\delta\}$. Тогда $K(\alpha(f_i, \delta)) = K(\alpha)$ и $K(\alpha(f_i, \sigma)) = 0$ для любого $\sigma \in E_k \setminus \{\delta\}$. Поэтому $K(\alpha) \geqslant K(\alpha(f_i, \delta_1)) + K(\alpha(f_i, \delta_2))$. Пусть $|E| \geqslant 2$. Выберем для каждого $\delta \in E$ некоторую схему Γ_δ из $C^0_\rho(T\alpha(f_i, \delta))$ такую, что $K_\rho(\Gamma_\delta) = K(\alpha(f_i, \delta))$. Обозначим Γ схему, построенную из схем Γ_δ так же, как и в предыдущем пункте доказательства. Нетрудно проверить, что $\Gamma \in C^0_\rho(T\alpha)$. Можно показать, что $K_\rho(\Gamma) = K_\rho(\Gamma_{\sigma_1}) + K_\rho(\Gamma_{\sigma_2}) = K(\alpha(f_i, \sigma_1)) + K(\alpha(f_i, \sigma_2))$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in E$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ и, если $|E| \geqslant 3$, то $K(\alpha(f_i, \sigma_1)) \geqslant K(\alpha(f_i, \sigma))$ и $K(\alpha(f_i, \sigma_2)) \geqslant K(\alpha(f_i, \sigma))$ для любого $\sigma \in E \setminus \{\sigma_1, \sigma_2\}$. Учитывая, что $K(T\alpha(f_i, \delta)) = 0$ для любого $\delta \in E_k \setminus E$ и $K(\alpha) \geqslant K_\rho(\Gamma)$, получаем, что $K(\alpha) \geqslant K(\alpha(f_i, \delta_1)) + K(\alpha(f_i, \delta_2))$. Следовательно, функция K обладает свойством аддитивной ограниченности.

Пусть $K(\alpha) = 0$. Если $\Delta(T\alpha) = \varnothing$, то $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Пусть $\Delta(T\alpha) \neq \varnothing$. Используя лемму 13, получаем, что $C^0_\rho(T\alpha) \neq \varnothing$. Пусть $\Gamma \in C^0_\rho(T\alpha)$. Тогда $K_\rho(\Gamma) = 0$. Следовательно, в схеме Γ нет предконцевых вершин. Можно показать, что в этом случае схема Γ имеет единственный полный путь ξ, и для этого полного пути $\pi(\xi) = \lambda$. Следовательно, $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Поэтому функция K обладает свойством частичной согласованности.

Очевидно, функция K обладает свойством коммутативности. Используя замечание 12, получаем, что функция K обладает свойством неубывания. Предложение доказано.

Следующее утверждение характеризует множество аддитивно ограниченных мер неопределенности таблицы.

П р е д л о ж е н и е 10. *Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho$ и γ — аддитивно ограниченная мера неопределенности таблицы T. Тогда*

$$\gamma(\lambda) \geqslant K_\rho(T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Delta(T) = \varnothing$. Тогда $K_\rho(T) = 0$ и, следовательно, рассматриваемое неравенство выполняется.

Пусть $\Delta(T) \neq \varnothing$. При доказательстве предложения 9 показано, что значение $K_\rho(T)$ определено. Следовательно, существует схема Γ из $C^0_\rho(T)$ такая, что $K_\rho(\Gamma) = K_\rho(T)$. Для каждой вершины w схемы Γ обозначим $\pi(w)$ слово $\pi_\Gamma(w)$. При определении величины $K_\rho(\Gamma)$ каждой вершине w схемы Γ, не являющейся корнем, было сопоставлено число $K_\rho(w)$. Пусть w — произвольная вершина схемы Γ, не являющаяся корнем. Покажем, что

$$\gamma(\pi(w)) \geqslant K_\rho(w).$$

Пусть w — концевая вершина схемы Γ. Тогда $K_\rho(w) = 0$ и $\gamma(\pi(w)) \geqslant 0$. Поэтому $\gamma(\pi(w)) \geqslant K_\rho(w)$. Пусть ω — предконцевая вершина схемы Γ. Так как $\Gamma \in C^0_\rho(T)$, то $T\pi(w) \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Используя свойство частичной согласованности функции γ, получаем, что $\gamma(\pi(w)) \geqslant 1$. Учитывая, что $K_\rho(w) = 1$, получаем $\gamma(\pi(w)) \geqslant K_\rho(w)$.

Пусть w — вершина схемы Γ, которая не является ни корнем, ни предконцевой, ни концевой вершиной. Пусть для всех последователей вершины w рассматриваемое утверждение выполняется. Покажем, что оно выполняется и для вершины w. По определению, $K_\rho(w) = K_\rho(w_1) + K_\rho(w_2)$ для некоторых различных последователей w_1 и w_2 вершины w. Используя свойство аддитивной ограниченности функции γ, получаем, что

$\gamma(\pi(w)) \geqslant \gamma(\pi(w_1)) + \gamma(\pi(w_2))$. По предположению, $\gamma(\pi(w_1)) \geqslant K_\rho(w_1)$ и $\gamma(\pi(w_2)) \geqslant K_\rho(w_2)$. Поэтому $\gamma(\pi(w)) \geqslant K_\rho(w)$. Тем самым рассматриваемое утверждение доказано.

Пусть w_0 — последователь корня схемы Γ. Тогда $\gamma(\pi(w_0)) \geqslant K_\rho(w_0)$. По определению, $\pi(w_0) = \lambda$ и $K_\rho(w_0) = K_\rho(\Gamma)$. По выбору Γ выполняется равенство $K_\rho(\Gamma) = K_\rho(T)$. Следовательно, $\gamma(\lambda) \geqslant K_\rho(T)$. Предложение доказано.

5.3. Процесс построения схем $Y_{\rho,\mathscr{N}}$. Пусть $\rho = (F, k)$ — сигнатура. Обозначим $D_\rho = \{(T, \gamma) : T \in \mathscr{M}_\rho, \gamma$ — аддитивно ограниченная мера неопределенности таблицы $T\}$. Пусть D — непустое подмножество множества D_ρ. Обозначим $\widetilde{Z}_\rho(D) = \{(T, \alpha, \gamma) : (T, \gamma) \in D,\ \alpha \in \Omega_\rho(T),\ T\alpha \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}\}$ и C_ρ^d — множество всевозможных детерминированных схем сигнатуры ρ. Отображение $\mathscr{N} : \widetilde{Z}_\rho(D) \to C_\rho^d$ будем называть *допустимым*, если для любого набора $(T, \alpha, \gamma) \in \widetilde{Z}_\rho(D)$ выполняются следующие условия:

а) $P(\mathscr{N}(T, \alpha, \gamma)) \subseteq P(T)$;

б) $\Delta(T\alpha) = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi(\mathscr{N}(T,\alpha,\gamma))} \Delta(T\alpha\pi(\xi))$;

в) $T\alpha\pi(\xi) \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ или $\gamma(\alpha) > \gamma(\alpha\pi(\xi))$ для любого $\xi \in \Xi(\mathscr{N}(T, \alpha, \gamma))$.

Пусть $\mathscr{N} : \widetilde{Z}_\rho(D) \to C_\rho^d$ — допустимое отображение. Опишем процесс $Y_{\rho,\mathscr{N}}$ построения по произвольной паре $(T, \gamma) \in D$ схемы $Y_{\rho,\mathscr{N}}(T, \gamma)$, являющейся детерминированным условным тестом таблицы T. В общем случае процесс $Y_{\rho,\mathscr{N}}$ является не алгоритмом, а лишь способом описания схемы $Y_{\rho,\mathscr{N}}(T, \gamma)$.

1*-й шаг*. Построим дерево, содержащее вершины w_1, w_2 и дугу, которая выходит из w_1 и входит в w_2.

Пусть $T \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Если $\Delta(T) = \varnothing$, то вершине w_2 припишем число 0. Если $\Delta(T) \neq \varnothing$, то припишем вершине w_2 минимальное число из множества $\Pi(T)$. Обозначим полученное дерево $Y_{\rho,\mathscr{N}}(T, \gamma)$. Процесс $Y_{\rho,\mathscr{N}}$ завершен.

Пусть $T \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Припишем вершине w_2 слово λ и перейдем ко второму шагу. (Про вершину w_1 будем говорить, что она построена на первом шаге.)

Пусть уже сделано t шагов. Обозначим G дерево, построенное на шаге t.

$(t+1)$*-й шаг*. Если в дереве G ни одной вершине не приписано слово из $\Omega_\rho(T)$, то обозначим $Y_{\rho,\mathscr{N}}(T, \gamma)$ дерево G. Процесс $Y_{\rho,\mathscr{N}}$ завершен.

Если это не так, выберем в дереве G некоторую вершину w, которой приписано слово из $\Omega_\rho(T)$. Пусть вершине w приписано слово α.

Пусть $T\alpha \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Если $\Delta(T) = \varnothing$, то припишем вершине w вместо слова α число 0. Если $\Delta(T) \neq \varnothing$, то вместо слова α припишем вершине w минимальное число из множества $\Pi(T\alpha)$. (Про вершину w будем говорить, что она построена на $(t+1)$-м шаге.) Перейдем к $(t+2)$-му шагу.

Пусть $T\alpha \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Для каждого полного пути ξ схемы $\mathscr{N}(T, \alpha, \gamma)$ концевой вершине этого пути вместо числа припишем слово $\alpha\pi(\xi)$. Удалим корень схемы $\mathscr{N}(T, \alpha, \gamma)$ и выходящую из него дугу. Обозначим Γ полученное помеченное конечное ориентированное дерево с корнем. Удалим из дерева G вершину w, а дугу, входившую в вершину w, присоединим к корню дерева Γ. (Про вершины дерева Γ, не являющиеся концевыми, будем говорить, что они построены на $(t+1)$-м шаге.) Перейдем к $(t+2)$-му шагу.

Используя описание процесса $Y_{\rho,\mathscr{N}}$, свойства отображения $\mathscr{N}$ и свойство частичной согласованности функции γ, нетрудно доказать следующее утверждение.

Предложение 11. *Пусть ρ — сигнатура, D — непустое подмножество множества D_ρ и $\mathscr{N} : \widetilde{Z}_\rho(D) \to C_\rho^d$ — допустимое отображение.*

Тогда для любой пары $(T,\gamma)\in D$ процесс $Y_{\rho,\mathscr{N}}$ завершается после выполнения конечного числа шагов. Построенная им схема $Y_{\rho,\mathscr{N}}(T,\gamma)$ является детерминированным условным тестом таблицы T.

5.4. Верхние оценки величины $\psi^d_\rho(T)$. Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура и $l_\rho:\{(T,\alpha):T\in\mathscr{M}_\rho,\alpha\in\Omega_\rho(T)\}\to\omega$ — функция, обладающая следующим свойством: если $T\in\mathscr{M}_\rho$, $\alpha,\beta\in\Omega_\rho(T)$ и $l_\rho(T,\alpha)=l_\rho(T,\beta)$, то $\alpha=\beta$. Пусть $T\in\mathscr{M}_\rho$ и $\alpha\in\Omega_\rho(T)$. Число $l_\rho(T,\alpha)$ будем называть *T-номером слова α*.

Пусть ψ — функция сложности сигнатуры ρ. Определим отображение $\mathscr{N}_\psi:\widetilde{Z}_\rho(D_\rho)\to\mathscr{C}^d_\rho$. Пусть $(T,\alpha,\gamma)\in\widetilde{Z}_\rho(D_\rho)$, $\dim T=n$, $\mu_T(1)=f_1,\ldots$ $\ldots,\mu_T(n)=f_n$. Для каждого $f_i\in P(T)$ обозначим σ_i минимальное число из E_k такое, что

$$\gamma(\alpha(f_i,\sigma_i))=\max\{\gamma(\alpha(f_i,\sigma)):\sigma\in E_k\}.$$

Обозначим $\bar\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$. Пусть β — слово из $\Omega_\rho(T)$ с минимальным T-номером такое, что $\chi(\beta)\subseteq\{(f_1,\sigma_1),\ldots,(f_n,\sigma_n)\}$, $T\alpha\beta\in\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и $\psi(\beta)=M_{\rho,\psi}(T,\bar\sigma)$. Так как $T\alpha\notin\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$, то $\beta\neq\lambda$. Пусть $\beta=(f_{i_1},\sigma_{i_1})\ldots(f_{i_m},\sigma_{i_m})$. Обозначим $\varepsilon=f_{i_1}\ldots f_{i_m}$. Тогда $\mathscr{N}_\psi(T,\alpha,\gamma)=G_\rho(\varepsilon)$. (Определение схемы $G_\rho(\varepsilon)$ содержится в п. 3.1.)

Лемма 14. *Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура, ψ — функция сложности сигнатуры ρ и $(T,\alpha,\gamma)\in\widetilde{Z}_\rho(D_\rho)$. Тогда для любого полного пути ξ схемы $\mathscr{N}_\psi(T,\alpha,\gamma)$ выполняются следующие утверждения:*

а) $\psi(\pi(\xi))\leqslant M_{\rho,\psi}(T)$;

б) *если $T\alpha\pi(\xi)\notin\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$, то $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\frac{\gamma(\alpha)}{2}$.*

Доказательство. Пусть $\dim T=n$ и $\mu_T(1)=f_1,\ldots,\mu_T(n)=f_n$. Для каждого $f_i\in P(T)$ обозначим σ_i минимальное число из E_k, для которого $\gamma(\alpha(f_i,\sigma_i))=\max\{\gamma(\alpha(f_i,\sigma)):\sigma\in E_k\}$. Обозначим $\bar\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ и β — слово из $\Omega_\rho(T)$ с минимальным T-номером, обладающее следующими свойствами: $\chi(\beta)\subseteq\{(f_1,\sigma_1),\ldots,(f_n,\sigma_n)\}$, $T\alpha\beta\in\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и $\psi(\beta)=M_{\rho,\psi}(T,\bar\sigma)$.

Пусть ξ — произвольный полный путь схемы $\mathscr{N}_\psi(T,\alpha,\gamma)$. Тогда, очевидно, $\psi(\pi(\xi))=\psi(\beta)=M_{\rho,\psi}(T\alpha,\bar\sigma)$. Можно показать, что $M_{\rho,\psi}(T\alpha,\bar\sigma)\leqslant$ $\leqslant M_{\rho,\psi}(T,\bar\sigma)$. Из леммы 3 вытекает, что $M_{\rho,\psi}(T,\bar\sigma)\leqslant M_{\rho,\psi}(T)$. Следовательно, $\psi(\pi(\xi))\leqslant M_{\rho,\psi}(T)$.

Пусть $T\alpha\pi(\xi)\notin\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Тогда, как нетрудно заметить, $\pi(\xi)\neq\beta$ и существуют $f_i\in P(T)$ и $\delta\in E_k$ такие, что $\delta\neq\sigma_i$ и $(f_i,\delta)\in\chi(\pi(\xi))$. Используя свойство неубывания функции γ, получаем, что $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\gamma(\alpha(f_i,\delta))$. Используя свойство аддитивной ограниченности функции γ и учитывая выбор числа σ_i, получаем, что $2\gamma(\alpha(f_i,\delta))\leqslant\gamma(\alpha(f_i,\delta))+\gamma(\alpha(f_i,\sigma_i))\leqslant\gamma(\alpha)$. Следовательно, $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\frac{\gamma(\alpha)}{2}$. Лемма доказана.

Следствие 6. *Пусть ρ — сигнатура, ψ — функция сложности сигнатуры ρ, $T\in\mathscr{M}_\rho$ и γ — аддитивно ограниченная мера неопределенности таблицы T. Тогда схема $Y_{\rho,\mathscr{N}_\psi}(T,\gamma)$ является детерминированным условным тестом таблицы T.*

Доказательство. Используя определение отображения $\mathscr{N}_\psi$ и лемму 14, нетрудно показать, что $\mathscr{N}_\psi$ — допустимое отображение. Используя предложение 11, получаем, что схема $Y_{\rho,\mathscr{N}_\psi}(T,\gamma)$ является детерминированным условным тестом таблицы T. Следствие доказано.

Теорема 11. *Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура, ψ — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойством $\Lambda1$, $T\in\mathscr{M}_\rho$ и γ — аддитивно* *ограниченная мера неопределенности таблицы* T. *Тогда*

$$\psi_\rho^d(T) \leqslant \begin{cases} \psi(\lambda), & \text{если } T \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}; \\ M_{\rho,\psi}(T)(1+\log_2\gamma(\lambda)), & \text{если } T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Из описания процесса $Y_{\rho,\mathcal{N}_\psi}$ следует, что $\psi(Y_{\rho,\mathcal{N}_\psi}(T,\gamma)) = \psi(\lambda)$. Пусть $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Рассмотрим произвольный полный путь ξ схемы $Y_{\rho,\mathcal{N}_\psi}(T,\gamma)$. Из описания процесса $Y_{\rho,\mathcal{N}_\psi}(T,\gamma)$ и того факта, что $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, следует, что для некоторого $m \in \omega \setminus \{0\}$ выполняется равенство $\pi(\xi) = \pi(\xi_1)\dots\pi(\xi_m)$, где ξ_1 — полный путь схемы $\mathcal{N}_\psi(T,\lambda,\gamma)$ и, если $m \geqslant 2$, то ξ_i — полный путь схемы $\mathcal{N}_\psi(T,\pi(\xi_1)\dots\pi(\xi_{i-1}),\gamma)$ для $i = 2,\dots,m$. По предположению, $T\lambda \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Из описания процесса $Y_{\rho,\mathcal{N}_\psi}$ следует, что, если $m \geqslant 2$, то $T\pi(\xi_1)\dots\pi(\xi_{i-1}) \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ для $i = 2,\dots,m$. Используя п. а) утверждения леммы 14, получаем, что $\psi(\pi(\xi_i)) \leqslant M_{\rho,\psi}(T)$ для $i = 1,\dots,m$. Используя свойство $\Lambda 1$ функции ψ, получаем, что

$$\psi(\pi(\xi)) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \psi(\pi(\xi_i)) \leqslant m \cdot M_{\rho,\psi}(T). \tag{24}$$

Покажем, что $m \leqslant 1 + \log_2\gamma(\lambda)$. Так как $T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ и функция γ обладает свойством частичной согласованности, то $\gamma(\lambda) \geqslant 1$. Следовательно, если $m = 1$, то рассматриваемое неравенство выполняется. Пусть $m \geqslant 2$.

Используя п. б) утверждения леммы 14, получаем, что

$$\gamma(\pi(\xi_1)\dots\pi(\xi_{m-1})) \leqslant \frac{\gamma(\lambda)}{2^{m-1}}.$$

Учитывая, что $T\pi(\xi_1)\dots\pi(\xi_{m-1}) \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, и используя свойство частичной согласованности функции γ, получаем, что $\gamma(\pi(\xi_1)\dots\pi(\xi_{m-1})) \geqslant 1$. Следовательно, $2^{m-1} \leqslant \gamma(\lambda)$ и $m \leqslant 1 + \log_2\gamma(\lambda)$. Используя неравенство (24), получаем, что $\psi(\pi(\xi)) \leqslant M_{\rho,\psi}(T)(1 + \log_2\gamma(\lambda))$. Учитывая, что ξ — произвольный полный путь схемы $Y_{\rho,\mathcal{N}_\psi}(T,\gamma)$, получаем, что $\psi(Y_{\rho,\mathcal{N}_\psi}(T,\gamma)) \leqslant M_{\rho,\psi}(T)(1+\log_2\gamma(\lambda))$.

Наконец, используя следствие 6, получаем, что $\psi_\rho^d(T) \leqslant \psi(Y_{\rho,\mathcal{N}_\psi}(T,\gamma))$. Теорема доказана.

Следствие 7. *Пусть ρ — сигнатура, ψ — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойством $\Lambda 1$, и $T \in \mathcal{M}_\rho$. Тогда*

$$\psi_\rho^d(T) \leqslant \begin{cases} \psi(\lambda), & \text{если } T \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}; \\ M_{\rho,\psi}(T)\log_2 N_\rho(T), & \text{если } T \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}. \end{cases}$$

Доказательство. Из предложения 9 следует, что функция $T*LK_\rho$ является аддитивно ограниченной мерой неопределенности таблицы T. Из (23) следует, что $T*LK_\rho(\lambda) \leqslant \frac{N_\rho(T)}{2}$. Используя теорему 11, получаем рассматриваемое утверждение. Следствие доказано.

Следствие 8. *Пусть $\rho = (F,k)$ — сигнатура, ψ — функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda 1$ и $\Lambda 3$, и T — диагностическая таблица из $\mathcal{M}_\rho \setminus \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Тогда*

$$\max\{M_{\rho,\psi}(T), \log_k N_\rho(T)\} \leqslant \psi_\rho^d(T) \leqslant \log_2 k \cdot M_{\rho,\psi}(T) \cdot \log_k N_\rho(T).$$

Нижняя оценка величины $\psi_\rho^d(T)$ следует из теоремы 1 и предложения 1. Верхняя оценка вытекает из следствия 7. Следствие доказано.

5.5. Верхние оценки величины $h_\rho^d(T)$. Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура. Определим отображение $\mathcal{N}_\rho^h : \widetilde{Z}_\rho(D_\rho) \to \mathscr{C}_\rho^d$. Пусть $(T,\alpha,\gamma) \in \widetilde{Z}_\rho(D_\rho)$, $\dim T = n$, $\mu_T(1)=f_1,\ldots,\mu_T(n)=f_n$. Для каждого $f_i \in P(T)$ обозначим σ_i минимальное число из E_k такое, что

$$\gamma(\alpha(f_i,\sigma_i)) = \max\{\gamma(\alpha(f_i,\sigma)) : \sigma \in E_k\}.$$

Обозначим $\bar\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$. Пусть β — слово из $\Omega_\rho(T)$ с минимальным T-номером, для которого $\chi(\beta) \subseteq \{(f_1,\sigma_1),\ldots,(f_n,\sigma_n)\}$, $T\alpha\beta \in \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и $h(\beta)=M_{\rho,h}(T,\bar\sigma)$. Существование слова β следует из леммы 3. Так как $T\alpha \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$, то $\beta \neq \lambda$. Пусть $\beta=(f_{i_1},\sigma_{i_1})\ldots(f_{i_m},\sigma_{i_m})$. Опишем процесс построения схемы $\mathcal{N}_\rho^h(T,\alpha,\gamma)$.

1-й шаг. Построим дерево, содержащее вершины w_1, w_2 и дугу, которая выходит из w_1 и входит в w_2. Припишем вершине w_2 слово α. Обозначим полученное дерево G_1. Обозначим $I_1=\{f_{i_1},\ldots,f_{i_m}\}$. Перейдем ко второму шагу.

Пусть уже сделано t шагов и построены дерево G_t и множество I_t.

$(t+1)$-й шаг. Найдем в дереве G_t единственную вершину w, которой приписано слово из множества $\Omega_\rho(T)$. Пусть вершине w приписано слово ε. Если $I_t=\varnothing$, то вместо слова ε припишем вершине w число 0. Обозначим полученное дерево $\mathcal{N}_\rho^h(T,\alpha,\gamma)$. Процесс построения схемы $\mathcal{N}_\rho^h(T,\alpha,\gamma)$ завершен.

Пусть $I_t \neq \varnothing$. Пусть j — минимальное число из множества $\{1,\ldots,n\}$, обладающее следующими свойствами: $f_j \in I_t$ и для любого $f_l \in I_t$

$$\max\{\gamma(\varepsilon(f_j,\sigma)) : \sigma \in E_k \setminus \{\sigma_j\}\} \geqslant \max\{\gamma(\varepsilon(f_l,\sigma)) : \sigma \in E_k \setminus \{\sigma_l\}\}.$$

Вместо слова ε припишем вершине w элемент f_j. Для каждого $\sigma \in E_k$ добавим к дереву G_t вершину w_σ и дугу, выходящую из вершины w и входящую в вершину w_σ. Этой дуге припишем число σ. Если $\sigma \neq \sigma_j$, то вершине w_σ припишем число 0. Если $\sigma=\sigma_j$, то припишем вершине w_σ слово $\varepsilon(f_j,\sigma_j)$. Обозначим полученное дерево G_{t+1}. Обозначим I_{t+1} множество $I_t \setminus \{f_j\}$. Перейдем к $(t+2)$-му шагу.

Лемма 15. *Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура и $(T,\alpha,\gamma) \in \widetilde{Z}_\rho(D_\rho)$. Тогда для любого полного пути ξ схемы $\mathcal{N}_\rho^h(T,\alpha,\gamma)$ выполняются следующие утверждения:*

а) $h(\pi(\xi)) \leqslant M_{\rho,h}(T)$;

б) *если $T\alpha\pi(\xi) \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$, то* $\gamma(\alpha\pi(\xi)) \leqslant \dfrac{\gamma(\alpha)}{\max\{2, h(\pi(\xi))\}}$.

Доказательство. Пусть $\dim T = n$ и $\mu_T(1)=f_1,\ldots,\mu_T(n)=f_n$. Для каждого $f_i \in P(T)$ обозначим σ_i минимальное число из E_k такое, что $\gamma(\alpha(f_i,\sigma_i))=\max\{\gamma(\alpha(f_i,\sigma)):\sigma\in E_k\}$. Обозначим $\bar\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ и β — слово из $\Omega_\rho(T)$ с минимальным T-номером, обладающее следующими свойствами: $\chi(\beta)\subseteq\{(f_1,\sigma_1),\ldots,(f_n,\sigma_n)\}$, $T\alpha\beta\in\mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и $h(\beta)=M_{\rho,h}(T,\bar\sigma)$.

Нетрудно заметить, что в схеме $\mathcal{N}_\rho^h(T,\alpha,\gamma)$ существует полный путь ξ_0 такой, что $\chi(\pi(\xi_0))=\chi(\beta)$. Пусть $\pi(\xi_0)=(f_{j_1},\sigma_{j_1})\ldots(f_{j_m},\sigma_{j_m})$. Обозначим $\alpha_0=\lambda$ и для $i=1,\ldots,m$ обозначим $\alpha_i=(f_{j_1},\sigma_{j_1})\ldots(f_{j_i},\sigma_{j_i})$. Для $i=1,\ldots,m$ обозначим δ_{j_i} минимальное число из множества $E_k\setminus\{\sigma_{j_i}\}$ такое, что

$$\gamma(\alpha\alpha_{i-1}(f_{j_i},\delta_{j_i})) = \max\{\gamma(\alpha\alpha_{i-1}(f_{j_i},\sigma)) : \sigma \in E_k \setminus \{\sigma_{j_i}\}\}.$$

Пусть ξ — произвольный полный путь схемы $\mathcal{N}_\rho^h(T,\alpha,\gamma)$. Нетрудно заметить, что $h(\pi(\xi))\leqslant h(\beta)=M_{\rho,h}(T\alpha,\bar\sigma)$. Можно показать, что $M_{\rho,h}(T\alpha,\bar\sigma)\leqslant M_{\rho,h}(T,\bar\sigma)$. Из леммы 3 следует, что $M_{\rho,h}(T,\bar\sigma)\leqslant M_{\rho,h}(T)$. Поэтому $h(\pi(\xi))\leqslant M_{\rho,h}(T)$.

Пусть $T\alpha\pi(\xi)\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Тогда $\xi\neq\xi_0$. Можно показать, что в этом случае для некоторого $r\in\{1,\ldots,m\}$ выполняется равенство $\pi(\xi)=\alpha_{r-1}(f_{j_r},\delta)$, где $\delta\neq\sigma_{j_r}$. Очевидно, $r=h(\pi(\xi))$. Покажем, что $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\frac{\gamma(\alpha)}{2}$. Используя свойство неубывания функции γ, получаем, что $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\gamma(\alpha(f_{j_r},\delta))$. Используя свойство аддитивной ограниченности функции γ и учитывая выбор числа σ_{j_r}, получаем, что $2\gamma(\alpha(f_{j_r},\delta))\leqslant\gamma(\alpha(f_{j_r},\delta))+\gamma(\alpha(f_{j_r},\sigma_{j_r}))\leqslant\gamma(\alpha)$. Следовательно, $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\frac{\gamma(\alpha)}{2}$.

Пусть $r\geqslant 2$. Покажем, что $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\frac{\gamma(\alpha)}{r}$. Из свойства аддитивной ограниченности функции γ следует, что для $i=0,\ldots,r-2$ выполняется неравенство $\gamma(\alpha\alpha_{i+1})+\gamma(\alpha\alpha_i(f_{j_{i+1}},\delta_{j_{i+1}}))\leqslant\gamma(\alpha\alpha_i)$. Суммируя эти неравенства по i от 0 до $r-2$, получаем, что

$$\gamma(\alpha\alpha_{r-1})+\sum_{i=0}^{r-2}\gamma(\alpha\alpha_i(f_{j_{i+1}},\delta_{j_{i+1}}))\leqslant\gamma(\alpha). \tag{25}$$

Покажем, что для любого $i\in\{0,\ldots,r-2\}$

$$\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\gamma(\alpha\alpha_i(f_{j_{i+1}},\delta_{j_{i+1}})). \tag{26}$$

Неравенство $\gamma(\alpha\alpha_i(f_{j_r},\delta))\leqslant\gamma(\alpha\alpha_i(f_{j_{i+1}},\delta_{j_{i+1}}))$ следует из выбора элемента $f_{j_{i+1}}$ (см. описание схемы $\mathcal{N}_\rho^h(T,\alpha,\gamma)$) и определения числа $\delta_{j_{i+1}}$. Неравенство $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\gamma(\alpha\alpha_i(f_{j_r},\delta))$ — следствие свойства неубывания функции γ. Из этих двух неравенств вытекает неравенство (26). Неравенство $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\gamma(\alpha\alpha_{r-1})$ — следствие свойства неубывания функции γ. Из этого неравенства, из (25) и из (26) следует, что $r\cdot\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\gamma(\alpha)$. Учитывая, что $r\geqslant 2$, получаем, что $\gamma(\alpha\pi(\xi))\leqslant\frac{\gamma(\alpha)}{r}$. Лемма доказана.

Следствие 9. *Пусть ρ — сигнатура, $T\in\mathcal{M}_\rho$ и γ — аддитивно ограниченная мера неопределенности таблицы T. Тогда схема $Y_{\rho,\mathcal{N}_\rho^h}(T,\gamma)$ является детерминированным условным тестом таблицы T.*

Доказательство. Используя определение отображения $\mathcal{N}_\rho^h$ и лемму 15, нетрудно показать, что $\mathcal{N}_\rho^h$ — допустимое отображение. Используя предложение 11, получаем, что схема $Y_{\rho,\mathcal{N}_\rho^h}(T,\gamma)$ является детерминированным условным тестом таблицы T. Следствие доказано.

Теорема 12. *Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура, $T\in\mathcal{M}_\rho$ и γ — аддитивно ограниченная мера неопределенности таблицы T. Тогда*

$$h_\rho^d(T)\leqslant\begin{cases}M_{\rho,h}(T), & \text{если } M_{\rho,h}(T)\leqslant 1;\\ 2\log_2\gamma(\lambda)+M_{\rho,h}(T), & \text{если } 2\leqslant M_{\rho,h}(T)\leqslant 3;\\ \dfrac{M_{\rho,h}(T)\log_2\gamma(\lambda)}{\log_2 M_{\rho,h}(T)}+M_{\rho,h}(T), & \text{если } M_{\rho,h}(T)\geqslant 4.\end{cases}$$

Доказательство. Утверждение теоремы в случае $M_{\rho,h}(T)\leqslant 1$ следует из леммы 9.

Пусть $M_{\rho,h}(T)\geqslant 2$. Из этого неравенства следует, что $T\notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Рассмотрим произвольный полный путь ξ схемы $Y_{\rho,\mathcal{N}_\rho^h}(T,\gamma)$. Из описания процесса $Y_{\rho,\mathcal{N}_\rho^h}$ и того факта, что $T\notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$, следует, что для некоторого $m\in\omega\setminus\{0\}$ выполняется равенство $\pi(\xi)=\pi(\xi_1)\ldots\pi(\xi_m)$, где ξ_1 — полный путь схемы $\mathcal{N}_\rho^h(T,\lambda,\gamma)$ и, если $m\geqslant 2$, то ξ_i — полный путь схемы $\mathcal{N}_\rho^h(T,\pi(\xi_1)\ldots\pi(\xi_{i-1}),\gamma)$ для $i=2,\ldots,m$. Для $i=1,\ldots,m$ обозначим $r_i=h(\pi(\xi_i))$. Оценим величину $h(\pi(\xi))=\sum\limits_{i=1}^{m} r_i$. Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{m} r_i\leqslant\begin{cases}2\log_2\gamma(\lambda)+M_{\rho,h}(T), & \text{если } 2\leqslant M_{\rho,h}(T)\leqslant 3;\\ \dfrac{M_{\rho,h}(T)\log_2\gamma(\lambda)}{\log_2 M_{\rho,h}(T)}+M_{\rho,h}(T), & \text{если } M_{\rho,h}(T)\geqslant 4.\end{cases}\tag{27}$$

Пусть $m=1$. Из леммы 15 следует, что $r_1\leqslant M_{\rho,h}(T)$. Из соотношения $T\notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ и из свойства частичной согласованности функции γ следует, что $\gamma(\lambda)\geqslant 1$. Поэтому при $m=1$ неравенство (27) выполняется. Пусть $m\geqslant 2$. Для $i=1,\ldots,m$ обозначим $z_i=\max\{2,r_i\}$. По предположению, $T\lambda\notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Из описания процесса $Y_{\rho,\mathcal{N}_\rho^h}$ следует, что $T_{\pi(\xi_1)\ldots\pi(\xi_i)}\notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$ для $i=1,\ldots,m-1$. Используя лемму 15 и неравенство $m\geqslant 2$, получаем

$$\gamma(\pi(\xi_1)\ldots\pi(\xi_{m-1}))\leqslant\frac{\gamma(\lambda)}{\prod\limits_{i=1}^{m-1} z_i}.$$

Используя свойство частичной согласованности функции γ и соотношение $T_{\pi(\xi_1)\ldots\pi(\xi_{m-1})}\notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$, получаем, что $\gamma(\pi(\xi_1)\ldots\pi(\xi_{m-1}))\geqslant 1$. Следовательно, $\prod\limits_{i=1}^{m-1} z_i\leqslant\gamma(\lambda)$. Прологарифмируем по основанию 2 обе части этого неравенства. В результате получим $\sum\limits_{i=1}^{m-1}\log_2 z_i\leqslant\log_2\gamma(\lambda)$. Из этого неравенства следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} r_i&=r_m+\sum_{i=1}^{m-1}\log_2 z_i\cdot\frac{r_i}{\log_2 z_i}\leqslant\\&\leqslant r_m+\left(\sum_{i=1}^{m-1}\log_2 z_i\right)\cdot\left(\max\left\{\frac{r_i}{\log_2 z_i}:i\in\{1,\ldots,m-1\}\right\}\right)\leqslant\\&\leqslant r_m+\log_2\gamma(\lambda)\cdot\max\left\{\frac{r_i}{\log_2 z_i}:i\in\{1,\ldots,m-1\}\right\}.\end{aligned}\tag{28}$$

Рассмотрим функцию $q(x)=\frac{x}{\log_2(\max\{2,x\})}$, определенную на множестве действительных чисел. Нетрудно показать, что $q(1)=1$, $q(2)=2$, $q(3)<2$, $q(4)=2$ и при $x\geqslant 3$ функция q монотонно возрастает. Поэтому для любого $n\in\omega\setminus\{0\}$

$$\max\{q(i):i\in\{1,\ldots,n\}\}=\begin{cases}1, & \text{если } n=1;\\ 2, & \text{если } 2\leqslant n\leqslant 4;\\ \dfrac{n}{\log_2 n}, & \text{если } n\geqslant 4.\end{cases}\tag{29}$$

Используя лемму 15, получаем, что для $i=1,\ldots,m$

$$r_i\leqslant M_{\rho,h}(T).\tag{30}$$

Из (29), (30) и неравенства $M_{\rho,h}(T)\geqslant 2$ следует, что

$$\max\left\{\frac{r_i}{\log_2 z_i}:i\in\{1,\ldots,m-1\}\right\}\leqslant\max\{q(i):i\in\{1,\ldots,M_{\rho,h}(T)\}\}=$$

$$=\begin{cases}2, & \text{если } 2\leqslant M_{\rho,h}(T)\leqslant 4;\\ \frac{M_{\rho,h}(T)}{\log_2 M_{\rho,h}(T)}, & \text{если } M_{\rho,h}(T)\geqslant 4.\end{cases}\qquad(31)$$

Из (28), (30) и (31) следует (27). В соответствии со следствием 9, схема $Y_{\rho,\mathcal{N}_\rho^h}(T,\gamma)$ является детерминированным условным тестом таблицы T. Учитывая, что ξ — произвольный полный путь схемы $Y_{\rho,\mathcal{N}_\rho^h}(T,\gamma)$ и используя (27), получаем, что утверждение теоремы выполняется и при $M_{\rho,h}(T)\geqslant 2$. Теорема доказана.

Рассмотрим более подробно оценки величины $h_\rho^d(T)$ в зависимости от величин $M_{\rho,h}(T)$ и $K_\rho(T)$, а также в зависимости от величин $M_{\rho,h}(T)$ и $N_\rho(T)$.

Лемма 16. *Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура, $T\in\mathcal{M}_\rho$ и $\Delta(T)\neq\varnothing$. Тогда $h_\rho^d(T)\leqslant N_\rho(T)-1$.*

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по величине $N_\rho(T)$. Если $N_\rho(T)=1$, то, очевидно, $h_\rho^d(T)=0$. Следовательно, при $N_\rho(T)=1$ утверждение леммы выполняется. Пусть $n\in\omega$, $n\geqslant 2$ и для любой таблицы $T\in\mathcal{M}_\rho$ такой, что $\Delta(T)\neq\varnothing$ и $N_\rho(T)<n$, утверждение леммы выполняется. Пусть $T\in\mathcal{M}_\rho$ и $N_\rho(T)=n$. Выберем некоторый элемент f_i из $P(T)$, для которого мощность множества $E(f_i)=\{\delta:\delta\in E_k,\Delta(T(f_i,\delta))\neq\varnothing\}$ больше или равна двум. Существование такого элемента следует из неравенства $N_\rho(T)\geqslant 2$. Пусть $\delta\in E(f_i)$. Тогда, очевидно, $N_\rho(T(f_i,\delta))<n$. Из этого неравенства, из предположения индукции и из леммы 1 следует, что существует детерминированный условный тест Γ_δ таблицы $T(f_i,\delta)$ такой, что $h(\Gamma_\delta)\leqslant n-2$. Обозначим Γ'_δ помеченное конечное ориентированное дерево с корнем, полученное из схемы Γ_δ удалением корня и выходящей из него дуги. Рассмотрим схему Γ, полученную из деревьев Γ'_δ, $\delta\in E(f_i)$, следующим образом. Обозначим w вершину, в которую входит единственная дуга, выходящая из корня Γ. Вершине w приписан элемент f_i, и для каждого $\delta\in E(f_i)$ из вершины w выходит дуга, которой приписано число δ и которая входит в вершину, являющуюся корнем дерева Γ'_δ. Никакие другие дуги из вершины w не выходят. Нетрудно показать, что Γ — детерминированный условный тест таблицы T и $h(\Gamma)\leqslant n-1$. Следовательно, $h_\rho^d(T)\leqslant n-1$. Лемма доказана.

Следствие 10. *Пусть ρ — сигнатура, $T\in\mathcal{M}_\rho$ и $\Delta(T)\neq\varnothing$. Тогда $M_{\rho,h}(T)\leqslant N_\rho(T)-1$.*

Рассматриваемое утверждение непосредственно следует из леммы 16 и теоремы 1.

Лемма 17. *Пусть ρ — сигнатура и $T\in\mathcal{M}_\rho$. Тогда $K_\rho(T)=0$ в том и только в том случае, когда $M_{\rho,h}(T)=0$.*

Доказательство. Пусть $K_\rho(T)=0$. Используя предложение 9, получаем, что функция $T*K_\rho$ обладает свойством частичной согласованности. Поэтому $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Следовательно, $M_{\rho,h}(T)=0$.

Пусть $M_{\rho,h}(T)=0$. Тогда, как нетрудно заметить, $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Если $\Delta(T)=\varnothing$, то $K_\rho(T)=0$ по определению функции K_ρ. Пусть $\Delta(T)\neq\varnothing$. Тогда любая схема из $\mathcal{C}_\rho^0(T)$ содержит ровно две вершины. Поэтому $K_\rho(T)=0$. Лемма доказана.

Пусть ρ — сигнатура, A — непустое подмножество множества $\mathcal{M}_\rho$ и f, g — функции, определенные на A и принимающие значения из ω. Обозначим $B(f,g,A)=\{(f(T),g(T)):T\in A\}$.

Простой анализ теоремы 2.4 из [1] и ее доказательства, а также использование следствия 10 и леммы 17 позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 13. *Пусть $\rho=(F,k)$ — сигнатура, для которой множество F бесконечно, и $A\in\{\mathcal{M}_\rho\}\cup\{\mathcal{M}_\rho(m):m\in\omega\setminus\{0\}\}$. Тогда*

а) $B(M_{\rho,h},K_\rho,A)=\{(0,0)\}\cup\{(n,r):n\in\omega\setminus\{0\},r\in\omega\setminus\{0\}\}$ *и для любой пары* $(n,r)\in B(M_{\rho,h},K_\rho,A)$ *существуют таблицы* $T_1(n,r)$ *и* $T_2(n,r)$ *из* A, *для которых* $M_{\rho,h}(T_1(n,r))=M_{\rho,h}(T_2(n,r))=n$, $K_\rho(T_1(n,r))=K_\rho(T_2(n,r))=r$, $h_\rho^d(T_1(n,r))=n$ *и*

$$h_\rho^d(T_2(n,r))\geqslant\begin{cases} n, & \text{если } 0\leqslant n\leqslant 1;\\ 1+\log_2 r, & \text{если } n=2;\\ (n-2)\cdot\left\lfloor\dfrac{\log_2 r}{\log_2(n-1)}\right\rfloor+n-1, & \text{если } n\geqslant 3.\end{cases}$$

б) $B(M_{\rho,h},N_\rho,A)=\{(0,0)\}\cup\{(n,r):n\in\omega,r\in\omega\setminus\{0\},r\geqslant n+1\}$ *и для любой пары* $(n,r)\in B(M_{\rho,h},N_\rho,A)$ *существуют таблицы* $T_3(n,r)$ *и* $T_4(n,r)$ *из* A, *для которых* $M_{\rho,h}(T_3(n,r))=M_{\rho,h}(T_4(n,r))=n$, $N_\rho(T_3(n,r))=r$, $N_\rho(T_4(n,r))=r$, $h_\rho^d(T_3(n,r))=n$ *и*

$$h_\rho^d(T_4(n,r))\geqslant\begin{cases} n, & \text{если } 0\leqslant n\leqslant 1;\\ \log_2 r, & \text{если } n=2;\\ (n-2)\cdot\left\lfloor\dfrac{\log_2 r-\log_2 n}{\log_2(n-1)}\right\rfloor+n-1, & \text{если } n\geqslant 3.\end{cases}$$

В каждом из следующих трех замечаний предполагается, что $\rho=(F,k)$ — сигнатура, для которой множество F бесконечно.

Замечание 13. Пусть $A\in\{\mathcal{M}_\rho\}\cup\{\mathcal{M}_\rho(m):m\in\omega\setminus\{0\}\}$ и $\varphi\in\{N_\rho,K_\rho\}$. Из предложения 9, теоремы 12 и теоремы 13 следует, что для любой таблицы T из A

$$h_\rho^d(T)\leqslant\begin{cases} M_{\rho,h}(T), & \text{если } M_{\rho,h}(T)\leqslant 1;\\ 2\log_2\varphi(T)+M_{\rho,h}(T), & \text{если } 2\leqslant M_{\rho,h}(T)\leqslant 3;\\ \dfrac{M_{\rho,h}(T)\log_2\varphi(T)}{\log_2 M_{\rho,h}(T)}+M_{\rho,h}(T), & \text{если } M_{\rho,h}(T)\geqslant 4;\end{cases}$$

и эта оценка для таблиц из A неулучшаема по порядку.

Замечание 14. Пусть $A\in\{\mathcal{M}_\rho\}\cup\{\mathcal{M}_\rho(m):m\in\omega\setminus\{0\}\}$ и $\varphi\in\{N_\rho,K_\rho\}$. Из теорем 1 и 13 следует, что $h_\rho^d(T)\geqslant M_{\rho,h}(T)$ для любой таблицы T из A, и эта оценка для таблиц из A является неулучшаемой нижней оценкой величины $h_\rho^d(T)$ в зависимости от величин $M_{\rho,h}(T)$ и $\varphi(T)$.

Замечание 15. Пусть $A\in\{\mathcal{M}_\rho\}\cup\{\mathcal{M}_\rho(m):m\in\omega\setminus\{0\}\}$. Из теоремы 13 следует, что не существует функции $q:\omega\to\omega$, для которой $h_\rho^d(T)\leqslant q(M_{\rho,h}(T))$ для любой таблицы T из A. Сравнение этого результата со следствием 4 показывает, насколько существенно различаются функции $\widehat{M}_{\rho,h}(T)$ и $M_{\rho,h}(T)$.

5.6. Алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$. Пусть $\rho=(F,k)$ — нумерованная сигнатура, $\eta:\mathcal{M}_\rho\to\omega$ — вычислимая функция, для которой для любой таблицы $T\in\mathcal{M}_\rho$

функция $T * \eta$ является аддитивно ограниченной мерой неопределенности таблицы T, $\varphi \in \{GH_\rho, H^2_\rho, RH^2_\rho\}$ и ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ и $\Lambda 3$.

Обозначим $D_\rho(\eta) = \{(T, T * \eta) : T \in \mathscr{M}_\rho\}$. Определим отображение $\mathscr{N}_{\eta,\varphi,\psi} : \widetilde{Z}_\rho(D_\rho(\eta)) \to \mathscr{C}^d_\rho$. Для этого опишем алгоритм, строящий схему $\mathscr{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \alpha, T * \eta)$ по произвольной паре (T, α), где $T \in \mathscr{M}_\rho$, $\alpha \in \Omega_\rho(T)$ и $T\alpha \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$.

Пусть $\dim T = n$ и $\mu_T(1) = f_{l_1}, \ldots, \mu_T(n) = f_{l_n}$. Для каждого $f_i \in P(T)$ обозначим σ_i минимальное число из E_k, для которого $T * \eta(\alpha(f_i, \sigma_i)) = \max\{T * \eta(\alpha(f_i, \sigma)) : \sigma \in E_k\}$. Обозначим $\bar{\sigma} = (\sigma_{l_1}, \ldots, \sigma_{l_n})$. Применим алгоритм $W_{\rho,\varphi,\psi}$ к паре $(T\alpha, \bar{\sigma})$. Обозначим $\beta = W_{\rho,\varphi,\psi}(T\alpha, \bar{\sigma})$. Очевидно, $\beta \neq \lambda$. Пусть $\beta = (f_{i_1}, \sigma_{i_1}) \ldots (f_{i_m}, \sigma_{i_m})$. Построим помеченное конечное ориентированное дерево с корнем Γ следующего вида. В Γ имеется путь $w_0, d_0, w_1, \ldots, w_{m-1}, d_{m-1}, w_m$, в котором w_0 — корень Γ, для $j = 0, \ldots, m-1$ дуга d_j выходит из вершины w_j и входит в вершину w_{j+1}. Вершине w_0 и дуге d_0 ничего не приписано. Для $j = 1, \ldots, m$ вершине w_j приписан элемент f_{i_j}. Для $j = 1, \ldots, m-1$ дуге d_j приписано число σ_{i_j}. Обозначим $\alpha_0 = \lambda$. Для $j = 1, \ldots, m-1$ обозначим $\alpha_j = (f_{i_1}, \sigma_{i_1}) \ldots (f_{i_j}, \sigma_{i_j})$. Для $j = 1, \ldots, m-1$ для каждого $\delta \in E_k \setminus \{\sigma_{i_j}\}$ такого, что $\Delta(T\alpha\alpha_{j-1}(f_{i_j}, \delta)) \neq \varnothing$, из вершины w_j выходит дуга, которой приписано число δ. Эта дуга входит в концевую вершину дерева Γ, которой приписано число 0. Для каждого $\delta \in E_k$ такого, что $\Delta(T\alpha\alpha_{m-1}(f_{i_m}, \delta)) \neq \varnothing$, из вершины w_m выходит дуга, которой приписано число δ. Эта дуга входит в концевую вершину дерева Γ, которой приписано число 0. Других вершин и дуг в дереве Γ нет. Из описания алгоритма $W_{\rho,\varphi,\psi}$ следует, что существует $\delta \in E_k$, для которого $\Delta(T\alpha\alpha_{m-1}(f_{i_m}, \delta)) \neq \varnothing$. Следовательно, $\Gamma \in \mathscr{C}^d_\rho$. Обозначим $\mathscr{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \alpha, T*\eta)$ схему Γ.

Лемма 18. *Пусть $\rho = (F, k)$ — нумерованная сигнатура, $\eta : \mathscr{M}_\rho \to \omega$ — вычислимая функция, для которой для любой таблицы $T \in \mathscr{M}_\rho$ функция $T * \eta$ является аддитивно ограниченной мерой неопределенности таблицы T, $\varphi \in \{GH_\rho, H^2_\rho, RH^2_\rho\}$, ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ и $\Lambda 3$, $T \in \mathscr{M}_\rho$, $\alpha \in \Omega_\rho(T)$ и $T\alpha \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$. Тогда схема $\mathscr{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \alpha, T*\eta)$ имеет не менее двух полных путей, и для любого полного пути ξ этой схемы выполняются следующие утверждения:*

а) *$\Delta(T\alpha\pi(\xi)) \neq \varnothing$;*

б) *$\psi(\pi(\xi)) \leqslant (M_{\rho,\psi}(T))^2 \ln N_\rho(T) + M_{\rho,\psi}(T)$ и, если $\psi = h$, то $h(\pi(\xi)) \leqslant M_{\rho,h}(T) \ln N_\rho(T) + 1$;*

в) *если $T\alpha\pi(\xi) \notin \mathscr{M}_\rho\mathscr{C}$, то $T*\eta(\alpha\pi(\xi)) \leqslant \dfrac{T * \eta(\alpha)}{2}$.*

Доказательство. Пусть $\dim T = n$ и $\mu_T(1) = f_{l_1}, \ldots, \mu_T(n) = f_{l_n}$. Для каждого $f_i \in P(T)$ обозначим σ_i минимальное число из E_k, для которого $T * \eta(\alpha(f_i, \sigma_i)) = \max\{T * \eta(\alpha(f_i, \sigma)) : \sigma \in E_k\}$. Обозначим $\bar{\sigma} = (\sigma_{l_1}, \ldots, \sigma_{l_n})$ и $\beta = W_{\rho,\varphi,\psi}(T\alpha, \bar{\sigma})$. Очевидно, $\beta \neq \lambda$. Пусть $\beta = (f_{i_1}, \sigma_{i_1}) \ldots (f_{i_m}, \sigma_{i_m})$. Обозначим $\alpha_0 = \lambda$. Для $j = 1, \ldots, m-1$ обозначим $\alpha_j = (f_{i_1}, \sigma_{i_1}) \ldots (f_{i_j}, \sigma_{i_j})$.

Пусть ξ — полный путь схемы $\mathscr{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \alpha, T * \eta)$. Из описания алгоритма построения этой схемы следует, что $\Delta(T\alpha\pi(\xi)) \neq \varnothing$. Нетрудно заметить, что $\pi(\xi) = \beta$ или для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется равенство $\pi(\xi) = \alpha_{j-1}(f_{i_j}, \delta)$, где $\delta \neq \sigma_{i_j}$. Учитывая, что функция ψ обладает свойством $\Lambda 2$, получаем, что $\psi(\pi(\xi)) \leqslant \psi(\beta)$. Используя теорему 10 и соотношение $T\alpha \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, получаем, что $\psi(\beta) \leqslant (M_{\rho,\psi}(T\alpha, \bar{\sigma}))^2 \ln N_\rho(T\alpha) + M_{\rho,\psi}(T\alpha, \bar{\sigma})$ и, если $\psi = h$, то $h(\beta) \leqslant M_{\rho,h}(T\alpha, \bar{\sigma}) \ln N_\rho(T\alpha) + 1$. Очевидно, $N_\rho(T\alpha) \leqslant N_\rho(T)$. Нетрудно показать, что $M_{\rho,\psi}(T\alpha, \bar{\sigma}) \leqslant M_{\rho,\psi}(T, \bar{\sigma})$. Используя лемму 3, получаем, что $M_{\rho,\psi}(T, \bar{\sigma}) \leqslant M_{\rho,\psi}(T)$. Следовательно, $\psi(\pi(\xi)) \leqslant (M_{\rho,\psi}(T))^2 \ln N_\rho(T) + M_{\rho,\psi}(T)$ и, если $\psi = h$, то $h(\pi(\xi)) \leqslant M_{\rho,h}(T) \ln N_\rho(T) + 1$.

Пусть $T\alpha\pi(\xi) \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Тогда $\pi(\xi) \neq \beta$ и, следовательно, для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется равенство $\pi(\xi) = \alpha_{j-1}(f_{i_j}, \delta)$, где $\delta \neq \sigma_{i_j}$. Используя свойство неубывания функции $T * \eta$, получаем, что $T * \eta(\alpha\pi(\xi)) \leqslant T * \eta(\alpha(f_{i_j}, \delta))$. Используя свойство аддитивной ограниченности функции $T * \eta$ и учитывая выбор числа σ_{i_j}, получаем, что $2 \cdot T * \eta(\alpha(f_{i_j}, \delta)) \leqslant T * \eta(\alpha(f_{i_j}, \delta)) + T * \eta(\alpha(f_{i_j}, \sigma_{i_j})) \leqslant T * \eta(\alpha)$. Следовательно, $T * \eta(\alpha\pi(\xi)) \leqslant \frac{T * \eta(\alpha)}{2}$.

Пусть ξ — полный путь схемы $\mathcal{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \alpha, T * \eta)$. Как показано выше, $T\alpha\pi(\xi) \in \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ или $\eta(T\alpha\pi(\xi)) \leqslant \frac{\eta(T\alpha)}{2}$. Учитывая, что $T\alpha \notin \mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, получаем, что $T\alpha\pi(\xi) \neq T\alpha$. Из описание алгоритма построения схемы $\mathcal{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \alpha, T * \eta)$ следует, что для любого $\bar{\delta} \in \Delta(T\alpha)$ в рассматриваемой схеме имеется полный путь τ, для которого $\bar{\delta} \in \Delta(T\alpha\pi(\tau))$. Следовательно, схема $\mathcal{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \alpha, T*\eta)$ имеет не менее двух полных путей. Лемма доказана.

Следствие 11. *Пусть $\rho = (F, k)$ — нумерованная сигнатура, $\eta : \mathcal{M}_\rho \to \omega$ — вычислимая функция, для которой для любой таблицы T из $\mathcal{M}_\rho$ функция $T * \eta$ является аддитивно ограниченной мерой неопределенности таблицы T, $\varphi \in \{GH_\rho, H^2_\rho, RH^2_\rho\}$ и ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами* $\Lambda1$, $\Lambda2$ *и* $\Lambda3$. *Тогда для любой таблицы $T \in \mathcal{M}_\rho$ для пары $(T, T * \eta)$ процесс $Y_{\rho,\mathcal{N}_\eta,\varphi,\psi}$ завершается после выполнения конечного числа шагов. Построенная им схема $Y_{\rho,\mathcal{N}_\eta,\varphi,\psi}(T, T * \eta)$ является детерминированным условным тестом таблицы T.*

Доказательство. Используя определение отображения $\mathcal{N}_{\eta,\varphi,\psi}$ и лемму 18, нетрудно показать, что $\mathcal{N}_{\eta,\varphi,\psi}$ — допустимое отображение. Используя предложение 11, получаем рассматриваемое утверждение. Следствие доказано.

Опишем алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$, который по произвольный таблице T из $\mathcal{M}_\rho$ строит схему $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}(T)$, являющуюся детерминированным условным тестом таблицы T.

Алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$, когда на его вход поступает таблица T, выполняет те же шаги, что и процесс $Y_{\rho,\mathcal{N}_\eta,\varphi,\psi}$ при построении схемы $Y_{\rho,\mathcal{N}_\eta,\varphi,\psi}(T, T * \eta)$. Используя следствие 11, получаем, что алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ за конечное число шагов строит схему $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}(T) = Y_{\rho,\mathcal{N}_\eta,\varphi,\psi}(T, T * \eta)$, являющуюся детерминированным условным тестом таблицы T. Рассмотрим верхние оценки сложности этой схемы.

Теорема 14. *Пусть $\rho = (F, k)$ — нумерованная сигнатура, $\eta : \mathcal{M}_\rho \to \omega$ — вычислимая функция, для которой для любой таблицы $T \in \mathcal{M}_\rho$ функция $T * \eta$ является аддитивно ограниченной мерой неопределенности таблицы T, φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, H^2_\rho, RH^2_\rho\}$, ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, об-*

ладающая свойствами $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ *и* $\Lambda 3$, *и* $T \in \mathcal{M}_\rho$. *Тогда*

$$\psi(Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}(T)) \leqslant \\ \leqslant \begin{cases} \psi(\lambda), & \text{если } T \in \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}; \\ (M_{\rho,\psi}(T))^2 \ln N_\rho(T) + M_{\rho,\psi}(T))(1 + \log_2 \eta(T)), & \text{если } T \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}. \end{cases}$$

Пусть $\psi = h$. *Тогда*

$$h(Y_{\rho,\eta,\varphi,h}(T)) \leqslant \begin{cases} 0, & \text{если } T \in \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}; \\ (M_{\rho,h}(T) \ln N_\rho(T) + 1)(1 + \log_2 \eta(T)), & \text{если } T \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}. \end{cases}$$

Доказательство. Верхние оценки в случае $T \in \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}$ непосредственно следуют из описания алгоритма $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$.

Пусть $T \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}$. Обозначим Γ схему $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}(T)$. Рассмотрим произвольный полный путь ξ схемы Γ. Из описания алгоритма $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ и того факта, что $T \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}$, следует, что для некоторого $m \in \omega \setminus \{0\}$ выполняется равенство $\pi(\xi) = \pi(\xi_1) \ldots \pi(\xi_m)$, где ξ_1 — полный путь схемы $\mathcal{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \lambda, T * \eta)$ и, если $m \geqslant 2$, то ξ_i — полный путь схемы $\mathcal{N}_{\eta,\varphi,\psi}(T, \pi(\xi_1) \ldots \pi(\xi_{i-1}), T * \eta)$ для $i = 2, \ldots, m$. По предположению, $T\lambda \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}$. Из описания алгоритма $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ следует, что $T\pi(\xi_1) \ldots \pi(\xi_{i-1}) \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}$ для $i = 2, \ldots, m$. Используя п. в) утверждения леммы 18, получаем, что $T * \eta(\pi(\xi_1) \ldots \pi(\xi_{m-1})) \leqslant \frac{T * \eta(\lambda)}{2^{m-1}}$. Учитывая, что $T\pi(\xi_1) \ldots \pi(\xi_{m-1}) \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}$, и используя свойство частичной согласованности функции $T * \eta$, получаем, что

$$T * \eta(\pi(\xi_1) \ldots \pi(\xi_{m-1})) \geqslant 1.$$

Следовательно, $2^{m-1} \leqslant T * \eta(\lambda)$. Поэтому

$$m \leqslant 1 + \log_2 \eta(T). \tag{32}$$

Используя свойство $\Lambda 1$ функции ψ, получаем, что

$$\psi(\pi(\xi)) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \psi(\pi(\xi_i)). \tag{33}$$

Используя п. б) утверждения леммы 18, получаем, что для $i = 1, \ldots, m$

$$\psi(\pi(\xi_i)) \leqslant (M_{\rho,\psi}(T))^2 \ln N_\rho(T) + M_{\rho,\psi}(T)$$

и, если $\psi = h$, то

$$h(\pi(\xi_i)) \leqslant M_{\rho,h}(T) \ln N_\rho(T) + 1.$$

Из этих неравенств, из (32) и из (33) следует, что

$$\psi(\pi(\xi)) \leqslant ((M_{\rho,\psi}(T))^2 \ln N_\rho(T) + M_{\rho,\psi}(T)) \cdot (1 + \log_2 \eta(T))$$

и, если $\psi = h$, то

$$h(\pi(\xi)) \leqslant (M_{\rho,h}(T) \ln N_\rho(T) + 1) \cdot (1 + \log_2 \eta(T)).$$

Учитывая, что ξ — произвольный полный путь схемы Γ, получаем, что утверждение теоремы выполняется и в случае $T \notin \mathcal{M}_\rho \mathcal{C}$. Теорема доказана.

Оценим сверху число шагов, которые выполняет алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ при построении схемы $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}(T)$.

Теорема 15. *Пусть $\rho=(F,k)$ — нумерованная сигнатура, $\eta:\mathcal{M}_\rho\to\omega$ — вычислимая функция, для которой для любой таблицы $T\in\mathcal{M}_\rho$ функция $T*\eta$ является аддитивно ограниченной мерой неопределенности таблицы T, φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, H^2_\rho, RH^2_\rho\}$, ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda1$, $\Lambda2$ и $\Lambda3$, и $T\in\mathcal{M}_\rho$. Тогда при построении схемы $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}(T)$ алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ делает не более $2N_\rho(T)+1$ шагов.*

Доказательство. Пусть $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Из описания алгоритма $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ следует, что при построении схемы $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}(T)$ он делает ровно один шаг. Поэтому утверждение теоремы при $T\in\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$ выполняется.

Пусть $T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$. Обозначим Γ схему $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}(T)$. Из описания алгоритма $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ и из части a) утверждения леммы 18 следует, что $\Delta(T\pi(\xi))\neq\varnothing$ для любого полного пути ξ схемы Γ. Очевидно, $\Delta(T\pi(\xi_1))\cap\Delta(T\pi(\xi_2))=\varnothing$ для любых двух различных полных путей ξ_1 и ξ_2 схемы Γ. Поэтому число полных путей схемы Γ не превосходит $N_\rho(T)$. Пусть алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ при построении схемы Γ делает n шагов. Так как $T\notin\mathcal{M}_\rho\mathcal{C}$, то $n\geqslant 2$. Для каждого $t\in\{1,\ldots,n-1\}$ удалим из схемы Γ все дуги, которые и начинаются и заканчиваются в вершинах, построенных на шаге t, и отождествим все вершины, построенные на шаге t. Обозначим полученное конечное ориентированное дерево с корнем G. Нетрудно заметить, что ровно одна дуга выходит из корня G. Используя лемму 18, получаем, что из каждой вершины G, не являющейся ни корнем, ни концевой вершиной, выходит не менее двух дуг. Нетрудно заметить, что $L_0(\Gamma)=L_0(G)$. Поэтому $L_0(G)\leqslant N_\rho(T)$. Используя лемму 10, получаем, что $L(G)\leqslant 2N_\rho(T)$. Наконец, нетрудно заметить, что число шагов, выполняемых алгоритмом $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ при построении схемы Γ, совпадает с числом $L(G)+1$. Теорема доказана.

Замечание 16. Пусть $\rho=(F,k)$ — нумерованная сигнатура, $\eta:\mathcal{M}_\rho\to\omega$ — вычислимая функция, для которой для любой таблицы $T\in\mathcal{M}_\rho$ функция $T*\eta$ является аддитивно ограниченной мерой неопределенности таблицы T, φ — произвольная функция из множества $\{GH_\rho, H^2_\rho, RH^2_\rho\}$, и ψ — вычислимая функция сложности сигнатуры ρ, обладающая свойствами $\Lambda1$, $\Lambda2$ и $\Lambda3$. Пусть существует имеющий полиномиальную временную сложность алгоритм, вычисляющий функцию ψ на множестве F^*, и существует имеющий полиномиальную временную сложность алгоритм, вычисляющий функцию η на множестве $\mathcal{M}_\rho$. Используя замечание 11, получаем, что алгоритм $W_{\rho,\varphi,\psi}$ имеет полиномиальную временную сложность. Используя этот факт и теорему 15, можно показать, что алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ имеет полиномиальную временную сложность. В частности, если $\eta\in\{N_\rho, J_\rho\}$ и $\psi=h$, то алгоритм $Y_{\rho,\eta,\varphi,\psi}$ имеет полиномиальную временную сложность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мошков М. Ю. Условные тесты // Проблемы кибернетики. — Вып 40. – М.: Наука. — 1983. — С. 131–170.
2. Мошков М. Ю. Нижние оценки временной сложности детерминированных условных тестов // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, № 3. — С. 98–110.
3. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля электрических схем // Труды МИ АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
4. Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем // УМН. — 1955. — Т. 10, № 4. — С. 182–184.

5. P a w l a k Z. Rough sets – theoretical aspects of reasoning about data. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
6. S k o w r o n A., R a u s z e r C. The discernibility matrices and functions in information systems // Intelligent decision support. Handbook of applications and advances of the rough set theory / Edited by R. Slowinski. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. — P. 331–362.

Поступило в редакцию 8 VIII 2006