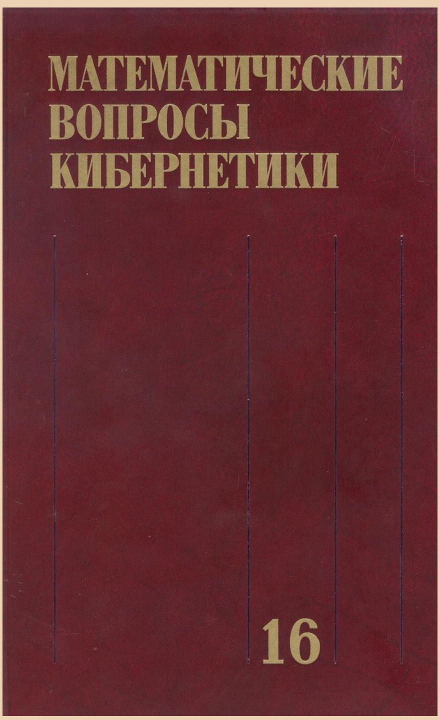

В. Н. Шевченко

Триангуляции выпуклых многогранников и их булевы функции

ТРИАНГУЛЯЦИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ И ИХ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ *)

В. Н. ШЕВЧЕНКО

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

В статье представлен краткий обзор результатов о граничных комплексах $\Gamma(P)$ выпуклых многогранников и их триангуляций. Он был бы вполне традиционен для комбинаторной теории выпуклых многогранников, если бы не главная тема статьи — связь этой теории с булевыми функциями. Эта связь вводится в п. 1, где выпуклому многограннику P ставится в соответствие булева функция $\varphi_{\Gamma(P)}$, равная 0 на характеристических векторах граней P и только на них. В п. 2 рассматриваются граничные комплексы ∂_P симплициальных многогранников, для них функции $\varphi_{\partial P}$ монотонны. В п. 3 рассматриваются симплициальные комплексы (для них соответствующие булевы функции тоже монотонны) триангуляций выпуклых многогранников. Поскольку функции $\varphi_{\Gamma(P)}$ и $\varphi_{\partial P}$ имеют различные реализации, возникают разнообразные вопросы, связанные с их экономным представлением. Кроме того, они позволяют по-новому посмотреть на такие вопросы, изучаемые в теории линейных неравенств, как условия реализуемости f-векторов (i-я компонента f_i которого равна числу i-мерных граней) политопов и их триангуляций. Статья является расширенной версией доклада, прочитанного автором на 16-й международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» [12].

1. Пусть P — множество решений (называемое далее *полиэдром*) системы линейных неравенств (в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$)

$$\sum_{k=1}^{d} a_{ik}x_k \leqslant a_{i0}, \quad i=1,...,m. \tag{1}$$

Под *размерностью* P ($\dim P$) понимают максимальное число аффинно независимых решений системы (1), если она совместна, и считают $\dim P=-1$ в противном случае. Ограниченный полиэдр называют *выпуклым многогранником*. Будем называть его также *политопом* или r-*политопом*, если $\dim P=r$. Рассмотрим такую линейную функцию ax, для которой достигается $\max\limits_{x\in P} ax=\alpha$. Множество $P_a=\{x\in P \mid ax=\alpha\}$ называют *гранью*

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00552а).

полиэдра P, в частности при $a=0$ получим, что P является (единственной) r-мерной гранью r-политопа P. Удобно также считать пустое множество (-1)-мерной гранью любого политопа P. Хорошо известно (см., например, [2, 4, 8, 18, 26]), что любой политоп P можно задать как выпуклую оболочку своих вершин (т. е. 0-мерных граней) $P=\mathrm{conv}(v_1, v_2, ..., v_n)$, где

$$\mathrm{conv}(v_1, ..., v_n)=\{x=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j v_j \mid \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1, \lambda_j\geqslant 0, j=1, ..., n\}, \tag{2}$$

а каждая его грань $P_a=\mathrm{conv}(v_j, j\in J_a)$, где $J_a=\{j \mid av_j=\alpha\}$. В частности, положив $a_i=(a_{i1}, ..., a_{id})$, с i-м неравенством системы (1) свяжем грань $F_i=\{x\in P \mid \sum\limits_i a_{ik}x_k=a_{i0}\}$. Обозначим через $\Gamma_k(P)$ множество k-мерных граней политопа P и положим $\Gamma(P)=\bigcup\limits_{k=-1}^{r}\Gamma_k(P)$, $\partial P=\Gamma(P)\setminus\{P\}$, $f(P)= =(f_{-1}(P), f_0(P), ..., f_r(P))$, где $f_k(P)=|\Gamma_k(P)|$ — число k-мерных граней политопа P,

$$f(\lambda, P)=\sum_{k=-1}^{r} f_k(P)\lambda^{k+1}$$

и $f(\lambda, \partial P)=f(\lambda, P)-\lambda^{r+1}$.

Известно также, что если $r=d$ и система (1) *неприводима*, т. е. не содержит неравенств-следствий, то $f_{d-1}(P)=m$, $\Gamma_{d-1}(P)=\{F_1, ..., F_m\}$ и множество

$$\Gamma(P)=\bigcup_{k=-1}^{r}\Gamma_k(P)$$

с естественным частичным упорядочиванием $F\subseteq G$ является решёткой (определение и свойства решётки см. в [1]), в частности $\inf(P_a, P_b)= =P_a\bigcap P_b=P_{a+b}$. Она называется *граневой решёткой* политопа P, а множество ∂P называется *граничным комплексом* политопа P.

Политоп P называется *r-симплексом*, если $\dim P=f_0(P)-1=r$. Нетрудно видеть, что для него $\Gamma_k(P)$ составляет $(k+1)$-мерный слой $(r+1)$-мерного булева куба, $f_k(P)=\binom{r+1}{k+1}$, $f(\lambda, P)=(1+\lambda)^{r+1}$.

Рассмотрим $(n-1)$-симплекс $S=\mathrm{conv}(v_1, v_2, ..., v_n)$. Для каждого J, $J\subseteq\{1, ..., n\}$, рассмотрим булеву функцию

$$v^J=\prod_{j\in J}v_j\prod_{j\notin J}\overline{v_j}, \tag{3}$$

считая теперь $v_1, v_2, ..., v_n$ булевыми переменными, что, впрочем, не будет приводить к недоразумениям, но позволит несколько упростить запись. Отсылая за сведениями по булевым функциям к [14], заметим только, что, используя стандартные обозначения для отрицания и дизъюнкции, конъюнкцию мы записываем в виде произведения. Нетрудно видеть, что для любого A, $A\subseteq\{1, ..., n\}$, формула

$$\varphi_A(v_1, v_2, ..., v_n)=\bigvee_{J\notin A}v^J, \tag{4}$$

задаёт булеву функцию, *нуль* (т. е. двоичный набор, на котором $\varphi_A=0$) которой соответствует подмножеству $J\in A$, а *единица* (определяемая аналогично) — подмножеству $J\notin A$.

Тогда для $\varphi_{\Gamma(P)}$ можно получить совершенную конъюнктивную и дизъюнктивную нормальные формы :

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, ..., v_n)=\prod_{F\in\Gamma(P)}((\bigvee_{v_j\notin F}v_j)\vee(\bigvee_{v_j\in F}\overline{v_j})), \tag{5}$$

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, ..., v_n)=\bigvee_{F\notin\Gamma(P)}\prod_{v_j\in F}v_j\prod_{v_j\notin F}\overline{v_j}. \tag{6}$$

Заменяя в (5) и (6) множество $\Gamma(P)$ на ∂P, получим аналогичные формулы для $\varphi_{\partial P}$, из которых следует, что

$$\varphi_{\partial P}(v_1, ..., v_n) = \varphi_{\Gamma(P)}(v_1, v_2, ..., v_n) \bigvee \prod_{j=1}^{n} v_j. \tag{7}$$

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, ..., v_n) = (\bigvee_{j=1}^{n} \overline{v_j})\varphi_{\partial P}(v_1, ..., v_n). \tag{8}$$

Пример 1. Если P — $(n-1)$-симплекс, то $\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, v_2, ..., v_n) = 0$ — все переменные фиктивные — и $\varphi_{\partial P}(v_1, v_2, ..., v_n) = \prod_{i=1}^{n} v_i$.

Пример 2. Если $d = 2$ и P — квадрат, то следующая таблица задаёт булевы функции $\varphi_{\Gamma(P)}$ и $\varphi_{\partial P}$.

Таблица 1

1 2 3 4	0 0 0 0	1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1	1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1	1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1	1 1 1 1
$\varphi_{\Gamma(P)}$	0	0 0 0 0	0 1 0 0 1 0	1 1 1 1	0
$\varphi_{\partial P}$	0	0 0 0 0	0 1 0 0 1 0	1 1 1 1	1

Из (5) следует, что

$$\begin{aligned}\varphi_{\Gamma(P)} = (\overline{v_1} \bigvee \overline{v_2} \bigvee \overline{v_3} \bigvee \overline{v_4})(v_1 \bigvee \overline{v_2} \bigvee \overline{v_3} \bigvee \overline{v_4})(\overline{v_1} \bigvee v_2 \bigvee \overline{v_3} \bigvee \overline{v_4})\& \\ \&(\overline{v_1} \bigvee \overline{v_2} \bigvee v_3 \bigvee \overline{v_4})(\overline{v_1} \bigvee \overline{v_2} \bigvee \overline{v_3} \bigvee v_4)(v_1 \bigvee v_2 \bigvee \overline{v_3} \bigvee \overline{v_4})(\overline{v_1} \bigvee v_2 \bigvee v_3 \bigvee \overline{v_4})\& \\ \&(v_1 \bigvee \overline{v_2} \bigvee \overline{v_3} \bigvee v_4)(\overline{v_1} \bigvee \overline{v_2} \bigvee v_3 \bigvee v_4)(v_1 \bigvee v_2 \bigvee v_3 \bigvee v_4) = \\ = v_1 v_3 \overline{v_4} \bigvee v_1 \overline{v_2} v_3 \bigvee \overline{v_1} v_2 v_4 \bigvee v_2 \overline{v_3} v_4.\end{aligned}$$

Далее из (7) получаем

$$\varphi_{\partial P} = \varphi_{\Gamma(P)} \bigvee v_1 v_2 v_3 v_4 = v_1 v_3 \bigvee v_2 v_4.$$

Пример 3. Пусть $P = \mathrm{conv}(v_1, v_2, ..., v_n)$ — d-политоп в R^{d+1} и v_0 не принадлежит аффинной оболочке $\Gamma_0(P)$. *Пирамидой с основанием* P и *апексом* v_0 называется [4, 18, 26] $(d+1)$-политоп $Q = \mathrm{conv}(v_0, v_1, ..., v_n)$. Тогда $f(\lambda, Q) = (1+\lambda) f(\lambda, P)$, $\varphi_{\partial Q} = \varphi_{\Gamma(P)} \bigvee v_0 \varphi_{\partial P} = (v_0 \bigvee \overline{v_1} \bigvee ... \bigvee \overline{v_n})\varphi_{\partial P}$ и $\varphi_{\Gamma(Q)}(v_0, v_1, ..., v_n) = \varphi_{\Gamma(P)}(v_1, ..., v_n)$ (v_0 — фиктивная переменная).

В теории линейных неравенств [8, 26] известен алгоритм (назовём его алгоритмом Фурье-Моцкина), позволяющий переходить от описания политопа в виде (1) к виду (2) и обратно. В связи с оценкой трудоёмкости этого алгоритма возникает

Задача 1: при заданном $f_0(P) = n$ найти $\max f_k(P)$ — решенная П. МакМюлленом в 1970 г. [21].

Введённые нами булевы функции $\varphi_{\Gamma(P)}$ и $\varphi_{\partial P}$ позволяют по-новому взглянуть на задачу 1 и ставить новые разнообразные вопросы, связанные прежде всего с их экономным представлением. При решении таких вопросов нельзя не воспользоваться необозримым множеством результатов, накопленных маткибернетикой, о сложности булевых функций (см., например, [7]). Заметим, что при любой фиксированной размерности d сложность каждой из функций (5)–(8) ограничена сверху некоторым полиномом от n.

Естественно возникает

Задача 2 (о реализации f-вектора): перечислить необходимые и достаточные условия, которыми должен обладать целочисленный вектор f для того, чтобы он совпадал с $f(P)$ для некоторого d-политопа P.

Со времён Штейница, решившего задачу 2 при $d=3$ в 1922 г. (см. например, [4]), прогресс невелик. В общем случае известно лишь необходимое условие Эйлера-Пуанкаре

$$f(-1,P)=\sum_{k=-1}^{d} f_k(P)(-1)^{k+1}=0 \tag{9}$$

и доказанная в [17] (в более общем варианте) Г. Бругессером и П. Мани.

Теорема 1. *Граничный комплекс ∂P имеет линейную развёртку.*

Конструкция, лежащая в основе доказательства этого утверждения, имеет прозрачный геометрический смысл. Рассматривается прямая $v_\lambda=\lambda q$, где $0\in \operatorname{int}P$ ($\operatorname{int}P=P\setminus\partial P$ − множество внутренних точек политопа P), λ − вещественное число, $a_iq\neq 0$ при $i=1,\dots,m$ и $\lambda_i=a_{i0}/a_iq$ — значение параметра λ, при котором прямая пересекает аффинную оболочку грани F_i. Ясно, что существует такое q, что $\lambda_i\neq\lambda_k$ при $i\neq k$. Тогда, переупорядочив $\Gamma_{d-1}(P)=\{F_1,\dots,F_m\}$ неравенствами

$$\frac{1}{\lambda_1}>\dots>\frac{1}{\lambda_m}, \tag{10}$$

получим развёртку граневого комплекса ∂P, называемую *линейной*. Определение общего понятия *развертки* политопиального (и, в частности, симплициального) комплекса можно найти в [2, 25].

Под *ФМ-алгоритмом* будем понимать следующую процедуру, позволяющую по заданной последовательности точек $v_1,\dots,v_n$ построить неприводимую систему (1), описывающую политоп $P=P_n=\operatorname{conv}(v_1,\dots,v_n)$. Здесь не требуется, чтобы $v_j\in\Gamma_0(P)$; потребуем лишь, чтобы политоп P_{d+1} был d-симплексом и $0\in\operatorname{int}P_{d+1}$ (ограничения технического характера). Предположив, что задача решена для политопа P (при $n=d+1$ это просто) и появилась новая точка v_{n+1}, покажем ее решение для политопа$P'=P_{n+1}$. Положим $\mu_i=a_{i0}-a_iv_{n+1}$ и разобьем множество $1,\dots,m$ на три подмножества

$$I_-=\{i\mid\mu_i<0\},\ \ I_+=\{i\mid\mu_i>0\},\ \ I_0=\{i\mid\mu_i=0\}.$$

Далее для каждого $i\in I_-$ сформируем множество

$$M_i=\{i'\in I_+\mid F_i\cap F_{i'}\in\Gamma_{d-2}(P)\}$$

и для каждого $i'\in M_i$ образуем неравенство

$$(\mu_{i'}a_i-\mu_ia_{i'})x\leqslant\mu_{i'}a_{i0}-\mu_ia_{i'0}.$$

Если к системе (1) добавить все полученные таким способом неравенства и затем выбросить неравенства с номерами из I_-, то новая система будет описывать политоп P'. О неприводимости новой системы следует позаботиться дополнительно.

Следующее понятие является одним из основных в комбинаторной геометрии [2−4, 18, 25, 26]. Политоп P' называется *комбинаторно эквивалентным* политопу P ($P\sim P'$), если существует взаимно однозначное отображение множества $\Gamma(P)$ на множество $\Gamma(P')$, сохраняющее отношение включения (при этом решётки называют *изоморфными* и пишут $\Gamma(P)\approx\Gamma(P')$).

Ещё меньше известно о следующей задаче.

Задача 3 (о числе комбинаторно неэквивалентных d-политопов с заданными f-векторами).

На множестве булевых функций от n переменных введём отношение эквивалентности, положив $\varphi(y_1, ..., y_n) \sim \varphi(y'_1, ..., y'_n)$, если $\varphi(y'_1, ..., y'_n) = \varphi(y_{\pi_1}, ..., y_{\pi_n})$, при некоторой перестановке π номеров переменных $y_1, ..., y_n$.

Следующее легко проверяемое утверждение позволяет дать точный перевод задач комбинаторной геометрии (подобных задачам 2 и 3) на язык булевых функций.

Утверждение 1. $P \sim P' \Longleftrightarrow \varphi_p \sim \varphi_{p'}$.

2. В этом пункте рассмотрим класс $P^s(d,n)$ симплициальных (политоп P называется *симплициальным*, если любая его грань, отличная от P, является симплексом) d-политопов с n вершинами.

Граничный комплекс ∂P симплициального политопа P удовлетворяет условию:

$$\text{если } F \in \partial P \text{ и } G \in \Gamma(F), \text{ то } G \in \partial P, \tag{11}$$

и, следовательно, даёт пример того, что в топологии называется *симплициальным комплексом* [3, 4, 25, 26]. Из условия (11) следует, что для задания ∂P достаточно знать множество $\Gamma_{d-1}(P) = \{F_1, ..., F_m\}$ или множество $N(P)$ минимальных по включению подмножеств $\{N_1, ..., N_l\}$ вершин булева n-куба, не принадлежащих ∂P. Множество $N(P)$ необходимо для построения *кольца Стенли-Райснера* [3, 25], применяемого при изучении симплициального комплекса ∂P алгебраическими методами.

Следующее утверждение, в частности, позволяет решить возникающий при этом вопрос о связи множеств $\Gamma_{d-1}(P)$ и $N(P)$ стандартными методами булевой алгебры.

Утверждение 2. *Если $P \in P^s(d,n)$, то булева функция $\varphi_{\partial P}$ монотонна, $\Gamma_{d-1}(P)$ есть множество её верхних нулей, а $N(P)$ — множество её нижних единиц,*

$$\varphi_{\partial P}(v_1, ..., v_n) = \prod_{i=1}^{m}\Big(\bigvee_{j \notin F_m} v_j\Big), \tag{12}$$

$$\varphi_{\partial P}(v_1, ..., v_n) = \bigvee_{k=1}^{l} \prod_{j \in N_k} v_j. \tag{13}$$

Для решения вопросов, связанных с эффективным представлением монотонной булевой функции (в различных базисах) отошлём к обзору [6]. Весьма полезным может оказаться применение пороговых булевых функций, так как используя результаты В. К. Коробкова [5], множество нулей функции $\varphi_{\partial P}$ можно описать системой линейных неравенств

$$\sum_{j \in N_k} v_j \leqslant |N_k| - 1, \quad k = 1, ..., l. \tag{14}$$

Из теоремы 1 следует: для любого P из $P^s(d,n)$ симплициальный комплекс ∂P линейно разворачиваем, т. е. существует вектор q, упорядочивающий грани из $\Gamma_{d-1}(P)$ неравенствами (10) так, что

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^{m} [G_i, F_i], \tag{15}$$

где $[G,F]=\{H\in\Gamma(P)\,|\,G\subseteq H\subseteq F\}$, G_{k+1} — наименьшая по включению грань грани F_{k+1}, не принадлежащая подкомплексу $(\partial P)_k=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[G_i,F_i]$, и $G_1=\varnothing$.

Отсюда несложно получить (при $k=1,2,\ldots,m-1$)

Утверждение 3.

$$\varphi_{(\partial P)_{(k+1)}}(v_1,\ldots,v_n)=\varphi_{(\partial P)_k}(v_1,\ldots,v_n)(\bigvee_{v_j\notin F_{k+1}} v_j). \tag{16}$$

Соответствующее утверждение можно сделать и для дизъюнктивной нормальной формы.

Из [17] следует также, что для любого P, P из $P^s(d,n)$, многочлен $f(\lambda,\partial P)$ можно представить в виде

$$f(\lambda,\partial P)=\sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor} g_k(P)(\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k}-\lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k), \tag{17}$$

где $g_0(P)=1$ и $g_k(P)$ — целые неотрицательные числа.

Заметим, что (17) влечет равенство $f(-1-\lambda,\partial P)=(-1)^d f(\lambda,\partial P)$, равносильное следующим *уравнениям Дена-Соммервилля* (см., например, [2–4, 18, 25, 26])

$$f_{k-1}(P)=\sum_{i=k}^{d}(-1)^{d-i}\binom{i}{k}f_{i-1}(P).$$

Для того, чтобы полностью охарактеризовать f-векторы симплициальных политопов (а, значит, и представляемых ими булевых функций) нам понадобится следующее определение. Для любых натуральных чисел a и i существует единственное *биномиальное i-разложение числа* $a=\binom{a_i}{i}+\binom{a_{i-1}}{i-1}+\ldots+\binom{a_j}{j}$, где $a_i>a_{i-1}>\ldots>a_j\geqslant j\geqslant 1$. Тогда число $a^{<i>}=\binom{1+a_i}{1+i}+\ldots+\binom{1+a_j}{1+j}$ называется *i-й псевдостепенью числа a*.

Проанализировав накопленную к тому времени информацию, П. МакМюллен в 1971 г. [22] предположил, что добавление к вышеперечисленным условий

$$g_{k+1}(P)\leqslant(g_k(P))^{<k>},\quad k=1,\ldots,\lfloor d/2\rfloor-1 \tag{18}$$

решает задачу 2, для класса симплициальных политопов. В 1980 г. это было доказано (Л. Биллера и К. Ли — достаточность [16], Р. Стенли — необходимость [24]).

Сформулируем этот результат в следующем виде.

Теорема 2. *Положим $F^{\partial}(\lambda,d,n)=\{f(\lambda,\partial P),P\in P^s(d,n)\}$. Тогда для того, чтобы $f(\lambda)\in F^{\partial}(\lambda,d,n)$, необходимо и достаточно существование таких неотрицательных целых чисел g_k $(k=0,1,2,\ldots,\lfloor d/2\rfloor)$, что*

$$g_0=1,\quad g_1=n-d-1,\quad g_{k+1}\leqslant g_k^{<k>}\quad k=1,2,\ldots,\lfloor d/2\rfloor-1$$

и

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor} g_k(\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k}-\lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k).$$

Следующие два примера дают нижние и верхние оценки величин $f_i(P)$ для P из $P^s(d,n)$. В той или иной форме они излагаются во многих работах, например в [2, 3, 25, 26]. Там же можно найти сведения по истории вопроса и соответствующую библиографию.

Пример 4. Пусть $P_n \in P^s(d,n)$, F — одна из его $(d-1)$-мерных граней, и v_{n+1} — точка «над» ней, т. е. если $ax \leqslant \alpha$ — неравенство, соответствующее F, то v_{n+1} удовлетворяет остальным неравенствам системы (1), но $av_{n+1} > d$. Тогда $P_{n+1} = \operatorname{conv}(P_n, v_{n+1}) \subseteq P^s(d, n+1)$, $g_i(P_{n+1}) = g_i(P_n)$ при $i \neq 1$ и $g_1(P_{n+1}) = g_1(P_n) + 1$. В частности, взяв d-симплекс в качестве P_{d+1}, получим $g(P_n) = (1, n-d-1, 0, \dots, 0)$. Отсюда следует, что для любого P из $P^s(d,n)$

$$f_i(P) \geqslant \binom{d+1}{i+1} + (n-d-1)\binom{d}{i}, \quad i = 1, \dots, d-2, \text{ и}$$
$$f_{d-1}(P) \geqslant (n-d)(d-1) + 2$$

(это гипотеза Б. Грюнбаума о нижней границе, доказанная Д. Барнеттом в [15]).

Пример 5 (см., например, [2–4, 18, 26]). Пусть $v(t) = (t, t^2, t^3, \dots, t^d)$ — отображение R в R^d, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. При $n > d$ определим *циклический многогранник* $C(d,n) = \operatorname{conv}(v(t_1), \dots v(t_n))$. Известно, что $C(d,n) \in P^s(d,n)$ и $f_i(C(d,n)) = \binom{n}{i+1}$ при $i = 0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor - 1$. Отсюда и из уравнения (17) следует, что $g_k(C(d,n)) = \binom{n-d+k-2}{k}$, а из неравенства (18), что при каждом $k = 0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$ это максимально возможные значения для $g_k(P)$ на классе $P^s(d,n)$. Подставляя их в формулу (17), находим для $k = 0, 1, \dots, d$

$$f_{k-1}(C(d,n)) = \sum_{i=0}^{\delta} \left(\binom{d-i}{k-i} + \binom{i}{k-d+i} \right) \binom{n-d-1+i}{i} \text{ при } d = 2\delta + 1,$$

$$f_{k-1}(C(d,n)) = \sum_{i=0}^{\delta-1} \left(\binom{d-i}{k-i} + \binom{i}{k-d+i} \right) \binom{n-d-1+i}{i} + \binom{\delta}{k-\delta}\binom{n-\delta-1}{\delta} \text{ при } d = 2\delta.$$

Это ключ к доказательству уже упомянутого в п. 1 результата П. Макмюллена [21]: для любого d-политопа P с n вершинами

$$f_i(P) \leqslant f_i(C(d,n)), \ i = 0, 1, \dots, d-1.$$

Отсюда, в частности, следует неулучшаемая верхняя оценка числа m конъюнкций в (12)

$$m \leqslant \binom{n - \lfloor (d-1)/2 \rfloor - 1}{\lfloor d/2 \rfloor} + \binom{n - \lfloor d/2 \rfloor - 1}{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}.$$

3. Множество $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, где $v_j \in \mathbb{R}^d$, назовём (d,n)-*точечной конфигурацией*, если $P = \operatorname{conv} V$ есть d-политоп. *Триангуляцией политопа P с узлами из множества V* назовём множество $T(V) = \{S_1, \dots, S_t\}$ таких d-симплексов S_τ, для которых выполнены три следующие условия:

1) $\Gamma_0(S_\tau) \subseteq V$,

2) $\bigcup\limits_{\tau=1}^{t} S_\tau = P$,

3) пересечение любых двух d-симплексов является гранью каждого из них.

Тогда множество $\triangle(T(V)) = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$ даёт ещё один пример симплициального комплекса. Будем писать $\triangle$ вместо $\triangle(T(V))$, если это не приводит к недоразумениям. При $k=-1,0,...,d$ обозначим через $\triangle_k = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} \Gamma_k(S_\tau)$ множество k-мерных граней симплициального комплекса $\triangle$, через $\partial\triangle$ его граничный подкомплекс, положим $f_k(\triangle) = |\triangle_k|$, $f(\triangle) = (f_{-1}(\triangle), ..., f_d(\triangle))$ и определим многочлены $f(\lambda, \triangle)$, $f(\lambda, \partial\triangle)$ и булевы функции $\varphi_\triangle$ и $\varphi_{\partial\triangle}$ аналогично прежнему.

П р и м е р 6. Пусть $Q = \mathrm{pyr}_{v_0} P$ — пирамида с апексом v_0 и основанием $P = \mathrm{conv}(v_1, ..., v_n)$ (см. пример 3), $T(V) = \{S_1, S_2, ..., S_t\}$ — триангуляция политопа P с узлами из $V = \{v_1, ..., v_n\}$ и $S_\tau^{'} = \mathrm{pyr}_{v_0} S_\tau$ $(\tau = 1, ..., t)$. Тогда $T(V^{'}) = \{S_1^{'}, ..., S_t^{'}\}$ — триангуляция Q с узлами из $V^{'} = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ и, если Δ и $\Delta^{'}$ — соответствующие симплициальные комплексы, то $\varphi_{\Delta'}(v_0, ..., v_n) = \varphi_\Delta(v_1, ..., v_n)$ и $f(\lambda, \Delta^{'}) = (1+\lambda) f(\lambda, \Delta)$.

У т в е р ж д е н и е 4. *Для любой триангуляции любой точечной конфигурации булевы функции $\varphi_\triangle$ и $\varphi_{\partial\triangle}$ монотонны. Если $V = \Gamma_0(P)$ и $P \in P^s(d,n)$, то $\varphi_{\partial\triangle} = \varphi_{\partial P}$.*

П р и м е р 7. Если $n = d+2$, то существуют ровно две различных триангуляции $T_1(V)$ и $T_2(V)$. Если $\mu = (\mu_1, ..\mu_n)$ такой ненулевой вектор, для которого $\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j = 0$ и $V\mu = 0$, то он определяется однозначно с точностью до умножения на постоянную, отличную от нуля. Положим

$$J_> = \{j \mid \mu_j > 0\} \text{ и } J_< = \{j \mid \mu_j < 0\}.$$

Тогда

$$\varphi_{\triangle(T_1(V))}(v_1, ..., v_n) = \prod_{j \in J_>} v_j,$$

$$\varphi_{\triangle(T_2(V))}(v_1, ..., v_n) = \prod_{j \in J_<} v_j,$$

$$\varphi_{\partial\triangle}(v_1, ..., v_n) = \prod_{j \in J_>} v_j \vee \prod_{j \notin J_>} v_j = \prod_{j \in J_<} v_j \vee \prod_{j \notin J_<} v_j,$$

$$\partial\triangle = \partial\triangle(T_1(V)) = \partial\triangle(T_2(V)), \text{ если } \{j \mid \mu_j = 0\} = \oslash.$$

Попытки распространить другие результаты п. 2 на симплициальные комплексы $\triangle(T(V))$ наталкиваются на серьезные трудности. Главная из них состоит в том, что $\triangle(T(V))$, вообще говоря, не является разворачиваемым: в [23] построен изящный пример триангуляции 3-симплекса (с добавленными к множеству вершин восемью узлами триангуляции), не допускающей никакой развертки. Однако, в рассматриваемом случае свойство разворачиваемости удается заменить разбиваемостью.

Пусть $\triangle = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$ — симплициальный комплекс и $S_1, S_2, ..., S_t$ — его максимальные элементы. Если для каждого $\tau = 1, ..., t$ в S_τ можно указать такое J_τ так, что

$$\Delta = \bigcup_{\tau=1}^{t} [J_\tau, S_\tau], \tag{19}$$

где объединение дизъюнктно, т. е. $[J_\tau, S_\tau]\bigcap[J_\sigma, S_\sigma]=\oslash$ при $\tau\neq\sigma$, то $\triangle$ называется *разбиваемым.*

Теорема 3. (П. Кляйншмидт и З. Смилански [19]). *Для любой триангуляции $T(V)$ любой точечной конфигурации V симплициальный комплекс $\triangle(T(V))$ разбиваем.*

Кратко опишем идею доказательства их утверждения. В симплексе S_1 выберем точку w, находящуюся «в общем положении» (то есть не принадлежащую аффинной оболочке ни одной из $(d-1)$-мерных граней ни одного из симплексов S_τ). При $\tau=1,2,...,t$ найдем решение крамеровской системы линейных уравнений:

$$\sum_j \mu_{j\tau}=1,\ \sum_j \mu_{j\tau}v_j=w, \tag{20}$$

где суммирование ведется по всем таким j, для которых $v_j\in\Gamma_0(S_\tau)$, и положим $J_\tau=\{v_j\mid \mu_{j\tau}<0\}$. Ясно, что $J_1=\oslash$ и $1\leqslant|J_\tau|\leqslant d$ при $\tau\geqslant 1$. Пусть $F\in\Delta$ и $x=\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_{j0}v_j$, где $\mu_{j0}>0$, если $v_j\in F$, и $\mu_{j0}=0$ в противном случае. Тогда точка $x_\alpha=(1-\alpha)x+\alpha w$ принадлежит P при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Отсюда следует, что существует при достаточно малом $\varepsilon>0$ единственное τ такое, что симплекс S_τ содержит отрезок $\{x_\alpha\,|\,0\leqslant\alpha\leqslant\varepsilon\}$ и $J_\tau\subseteq F\subseteq S_\tau$. Тогда

$$f(\lambda,\triangle)=\sum_{k=0}^{d+1}\gamma_k(\triangle)\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k}, \tag{21}$$

где $\gamma_k(\triangle)=|\{\tau\,|\,|J_\tau|=k\}|$ — целое неотрицательное число, не зависящее от выбора точки w, $\gamma_0(\triangle)=1$ и $\gamma_{d+1}(\triangle)=0$.

Из определения триангуляции следует, что любая $F\in\triangle_{d-1}$ не может принадлежать трём различным симплексам, но обязана принадлежать хотя бы одному. Если она принадлежит единственному симплексу, то назовём её *граничной*, а если двум, то – *внутренней*. Пусть F_i граничная при $i=1,2,...,m_1$, и внутренняя при $i=m_1+1,...,m_1+m_2$. Тогда $\partial\triangle=\bigcup\limits_{i=1}^{m_1}\Gamma(F_i)$, а для остальных граней из $\triangle$, используя (19) и описанную при доказательстве теоремы 3 процедуру, несложно доказать, что

$$\triangle\setminus\partial\triangle=\bigcup_{\tau=1}^{t}[\overline{J_\tau},S_\tau], \tag{22}$$

где объединение дизъюнктно и $\overline{J_\tau}$ — множество вершин симплекса S_τ, дополнительное к J_τ (в предыдущем доказательстве надо рассмотреть отрезок $\{x_\alpha\,|\,-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 0\}$). Отсюда следует, что

$$f(\lambda,\triangle\setminus\partial\triangle)=\sum_{k=0}^{d+1}\gamma_k(\triangle)\lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k, \tag{23}$$

$$f(\lambda,\partial\triangle)=\sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor}(\gamma_k(\triangle)-\gamma_{d+1-k}(\triangle))(\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k}-\lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k), \tag{24}$$

$$\varphi_{\partial\triangle}(v_1,...,v_n)=\varphi_\triangle(v_1,..,v_n)\vee\bigvee_{\tau=1}^{t}\prod_{v_j\in S_\tau\setminus J_\tau}v_j. \tag{25}$$

Следствие 1 (аналог уравнений Дена-Соммервилля).

$$f(-1-\lambda,\partial\Delta)=(-1)^d f(\lambda,\partial\Delta).$$

В случае, когда $\Gamma_0(\Delta) \subseteq \Gamma_0(P)$, последнее утверждение доказано другим способом в [8]. Там же показано, что если $P = C(d,n)$ и $V = \Gamma_0(P)$, то при четном $d = 2\delta$ многочлен $f(\lambda, \Delta)$ определяется единственным образом и равен

$$f(\lambda, \Delta) = \sum_{k=0}^{\delta} \binom{n-d+k-2}{k} \lambda^k (1+\lambda)^{d+1-k} = f(d,n,\lambda),$$

а при нечетном $d = 2\delta + 1$

$$f(\lambda, \Delta) = f(d,n,\lambda) + \alpha \lambda^{\delta+1}(1+\lambda)^{\delta+1},$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant \binom{n-\delta-2}{\delta+1}$, причем каждое значение α в указанных пределах реализуется на некоторой триангуляции политопа $C(d,n)$.

Следствие 2. *Если* $P \in P^S(d,n)$ *и* $V = \Gamma_0(P)$, *то при* $k = 1, \ldots, \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor$

$$\gamma_k(\Delta) \leqslant \binom{n-d+k-2}{k}.$$

Этого оказалось достаточно для нахождения [11] максимального и минимального элементов на множестве f-векторов триангуляций. Рассмотрим множество всевозможных триангуляций $T(V)$ всевозможных (d,n)-точечных конфигураций и обозначим множество соответствующих многочленов $f(\lambda, \Delta)$ через $F(\lambda, d, n)$, векторов $f(\Delta)$ — через $F(d,n)$, а векторов $\gamma(\triangle) = (\gamma_0(\triangle), \ldots, \gamma_d(\triangle))$ – через $H(d,n)$. Заметим, что лексикографический порядок на множествах $F(d,n)$ и $H(d,n)$ совпадает и обозначим через $\gamma^{max} = (\gamma_0^{max}, \ldots, \gamma_d^{max})$ лексикографически максимальный на $H(d,n)$ вектор, а через $f^{max}(\lambda)$ — соответствующий ему многочлен. Покомпонентное сравнение векторов на множестве $F(d,n)$ задает на нем частичный порядок. Ясно, что γ^{max} соответствует единственному максимальному относительно этого частичного порядка элементу множества $F(d,n)$. Теперь, взяв $P = C(d+1,n)$ и выбросив из него одну d-мерную грань, несложно показать, что $f^{max}(\lambda) = -\lambda^{d+1} + \sum\limits_{k=0}^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \binom{n-d+k-3}{k} (\lambda^k(1+\lambda)^{d+2-k} - \lambda^{d+2-k}(1+\lambda)^k)$ и $\gamma_k^{max} = \binom{n-d+k-2}{k} = \gamma_{d+1-k}^{max}$ при $k = 1, 2, \ldots, \lfloor (d+1)/2 \rfloor$. Аналогично доказываются остальные результаты, анонсированные в [11].

Следуя [9] и считая, что $\gamma_0(\triangle) = 1$ и $\gamma_i(\triangle) = 0$ при $i \notin \{0, 1, \ldots, d\}$, положим при $i = 0, 1, \ldots, \lfloor d/2 \rfloor$ $\alpha_{2i}(\triangle) = \gamma_i(\triangle) - \gamma_{d+1-i}(\triangle)$ и $\varphi_{d,2i}(\lambda) = \lambda^i(1+ \lambda)^{d+1-i}$, а при $i = 0, 1, \ldots, \lfloor (d+1)/2 \rfloor$ $\alpha_{2i+1}(\triangle) = \gamma_{d-i}(\triangle) - \gamma_{d+1-i}(\triangle)$ и $\varphi_{d,2i-1}(\lambda) = \lambda^i(1+\lambda)^{d+2-i} - \lambda^{d+2-i}(1+\lambda)^i$.

Тогда (21), (23) и (24) можно переписать соответственно в виде:

$$f(\lambda, \triangle) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i(\triangle)\varphi_{d,i}(\lambda), \tag{26}$$

$$f(\lambda, \triangle \backslash \partial\triangle) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \alpha_{2i}(\triangle)\lambda^{d+1-i}(1+\lambda)^i + \sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \alpha_{2i+1}(\triangle)\varphi_{d,2i+1}(\lambda), \tag{27}$$

$$f(\lambda, \partial\triangle) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \alpha_{2i}(\triangle)\varphi_{d-1,2i-1}(\lambda), \tag{28}$$

откуда, в частности, следует, что $\alpha_2(\triangle)\geqslant 0$ и $\alpha_4(\triangle)\leqslant(\alpha_2(\triangle))^{<1>}$.

Следствие 3. *Если* $V=\Gamma_0(P)$, $P\in P^S(d,n)$ *и* $\triangle=\triangle(T(V))$, *то* $\alpha_{2i}(\triangle)=g_i(P)$ *— неотрицательные целые числа и для них выполняются неравенства* (18).

Пример 8. При $d\leqslant 4$ множества $H(d,n)$ полностью характеризуются следующими условиями: целочисленный неотрицательный вектор $\gamma=(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_d)\in H(d,n)$ тогда и только тогда, когда $\gamma_0=1$, $\gamma_1\leqslant n-d-1$ и

$$\gamma_2\leqslant\gamma_1 \text{ при } d=2,$$
$$\gamma_3\leqslant\gamma_2\leqslant(\gamma_1)^{<1>},\ \gamma_3\leqslant\gamma_1 \text{ при } d=3,$$
$$\gamma_4\leqslant\gamma_3\leqslant\gamma_2\leqslant(\gamma_1)^{<1>},\ \gamma_4\leqslant\gamma_1,\ \gamma_2-\gamma_3\leqslant(\gamma_1-\gamma_4)^{<1>} \text{ при } d=4.$$

Описанный в п. 1 ФМ-алгоритм можно модифицировать [13] так, чтобы на каждом шаге получалась триангуляция $T_n=T(v_1,\ldots,v_n)$, и соответствующие ей симплициальные комплексы $\triangle_n$ и $\partial\triangle_n=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Gamma(F_i)$. Появление новой точки v_{n+1} дает линейную развертку симплициального комплекса $\partial\triangle_n=\bigcup\limits_{i=1}^{m}[H_i,F_i]$. Положим

$$m_-=|I_-|,\ m_+=|I_+|,\ \triangle_n^-=\bigcup_{i=1}^{m_-}[H_i,F_i] \text{ и } \triangle_n^+=\bigcup_{i=1}^{m_+}[H_{m+1-i},F_{m+1-i}].$$

Тогда, добавляя к развертке $S_1,\ldots,S_t$ симплициального комплекса Δ_n развертку симплициального комплекса $\mathrm{pyr}\Delta_n^-=\bigcup\limits_{i\in I_-}\mathrm{pyr}F_i$, где $\mathrm{pyr}F_i$ — пирамида с основанием F_i и апексом v_{n+1}, получаем продолжение развертки симплициального комплекса Δ_{n+1}. Назовём такие триангуляции *ФМ-триангуляциями*, а соответствующие им векторы γ *ФМ-реализуемыми*. Ясно, что симплициальные комплексы $\triangle_{n+1}$, $\triangle_n^-$ и $\triangle_n^+$ являются разворачиваемыми (ср. [20]),

$$f(\lambda,\Delta_{n+1})=f(\lambda,\Delta_n)+\lambda f(\lambda,\Delta_n^-). \tag{29}$$

Отсюда нетрудно доказать неотрицательность чисел $\alpha_i(\triangle_n)$, $\alpha_i(\triangle_n^-)$ и $\alpha_i(\triangle_n^+)$, анонсированную в [10]. Кроме того, имеет место формула

$$\varphi_{\triangle_{n+1}}(v_1,\ldots,v_{n+1})=(\varphi_{\triangle_n}(v_1,\ldots,v_n)\vee v_{n+1})\varphi_{\triangle_n^-}(v_1,\ldots,v_n), \tag{30}$$

из которой можно получить алгоритмы для нахождения множеств верхних нулей и нижних единиц функций $\varphi_{\partial\triangle}=\varphi_{\partial P}$, по крайней мере, если V — множество точек в общем положении.

Автор считает, что множество $H(d,n)$ состоит только из ФM-допустимых векторов.

Вопросам построения ФМ-триангуляций, обладающих различными дополнительными свойствами, посвящена недавно защищённая Д. В. Груздевым кандидатская диссертация (см. также [13]).

Вопрос о характеризации многочленов $f(\lambda,\triangle)$ остаётся открытым, однако автор имеет алгоритм, позволяющий определить, является ли γ — ФM-реализуемым. Аспирант С. В. Сидоров приготовил лексикографически упорядоченные списки ФM-реализуемых векторов (при $d=5$ и небольших n), приведённых в Приложении.

В частности, под номером 78 значится ФM-реализуемый вектор $\gamma=(1,3,3,4,0,0)$, показывающий, что условие $\max(0,\gamma_{i+1}-\gamma_i)\leqslant(\max(0,\gamma_i-\gamma_{i-1}))^{<i>}$ не является необходимым, что опровергает гипотезу из [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ

В следующих таблицах приведен список γ-векторов $\gamma(\Delta) = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ $\ldots, \gamma_d)$ для всех ФM триангуляций T 5-мерных точечных конфигураций размерности 5 с числом узлов от 6 до 9. Первую компоненту вектора $\gamma(\Delta)$ не будем заносить в таблицу, так как $\gamma_0 = 1$. Векторы записаны в лексикографическом порядке и занумерованы.

Таблица 2

N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$
1	0 0 0 0 0	29	2 3 3 0 0	57	3 2 2 2 2	85	3 3 4 3 1	113	3 4 4 4 1
2	1 0 0 0 0	30	2 3 3 1 0	58	3 3 0 0 0	86	3 3 4 3 2	114	3 4 4 4 2
3	1 1 0 0 0	31	2 3 3 2 0	59	3 3 1 0 0	87	3 4 0 0 0	115	3 4 4 4 3
4	1 1 1 0 0	32	2 3 3 2 1	60	3 3 1 1 0	88	3 4 1 0 0	116	3 4 5 0 0
5	1 1 1 1 0	33	2 3 3 3 0	61	3 3 1 1 1	89	3 4 1 1 0	117	3 4 5 1 0
6	1 1 1 1 1	34	2 3 3 3 1	62	3 3 2 0 0	90	3 4 1 1 1	118	3 4 5 1 1
7	2 0 0 0 0	35	2 3 3 3 2	63	3 3 2 1 0	91	3 4 2 0 0	119	3 4 5 2 0
8	2 1 0 0 0	36	2 3 4 0 0	64	3 3 2 1 1	92	3 4 2 1 0	120	3 4 5 2 1
9	2 1 1 0 0	37	2 3 4 1 0	65	3 3 2 2 0	93	3 4 2 1 1	121	3 4 5 3 0
10	2 1 1 1 0	38	2 3 4 2 0	66	3 3 2 2 1	94	3 4 2 2 0	122	3 4 5 3 1
11	2 1 1 1 1	39	2 3 4 2 1	67	3 3 2 2 2	95	3 4 2 2 1	123	3 4 5 3 2
12	2 2 0 0 0	40	2 3 4 3 0	68	3 3 3 0 0	96	3 4 3 0 0	124	3 4 5 4 0
13	2 2 1 0 0	41	2 3 4 3 1	69	3 3 3 1 0	97	3 4 3 1 0	125	3 4 5 4 1
14	2 2 1 1 0	42	2 3 4 3 2	70	3 3 3 1 1	98	3 4 3 1 1	126	3 4 5 4 2
15	2 2 1 1 1	43	3 0 0 0 0	71	3 3 3 2 0	99	3 4 3 2 0	127	3 4 5 4 3
16	2 2 2 0 0	44	3 1 0 0 0	72	3 3 3 2 1	100	3 4 3 2 1	128	3 5 0 0 0
17	2 2 2 1 0	45	3 1 1 0 0	73	3 3 3 2 2	101	3 4 3 3 0	129	3 5 1 0 0
18	2 2 2 1 1	46	3 1 1 1 0	74	3 3 3 3 0	102	3 4 3 3 1	130	3 5 1 1 0
19	2 2 2 2 0	47	3 1 1 1 1	75	3 3 3 3 1	103	3 4 3 3 2	131	3 5 2 0 0
20	2 2 2 2 1	48	3 2 0 0 0	76	3 3 3 3 2	104	3 4 4 0 0	132	3 5 2 1 0
21	2 2 2 2 2	49	3 2 1 0 0	77	3 3 3 3 3	105	3 4 4 1 0	133	3 5 2 2 0
22	2 3 0 0 0	50	3 2 1 1 0	78	3 3 4 0 0	106	3 4 4 1 1	134	3 5 2 2 1
23	2 3 1 0 0	51	3 2 1 1 1	79	3 3 4 1 0	107	3 4 4 2 0	135	3 5 3 0 0
24	2 3 1 1 0	52	3 2 2 0 0	80	3 3 4 1 1	108	3 4 4 2 1	136	3 5 3 1 0
25	2 3 2 0 0	53	3 2 2 1 0	81	3 3 4 2 0	109	3 4 4 3 0	137	3 5 3 2 0
26	2 3 2 1 0	54	3 2 2 1 1	82	3 3 4 2 1	110	3 4 4 3 1	138	3 5 3 2 1
27	2 3 2 2 0	55	3 2 2 2 0	83	3 3 4 2 2	111	3 4 4 3 2	139	3 5 3 3 0
28	2 3 2 2 1	56	3 2 2 2 1	84	3 3 4 3 0	112	3 4 4 4 0	140	3 5 3 3 1

Таблица 2 продолжение

N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$
141	3 5 4 0 0	171	3 5 6 4 2	200	3 6 4 0 0	229	3 6 6 6 2	258	3 6 8 6 3
142	3 5 4 1 0	172	3 5 6 5 0	201	3 6 4 1 0	230	3 6 6 6 3	259	3 6 9 0 0
143	3 5 4 2 0	173	3 5 6 5 1	202	3 6 4 2 0	231	3 6 7 0 0	260	3 6 9 1 0
144	3 5 4 2 1	174	3 5 6 5 2	203	3 6 4 3 0	232	3 6 7 1 0	261	3 6 9 2 0
145	3 5 4 3 0	175	3 5 6 5 3	204	3 6 4 3 1	233	3 6 7 2 0	262	3 6 9 3 0
146	3 5 4 3 1	176	3 5 7 0 0	205	3 6 4 4 0	234	3 6 7 3 0	263	3 6 9 3 1
147	3 5 4 4 0	177	3 5 7 1 0	206	3 6 4 4 1	235	3 6 7 3 1	264	3 6 9 4 0
148	3 5 4 4 1	178	3 5 7 2 0	207	3 6 5 0 0	236	3 6 7 4 0	265	3 6 9 4 1
149	3 5 4 4 2	179	3 5 7 2 1	208	3 6 5 1 0	237	3 6 7 4 1	266	3 6 9 5 0
150	3 5 5 0 0	180	3 5 7 3 0	209	3 6 5 2 0	238	3 6 7 5 0	267	3 6 9 5 1
151	3 5 5 1 0	181	3 5 7 3 1	210	3 6 5 3 0	239	3 6 7 5 1	268	3 6 9 5 2
152	3 5 5 2 0	182	3 5 7 4 0	211	3 6 5 3 1	240	3 6 7 5 2	269	3 6 9 6 0
153	3 5 5 2 1	183	3 5 7 4 1	212	3 6 5 4 0	241	3 6 7 6 0	270	3 6 9 6 1
154	3 5 5 3 0	184	3 5 7 4 2	213	3 6 5 4 1	242	3 6 7 6 1	271	3 6 9 6 2
155	3 5 5 3 1	185	3 5 7 5 0	214	3 6 5 5 0	243	3 6 7 6 2	272	3 6 9 6 3
156	3 5 5 4 0	186	3 5 7 5 1	215	3 6 5 5 1	244	3 6 7 6 3	273	3 6 10 0 0
157	3 5 5 4 1	187	3 5 7 5 2	216	3 6 5 5 2	245	3 6 8 0 0	274	3 6 10 1 0
158	3 5 5 4 2	188	3 5 7 5 3	217	3 6 6 0 0	246	3 6 8 1 0	275	3 6 10 2 0
159	3 5 5 5 0	189	3 6 0 0 0	218	3 6 6 1 0	247	3 6 8 2 0	276	3 6 10 3 0
160	3 5 5 5 1	190	3 6 1 0 0	219	3 6 6 2 0	248	3 6 8 3 0	277	3 6 10 3 1
161	3 5 5 5 2	191	3 6 1 1 0	220	3 6 6 3 0	249	3 6 8 3 1	278	3 6 10 4 0
162	3 5 5 5 3	192	3 6 2 0 0	221	3 6 6 3 1	250	3 6 8 4 0	279	3 6 10 4 1
163	3 5 6 0 0	193	3 6 2 1 0	222	3 6 6 4 0	251	3 6 8 4 1	280	3 6 10 5 0
164	3 5 6 1 0	194	3 6 2 2 0	223	3 6 6 4 1	252	3 6 8 5 0	281	3 6 10 5 1
165	3 5 6 2 0	195	3 6 3 0 0	224	3 6 6 5 0	253	3 6 8 5 1	282	3 6 10 5 2
166	3 5 6 2 1	196	3 6 3 1 0	225	3 6 6 5 1	254	3 6 8 5 2	283	3 6 10 6 0
167	3 5 6 3 0	197	3 6 3 2 0	226	3 6 6 5 2	255	3 6 8 6 0	284	3 6 10 6 1
168	3 5 6 3 1	198	3 6 3 3 0	227	3 6 6 6 0	256	3 6 8 6 1	285	3 6 10 6 2
169	3 5 6 4 0	199	3 6 3 3 1	228	3 6 6 6 1	257	3 6 8 6 2	286	3 6 10 6 3
170	3 5 6 4 1								

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
2. Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. — М. : Мир, 1988.

3. Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2004.
4. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981.
5. Коробков В. К. О некоторых целочисленных задачах линейного программирования // Проблемы Кибернетики. — 1965 — Вып. 14. — М.: Наука. — С. 297–299.
6. Коршунов А. Д. Монотонные булевы функции // Успехи математических наук. — 2003. — Т. 58, вып. 5 (353). — С. 89–162.
7. Сэвидж Дж. Е. Сложность вычислений. — М.: Факториал, 1998.
8. Черников С. Н. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
9. Шевченко В. Н. О разбиении выпуклого политопа на симплексы без новых вершин // Известия ВУЗ. Математика. — 1997. — № 12 (427). — С. 89–99.
10. Шевченко В. Н. Триангуляции точечных конфигураций и их f-векторы // «Проблемы теоретической кибернетики» тезисы докладов XII Международной конференции (Нижний Новгород, 17–22 мая 1999 г.) ч. II. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ. — 1999. — С. 255.
11. Шевченко В. Н. О максимальных триангуляциях выпуклых политопов // Международная конференция «Дискретный анализ и исследование операций»: материалы конференции (Новосибирск, 26 июня — 1 июля 2000 г.) — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. — 2000. С. 159.
12. Шевченко В. Н. Триангуляции выпуклых многогранников и их булевы функции // Материалы XVI международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). — С. 135–142.
13. Шевченко В. Н., Груздев Д. В. Модификация алгоритма Фурье-Моцкина для построения триангуляции и её звёздной развёртки // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. — Новосибирск: Изд-во ин-та математики. — 2006. — Т. 13, № 1. —
14. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.
15. Barnette D. The minimum number of vertices of a simple politope // Israel J. Math. — 1971. — V. 10. — P. 121–125.
16. Billera L., Lee C. Sufficiency of Mc Mullens conditions for f-vectors of simplicial polytopes // Bull. AMS. — 1980. — V. 2, № 1. — P. 181–185.
17. Bruggesser H., Mani P. Shellable decompositions of cells and spheres // Math Scand. — 1971. — V. 29, № 197. — P. 205.
18. Grunbaum B. Convex polytopes. — N-Y: Wiley and Sons, 1967.
19. Kleinschmidt P., Smilansky Z. New results for simplicial spherical polytopes // Discrete and Computation Geometry. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — V. 6. — AMS. — 1991. — P. 187–197.
20. Lee C. Regular triangulations of convex politopes // Applied Geometry and Discrete Mathematics — The Victor Klee Festschrift. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 1991. — V. 4. — AMS. — P. 443–456.
21. McMullen P. The maximum numbers of faces of a convex polytope // Mathematika. — 1970. — V. 17. — P. 179–184.
22. McMullen P. The numbers of faces of simplicial polytops // Israel J. Math. — 1971. — V. 9. — P. 559–570.
23. Rudin M. E. An unshellable triangulation of a tetrahedron // Bulletin AMS. — 1958. — V. 64. — P. 90–91.
24. Stanley R. The number of faces of simplicial convex polytope // Advances in Math. — 1980. — V. 35, № 3. — P. 236–238.
25. Stanley R. P. Combinatorics and commutative algebra. Progress in mathematics. V. 41: Birkhauser, Boston, 1983.
26. Ziegler G. Lectures on polytopes. — Berlin: Springer-Verlag, 1995.

Поступило в редакцию 15 VII 2006