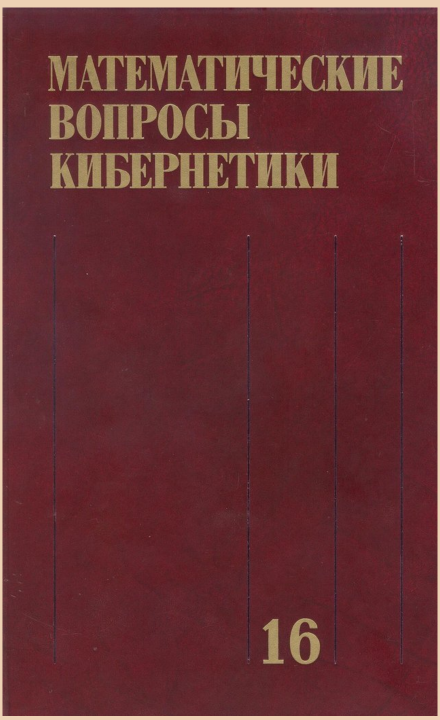

О работах Олега Борисовича Лупанова

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О работах Олега Борисовича Лупанова // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 7–22. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2007-7

О РАБОТАХ ОЛЕГА БОРИСОВИЧА ЛУПАНОВА

Олег Борисович Лупанов является одним из создателей современной дискретной математики и математической кибернетики.

Большинство работ О. Б. Лупанова относится к математической теории синтеза управляющих систем. В этой области им получены основополагающие результаты. В работах О. Б. Лупанова зародились важнейшие понятия, идеи и подходы теории синтеза управляющих систем, были сформулированы новые задачи и предложены методы их решения.

Все работы О. Б. Лупанова можно условно разделить на несколько направлений.

I. Универсальные методы синтеза.

II. Принцип локального кодирования.

III. Разные задачи.

I. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА

О. Б. Лупановым разработаны асимптотически оптимальные методы синтеза и получены асимптотически точные оценки сложности для основных классов управляющих систем. Эти методы носят универсальный характер, т. е. применимы ко всем функциям, реализуемым в данном классе управляющих систем.

Соответствующие универсальным методам синтеза нижние оценки сложности устанавливаются, как правило, на основе «мощностных» соображений. В первых работах Олега Борисовича [1, 8] был создан весьма общий метод получения «мощностных» нижних оценок сложности схем из элементов произвольной природы, легший в основу большинства последующих методов доказательства «мощностных» нижних оценок для различных классов управляющих систем.

Вентильные и контактно-вентильные схемы. Это были, по-видимому, первые классы управляющих систем, для которых удалось получить асимптотически точные оценки сложности. В работе [3] О. Б. Лупанов рассмотрел реализацию булевых матриц вентильными схемами и исследовал асимптотическое поведение функций Шеннона $B(p,q)$ и $B_2(p,q)$, выражающих наименьшее число вентилей, достаточное для реализации любой булевой матрицы размера $p\times q$ соответственно вентильными схемами общего вида и вентильными схемами глубины 2, имеющими p входов и q выходов. Им были получены следующие результаты. Для любой последовательности пар чисел (p_n,q_n), где $n=1,2,\ldots$, удовлетворяющей условиям: $p_n\leqslant q_n$, $p_n\to\infty$, $\dfrac{\log q_n}{p_n}\to 0$ выполняется соотношение *)

$$B_2(p_n,q_n)\sim\frac{p_nq_n}{\log q_n}.$$

*) Здесь и далее имеются в виду асимптотические соотношения при $n\to\infty$; log означает логарифм по основанию 2.

Если, кроме того, $\frac{\log p_n}{\log q_n} \to 0$, то

$$B(p_n, q_n) \sim B_2(p_n, q_n) \sim \frac{p_n q_n}{\log q_n}.$$

Эти исследования были продолжены Э. И. Нечипоруком, В. А. Орловым, Н. Пиппенджером и другими, изучившими поведение функций Шеннона $B(p,q)$ и $B_2(p,q)$ при иных соотношениях между параметрами.

Для контактно-вентильных схем О. Б. Лупановым в той же работе была получена асимптотика функции Шеннона $L_{\text{КВ}}(n)$, выражающей наименьшее суммарное число контактов и вентилей, достаточное для реализации любой булевой функции n переменных:

$$L_{\text{КВ}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Для функции Шеннона сложности контактно-вентильных схем в случае, когда контакты имеют вес 1, а вентили — вес 0 (т. е. учитывается только число контактов), О. Б. Лупанов получил точную по порядку роста оценку

$$\widetilde{L}_{\text{КВ}}(n) \asymp 2^{n/2}.$$

Это была, по-видимому, первая нетривиальная оценка сложности для схем с нулевыми весами элементов. Впоследствии эта оценка была уточнена Э. И. Нечипоруком.

Эта работа О. Б. Лупанова оказала определяющее влияние на все последующее развитие асимптотической теории синтеза управляющих систем. При синтезе вентильных схем впервые появился прием разрезания прямоугольной двумерной таблицы на полосы, оказавшийся чрезвычайно плодотворным в задачах синтеза. Разработанный О. Б. Лупановым метод синтеза вентильных схем глубины 2 впоследствии лег в основу методов синтеза большинства важнейших классов управляющих систем: схем из функциональных элементов, контактных схем, формул, автоматов и многих других. Здесь проявился неоднократно высказывавшийся О. Б. Лупановым общий принцип: асимптотически оптимальные методы синтеза как правило удается переносить с «более слабых» классов управляющих систем на «более сильные».

Схемы из функциональных элементов. Для схем из функциональных элементов порядок роста функции Шеннона $L_{\text{СФЭ}}(n)$ был установлен в 1956 г. Д. Э. Маллером. В работе [7] О. Б. Лупановым была получена асимптотика этой функции для схем в произвольном конечном полном базисе элементов с произвольными положительными весами:

$$L_{\text{СФЭ}}(n) \sim \rho \frac{2^n}{n},$$

где ρ обозначает минимальный приведенный вес элементов базиса, определяемый соотношением

$$\rho = \min_{m(E) \geqslant 2} \frac{P(E)}{m(E) - 1},$$

$m(E)$ — число входов базисного элемента E, $P(E)$ — вес этого элемента. Под сложностью схемы понимается сумма весов входящих в нее элементов. При этом было показано, что почти все булевы функции имеют асимптотически наибольшую сложность, иными словами, для любого числа ε, $\varepsilon > 0$, при $n \to \infty$ доля функций от n переменных сложности не более $(1-\varepsilon)\rho\frac{2^n}{n}$

стремится к нулю. Это явление стало известно после работ О. Б. Лупанова как «эффект Шеннона».

Контактные схемы. Асимптотика функции Шеннона сложности контактных схем

$$L_{\text{КС}}(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

была получена О. Б. Лупановым в работе [4]. Этот результат сразу принес ему мировую известность.

Порядок роста функции сложности для контактных схем был установлен К. Э. Шенноном в 1949 г., однако все попытки получить асимптотику оставались безрезультатными. Сам Шеннон полагал, что «возможность такого метода синтеза схем представляется... маловероятной».

Для получения этой асимптотики О. Б. Лупановым был предложен изящный метод синтеза контактных схем, основанный на реализации системы всех элементарных конъюнкций n переменных контактной схемой со сложностью, асимптотически равной 2^n. Этот результат был тем более неожиданным, что ранее была доказана минимальность в классе разделительных схем контактного дерева, сложность которого асимптотически вдвое больше.

Эти результаты работ [4, 7] О. Б. Лупанова стали классическими и вошли во многие учебники. Они составили основу всего дальнейшего развития теории синтеза и сложности управляющих систем.

В последующих работах О. Б. Лупанов исследовал влияние на сложность схем различных ограничений. На этом пути им был обнаружен ряд новых явлений в области сложности и установлены основные закономерности синтеза управляющих систем.

Олег Борисович часто говорил, что целью исследований не должно быть простое накопление результатов; следует целенаправленно искать, находить и решать такие задачи, в которых проявляются новые эффекты, ведущие к обнаружению и к лучшему пониманию общих закономерностей.

Контактные схемы и схемы из функциональных элементов с ограничениями. О. Б. Лупанов исследовал важнейшие подклассы класса контактных схем и класса схем из функциональных элементов, возникающие при введении естественных ограничений на их строение.

Для **параллельно-последовательных контактных схем** (П-схем) О. Б. Лупанов [10, 11] получил асимптотику

$$L_{\Pi}(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

Контактные П-схемы могут рассматриваться как формулы в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$. Для **формул** (суперпозиций) в произвольном конечном полном базисе элементов с положительными весами О. Б. Лупановым [10, 11] установлена асимптотика

$$L_{\Phi}(n) \sim \rho \frac{2^n}{\log n},$$

где ρ — минимальный приведенный вес элементов базиса, определяемый так же, как в случае схем из функциональных элементов.

В свою очередь, формулы могут рассматриваться как схемы из функциональных элементов с ветвлением выходов, не превосходящим единицы. Под ветвлением выхода элемента понимается число присоединенных к нему входов других элементов схемы. Промежуточное положение между схемами из функциональных элементов и формулами занимают **формулы с частичной памятью** — схемы из функциональных элементов с ограничениями на ветвление выходов. Говоря содержательно, формулы с частичной памятью соответствуют вычислениям, в которых каждый промежуточный результат используется ограниченное число раз.

Пусть имеется конечный полный базис, и пусть каждому базисному элементу E поставлено в соответствие число $j(E)$ — верхняя граница ветвления его выхода. Формула с частичной памятью в этом базисе — это схема из функциональных элементов, в которой ветвление выхода любого встречающегося в ней базисного элемента E не превосходит $j(E)$.

О. Б. Лупановым [10, 18] установлено следующее. Если для всех базисных элементов E, имеющих входы (т. е. таких, которым приписаны отличные от констант базисные функции), выполнено условие $j(E)=1$, то асимптотика функции Шеннона сложности формул с частичной памятью такая же, как для обыкновенных формул:

$$L(n) \sim \rho \frac{2^n}{\log n}.$$

Если же хотя бы для одного имеющего входы базисного элемента E выполнено условие $j(E) \geqslant 2$, то

$$L(n) \sim \rho' \frac{2^n}{n},$$

где ρ' — постоянная, $\rho' \geqslant \rho$ (в [10, 18] указан алгоритм ее вычисления).

Тем самым было обнаружено несколько новых явлений. Если выполнено очевидное необходимое условие: хотя бы один из имеющих входы базисных элементов допускает ветвление выхода, большее единицы, то функция Шеннона сложности формул с частичной памятью имеет такой же порядок роста, как для схем из функциональных элементов без ограничений. Вместе с тем, асимптотика сложности формул с частичной памятью, вообще говоря, может быть существенно выше, чем в случае схем без ограничений. В работе [18] найдены необходимые и достаточные условия, при которых выполняется равенство $\rho' = \rho$, т. е. ограничения на ветвление выходов элементов не влияют на асимптотику сложности.

Еще один класс схем с ограничениями составляют **формулы ограниченной глубины** в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$ (или, что то же самое, П-схемы ограниченной глубины) [10]. Классы формул ограниченной глубины определяются индуктивно. Символы переменных и их отрицаний: $x_1, x_2, \ldots, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$, составляют класс формул глубины 0 (они считаются одновременно $\vee$-формулами и &-формулами). Класс $\vee$-формул глубины l состоит из всех формул Φ вида $\Phi = \Phi_1 \vee \ldots \vee \Phi_s$, где все Φ_i принадлежат классу &-формул глубины $l-1$; класс &-формул глубины l определяется двойственным образом. Класс всех формул глубины l является объединением классов $\vee$-формул и &-формул глубины l. Классы П-схем ограниченной глубины определяются аналогично.

О. Б. Лупанов показал [14, 15], что для класса формул (П-схем) любой фиксированной глубины l, $l \geqslant 3$, имеет место асимптотика

$$L_{\Pi}^{l}(n) \sim \frac{2^n}{\log n};$$

в то же время для формул (П-схем) глубины 2

$$L_{\Pi}^{2}(n) = n2^{n-1}.$$

Таким образом, был установлен новый эффект: при реализации функций формулами асимптотика сложности достигается уже в классе формул глубины 3, причем в силу эффекта Шеннона для почти всех функций асимптотически минимальные формулы могут быть выбраны в классе формул глубины 3.

Аналогичный результат с асимптотикой $\frac{2^n}{n}$ получен Олегом Борисовичем в работе [38] для схем из функциональных элементов глубины 3 в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ (под глубиной схемы понимается увеличенное на единицу наибольшее число чередований элементов вида $\vee$ и & в цепях, соединяющих входы схемы с ее выходом).

Релейно-контактные схемы. В классе релейно-контактных (многотактных) схем О. Б. Лупановым [13, 22] установлены оценки, показывающие существенную зависимость сложности реализации функций от способа функционирования схем. Им рассмотрены два способа функционирования релейно-контактных схем, различающиеся условиями возбуждения обмоток реле (при первом способе функционирования для возбуждения обмотки достаточно прохождения через нее проводящей цепи; при втором способе учитывается возможность «шунтирования» обмоток реле проводящими цепями из контактов, т. е., говоря содержательно, считается, что сопротивления обмоток существенно больше сопротивлений контактов). Под сложностью релейно-контактной схемы понимается сумма весов входящих в нее контактов и обмоток реле. О. Б. Лупановым установлено [22], что при первом способе функционирования релейно-контактных схем имеет место асимптотика функции Шеннона сложности

$$L^{\mathrm{I}}_{\text{РКС}}(n) \sim \rho^{\mathrm{I}} \frac{2^n}{n},$$

где $\rho^{\mathrm{I}} = \min\left(\frac{\gamma}{2}, \beta\right)$, β обозначает вес контакта исходной переменной, γ — вес контакта промежуточного реле ($\beta, \gamma > 0$); при втором способе функционирования

$$L^{\mathrm{II}}_{\text{РКС}}(n) \sim \rho^{\mathrm{II}} \frac{2^n}{n},$$

где $\rho^{\mathrm{II}} = \min\left(\frac{\alpha+\gamma}{3}, \frac{\gamma}{2}, \beta\right)$, а α обозначает вес обмотки реле.

В частности, если под сложностью схемы понимать общее число контактов основных и промежуточных реле (считая веса обмоток реле нулевыми), то $L^{\mathrm{I}}_{\text{РКС}}(n) \sim \frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$, $L^{\mathrm{II}}_{\text{РКС}}(n) \sim \frac{1}{3}\frac{2^n}{n}$.

Полученные результаты, по-видимому, впервые дали содержательный пример того, как при одном классе схем, но при разных определениях способа функционирования существенно меняется поведение функции Шеннона сложности.

Для всех описанных выше классов управляющих систем — вентильных схем, схем из функциональных элементов, контактных схем, формул и других, О. Б. Лупанов установил наличие эффекта Шеннона: почти все функции от одного числа переменных имеют примерно одинаковую, и притом асимптотически наибольшую сложность. Однако, как показал сам Олег Борисович, эта широко распространенная закономерность не является всеобщей.

Схемы из функциональных элементов с задержками. В работе [26] О. Б. Лупанов исследовал реализацию булевых функций в классе правильных схем из функциональных элементов с задержками. Каждому элементу конечного базиса приписываются два положительных числа — вес элемента и его задержка (задержки элементов не предполагаются соизмеримыми). Правильность схемы означает равенство суммарных задержек по всем цепям из элементов от входов схемы к ее выходу; эта общая для всех цепей суммарная задержка есть задержка схемы. Под сложностью схемы понимается сумма весов ее элементов.

Базис является регулярным, если в нем можно реализовать правильными схемами с одной и той же задержкой все функции одной переменной, и нерегулярным в противном случае. Все булевы функции разделяются на два класса: с-функции и ф-функции (первые при отождествлении всех переменных обращаются в константу, вторые — не обращаются). Для любого базиса вводятся функции Шеннона: $L(n)$, $L^{\text{с}}(n)$, $L^{\text{ф}}(n)$, отвечающие наибольшей сложности соответственно произвольных функций, с-функций, ф-функций от n переменных, и аналогичные функции для задержки $T(n)$, $T^{\text{с}}(n)$, $T^{\text{ф}}(n)$.

О. Б. Лупанов доказал следующее. Если базис регулярный, то

$$L(n) \sim L^{\text{с}}(n) \sim L^{\text{ф}}(n) \sim \rho\frac{2^n}{n} \quad \text{и} \quad T(n) \sim T^{\text{с}}(n) \sim T^{\text{ф}}(n) \sim \tau n,$$

где ρ — минимальный приведенный вес элементов базиса, τ — их минимальная приведенная задержка, определяемая соотношением $\tau = \min\limits_{m(E)\geqslant 2} \frac{T(E)}{\log m(E)}$ ($m(E)$ — число входов, $T(E)$ — задержка базисного элемента E). Если же базис нерегулярный, то

$$L^{\text{с}}(n) \sim \rho\frac{2^n}{n}, \quad T^{\text{с}}(n) \sim \tau n,$$

$$L(n) \sim L^{\text{ф}}(n) \sim \rho^*\frac{2^n}{n}, \quad T(n) \sim T^{\text{ф}}(n) \sim \tau^* n,$$

где ρ^* и τ^* — соответственно минимальный приведенный вес и минимальная приведенная задержка элементов базиса, которым приписаны ф-функции. При этом $\rho^* \geqslant \rho$, $\tau^* \geqslant \tau$. Кроме того, О. Б. Лупанов показал, что в обоих случаях возможна одновременная асимптотическая минимизация сложности и задержки схем (в случае нерегулярного базиса — по отдельности для с- и ф-функций).

Здесь О. Б. Лупановым было обнаружено новое явление: для правильных схем из функциональных элементов с задержками эффект Шеннона не имеет места. Если для нерегулярного базиса выполняется неравенство $\rho^* > \rho$ (примеры таких базисов легко указать), то множество всех булевых функций распадается на две приблизительно равные части; в одной из этих частей почти все функции имеют почти одинаковую сложность, асимптотически равную $\rho\frac{2^n}{n}$, в другой — также почти одинаковую, но существенно бóльшую сложность, асимптотически равную $\rho^*\frac{2^n}{n}$.

Схемы из пороговых элементов. Вопрос о сложности булевых функций при реализации схемами из пороговых элементов несмотря на усилия многочисленных исследователей на протяжении многих лет оставался открытой проблемой (под сложностью схемы понимается число входящих в нее пороговых элементов). Порядок роста функции Шеннона сложности таких схем был получен Э. И. Нечипоруком в 1964 г. О. Б. Лупановым [30, 33] установлена асимптотика функции Шеннона сложности схем из пороговых элементов

$$L_{\text{СПЭ}}(n) \sim 2\left(\frac{2^n}{n}\right)^{1/2}.$$

Попутно О. Б. Лупановым был предложен более простой метод синтеза, позволяющий достичь порядка роста функции $L_{\text{СПЭ}}(n)$ уже в классе схем глубины 4. Возможность построения схем из пороговых элементов малой глубины с сохранением порядка роста сложности представляет значительный интерес с точки зрения применений к синтезу нейронных сетей.

Большой интерес с этой точки зрения представляет еще один результат, касающийся реализации не всюду определенных функций. Пусть $L_{\text{СПЭ}}(n, M)$ обозначает наименьшую величину сложности, достаточную для реализации схемой из пороговых элементов любой булевой функции от n переменных, заданной на множестве из M наборов. О. Б. Лупанов показал [33], что для любой последовательности пар чисел (n_i, M_i), где $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей условию $M_i \to \infty$ при $i \to \infty$, имеет место асимптотика

$$L_{\text{СПЭ}}(n_i, M_i) \sim 2\left(\frac{M_i}{\log M_i}\right)^{1/2}.$$

О. Б. Лупановым [33] получена также асимптотика сложности симметрических булевых функций при реализации схемами из пороговых элементов:

$$L_{\text{СПЭ}}(S_n) \sim 2\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1/2}$$

(порядок роста был ранее установлен Н. П. Редькиным).

Универсальные П-сети. Универсальная П-сеть — это двухполюсная параллельно-последовательная сеть, из которой путем расстановки на ее ребрах символов переменных и их отрицаний: $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, можно получить контактную П-схему для любой булевой функции n переменных. В 1965 г. Е. А. Кондратьева установила асимптотику сложности универсальных П-сетей: $U(n) \sim \frac{2^n}{\log n}$. А. Д. Коршунов показал, что асимптотика сложности достигается для универсальных П-сетей глубины 4. В работе [32] О. Б. Лупанов доказал, что эта асимптотика достигается уже в классе универсальных П-сетей глубины 3:

$$U^3(n) \sim \frac{2^n}{\log n};$$

в то же время $U^2(n) = n2^{n-1}$.

Реализация степеней отображений. Это был последний цикл опубликованных работ Олега Борисовича. Пусть D — некоторое множество двоичных наборов длины n, F — произвольное отображение этого множества в себя, $F\colon D \to D$, и $M = |D|$. Рассматриваются степени отображения F, т. е. отображения $F^t(\widetilde{x}) = \underbrace{F(F(\ldots(F}_{t\text{ раз}}(\widetilde{x})\ldots)$, $\widetilde{x} \in D$. Степени отображения F с переменным показателем реализуются в виде булевой $(n+m, n)$-векторфункции $A_F(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, определяемой соотношением

$$A_F(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) = F^{|\widetilde{\tau}|}(\widetilde{\sigma})$$

для любых наборов $\widetilde{\sigma}$ длины n и $\widetilde{\tau}$ длины m, где $m = \lceil \log |D| \rceil$ ($|\widetilde{\tau}|$ обозначает число, выражаемое двоичным набором $\widetilde{\tau}$). Пусть $L(A_F)$ обозначает наименьшую сложность доопределения вектор-функции A_F до всюду определенной вектор-функции при реализации схемами из функциональных элементов в произвольном конечном полном базисе. Рассматривается величина $L^*(n, M)$,

$$L^*(n, M) = \max_{|D|=M, F\colon D \to D} L(A_F).$$

О. Б. Лупанов показал [44, 45, 49], что при условии $\frac{M}{\log n} \to \infty$ имеет место асимптотика

$$L^*(n, M) \sim \rho \frac{Mn}{\log(Mn)},$$

где ρ — минимальный приведенный вес элементов базиса.

Этот результат показывает, что реализация произвольных — с переменным показателем, — степеней отображения F почти всегда может быть осуществлена асимптотически с той же сложностью, какую имеет одно отдельно взятое отображение F.

Та же асимптотика сложности получена О. Б. Лупановым для случая реализации произвольных степеней взаимно-однозначных отображений F, включая отрицательные степени (т. е. итерации обратных отображений) и в задаче логарифмирования отображений. В последнем случае для любых наборов $\widetilde{\sigma}'$ и $\widetilde{\sigma}''$ схема устанавливает, переводится ли первый из указанных наборов во второй какой-либо степенью отображения F, и, если да, то находит наименьшую такую степень.

II. ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОГО КОДИРОВАНИЯ

Предложенный О. Б. Лупановым в работах [16, 23] принцип локального кодирования является одной из вершин теории синтеза и сложности управляющих систем. Появление этого принципа первоначально было связано с поисками общего подхода к реализации функций из специальных классов. Впоследствии оказалось, что принцип локального кодирования позволяет рассматривать и объяснять с единых позиций многие явления в области сложности. Этот принцип стал одним из основных рабочих инструментов решения разнообразных задач синтеза управляющих систем.

Принцип локального кодирования был выдвинут О. Б. Лупановым в содержательном виде, не формально, а как некоторый общий подход к задачам синтеза. Высказав принцип локального кодирования в общем виде, Олег Борисович описал конкретные частные случаи этого принципа: принцип равномерного кодирования, принцип неравномерного кодирования и принцип параметризации [23].

В работах О. Б. Лупанова принцип локального кодирования изложен применительно к синтезу схем из функциональных элементов; после соответствующих модификаций он без особого труда переносится на другие классы управляющих систем.

Пусть F — некоторый класс булевых вектор-функций, F_n — множество вектор-функций из класса F, состоящее из (n, m_n)-вектор-функций $(n=1, 2, \ldots)$. При реализации вектор-функций из множества F_n, этим функциям сопоставляют двоичные слова одинаковой длины h_n — коды функций, так, что значение функции f, $f \in F_n$, на наборе $\widetilde{\alpha}$ значений переменных вычисляется по коду функции и этому набору однозначно. Кодирование асимптотически оптимально, если $h_n \sim \log |F_n|$. Кодирование локально, если для вычисления значения функции на данном наборе достаточно использовать не весь код функции, а только сравнительно небольшую часть (кусок) этого кода. Если куски кода имеют не слишком большую длину, их «координаты», т. е. параметры, задающие расположение куска кода внутри кода функции, вычисляются не слишком сложно, и декодирование, т. е. вычисление значения функции $f(\widetilde{\alpha})$ по набору $\widetilde{\alpha}$, координатам соответствующего этому набору куска кода и самому куску кода осуществляется в некотором смысле просто, то при выполнении некоторых дополнительных требований принцип локального кодирования позволяет строить для функций из множества F_n асимптотически минимальные схемы. Асимптотика сложности этих схем определяется только числом функций в рассматриваемом множестве и имеет вид $\rho \dfrac{\log |F_n|}{\log \log |F_n|}$.

О. Б. Лупанов в работах [16, 23] доказал ряд утверждений о конкретных частных формах принципа локального кодирования.

Принцип равномерного кодирования. Пусть вектор-функции из множества F_n допускают кодирование двоичными словами длины h_n с выполнением следующих требований:

1) кодирование асимптотически оптимально;

2) код разбит на непересекающиеся куски одинаковой длины d_n, удовлетворяющей условию $d_n = o\left(\frac{h_n}{\log h_n}\right)$;

3) кодирование локально;

4) куски кода занумерованы и сложность схемы, вычисляющей по входному набору номер соответствующего куска кода, есть $o\left(\frac{h_n}{\log h_n}\right)$;

5) сложность схемы, осуществляющей декодирование, т. е. вычисляющей по входному набору, номеру соответствующего куска кода и самому куску кода значение функции на этом наборе, есть $o\left(\frac{h_n}{\log h_n}\right)$;

6) выполнено условие $\frac{n+m_n}{\frac{h_n}{\log h_n}} \to 0$;

тогда имеет место асимптотика сложности

$$L_{\text{СФЭ}}(F_n) \sim \rho \frac{\log |F_n|}{\log \log |F_n|}.$$

Принцип неравномерного кодирования. Пусть вектор-функции из множества F_n допускают кодирование двоичными словами длины h_n с выполнением следующих требований:

1) кодирование асимптотически оптимально;

2) код разбит на куски (вообще говоря, неодинаковой длины; возможно, пересекающиеся) так, что максимальная длина куска кода Q удовлетворяет условию $Q = o\left(\frac{h_n}{(\log h_n)^2}\right)$;

3) кодирование локально;

4) сложность схемы, вычисляющей по входному набору $\widetilde{\alpha}$ координаты соответствующего куска кода, т. е. номер начального разряда этого куска внутри кода функции и длину куска, есть $o\left(\frac{h_n}{\log h_n}\right)$;

5) сложность схемы, осуществляющей декодирование, т. е. вычисляющей по входному набору, координатам соответствующего куска кода и самому куску кода значение функции на этом наборе, есть $o\left(\frac{h_n}{\log h_n}\right)$;

6) выполнено условие $\frac{n+m_n}{\frac{h_n}{\log h_n}} \to 0$;

тогда имеет место асимптотика сложности

$$L_{\text{СФЭ}}(F_n) \sim \rho \frac{\log |F_n|}{\log \log |F_n|}.$$

Принцип параметризации соответствует частному случаю неравномерного кодирования, когда каждый кусок кода содержит всего один двоичный разряд.

В схеме, построенной по принципу локального кодирования, основная сложность затрачивается на вычисление куска кода по его координатам. Сложность остальных частей схемы — вычисляющих по входному набору координаты куска кода, осуществляющих декодирование и других, можно оценивать достаточно грубо, лишь бы эта сложность оставалась существенно меньшей величины $\frac{h_n}{\log h_n}$.

Говоря словами самого Олега Борисовича, принцип локального кодирования «...по существу сводит задачу синтеза схем к задаче кодирования функций, в которой сосредоточена основная трудность» [50].

Важные частные случаи принципа неравномерного кодирования были найдены Е. П. Липатовым и самим О. Б. Лупановым [41].

Реализация функций из специальных классов

С помощью принципа локального кодирования Олег Борисович решил несколько важных задач, связанных с реализацией функций из специальных классов.

Функции с данным числом единиц. Пусть R_{n,k_n} — класс булевых функций от n переменных, принимающих единичное значение на k_n наборах. О. Б. Лупанов показал [16, 23], что при выполнении условия $\frac{\min(k_n, n-k_n)}{\log n} \to \infty$ имеет место асимптотика

$$L_{\text{СФЭ}}(R_{n,k_n}) \sim \rho \frac{\log C_{2^n}^{k_n}}{\log\log C_{2^n}^{k_n}}.$$

Это дает исчерпывающее решение задачи в асимптотической постановке: при $k_n = O(\log n)$ в силу известного результата Б. И. Финикова $L_{\text{СФЭ}}(R_{n,k_n}) \asymp n$.

Опираясь на свои результаты о сложности функций с данным числом единиц, О. Б. Лупанов в работах [16, 23] установил ряд свойств функций наибольшей сложности.

Пусть W_n обозначает множество всех функций от n переменных наибольшей сложности, т. е. таких функций f, что $L_{\text{СФЭ}}(f) = L_{\text{СФЭ}}(n)$. Пусть, далее,

$$\Delta(n) = \max_{f \in W_n} |\|f\| - 2^{n-1}|,$$

где $\|f\|$ — число единиц функции f. О. Б. Лупанов доказал, что при всех n

$$\Delta(n) < C 2^n \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2},$$

где C — некоторая постоянная. В качестве следствия им было получено следующее утверждение. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — произвольная последовательность функций наибольшей сложности, $f_n \in W_n$, тогда

$$\|f_n\| \sim 2^{n-1}.$$

Этим была доказана справедливость гипотезы С. В. Яблонского (1955 г.): функции наибольшей сложности принимают значения 0 и 1 примерно на одинаковом числе наборов.

Исследование функций наибольшей сложности является чрезвычайно трудным делом. До сих пор об их строении и свойствах почти ничего не известно. Описанные результаты О. Б. Лупанова остаются одними из немногих в этом направлении.

Монотонные вектор-функции. С использованием принципа локального кодирования О. Б. Лупановым [16, 23] была найдена асимптотика сложности монотонных (n,n)-вектор-функций (здесь имеется в виду монотонность относительно лексикографического порядка на множестве двоичных наборов длины n):

$$L_{\text{СФЭ}}(M_n) \sim \rho \frac{2^{n+1}}{n}.$$

Этот результат широко применяется при синтезе асимптотически оптимальных схем для функций из специальных классов.

Симметрические функции. С использованием принципа локального кодирования О. Б. Лупановым [16, 23] был также установлен порядок роста сложности симметрических булевых функций при реализации схемами из функциональных элементов:

$$L_{\text{СФЭ}}(S_n) \asymp n.$$

Принцип локального кодирования применяется очень широко. С его помощью разными авторами решено большое число задач.

III. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Реализация симметрических функций контактными схемами. В работе [24] О. Б. Лупанов установил верхнюю оценку сложности реализации симметрических булевых функций контактными схемами

$$L_{\text{КС}}(S_n) \lesssim \frac{2n^2}{\log n},$$

существенно улучшив найденную ранее К. Э. Шенноном оценку n^2. Там же он получил верхнюю оценку сложности реализации элементарных симметрических булевых функций контактными схемами: для любого числа ε, $\varepsilon > 0$, можно указать постоянную C_ε такую, что

$$L_{\text{КС}}(E_n) \lesssim C_\varepsilon n^{1+\varepsilon};$$

точнее,

$$L_{\text{КС}}(E_n) \lesssim \frac{Cn \log^2 n}{\log\log n}.$$

Ранее К. Э. Шеннон нашел для сложности элементарных симметрических функций асимптотическую верхнюю оценку $\frac{1}{2}n^2$.

Тем самым, в частности, О. Б. Лупановым было показано, что известные к тому времени контактные схемы для элементарных симметрических функций, вообще говоря, не являются минимальными.

Оба результата были получены О. Б. Лупановым на основе предложенного им нового приема — разложения симметрической функции по элементарным периодическим функциям.

С помошью этого приема в той же работе [24] О. Б. Лупановым было получено еще несколько результатов, в частности, установлена верхняя оценка сложности реализации симметрических функций контактными П-схемами

$$L_{\text{П}}(S_n) \leqslant n^{(1+\varepsilon_n)\log\log n},$$

где $\varepsilon_n \to 0$, и верхняя оценка сложности реализации монотонных симметрических функций контактными схемами

$$L_{\text{КС}}(S_n^M) \precsim n^{3/2}.$$

Обе эти оценки были впоследствии улучшены. В. М. Храпченко (1972) показал, что $L_{\text{П}}(S_n) \precsim n^c$, где c — постоянная, и Е. Г. Красулина (1985) — что $L_{\text{КС}}(S_n^M) \precsim \frac{n(\log n)^4}{(\log\log n)^2}$.

Сравнение сложности реализации контактными схемами и контактными схемами из замыкающих контактов. О. Б. Лупанов придавал важное значение задаче о сравнении сложности реализации монотонных булевых функций обычными контактными схемами и контактными схемами, состоящими только из замыкающих контактов. Количественным выражением соотношения между этими величинами служит функция $\lambda(n)$,

$$\lambda(n) = \max_f \frac{L^+_{\text{КС}}(f)}{L_{\text{КС}}(f)},$$

где максимум берется по всем монотонным функциям f от n переменных, а $L^+_{\text{КС}}(f)$ обозначает сложность функции f при реализации контактными схемами из замыкающих контактов.

Н. А. Карпова в 1958 г. установила асимптотическую оценку $\lambda(n) \gtrsim \frac{3}{2}$. О. Б. Лупанов в работе [17] показал, что

$$\lambda(n) \to \infty,$$

а затем в работе [24] установил оценку

$$\lambda(n) \gtrsim \sqrt{n}.$$

Позднее эта оценка была улучшена Е. Г. Красулиной, показавшей, что $\lambda(n) \gtrsim \frac{n(\log\log n)^2}{(\log n)^4}$.

Влияние глубины формул на их сложность. О. Б. Лупанов, по-видимому, первым изучал влияние глубины на сложность индивидуальных функций. В работе [27] им была рассмотрена реализация монотонных булевых функций формулами ограниченной глубины в неполном базисе $\{\&, \vee\}$.

Пусть $M_r^{\vee}(f)$ и $M_r^{\&}(f)$ — сложность реализации функции f соответственно монотонными $\vee$-формулами и $\&$-формулами глубины r. О. Б. Лупанов рассмотрел последовательность функций

$$f_n = x_1y_1y_2 \ldots y_n \vee x_2y_2 \ldots y_n \vee \ldots \vee x_{n-1}y_{n-1}y_n \vee x_ny_n$$

от $2n$ переменных ($n = 1, 2, \ldots$) и показал, что при любом фиксированном r, $r \geqslant 2$, имеют место асимптотики

$$M_r^{\vee}(f_n) \sim M_r^{\&}(f_n) \sim C_r n^{1+\frac{1}{r-1}},$$

где C_r — постоянная, $C_r = \frac{r-1}{r}((r-1)!)^{\frac{1}{r-1}}$. Отсюда он получил следствие: при любом фиксированном r, $r \geqslant 2$, и $n \to \infty$

$$\frac{M_{r+1}^{\vee}(f_n)}{M_r^{\vee}(f_n)} \to 0, \qquad \frac{M_{r+1}^{\&}(f_n)}{M_r^{\&}(f_n)} \to 0.$$

Тем самым было обнаружено новое явление: при реализации функций формулами сложность индивидуальных функций, вообще говоря, может существенно зависеть от глубины этих формул; в рассматриваемом случае увеличение глубины хотя бы на единицу приводит к сколь угодно большому изменению сложности некоторых функций.

Впоследствии вопрос о влиянии глубины формул и схем на сложность индивидуальных функций активно разрабатывался многими авторами.

Сравнение конечных источников. Задача о сравнении конечных источников возникла в теории автоматов. Конечный источник с n состояниями — это конечный ориентированный граф с n вершинами, каждой дуге которого приписан один из символов конечного алфавита A; источник является специальным, если число исходящих из любого состояния дуг равно числу символов алфавита A и этим дугам приписаны различные символы. Некоторые состояния источника являются заключительными, одно из состояний — исходным. Всякий источник порождает язык в алфавите A: множество слов, состоящих из символов, приписанных дугам ориентированных путей, ведущих из исходного состояния в какое-либо из заключительных состояний источника. Для всякого конечного источника с n состояниями легко построить эквивалентный, т. е. порождающий тот же язык, специальный источник с не более чем 2^n состояниями. О. Б. Лупанов в работе [19] показал, что эта верхняя оценка является, вообще говоря, неулучшаемой.

В частности, он построил при любом n, $n \geqslant 3$, пример конечного источника с n состояниями в двухбуквенном алфавите, такого, что всякий эквивалентный ему специальный конечный источник имеет не менее 2^n состояний.

Имеется прямая связь между источниками и автоматами: недетерминированный конечный автомат может рассматриваться как конечный источник, детерминированный конечный автомат — как специальный конечный источник. С этой точки зрения основной результат работы [19] представляет собой, по-видимому, один из первых точных результатов о сравнении сложности детерминированных и недетерминированных моделей вычислений.

Аналогичный результат был независимо получен Ю. Л. Ершовым.

Оценки числа графов. О. Б. Лупановым [9, 12] были получены оценки числа графов с заданным числом ребер. Он, в частности, показал, что число $G(n)$ неизоморфных связных графов с n ребрами без кратных ребер и петель выражается формулой

$$G(n) = \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\gamma(n)\right)^n,$$

где $\gamma(n) \to 1$, точнее $\frac{2\ln\ln n}{\ln n} \lesssim \gamma(n) - 1 \lesssim \frac{4\ln\ln n}{\ln n}$; кроме того, он установил, что доля связных графов с n ребрами без кратных ребер и петель, число k вершин которых удовлетворяет условию $\left|k - \frac{2n}{\ln n}\right| > \frac{14n(\ln\ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}}$, стремится к нулю с ростом n.

Опираясь на эти результаты, Олег Борисович показал, что почти все графы рассматриваемого вида с n ребрами имеют приблизительно $\frac{2n}{\ln n}$ вершин, и что средняя степень (т. е. среднее число ребер, инцидентных одной вершине) этого большинства графов асимптотически равна $\ln n$.

Аналогичные выражения, отличающиеся только видом функции $\gamma(n)$ (с сохранением ее оценок) получены О. Б. Лупановым для других классов графов, в том числе для графов общего вида (не обязательно связных), и графов с кратными ребрами и петлями. Близкие результаты были независимо получены другими авторами.

Обзоры и методические работы. О. Б. Лупанов уделял большое внимание текущему состоянию исследований по синтезу и сложности управляющих систем. Им написаны несколько обзорных статей, суммирующих результаты в данной области [25, 31, 35, 39, 40, 43]. Большинство этих статей по сей день сохраняют свое значение с точки зрения полноты охвата материала, оценки тенденций развития и постановки новых задач.

Работы [20, 37, 42, 47] носят, в основном, методический характер. Статья [20] многие годы остается лучшим введением в область синтеза и сложности управляющих систем для начинающих. Монография [42] используется как учебник по асимптотическим методам синтеза.

Небольшие книжки [28, 29] содержат замечательные лекции по математической логике, прочитанные О. Б. Лупановым в 1970/71 учебном году для студентов первого курса только что созданного тогда факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ.

О. Б. Лупановым была написана статья [36] о принципе локального кодирования для изданной в Киеве «Энциклопедии кибернетики», позднее перепечатанная с некоторыми изменениями в энциклопедии «Дискретная математика» [50].

Олег Борисович Лупанов был математиком большой творческой силы.

В большинстве своих работ Олег Борисович был первопроходцем новых, неизведанных областей исследования. Он не любил обобщений, делающихся ради самих обобщений, и в своих работах предпочитал рассматривать конкретные новые задачи, для которых часто находил совершенно новые, не предсказуемые заранее эффекты. Ему был присущ целостный взгляд на предмет и методы математического исследования, очень естественный и живой, далекий от скуки и тривиальности некоторых математических формализмов.

Характерной чертой научного стиля О. Б. Лупанова было стремление к получению окончательных результатов. Таковы они в большинстве его работ. Вместе с тем, работы Олега Борисовича хранят еще много ожидающих развития ценных идей. Современные исследователи постоянно обращаются к ним как к источнику новых задач, подходов и методов. Нет сомнения, что с течением времени влияние работ Олега Борисовича Лупанова на исследования в области синтеза и сложности управляющих систем, на всю область дискретной математики и математической кибернетики в целом и на другие разделы математики будет возрастать.

СПИСОК РАБОТ О. Б. ЛУПАНОВА

1. О возможностях синтеза схем из разнообразных элементов // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 103, № 4. — С. 561–563.
2. О возможностях синтеза схем из произвольных элементов // Труды Третьего Всесоюзного математического съезда. — Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 146.
3. О вентильных и контактно-вентильных схемах // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 111, № 6. — С. 1171–1174.
4. О синтезе контактных схем // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 119, № 1. — С. 23–26.
5. О синтезе контактных схем. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — М.: ОПМ МИ АН СССР, 1958.
6. Об одной проблеме Шеннона // Успехи матем. наук. — 1958. — Т. XIII, Вып. 4. — С. 211.
7. Об одном методе синтеза схем // Изв. ВУЗ. Радиофизика. — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 120–140.
8. О возможностях синтеза схем из произвольных элементов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. — Т. LI. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 158–173.
9. Об асимптотических оценках числа графов с n ребрами // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 126, № 3. — С. 498–500.
10. Об асимптотических оценках сложности формул, реализующих функции алгебры логики // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 128, № 3. — С. 464–467.
11. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. — Вып. 3. — М.: Физматгиз. — 1960. — С. 61–80.
12. Об асимптотических оценках числа графов с n ребрами // Проблемы кибернетики. — Вып. 4. — М.: Физматгиз. — 1960. — С. 5–21.
13. О природе асимптотических закономерностей в теории управляющих систем // Успехи матем. наук. — 1960. — Т. XV, вып. 4. — С. 199–202.
14. О реализации функций алгебры логики формулами ограниченной глубины в базисе $\&, \vee, {}^-$ // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 136, № 5. — С. 1041–1042.
15. О реализации функций алгебры логики формулами ограниченной глубины в базисе $\&, \vee, {}^-$ // Проблемы кибернетики. — Вып. 6. — М.: Физматгиз. — 1961. — С. 5–14.

16. О принципе локального кодирования и реализации функций из некоторых классов схемами из функциональных элементов // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 2. — С. 322–325.
17. О сравнении сложности реализации монотонных функций контактными схемами, содержащими лишь замыкающие контакты, и произвольными контактными схемами // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 144, № 6. — С. 1245–1248.
18. Об одном классе схем из функциональных элементов (формулы с частичной памятью) // Проблемы кибернетики. — Вып. 7. — М.: Физматгиз. — 1962. — С. 61–114.
19. О сравнении двух типов конечных источников // Проблемы кибернетики. — Вып. 9. — М.: Физматгиз. — 1963. — С. 321–326.
20. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. — Вып. 10. — М.: Физматгиз. — 1963. — С. 63–97.
21. Об асимптотических закономерностях синтеза схем из функциональных элементов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: ОПМ МИ АН СССР, 1963.
22. О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. — Вып. 11. — М.: Наука. — 1964. — С. 25–47.
23. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. — Вып. 14. — М.: Наука. — 1965. — С. 31–110.
24. К вопросу о реализации симметрических функций алгебры логики контактными схемами // Проблемы кибернетики. — Вып. 15. — М.: Наука. — 1965. — С. 85–99.
25. О некоторых результатах математической теории синтеза управляющих систем // Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики (Новосибирск, 1969). Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. — Вып. 5 (42). — М., 1970. — С. 16–22.
26. О схемах из функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. — Вып. 23. — М.: Наука. — 1970. — С. 43–81.
27. О влиянии глубины формул на их сложность // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 46–49.
28. Лекции по математической логике. Часть 1. — М.: ОНТИ ВЦ МГУ, 1970. 80 с.
29. Лекции по математической логике. Часть 2. — М.: ОНТИ ВЦ МГУ, 1970. 27 с.
30. О схемах из пороговых элементов // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 202, № 6. — С. 1288–1291.
31. Об асимптотических оценках сложности управляющих систем // Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. Доклады советских математиков. — М.: Наука, 1972. — С. 162–167.
32. О сложности универсальной параллельно-последовательной сети глубины 3 // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. — Т. CXXXIII. — М.: Наука, 1973. — С. 127–131.
33. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. — Вып. 26. — М.: Наука. — 1973. — С. 109–140.
34. Об оценках сложности управляющих систем // Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft der Deutschen Demokratischen Republik. — Berlin, 1973. — № 2/3. — S. 100–110.

35. О методах получения оценок сложности и вычисления индивидуальных функций // Дискретный анализ. Вып. 25. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. — С. 3–18.
36. Локального кодирования принцип // Энциклопедия кибернетики. — Т. 1. — Киев: Главная редакция Украинской Советской энциклопедии, 1974. — С. 550–551.
37. О некоторых методах синтеза управляющих систем и оценках их сложности // Wissenshaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin. Math.-Nat. Reihe. — 1975. — № 6. — S. 721–727.
38. О реализации функций алгебры логики схемами из функциональных элементов «ограниченной глубины» в базисе $\&, \vee, ^{-}$ // Сб. работ по математической кибернетике. — Вып. 2. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1977. — С. 3–8.
39. О вентильных схемах // Acta Cybernetica. — 1980. — V. 4, № 4. — P. 311–315.
40. Об асимптотических оценках сложности управляющих систем // Acta Cybernetica. — 1980. — V. 4, № 4. — P. 317–323.
41. О некоторых случаях принципа локального кодирования // Discrete Mathematics (Warsaw, 1977). Banach Center Publ. — V. 7. — Warsaw: PWN, 1982. — P. 209–215.
42. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984. 137 с.
43. Нижние оценки сложности схем // Сб. докладов III международного рабочего семинара «Математические вопросы кибернетики» (Братислава, 1987). — Братислава: Университет им. Я. А. Коменского, 1987. — С. 5–15.
44. On the complexity of Boolean operators degrees // Complexity and Realization of Boolean Functions, Dagstuhl-Seminar-Report; 45, 24.08.— 28.08.92 (9235). — P. 13.
45. О сложности реализации степеней булевой (n, n)-функции // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. — 1993. — № 1. — С. 59–67.
46. О сложности реализации степеней булевой (N, N)-функции // Фундаментальные проблемы математики и механики. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — С. 331–333.
47. On some constructions of mathematical theory of synthesis of control systems // Proc. of two joint French–Russian seminars on combinatorial and algorithimical properties of discrete structures (April 1998, Moscow, Russia; February 1999, Nancy, France). — М.: Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. — P. 42–45.
48. On the complexity of the realization of word functions // Proc. of two joint French–Russian seminars on combinatorial and algorithmical properties of discrete structures (April 1998, Moscow, Russia; February 1999, Nancy, France). — М.: Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. — С. 105–106.
49. О сложности реализации степеней булевых (n, n)-функций // Математические вопросы кибернетики. — Вып. 12. — М.: Физматлит. — 2003. — С. 179–216.
50. Локального кодирования принцип // Дискретная математика: Энциклопедия. — М.: Большая Российская энциклопедия, 2004. — С. 146–147.