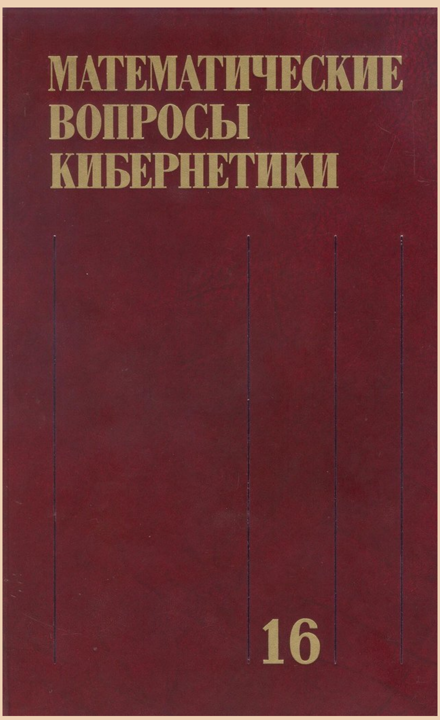

А. Д. Коршунов

Нижние оценки числа (k, r)-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества ((k, r)-неразделенных булевых функций). Случай $k \geqslant 3$ и $r \geqslant 1$

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА (k, r)-НЕРАЗДЕЛЕННЫХ СЕМЕЙСТВ ПОДМНОЖЕСТВ n-ЭЛЕМЕНТНОГО МНОЖЕСТВА ((k, r)-НЕРАЗДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ). СЛУЧАЙ $k \geqslant 3$ И $r \geqslant 1$ *)

А. Д. КОРШУНОВ

(НОВОСИБИРСК)

Пусть S — множество, состоящее из n (различных) элементов, а k и r — такие натуральные числа, что $k \geqslant 2$ и $1 \leqslant r \leqslant n$. Семейство подмножеств $\mathfrak{F} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ множества S называется (k, r)-*неразделённым*, если в пересечении любых v членов, $v \leqslant k$, семейства $\mathfrak{F}$ содержится не менее r элементов. Число (k, r)-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества равно числу (k, r)-неразделённых булевых функций от n переменных (булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется (k, r)-*неразделённой*, если у любых v наборов, $v \leqslant k$, на которых $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1, имеется не менее r общих единичных компонент). В статье найдены нижние оценки числа (k, r)-неразделённых булевых функций от n переменных при любых фиксированных $k \geqslant 3$, $r \geqslant 1$ и $n \to \infty$.

Введение

Потребность в изучении различных семейств подмножеств конечного множества, удовлетворяющих тем или иным ограничениям, возникает при решении ряда задач дискретной математики. Среди естественных ограничений, которым должны удовлетворять такие семейства, является отсутствие в каждом семействе v членов, $v \leqslant k$, в пересечении которых содержится не менее r элементов, $k = 2, 3, \ldots$ и $r = 1, 2, \ldots$ Такие семейства назовём (k, r)-*неразделёнными*.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется (k, r)-*неразделённой*, если у любых v наборов, $v \leqslant k$, на которых $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1, имеется не менее r общих единичных компонент.

Нетрудно видеть, что число (k, r)-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества совпадает с числом (k, r)-неразделённых булевых функций от n переменных.

Действительно, пусть (k, r)-неразделённое семейство $\mathfrak{F}$ состоит из подмножеств $S_1, \ldots, S_m$ n-элементного множества S. Подмножеству S_i,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00364) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики», проект «Новые методы дискретного анализа и комбинаторной оптимизации».

$1 \leqslant i \leqslant m$, поставим в соответствие такой двоичный (характеристический) набор $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$, что

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й элемент из } S \text{ принадлежит подмножеству } S_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ возьмём функцию, которая равна 1 на всех характеристических наборах и равна 0 на $2^n - m$ остальных наборах.

Ясно, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является (k, r)-неразделённой, а указанное соответствие между (k, r)-неразделёнными семействами n-элементного множества и (k, r)-неразделёнными булевыми функциями от n переменных является взаимно однозначным. Следовательно, число таких семейств равно числу (k, r)-неразделённых булевых функций от n переменных.

Обозначим через $F_{k,r}(n)$ множество (k, r)-неразделённых булевых функций от n переменных. Цель настоящей статьи состоит в нахождении нижних оценок для размера множества $F_{k,r}(n)$ при фиксироывнных $k \geqslant 3$, $r \geqslant 1$ и $n \to \infty$.

§ 1. Формулировка результатов

Теорема 1. *Пусть натуральные числа k, r фиксированы и таковы, что $k \geqslant 3$, $1 \leqslant r \leqslant 2^k - k - 2$. Тогда при $n \to \infty$*

$$|F_{k,r}(n)| > \binom{n}{r} 2^{2^{n-r}}(1 - o(1)). \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть натуральные числа k, r фиксированы и таковы, что $k \geqslant 3$, $r = 2^k - k - 1$. Тогда при $n \to \infty$*

$$|F_{k,r}(n)| > \binom{n}{2^k - 1} 2^{2^{n-r}}(1 - o(1)). \tag{2}$$

Пусть k и r, $k \geqslant 3$, $r \geqslant 2^k - k$, — фиксированные натуральные числа. При любом целом $s \geqslant 0$ пусть

$$P(s) = P(k, r, s) = 2^{-ks} \cdot \sum_{i=0}^{s} \binom{ks + r}{i}. \tag{3}$$

Обозначим через $s_0 = s_0(k, r)$ такое минимальное натуральное число, что

$$P(s_0 + 1)/P(s_0) < 1. \tag{4}$$

Существование такого s_0 будет доказано в § 4 (при любых $k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2^k - k$ оно не меньше $\lfloor r/(2^k - k + 1\rfloor$ и не больше r).

Теорема 3. *Пусть натуральные числа k, r фиксированы и таковы, что $k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2^k - k$. Тогда при $n \to \infty$*

$$|F_{k,r}(n)| > \binom{n}{ks_0 + r} 2^{2^{n-ks_0-r} \cdot \sum\limits_{i=0}^{s_0} \binom{ks_0 + r}{i}},$$

где s_0 взято из (4).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть натуральные числа $i_1,\ldots,i_r$ таковы, что $1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n$. Обозначим через $F^1_{k,i_1,\ldots,i_r}(n)$ множество функций f из $F_{k,r}(n)$ таких, что в каждом наборе $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, на котором f равна 1, i_1-я, …, i_r-я компоненты являются единичными (возможно наличие других таких компонент).

Нетрудно видеть, что при любых рассматриваемых $i_1,\ldots,i_r$ справедливо равенство

$$|F^1_{k,i_1,\ldots,i_r}(n)|=2^{2^{n-r}}. \tag{5}$$

Пусть

$$F^1_{k,r}(n)=\bigcup_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n}F^1_{k,i_1,\ldots,i_r}(n).$$

Тогда

$$|F^1_{k,r}(n)|\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n}|F^1_{k,i_1,\ldots,i_r}(n)|. \tag{6}$$

Поскольку число решений неравенств $1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n$ в натуральных числах равно $\binom{n}{r}$, из (5) и (6) следует, что

$$|F^1_{k,r}(n)|\leqslant\binom{n}{r}2^{2^{n-r}}. \tag{7}$$

Оценим размер множества $F^1_{k,r}(n)$ снизу. Пусть $s>r$ и $1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant n$. Обозначим через $F^2_{k,r,i_1,\ldots,i_s}(n)$ множество функций f из $F^1_{k,r}(n)$ таких, что в каждом наборе, на котором f равна 1, только i_1-я, …, i_s-я компоненты являются общими единичными компонентами. Пусть

$$F^2_{k,r,s}(n)=\bigcup_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant n}F^2_{k,r,i_1,\ldots,i_s}(n).$$

Ясно, что

$$|F^2_{k,r,s}(n)|=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant n}|F^2_{k,r,i_1,\ldots,i_s}(n)|<\binom{n}{s}2^{2^{n-s}}.$$

Вместе с тем при $s\geqslant r$ любая функция из $F^2_{k,r,s}(n)$ принадлежит множеству $F^1_{k,r}(n)$, а в правой части неравенства (6) каждая функция из $F^2_{k,r,s}(n)$ учитывается $\binom{s}{r}<2^s$ раз. Следовательно, при любых фиксированных $k\geqslant 3$, $r\geqslant 1$ и $n\to\infty$ имеем

$$|F^1_{k,r}(n)|>\binom{n}{r}2^{2^{n-r}}-\sum_{s=r+1}^{n}\binom{n}{s}2^s\cdot 2^{2^{n-s}}\sim\binom{n}{s}2^{2^{n-r}}.$$

Отсюда и из неравенства $|F_{k,r}(n)|\geqslant|F^1_{k,r}(n)|$ следует утверждение теоремы 1.

§ 3. Доказательство теорем 2 и 3

Множество всех упорядоченных двоичных наборов вида $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ обозначим через B^n. Пусть k, r и s — натуральные числа такие, что $k\geqslant 3$, $r\geqslant 2^k-k-1$ и $1\leqslant s\leqslant 3r$, и пусть $v=ks+r$. Обозначим через $R(v,s)$ множество наборов из B^v, в каждом из которых содержится не более s нулей. Наборы из $R(v,s)$ назовём *особыми*.

Ясно, что у любых w, $w \leqslant k$, наборов из $R(v,s)$ имеется не менее r общих единичных компонент. Поэтому $R(v,s)$ назовём *специальным* (k,r)-неразделённым множеством. Очевидно, что

$$|R(v,s)| = \sum_{i=0}^{s} \binom{v}{i}. \tag{8}$$

Обозначим через B_1^n множество наборов $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ из B^n таких, что поднабор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_v)$ принадлежит множеству $R(v,s)$. Пусть натуральные числа $i_1,\ldots,i_v$ таковы, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_v \leqslant n$. Обозначим через $F^3_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v)$ множество функций f из $F_{k,r}(n)$ таких, что если f равна 1 на наборе $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, то поднабор $(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_v})$ принадлежит множеству $R'(v,s)$, которое получается из $R(v,s)$ при замене 1 на i_1, 2 на i_2, ..., v на i_v. Множество $R'(v,s)$ при любых рассматриваемых $i_1,\ldots,i_v$ назовём *специальным*. Ясно, что каждая функция f из $F^3_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v)$ является (k,r)-неразделённой.

Нетрудно видеть, что при любых рассматриваемых $i_1,\ldots,i_v$ справедливо равенство

$$|F^3_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v)| = 2^{|B_1^n|} = 2^{2^{n-v}\cdot\sum_{i=0}^{s}\binom{v}{i}}. \tag{9}$$

Пусть

$$F^3_{k,r,s}(n) = \bigcup_{1\leqslant i_1<\ldots<i_v\leqslant n} F^3_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v). \tag{10}$$

Оценим сверху размер множества $F^3_{k,r,s}(n)$. Известно, что число решений неравенств $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_v \leqslant n$ в натуральных числах равно $\binom{n}{v}$. Отсюда и из (9), (10) следует, что

$$|F^3_{k,r,s}(n)| < \binom{n}{v} 2^{2^{n-v}\cdot\sum_{i=0}^{s}\binom{v}{i}}. \tag{11}$$

Оценим снизу размер множества $F^3_{k,r,s}(n)$. Если функция f из $F^3_{k,r,s}(n)$ принадлежит множеству $F^3_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v)$ и не принадлежит множеству $F^3_{k,r,s}(n,j_1,\ldots,j_v)$ при любом другом наборе $(j_1,\ldots,j_v)$, то в правой части (10) функция f учитывается один раз. В противном случае функция f учитывается в правой части (10) неоднократно. Рассмотрим эту ситуацию подробнее.

Пусть $(i_1,\ldots,i_v)$ и $(j_1,\ldots,j_v)$ — различные наборы натуральных чисел такие, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_v \leqslant n$ и $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_v \leqslant n$. Обозначим через $F^4_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v,j_1,\ldots,j_v)$ множество функций f из $F^3_{k,r,s}(n)$ таких, что $f \in F^3_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v)$ и $f \in F^3_{k,r,s}(n,j_1,\ldots,j_v)$. Пусть

$$F^4_{k,r,s}(n) = \bigcup F^4_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v,j_1,\ldots,j_v),$$

где объединение берётся по всем парам различных наборов $(i_1,\ldots,i_v)$ и $(j_1,\ldots,j_v)$. Следовательно,

$$|F_{k,r,s}(n)| = \sum |F^4_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v,j_1,\ldots,j_v)|,$$

суммирование осуществляется по всем парам различных наборов $(i_1,\ldots,i_v)$ и $(j_1,\ldots,j_v)$.

Если имеется ровно $w \geqslant 2$ различных наборов $(i_1,\ldots,i_v)$ таких, что $f \in F^3_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v)$, то в правой части (10) функция f учитывается $\binom{w}{2} \geqslant w-1$ раз. Отсюда и из (11) следует, что

$$|F^3_{k,r,s}(n)| > \binom{n}{v} 2^{2^{n-v}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}} - S(n,k,r,s), \tag{12}$$

где

$$S(n,k,r,s) = \sum |F^4_{k,r,s}(n,i_1,\ldots,i_v,j_1,\ldots,j_v)|, \tag{13}$$

а суммирование осуществляется по всем парам различных наборов $(i_1,\ldots,i_v)$ и $(j_1,\ldots,j_v)$.

Оценим сверху величину $S(n,k,r,s)$ следующим способом.

1) В множестве $\{1,2,\ldots,n\}$ выбираются различные подмножества M_1 и M_2 такие, что $|M_1|=|M_2|=v$. Для выбора пар таких подмножеств имеется $\binom{n}{v}^2$ возможностей. Пусть для определённости $M_1=\{1,2,\ldots,v\}$ и $M_2=\{u+1,\ldots,u+v\}$, где $1\leqslant u\leqslant v$. В этом случае множество особых наборов вида $(\alpha_1,\ldots,\alpha_v)$ обозначим через A_1, а вида $(\alpha_{u+1},\ldots,\alpha_{u+v})$ — через A_2.

2) Пусть u удовлетворяет неравенствам: $1\leqslant u\leqslant s$. Тогда в A_1 имеется такой набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_v)$, что в поднаборе $(\alpha_{u+1},\ldots,\alpha_v)$ содержится s нулей. В этом случае набор $(\alpha_{u+1},\ldots,\alpha_v,0,\ldots,0)$, в котором последние u компонент нулевые, не принадлежит A_2.

3) Пусть u удовлетворяет неравенствам $s+1\leqslant u\leqslant v$, и пусть $(\alpha_1,\ldots$ $\ldots,\alpha_v)$ — произвольный набор из A_1. Тогда набор $(\alpha_{u+1},\ldots,\alpha_v,0,\ldots,0)$ длины v не принадлежит множеству A_2.

Следовательно, при любом u, $1\leqslant u\leqslant v$, число наборов $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{u+v})$ таких, что поднабор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_v)$ принадлежит A_1, а поднабор $(\alpha_{u+1},\ldots,\alpha_{u+v})$ принадлежит A_2, не превосходит $2^u\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}-1$. Поэтому при любом u, $1\leqslant u\leqslant v$, имеем

$$|F^4_{k,r,s}(n,1,\ldots,v,u+1,\ldots,u+v)| < \\ < 2^{(2^{n-v}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}-1)2^{2^{n-v-u}}} = 2^{2^{n-v}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}-2^{n-v-u}} \leqslant \\ \leqslant 2^{2^{n-v}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}-2^{n-2v}}.$$

Из (13) и пп. 1), 2) следует, что при фиксированных k, r, s, $k\geqslant 3$, $r\geqslant 3^k-$ $-k-1$, $s=\mathrm{const}\geqslant 1$ и $n\to\infty$

$$S(n,k,r,s) < \binom{n}{v}^2 2^{2^{n-v}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}} - 2^{n-2v} = \frac{1}{2^{2^{n-2v}}}\binom{n}{v}\left\{\binom{n}{v}2^{2^{n-v}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}}\right\} = \\ = o\left(\binom{n}{v}2^{2^{n-v}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}}\right). \tag{14}$$

Пользуясь (12)—(14), при этих же условиях получаем

$$|F^3_{k,r,s}(n)| \sim \binom{n}{v}2^{2^{n-v}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{v}{i}} = \binom{n}{ks+r}2^{2^{n-ks-r}\cdot\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{ks+r}{i}}. \tag{15}$$

Воспользовавшись (15) и неравенством $|F_{k,r}(n)| > |F^3_{k,r,s}(n)|$, которое справедливо при любом целом $s\geqslant 1$, при $s=1$ получаем утверждение теоремы 2.

Если $r \geqslant 2^k - k$, то, положив $s = s_0$, получаем утверждение теоремы 3. Теоремы 2 и 3 доказаны.

§ 4. Поведение функции $P(k, r, s)$

В настоящем параграфе показывается, что при фиксированных $k \geqslant 3$, $r \geqslant 2^k - k$ и любом $s \geqslant 0$ функция

$$P(s) = P(k, r, s) = 2^{-ks} \cdot \sum_{i=0}^{s} \binom{ks+r}{i}, \tag{16}$$

введённая в (3), сначала, быть может, возрастает, а затем убывает, и минимально возможное $s = s_0$ таково, что $P(k, r, s_0) > P(k, r, s_0 + 1)$; оно удовлетворяет неравенствам $\frac{r}{2^k - k + 1} \leqslant s_0 \leqslant r$. Начальные значения параметра s_0 ($s_0 = 0$, 1 и 2) при любых значениях k и r приведены в таблице.

Для изучения поведения функции $P(s) = P(k, r, s)$ (см. (16)) при фиксированных k и r введём обозначения:

$$Q_1(s) = Q_1(k, r, s) = \sum_{i=0}^{s} \binom{ks+r}{i} = \binom{ks+r}{s} \cdot \sum_{i=0}^{s} h(s, i) = \alpha(s) \cdot \binom{ks+r}{s}, \tag{17}$$

$$h(s, i) = \binom{ks+r}{s-i} \Big/ \binom{ks+r}{s}, \tag{18}$$

$$\alpha(s) = \sum_{i=0}^{s} h(s, i). \tag{19}$$

Лемма 1. *Пусть k, r ($k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2^k - k$) — фиксированные натуральные числа. Тогда при любом целом $s \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\alpha(s+1) > \alpha(s).$$

Доказательство. Ясно, что

$$h(s, i+1)/h(s, i) = \frac{s-i}{ks+r-s+i+1}$$

и

$$h(s+1, i+1)/h(s+1, i) = \frac{s-i+1}{k(s+1)+r-s+i}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при любом i, $0 \leqslant i \leqslant s$, справедливо неравенство

$$\frac{s-i}{ks+r-s+i+1} < \frac{s-i+1}{k(s+1)+r-s+i}.$$

Следовательно, при фиксированных k, r ($k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2^k - k$) функция $h(s, i)$ убывает быстрее функции $h(s+1, i)$. Отсюда и из равенства $h(s, 0) = h(s+1, 0) = 1$ следует утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

При заданных k и r введём обозначения:

$$Q_2(s) = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{ks+r}{i} = \binom{ks+r}{s-1} \cdot \sum_{i=0}^{s-1} g(s, i) = \beta(s) \cdot \binom{ks+r}{s-1}, \tag{20}$$

где

$$g(s, i) = \binom{ks+r}{s-i} \Big/ \binom{ks+r}{s-1}, \quad \beta(s) = \sum_{i=0}^{s-1} g(s, i). \tag{21}$$

s_0	k	r	$ks+r$
0	3	$1 \leqslant r \leqslant 3$	r
0	4	$1 \leqslant r \leqslant 10$	r
0	5	$1 \leqslant r \leqslant 25$	r
0	6	$1 \leqslant r \leqslant 56$	r
0	7	$1 \leqslant r \leqslant 119$	r
0	8	$1 \leqslant r \leqslant 246$	r
0	9	$1 \leqslant r \leqslant 501$	r
0	10	$1 \leqslant r \leqslant 1012$	r
0	$\geqslant 11$	$1 \leqslant r \leqslant 2^k - k - 2$	r
1	3	$4 \leqslant r \leqslant 6$	$3+r$
1	4	$11 \leqslant r \leqslant 19$	$4+r$
1	5	$26 \leqslant r \leqslant 48$	$5+r$
1	6	$57 \leqslant r \leqslant 109$	$6+r$
1	7	$120 \leqslant r \leqslant 234$	$7+r$
1	8	$247 \leqslant r \leqslant 487$	$8+r$
1	9	$502 \leqslant r \leqslant 996$	$9+r$
1	10	$1013 \leqslant r \leqslant 2017$	$10+r$
1	$\geqslant 11$	$2^k - k - 1 \leqslant r \leqslant 2^{k+1} - 3k - 1$	$k+r$
2	3	$7 \leqslant r \leqslant 9$	$6+r$
2	4	$11 \leqslant r \leqslant 28$	$8+r$
2	5	$49 \leqslant r \leqslant 71$	$10+r$
2	6	$110 \leqslant r \leqslant 162$	$12+r$
2	7	$235 \leqslant r \leqslant 349$	$14+r$
2	8	$488 \leqslant r \leqslant 728$	$16+r$
2	9	$997 \leqslant r \leqslant 1491$	$18+r$
2	10	$2018 \leqslant r \leqslant 3022$	$20+r$
2	$\geqslant 11$	$2^{k+1} - 3k \leqslant r \leqslant 3 \cdot 2^k - 5k$	$2k+r$

Лемма 2. *Пусть k, r ($k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2^k - k$) — фиксированные натуральные числа. Тогда при любом $s \geqslant 1$ справедливо неравенство $\beta(s+1) < \alpha(s)$, где $\alpha(s)$ взято из* (19).

Доказательство. Нетрудно видеть, что при любом i, $0 \leqslant i \leqslant s$, справедливы соотношения:

$$g(s+1, i+2)/g(s+1, i+1) = \frac{s-i}{k(s+1)+r-s+i+1}, \tag{22}$$

$$\frac{s-i}{k(s+1)+r-s+i+1} < \frac{s-i}{ks+r-s+i+1}. \tag{23}$$

Пользуясь (19), (22) и (23), убеждаемся в том, что при фиксированных k, r и s функция $g(s+1, i+1)$ убывает быстрее функции $h(s,i)$, $0 \leqslant i \leqslant s$. Отсюда и из равенства $g(s+1, 1) = h(s, 0)$ следует утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть k, r ($k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2^k - k$) — фиксированные натуральные числа. Тогда в интервале $[0, \ \lfloor r/(2^k - k + 1)\rfloor - 1]$ функция $P(s) = P(k, r, s)$ из* (3) *возрастает.*

Доказательство. Согласно (17)—(19) имеем

$$P(k,r,s+1)/P(k,r,s) = \alpha(s+1)\binom{k(s+1)+r}{s+1}\Big/\left(\alpha(s)2^k\binom{ks+r}{s}\right).$$

По лемме 1 справедливо неравенство $\alpha(s+1) > \alpha(s)$. Поэтому

$$\begin{aligned} P(k,r,s+1)/P(k,r,s) &> \binom{k(s+1)+r}{s+1}\Big/\left(2^k\binom{ks+r}{s}\right) = \\ &= \frac{k(s+1)+r-s}{(s+1)2^k}\binom{k(s+1)+r}{s}\Big/\binom{ks+r}{s} > \frac{k(s+1)+r-s}{(s+1)2^k} > \\ &> \frac{k-1}{2^k} + \frac{r}{(s+1)2^k}. \end{aligned} \tag{24}$$

При фиксированных k, r ($k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2^k - k$) правая часть (24) убывает по s. Вместе с тем, при $s = \lfloor \frac{r}{2^k - k + 1} \rfloor - 1$ имеем

$$\frac{k-1}{2^k} + \frac{r}{(s+1)2^k} \geqslant \frac{k-1}{2^k} + \frac{r}{r2^k/(2^k - k + 1)} = 1. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Пусть k, r ($k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2^k - k$) — фиксированные натуральные числа. Тогда при $s \geqslant \frac{1{,}4r}{2^k - 1{,}4r}$ функция $P(s) = P(k, r, s)$ убывает.*

Доказательство. Пользуясь (18)—(20), получаем

$$\begin{aligned} &P(k,r,s+1)/P(k,r,s) = \\ &\quad = \left\{\beta(s+1)\binom{k(s+1)+r}{s} + \binom{k(s+1)+r}{s+1}\right\}\Big/\left\{\alpha(s)2^k\binom{ks+r}{s}\right\}. \end{aligned}$$

По лемме 2 имеем $\beta(s+1) < \alpha(s)$ и $\beta(s+1) > 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} P(k,r,s+1)/P(k,r,s) &< \left\{\binom{k(s+1)+r}{s} + \binom{k(s+1)+r}{s+1}\right\}\Big/\left\{2^k\binom{ks+r}{s}\right\} < \\ &< \left(1 + \frac{k(s+1)+r-s}{s+1}\right)\binom{k(s+1)+r}{s}\Big/\left(2^k\binom{ks+r}{s}\right) = \\ &= \frac{k(s+1)+r+1}{2^k(s+1)})\binom{k(s+1)+r}{s}\Big/\binom{ks+r}{s}. \end{aligned} \tag{26}$$

В свою очередь,

$$\binom{k(s+1)+r}{s}\Big/\binom{ks+r}{s}= \\ =\prod_{i=0}^{s-1}(k(s+1)+r-i)\Big/\prod_{i=0}^{s-1}(ks+r-i)= \\ =\prod_{i=0}^{s-1}\left(1+\frac{k}{ks+r-i}\right)<\left(1+\frac{k}{(k-1)s+r}\right)^s< \\ <\exp(ks/((k-1)s+r)).$$

Далее, из леммы 3 следует, что функция $P(s)=P(k,r,s)$ может убывать только тогда, когда $r>s(2^k-k+1)$. В этом случае при любом $k\geqslant 3$ имеем

$$\exp(ks/((k-1)s+r))< \\ <\exp(ks/((k-1)s+s(2^k-k+1)))=\exp(k2^{-k})\leqslant 1{,}4. \quad (28)$$

Подставив (27) и (28) в (26), получаем

$$P(k,r,s+1)/P(k,r,s)<\frac{1{,}4(k(s+1)+r+1)}{2^k(s+1)}. \quad (29)$$

При фиксированных k, r ($k\geqslant 3$ и $r\geqslant 2^k-k$) правая часть из (29), как функция от s, убывает. Вместе с тем при $s=\left\lfloor\dfrac{1{,}4(r+1)}{2^k-1{,}4k}\right\rfloor$ имеем

$$\frac{1{,}4(k(s+1)+r+1)}{2^k(s+1)}=\frac{1{,}4k}{2^k}+\frac{1{,}4(r+1)}{2^k(s+1)}<1. \quad (30)$$

Из (29) и (30) следует утверждение леммы 4.

При фиксированных k, r ($k\geqslant 3$ и $r\geqslant 2^k-k$) через I обозначим множество натуральных чисел из интервала $\left[\dfrac{r}{2^k-k+1},\dfrac{1{,}4r}{2^k-1{,}4k}\right]$, которые не меньше 2.

Лемма 5. *Пусть k, r ($k\geqslant 3$ и $r\geqslant 2^k-k$) — фиксированные натуральные числа. Тогда на множестве I функция $P(s)=P(k,r,s)$ сначала возрастает, а затем убывает.*

Доказательство. Справедливость леммы в случае пустоты множества I очевидна.

В случае непустоты множества I справедливость леммы непосредственно следует из следующего утверждения:

если $k\geqslant 3$ и $r\geqslant 2^k-k$ фиксированы, $P(k,r,s+1)/P(k,r,s)<1$ при некотором s из I и $s+2\in I$, то $P(k,r,s+2)/P(k,r,s+1)<1$.

Убедимся в справедливости этого утверждения. Согласно (16)—(19) имеем

$$P(k,r,s)=\alpha(s)2^{-ks}\binom{ks+r}{s}, \quad (31)$$

$$P(k,r,s+1)=\alpha(s+1)2^{-k(s+1)}\binom{ks+k+r}{s+1}, \quad (32)$$

$$P(k,r,s+2)=\alpha(s+2)2^{-k(s+2)}\binom{ks+2k+r}{s+2}, \quad (33)$$

где $\alpha(s)<\alpha(s+1)$ согласно лемме 1.

Функцию $P(k,r,s)$ из (31) представим в виде

$$P(k,r,s)=\frac{\alpha(s)(s+1)}{2^{ks}(ks+r-s)}\binom{ks+r}{s+1}, \tag{34}$$

а функцию $P(k,r,s+2)$ из (33) — в виде

$$P(k,r,s+2)=\frac{\alpha(s+2)(k(s+2)+r-s-1)}{2^{k(s+2)}(s+2)}\binom{k(s+2)+r}{s+1}.$$

Из (32) и (34) следует, что

$$\begin{aligned}P(k,r,s+1)/P(k,r,s)&=\frac{\alpha(s+1)(ks+r-s)}{2^k\alpha(s)(s+1)}\binom{ks+k+r}{s+1}\Big/\binom{ks+r}{s+1}=\\&=\frac{\alpha(s+1)(ks+r-s)}{2^k\alpha(s)(s+1)}\prod_{i=0}^{s}(ks+k+r-i)\Big/\prod_{i=0}^{s}(ks+r-i)=\\&=\frac{A\alpha(s+1)(ks+r-s)}{2^k\alpha(s)(s+1)},\end{aligned} \tag{36}$$

где

$$A=\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{k}{ks+r-i}\right). \tag{37}$$

Далее, из (32) и (35) следует, что

$$\begin{aligned}&P(k,r,s+2)/P(k,r,s+1)<\\&\quad<\alpha(s+2)(k(s+2)+r-s-1)\times\\&\quad\times\binom{ks+2k+r}{s+1}\Big/\left\{\alpha(s+1)(s+2)2^k\binom{ks+k+r}{s+1}\right\}.\end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}&\binom{ks+2k+r}{s+1}\Big/\binom{ks+k+r}{s+1}=\\&\quad=\prod_{i=0}^{s}(ks+2k+r-i)\Big/\prod_{i=0}^{s}(ks+k+r-i)=\\&\quad=\prod_{i=0}^{s}\left(1+\frac{k}{ks+k+r-i}\right)<A.\end{aligned}$$

Поэтому

$$P(k,r,s+2)/P(k,r,s+1)<\frac{A\alpha(s+2)(k(s+2)+r-s-1)}{\alpha(s+1)(s+2)2^k}. \tag{38}$$

Так как

$$P(k,r,s+1)/P(k,r,s)<1 \text{ и } \alpha(s+1)>\alpha(s),$$

то из (36) и (38) следует, что для завершения доказательства леммы достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\frac{ks+r-s}{s+1}-\frac{\alpha(s+2)(ks+2k+r-s-1)}{\alpha(s+1)(s+2)}>0. \tag{39}$$

Сначала убедимся, что

$$\alpha(s+2)/\alpha(s+1) < 1 + \frac{2}{k(s+2)+r-2s-2}. \tag{40}$$

Действительно, при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s$, имеем

$$\binom{k(s+1)+r}{s+1-i} \Big/ \binom{k(s+1)+r}{s+1} = \\ = \prod_{j=1}^{i} \{(s+2-j)/(k(s+1)+r-s-1+j)\}, \tag{41}$$

$$\binom{k(s+2)+r}{s+2-i} \Big/ \binom{k(s+2)+r}{s+2} = \\ = \prod_{j=1}^{i} \{(s+3-j)/(k(s+2)+r-s-1+j). \tag{42}$$

Далее

$$\prod_{j=1}^{i}\{(s+3-j)/(k(s+2)+r-s-2+j) - \prod_{j=1}^{i}\{(s+2-j)/(k(s+1)+r-s-1+j)\} < \\ < \left\{\prod_{j=1}^{i}(s+3-j) - \prod_{j=1}^{i}(s+2-j)\right\} \Big/ \prod_{j=1}^{i}(k(s+1)+r-s-1+j) = \\ = i\prod_{j=1}^{i-1}(s+2-j)/\prod_{j=1}^{i}(k(s+1)+r-s-1+j) = \\ = \frac{i}{s+2}\prod_{j=1}^{i}(s+3-j)/\prod_{j=1}^{i}(k(s+1)+r-s-1+j) = \\ = \frac{i}{s+2}\binom{k(s+1)+r}{s+1-i}\Big/\binom{k(s+1)+r}{s+1} < \frac{i}{s+2}\left(\frac{s+1}{k(s+1)+r-s}\right)^{i}. \tag{43}$$

Суммируя правую часть из (43) по всем i, $1 \leqslant i \leqslant s$, убеждаемся в том, что полученная сумма не превосходит величины

$$2/(k(s+2)+r-2s-2),$$

т. е. справедливо неравенство (40). Пользуясь (40) и равенством

$$\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+1}(1 - \frac{1}{s+2}),$$

убеждаемся в том, что

$$\frac{\alpha(s+2)(k(s+2)+r-s-1}{\alpha(s+1)(s+2)} < \\ < \frac{1}{s+1}\left(1+\frac{2}{k(s+2)+r-2s-2}\right)\left(1-\frac{1}{s+2}\right)(k(s+2)+r-s-1) < \\ < \frac{1}{s+1}\left(1+\frac{2}{k(s+2)+r-2s-2}-\frac{1}{s+2}\right)(k(s+2)+r-s-1). \tag{44}$$

Следовательно,

$$\frac{ks+r-s}{s+1} - \frac{\alpha(s+2)(ks+2k+r-s-1)}{\alpha(s+1)(s+2)} >$$
$$> \frac{1}{s+1}\Bigg\{ks+r-s-$$
$$-\left(1+\frac{2}{k(s+2)+r-2s-2}-\frac{1}{s+2}\right)\big(k(s+2)+r-s-1\big)\Bigg\} =$$
$$= \frac{1}{s+1}\left\{-2k+1\left(\frac{1}{s+2}-\frac{2}{k(s+2)+r-2s-2}\right)\big(k(s+2)+r-s-1\big)\right\}. \quad (45)$$

Поскольку s принадлежит множеству I, нетрудно убедиться в том, что правая часть из (45) больше нуля. Отсюда следует справедливость неравенства (39). Лемма 5 доказана.

Поступило в редакцию 7 VIII 2006