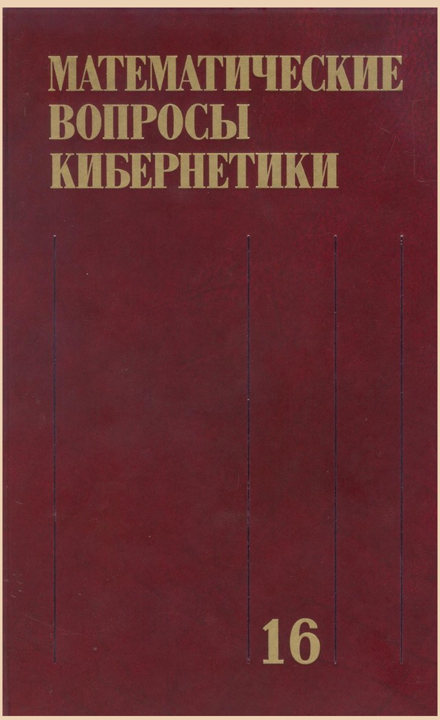

Ю. И. Янов

Математика и метаматематика

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Янов Ю. И. Математика и метаматематика // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 129–154. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2007-129

МАТЕМАТИКА И МЕТАМАТЕМАТИКА *)

Ю. И. ЯНОВ
(МОСКВА)

Введение

В наше время почти все естественные науки используют математику — её язык и её результаты. Более того, такие науки, как физика, механика, астрономия, и в значительной степени химия немыслимы без математики. Это даёт повод считать математику естественной наукой, т. е. наукой, изучающей материальный мир. Однако каждому, кто имеет хотя бы небольшое представление о математике, бросается в глаза и её принципиальное отличие от любой естественной науки, состоящее в идеальности, а потому в некотором смысле — абсолютности её понятий и результатов. Действительно, если достижения естественных наук со временем меняются, доходя иногда до полной противоположности, то математические истины влиянию времени не подвержены: теоремы, доказанные в древности, остаются истинными в наше время и останутся таковыми навсегда. В чём же секрет такого постоянства? Естественно предположить, что оно связано с идеальностью математических понятий, но тогда возникает вопрос о причинах чрезвычайно успешной применимости математических теорий к решению реальных задач. Известный физик Е. Вигнер по этому поводу писал [7 с. 536]: «С одной стороны, невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет. С другой стороны, именно эта непостижимая эффективность математики в естественных науках выдвигает вопрос о единственности физических теорий». В настоящей работе делается попытка ответить на эти и некоторые другие **мета**математические (см. § 2) вопросы, но прежде необходимо сказать об эволюции некоторых связанных с ними понятий.

§ 1. Краткий исторический экскурс

С античных времен существуют различные взгляды на природу и назначение математики. В соответствии с отношением к реальному миру их можно разделить на два вида, которые мы условно назовем *прагматическим* и *идеальным*.

С **прагматической** точки зрения математика является естественной наукой, служащей для познания закономерностей материального мира и черпающей из него свои понятия и задачи, причём последним критерием

*) Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

истинности математических постулатов и теорем считается их соответствие каким-либо реальным аналогам. Однако, по самой природе естественнонаучного знания, не существует возможности установить или опровергнуть наличие такого соответствия, во-первых, потому, что все естественнонаучные знания имеют индуктивный характер, и во-вторых, потому, что мы не можем гарантировать адекватного истолкования наших наблюдений и экспериментов (см., например, [13]).

С **идеальной** точки зрения математика является независимой наукой, развивающейся по своим собственным закономерностям и непосредственно с материальным миром не связанной. Здесь, правда, возникает вопрос о причинах успешной применимости математических теорем к реальному миру, на который можно дать различные ответы. С античных времен и вплоть до 19-го века была широко распространена точка зрения, согласно которой мир был создан в соответствии с математическими законами, так что познавая их, мы познаём и свойства реального мира. В книге [18, с. 64] по этому поводу сказано следующее: «В трудах Коперника, Кеплера, Декарта, Галилея и Паскаля было доказано, что некоторые явления природы протекают в соответствии с математическими законами. Все эти ученые не только были глубоко убеждены в том, что Бог сотворил Вселенную по математическому плану, но и утверждали, что математическое мышление человека согласуется с божественными предначертаниями и потому пригодно для расшифровки этого плана». В новое время такое объяснение стало неубедительным, но никакой более подходящей альтернативы предложено не было. Мы вернёмся к этому вопросу в § 5.

Вполне отчётливо различие во взглядах на природу математики проявилось у Платона (4 в. до Р. Х.) и его ученика Аристотеля. Первый, в соответствии со своей философской концепцией считал, что математика принадлежит миру чистых идей и потому её истины, как идеальные, абсолютны и неизменны. Напротив, приложения её к несовершенному миру вещей условны и преходящи, и в то же время постигнуть свойства вещественного мира можно только с помощью идеальной математики. Аристотель явно стоял на прагматическом отношении к математике, отводя ей роль вспомогательного инструмента для физики, которая строится на основании чувственного опыта. В дальнейшей истории науки эти две точки зрения постоянно сохранялись и сохранились до настоящего времени.

Основные принципы построения математики были провозглашены еще в античности. Аристотель определённо заявил о необходимости дедуктивного построения математических доказательств. При этом он считал, что истинность аксиом устанавливается безошибочной интуицией, а не опытом, который всегда имеет индуктивный характер, и шаги дедукции также определяются интуицией. В то же время он сформулировал некоторые логические принципы, которые следовало применять при построении доказательств. Можно считать это началом сознательного замещения интуитивной очевидности логическими заключениями. После Аристотеля этот процесс фактически заглох и возродился только в конце 19-го века. Аксиоматический метод построения математики возник не позднее VI в. до Р. Х., поскольку применяется уже Пифагором. Евклид (3-й век до Р. Х.) описал аксиоматику геометрии, которая долгое время служила образцом для построения аксиоматических теорий (хотя с современной точки зрения она недостаточна, поскольку в ней не определены средства вывода и ряд необходимых понятий, формальное определение которых заменяется интуитивной наглядностью).

Дальнейшее развитие математики, вплоть до конца 19-го — начала 20-го веков имело в основном прагматический характер, когда математика применялась как эффективное средство для решения физических, астрономических и других прикладных задач. В то же время никогда не снимался вопрос о «законных» средствах построения математических понятий и доказательств. Ввиду отсутствия самого понятия математической логики, главным инструментом доказательств являлась интуиция. В наше время, несмотря на появление формальных понятий логики и доказательства, подавляющее большинство доказательств строится интуитивно. Поэтому вопрос о природе и роли интуиции в математике нуждается в специальном рассмотрении (мы рассмотрим этот вопрос в § 3). В XX веке произошёл самый радикальный шаг в развитии математики — создание формальной математической логики и формализация её основных теорий: арифметики, геометрии, теории множеств и некоторых других. Благодаря обнаружению противоречий в интуитивно построенной теории множеств, вопрос обоснования математики стал центральным и привлёк лучшие математические силы. Поскольку произошедший в XX веке беспрецедентный прогресс в математике существенно изменил многие представления о ней, мы рассмотрим в следующем параграфе связанные с ним события более детально.

§ 2. Построение математического фундамента в XX веке

Вопрос о построении прочного фундамента математики, хотя и ставился некоторыми математиками в 19-м веке и ранее, но настоящую остроту он приобрёл после обнаружения противоречий в канторовской теории множеств, поскольку на неё возлагалась основная надежда построения основания для всей математики. Причиной такой надежды явилось то обстоятельство, что, с одной стороны, теория множеств основана на интуитивно очень простом и ясном понятии множества, более простом, чем понятие числа, и с другой стороны, в ней выразимы основные понятия Арифметики и Анализа, так что построив их модели в теории множеств, можно было бы доказать их непротиворечивость в случае надёжной непротиворечивости теории множеств. Однако в самом начале развития теории множеств в ней были обнаружены противоречия (обычно называемые парадоксами).

Наиболее простое из них — так называемый парадокс Рассела состоит в следующем. Все множества можно разделить на два вида: множества, содержащие само себя в качестве своего элемента и множества, не содержащие себя в качестве элемента. Нетрудно привести примеры тех и других. Рассмотрим теперь множество P всех множеств второго вида и поставим вопрос, какому виду оно принадлежит. (Оно должно принадлежать одному из этих видов, поскольку они исчерпывают все множества). Предположим, что множество P принадлежит первому виду, т. е. $P \in P$. Но по определению P состоит только из множеств второго вида и потому $P \notin P$, т. е.

$$P \in P \Leftrightarrow P \notin P. \tag{1}$$

Предположим теперь, что множество P — второго вида, т. е. $P \notin P$. Но тогда P должно быть множеством первого типа, т. е.:

$$P \notin P \Leftrightarrow P \in P. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем: $P \in P \& P \notin P$ — противоречие.

Несмотря на то, что каждый из подобных парадоксов легко исключить, наложив на понятие множества разумные ограничения, но гарантировать полное отсутствие противоречий в содержательной (т. е. не формализованной) теории множеств не представлялось возможным. Поэтому канторовская теория множеств как основание математики была отвергнута.

Другие попытки решения вопроса об основаниях математики происходили в основном с трёх разных позиций или направлений, которые получили названия *интуиционизма*, *логицизма* и *формализма*. Схематически эти направления можно охарактеризовать следующим образом.

Интуиционизм, как определённое направление в математике, возник в начале 20-го века, в основном благодаря трудам Л. Брауэра и А. Гейтинга. В его основе лежит номиналистическая тенденция ограничить математику только такими понятиями, которым можно придать «реальный смысл».

Для реализации этой идеи интуиционисты предложили рассматривать только объекты, для которых имеется *потенциально осуществимая* процедура их построения. Они получили название *конструктивных объектов*. Чтобы не выйти за рамки конструктивных объектов, интуиционистам пришлось сузить и логику, отказавшись от закона исключённого третьего. Путём сужения допустимых понятий интуиционисты рассчитывали достичь интуитивно очевидной непротиворечивости такой математики. Однако этот расчёт не оправдался, во-первых, потому, что вместо ясности интуиционистские понятия и теоремы оказались в большинстве случаев сложнее классических аналогов и тяжелее воспринимаемыми человеческой интуицией, чем последние. Во-вторых, надежда на очевидную непротиворечивость конструктивной математики не оправдалась: как показали дальнейшие исследования, к ней сводится непротиворечивость классической математики (см. например, [19, 35]). Кроме того, исключение из математики всех понятий, неподдающихся конструктивному определению, и, в частности, понятия актуальной бесконечности, привело к ликвидации важнейших достижений классической математики.

По этому поводу вполне справедливо высказывание Д. Гильберта, сделанное в 1927 г. [10, с. 383]: «... закон исключённого третьего ни в малейшей степени не повинен в появлении известных парадоксов теории множеств; эти парадоксы происходят скорее потому, что пользуются недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий, которые в моей теории доказательства исключаются сами собою. ... Отнять у математиков закон исключенного третьего — это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксёру пользование кулаками. Запрещение теорем существования и закона исключённого третьего почти равносильно полному отказу от математической науки. Действительно, какое значение имеют жалкие остатки, немногочисленные, неполные, не связанные друг с другом единичные результаты, которые были выработаны без применения ε-аксиомы интуиционистами, по сравнению с могущественным размахом современной математики!».

Поскольку Брауэр считал «чистые» теоремы существования ничего не значащими клочками бумаги, если они не содержат способ построения соответствующего объекта, то с его точки зрения многие важные понятия и принципы, используемые в таких разделах математики, как Анализ, Теория множеств, Топология и др. не допустимы, что приводит к катастрофическим последствиям для математики. Вместе с тем интуиционистская математика ничуть не больше обоснована, чем классическая. Поэтому вполне естественно, что интуиционизм не стал фундаментом всей математики. Главной причиной этой неудачи является, на наш взгляд, наложение на идеальные математические понятия искусственных ограничений, основанных на философских соображениях.

Претензия интуиционистов на исключительную истинность своих воззрений и требование строить всю математику только на конструктивной основе послужили определённой изоляции этого направления от остальной математики, хотя в некоторых её разделах (и в особенности — в метаматематике) использование конструктивного подхода вполне оправдано. Фактически гильбертовское понятие финитности можно рассматривать как одну из форм конструктивности. Поскольку для доказательства непротиворечивости формализованной математики иногда необходимы финитные, т. е. конструктивные методы, то в таких случаях конструктивизм может оказать услугу классической математике.

В своем развитии интуиционизм разделился на ряд так называемых конструктивных направлений и перестал играть заметную роль в общей математике. Детальная критика интуиционизма содержится в книге [5].

Логицизм возник на грани 19— 20-го веков в связи с построением математической логики. Его основатели — Г. Фреге и Б. Рассел надеялись всю математику «вывести» из логики. Вот как характеризует эту идею А. Чёрч [23, с. 209]: «Тезис логицизма состоит в том, что логика и математика соотносятся между собой не как два различных предмета, а как более ранняя и более поздняя части одного и того же предмета, а именно таким образом, что математика может быть полностью получена из чистой логики без введения дополнительных основных понятий или дополнительных допущений». Для этого необходимо было определить основные математические понятия в рамках чистой логики и тогда все математические теоремы будут получаться как логические следствия. Фреге определил таким образом натуральные числа, к которым сводятся многие математические понятия, и построил для них арифметику. Б. Рассел, хотя и обнаружил в развитой на этой основе теории множеств противоречие, однако продолжил попытку реализовать идею логицизма с помощью так называемой теории типов [11, 38]. Однако согласно определению логики, сформулированному ещё Лейбницем, с которым Рассел — один из главных творцов логицизма — был согласен, логика — это то, что истинно во всех мирах (см. например, [16]). Это означает, что чистая логика не может порождать никаких фактических истин, относящихся к каким-либо конкретным, но не ко всем мирам. Достаточно очевидно, что математические истины такой универсальностью не обладают, хотя бы потому, что существуют противоречащие друг другу теории. (Конечно, можно не соглашаться с лейбницевским определением логики, но тогда возникает тягучий вопрос: что есть логика?). Указанное понимание логики не позволяет включать в неё конкретные отношения, в то время как при построении любой математической теории невозможно обойтись без каких-либо исходных нелогических понятий и аксиом. Поэтому намерение логицистов построить всю математику на основе только чистой логики неосуществимо. Несостоятельность этой идеи стала почти общепризнанной после неудачи многих попыток её реализации и осознания того, что она не имеет никаких преимуществ перед традиционной точкой зрения. Поскольку позиции логицистов не были очерчены достаточно чётко, то варианты логицизма обсуждаются до последнего времени (см., например, статью А. Чёрча «Математика и логика» в сборнике [23]).

Формализм (или формальное направление в математике) представляет собой развитие древней идеи полной аксиоматизации математики, в модернизированном виде изложенную в так называемой «программе Гильберта». Несмотря на то, что на поверхностный взгляд программа Гильберта была опровергнута результатами Гёделя, она фактически (с некоторыми поправками) стала главным подходом к основаниям математики. Поэтому рассмотрим её более подробно.

Программа Гильберта. Гильберт, пожалуй, был первым математиком, который провозгласил законность любой математической теории, для которой доказана её непротиворечивость, невзирая на возможность её содержательной интерпретации *). В наше время такое утверждение не вызывает возражений, но ещё в начале 20-го века господствовала другая точка зрения, согласно которой математические понятия и теоремы с самого начала

*) Это не означает, конечно, что все непротиворечивые теории имеют одинаковую ценность. Существует ряд признаков, по которым оценивается математическая теория и прежде всего — это полезность её для решения задач как прикладных, так и математических, немалую роль играет и эстетическая сторона.

должны иметь содержательный смысл в виде аналогов в реальном мире или, точнее говоря, среди человеческих представлений о нём.

Основную идею программы Гильберта кратко можно сформулировать так: поскольку в реальном мире нет бесконечных объектов, которыми мы могли бы моделировать математические понятия, то вместо последних надо рассматривать их конечные описания — формулы и оперировать с ними по строго описанным чисто синтаксическим правилам. Полученные таким путём формулы — теоремы при соответствующей интерпретации и будут давать истинные предложения математической теории. При этом необходимо доказать непротиворечивость совокупности исходных формул. Упомянутые правила оперирования с формулами — это логические правила, и следовательно, логика также должна быть формализована. Таким образом, Гильберт предложил рассуждения над содержанием понятий заменить формально-логическим оперированием с их синтаксическими представителями. Многие известные математики того времени увидели в этом принижение роли содержательной основы математики и поэтому гильбертовская концепция вызвала неприятие со стороны прагматически настроенных коллег, обвинивших его в «игре формулами».

Защищая свою точку зрения, Гильберт в докладе на математическом семинаре в Гамбурге (см. [10, с. 382]) сказал: «Игра формулами, о которой Брауэр так пренебрежительно отзывается, кроме математической ценности имеет ещё важное общефилософское значение. Эта игра формулами совершается по некоторым, вполне определённым правилам, в которых выражается **техника нашего мышления**. Эти правила образуют замкнутую систему, которую можно найти и окончательно задать. Основная идея моей теории доказательства сводится к описанию деятельности нашего разума, иначе говоря, это протокол о правилах, согласно которым фактически действует наше мышление».

Уже древние греки хорошо понимали роль дедуктивного подхода к математике и значение четких логических правил для построения дедуктивных цепочек. Об этом свидетельствуют попытка Аристотеля описать такие правила, а также попытки Евклида и его предшественников аксиоматизировать математику. Однако в то время и долгое время спустя не было просто технических возможностей для формализации логики, а следовательно и математики. Само понятие логики не могло быть точно определено, поскольку для этого требуется чёткое разделение синтаксиса, как средства воплощения внешней формы теории, и семантики, как возможного содержания теории. Всё это стало ясным только в 20-м веке (хотя подобные идеи высказывал уже Лейбниц, 1646— 1716). Начало систематического построения математической логики и, в частности, её языка положили Д. Буль (1815— 1864), Г. Ф. Л. Фреге (1848— 1925), Д. Пеано (1858— 1932), Э. Ф. Ф. Цермело (1871— 1953). Современная форма математической логики в виде аксиоматизированной теории была выработана в основном благодаря работам Уайтхеда и Рассела [38], и в особенности Гильберта и Бернайса [12]. Несколько позднее было разработано общее понятие формальной системы, частным случаем которой является аксиоматическая (или аксиоматизированная) теория (см. § 4). После того, как в «наивной» т. е. интуитивно построенной Г. Кантором (1845— 1918) теории множеств были обнаружены противоречия, главной задачей в основаниях математики стало создание таких методов построения математических теорий, которые гарантировали бы их непротиворечивость. Интуиционизм фактически не давал и не мог дать никаких гарантий непротиворечивости математики, несмотря на сужение класса объектов и логики, поскольку не вносил принципиальных изменений в методы доказательства. Логицистские конструкции так же нуждались в доказательстве непротиворечивости, как и любые математические теории. Жизнеспособным и даже единственным путем дальнейшего развития математики явился путь, намеченный Д. Гильбертом в его «программе». Хотя в то время в сознании математиков синтаксис математического языка был неотделим от содержания, Гильберт фактически предложил строить именно синтаксическую компоненту теории по чисто формальным правилам в виде аксиоматического исчисления, и формально же доказав его непротиворечивость, должным образом интерпретировать нужные теоремы. Разумеется, он понимал, что доказательство непротиворечивости теории её же средствами не имеет смысла, и поэтому он предполагал доказывать непротиворечивость «финитными» средствами, гарантирующими отсутствие противоречий. Понятие финитности, судя по его примерам, — это некоторая форма конструктивности, которую можно охарактеризовать как «очевидную наглядность» [10, 33]. Для того времени эта идея Гильберта была слишком необычной и вызвала критику многих его коллег, обвинивших его в «игре формулами». Однако дальнейшее развитие оснований математики пошло именно по этому пути, несмотря на то, что Гёделем были доказаны такие отрицательные свойства достаточно богатых формальных теорий, как неполнота и невозможность внутри непротиворечивой теории доказательства её непротиворечивости (впрочем, это относится только к теориям в языке первой ступени — см. § 4). Очень важной для развития математики оказалась сама идея отделения синтаксиса от семантики. Кроме того, гильбертовский подход привёл к появлению математизированной *метаматематики* (этим термином Гильберт обозначал теорию доказательства. В более широком смысле под этим термином можно понимать вообще философию математики). Прежде чем говорить о современном развитии формализма в математике, необходимо рассмотреть вопрос о роли интуиции в ней.

§ 3. Об интуиции в математике

Вопросу о роли интуиции в науке, и в частности, в математике посвящено много работ (см. например, [1, 5]) преимущественно философского характера. Ввиду большого разнообразия философских взглядов многие работы только запутывают главный вопрос о природе интуиции. Заметим сразу, что нас интересует только разновидность интуиции, которую принято называть «интеллектуальной», каковой является и математическая интуиция. Поэтому в дальнейшем слово «интеллектуальная» мы опускаем. Следует сказать, что до 20-го века, в котором была создана математическая логика и появилась возможность построения чисто логических доказательств, интуиция считалась законным средством доказательства. Более того, Декарт, Паскаль и другие математики того времени говорили о ненадёжности логических доказательств по сравнению с интуитивным прозрением. Достаточно чётко такой взгляд на интуицию сформулировал Декарт в своих «Правилах для руководства ума» [14], где он пишет: «Под интуицией я разумею не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума, настолько простое и отчётливое, что оно не оставляет никакого сомнения в том, что мы мыслим, или, что одно и то же, прочное понятие ясного и внимательного ума, порождаемое лишь естественным светом разума и благодаря своей простоте более достоверное, чем сама дедукция...». Надо сказать, что подобной точки зрения на интуицию вплоть до 20-го века придерживались все математики, несмотря на различие их философских концепций. Такое единство взглядов, а главное то, что интуитивно доказанные теоремы сохраняют свою правильность и в наше время, свидетельствует об объективной основе интуиции. После обнаружения противоречий в интуитивно построенной теории множеств отношение к интуиции изменилось и формально математическое доказательство стало считаться правильным, если оно построено только по логическим законам. Однако фактически понятие доказательства в содержательной (т. е. неформализованной) математике осталось прежним, а именно, оно строится иногда со ссылками на логику, но большей частью шаги дедуктивной цепочки обосновываются интуитивной очевидностью. При этом критерием объективности (а потому и правильности) такого доказательства служит апробация коллективом других математиков. Таким образом, попрежнему в основе неформального понятия доказательства лежит интуиция, объективность которой обосновывается путём апелляции к определенному коллективу людей. Этот, на первый взгляд субъективный, критерий действовал во все времена и дал миру необозримое множество математических теорем, истинность которых, в отличие от достижений эмпирических наук, не подвержена влиянию времени: доказанные теоремы остаются истинными навсегда. Поэтому естественно предположить, что этот факт имеет объективную основу, которая заключается в способности человеческого разума непосредственно усматривать определенные истины (к этому вопросу мы вернёмся в § 5). Если проследить историю науки, то можно увидеть, что человеческая интуиция расширяется по мере накопления новых знаний, однако это происходит не в силу какого-то кардинального изменения этого свойства, а по мере освобождения от необоснованных предвзятостей и практически не сказывается на достоверности интуитивных умозаключений.

Отсутствие вплоть до 20-го века какого-либо полного описания логики, а потому и общепринятого понятия доказательства не оставляло других возможностей построения доказательств, кроме интуитивных. Если приведенное выше высказывание Декарта выражало мнение всех его современников и предшественников, то в наше время ситуация изменилась в связи с появлением возможности формального построения математических теорий и чисто логических доказательств. В связи с этим изменились требования и к неформальным доказательствам: теперь от них требуется, чтобы каждый шаг дедукции был логически обоснован. Нельзя сказать, что это требование выполняется во всей математике, однако в теориях, связанных с основаниями математики, такое условие необходимо. Возникает вопрос: всякое ли интуитивно построенное доказательство может быть преобразовано в формально-логическое? Поскольку интуитивные доказательства так же, как и формальные, строятся в виде дедуктивных цепочек, то можно говорить о некоей логике интуитивных доказательств — *интуитивной* или *содержательной* логике. Поставленный вопрос может быть решён положительно, если установить равносильность содержательной и формальной логик. Заметим, что хотя интуиция в значительной мере является индивидуальным, и следовательно, субъективным явлением, однако, как показывает большой исторический опыт, результат её применения в математике имеет вполне объективный характер.

В наше время на основании опыта построения формальных доказательств принято считать, что содержательная логика отличается от формальной только наличием таких правил, которым соответствуют производные (т. е. доказуемые) формальные правила. Это означает, что для всякого содержательного доказательства существует эквивалентный формальный аналог, построенный в рамках классической логики предикатов и являющийся восполнением или уточнением интуитивного доказательства. Этот тезис не менее правдоподобен, чем тезис Чёрча *) для вычислимых функций и фактически общепринят в современной математике. Мы будем называть его «тезисом Гильберта» (ср. [2, с. 49]), где, правда речь идёт только о логи-

---

*) Тезис Чёрча утверждает эквивалентность интуитивного понятия вычислимой функции (в смысле потенциальной возможности её вычисления) и понятия алгоритмически вычислимой функции для формального понятия алгоритма. Одним из оснований для принятия этого тезиса является тот факт, что для всех имеющихся формальных понятий алгоритма доказана их функциональная эквивалентность.

ке предикатов первого порядка. Поскольку содержательные доказательства могут использовать язык второго и выше порядка (п. 4.1), то имеет смысл распространить этот тезис и на такие языки.

Существует ещё одна особенность интуиции — её большие эвристические возможности. Нетрудно убедиться в том, что большинство кардинальных научных открытий произошло путём неожиданных «прозрений», т. е. интуитивно, а не путём логических умозаключений, которыми только впоследствии обосновывается открытие. Этот факт означает превосходство эвристических возможностей интуиции, по сравнению с логическими. Сам термин «интуиция», обозначающий в переводе на русский язык «усмотрение» или «ви́дение», т. е. непосредственное восприятие объекта, даёт основание утверждать существование у человека определённой способности «умо-зрения», наподобие чувственного зрения. Об этом же свидетельствует вся история попыток научить вычислительные машины доказывать математические теоремы хотя бы на уровне человека. Большое число самых разных программ не дало ожидаемых результатов, и как теперь стало ясно, формальный подход к столь сложным задачам в эвристическом плане не может соревноваться с интуицией. Эта способность, в силу её принципиальной неформализуемости, не может быть смоделирована в автоматах, и потому любой искусственный интеллект будет в этом отношении ущербен по сравнению с человеческим интеллектом. Поэтому интуиция никогда не потеряет своего значения как важный эвристический инструмент познания.

Несогласным с этим утверждением следует пояснить, что здесь речь идёт о познании новых фактов в заранее не ограниченных областях математики или другого универсума. Вполне возможно, что для каждого определенного круга задач быстро развивающаяся компьютерная техника может конкурировать с человеческим интеллектом и даже превосходить его, но это не означает превосходства вообще.

Определённый взгляд на значение интуиции в математике связан с интуиционизмом, о котором шла речь в предыдущем параграфе.

§ 4. Современное состояние оснований математики

Сначала заметим, что «современное состояние» оснований математики сложилось фактически в середине 20-го века и с тех пор основные концепции практически не изменились, несмотря на получение множества частных результатов. Это отнюдь не означает, что данная проблематика исчерпана или зашла в тупик. Скорее всего, это происходит по двум причинам: во-первых, потому, что методу формализации нет альтернативы, и во-вторых, недостаточно исследованы логики второй и выше ступеней, а также «нефинитные» правила вывода, приемлемые для современной математики.

К числу основных достижений 20-го века в области оснований математики следует отнести:

— выработку понятия формального языка и формальной системы (исчисления) и порождаемой ею теории,

— создание математической логики в виде непротиворечивой семантически полной формальной системы,

— создание аксиоматизированных формальных теорий арифметики, теории множеств, алгебраических систем и других важных разделов математики,

— формальное уточнение понятий алгоритма и вычислимой функции,

— арифметизация и погружение в формальную теорию таких важных понятий метаматематики, как доказуемость, непротиворечивость и др., что позволило решать метаматематические проблемы математическими средствами.

Перечисленные достижения потребовали осознания и уточнения многих важных математических и метаматематических понятий таких, как язык, синтаксис и семантика математических теорий и др. Всё это позволило взглянуть на проблему оснований математики с новых позиций по сравнению с предшествующими временами. Чтобы судить о надежности такого фундамента, необходимо более подробно рассмотреть основные понятия.

4.1. Язык*). В естественных языках синтаксис и семантика находятся в неразрывном единстве, что и образует собственно язык. В математике оказалось удобным под языком понимать только синтаксическую часть, в то время как семантика может варьироваться в зависимости от предметной области, круга задач и других условий. Говоря о языке математики, мы будем иметь в виду формальный язык, используемый в математических теориях, и в частности, в математической логике.

Если задан какой-либо *алфавит*, т. е. конечное или бесконечное множество *букв*, то всякая конечная цепочка букв этого алфавита называется *словом* в этом алфавите.

Понятие *буквы* не определяется, как одно из исходных. Можно говорить только о некоторых свойствах этого понятия, например, различимости букв, возможности неограниченного повторения, расположения в линейном порядке и т. п. (см., напр., [22]).

Формальным языком в данном алфавите называется произвольное множество слов. Однако фактически в математике рассматриваются не произвольные языки, а полученные с помощью определённых формальных правил порождения слов языка — индуктивных, либо в виде *формальных систем* или *исчислений* (см. п. 4.2). Содержательный смысл этого понятия в том, что формальный язык — это точно описанная синтаксическая компонента языка в обычном понимании. Следует заметить, что основной целью построения формальных систем является достижение максимальной объективности математических понятий, что получается благодаря использованию таких процессов, которые могут быть осуществлены автоматически.

Основным языком современной математики считается так называемый *язык предикатов***), алфавит которого обычно содержит символы предметных переменных и констант, предикатов и функций (иногда ещё и пропозициональных переменных), логических операций, включая кванторы, а также вспомогательные символы, например, скобки, запятые и т. п. Таким образом, алфавит, как правило, состоит из нескольких сортов букв, а язык включает подъязыки разного назначения. Язык предикатов, в котором допускаются кванторы только по предметным переменным, называется языком первой ступени или первого порядка. Если же кроме этого допускаются кванторы по предикатным и (или) функциональным переменным, то соответствующий язык называется языком второй ступени. Такую классификацию можно продолжить, если использовать переменные предикаты от предикатов, предикаты от предикатов от предикатов и т. д. (и соответственные функционалы), а также кванторы по ним.

4.2. Формальные теории и исчисления. *Формальная теория* — это язык, т. е. множество слов, называемых обычно *формулами*, *предложениями*, *теоремами*, которые семантически играют роль истинных утверждений. При этом предполагается, что это множество замкнуто относительно логических (и, быть может, специальных) правил вывода. Обычно формальная теория задаётся с помощью (или — в виде) *формального исчисления*

---

*) Некоторые авторы называют языком алфавит или часть алфавита, именуемую обычно в нашей литературе сигнатурой, которая представляет собой множество предикатных и функциональных символов. Однако, как правило термин «язык» используется в приводимом здесь смысле.

**) Предикат (отношение, свойство) — функция (от n аргументов, $n \geqslant 0$) на предметной или более широкой области, принимающая два значения: «истина» и «ложь», которые обычно обозначаются буквами 1 и 0.

(формальной системы), которое представляет собой множество исходных слов — *аксиом* и множество *правил вывода* (см. п. 4.3), позволяющих из определённых слов — посылок порождать слова, называемые заключениями. Таким образом, каждое формальное исчисление определяет язык — множество всех слов, которые можно породить применением правил вывода к аксиомам и ранее порождённым словам. Этот язык и является формальной теорией. Очень часто такую теорию отождествляют с порождающим её формальным исчислением (что мы и делаем иногда в дальнейшем). Теория называется *рекурсивно аксиоматизируемой*, если она может быть определена как множество доказуемых предложений формального исчисления с рекурсивным (разрешимым) множеством аксиом и правил вывода. В общем случае теория может быть задана любым другим способом, в том числе — с помощью семантики. При этом она может быть не только не разрешимой, но и не рекурсивно перечислимой (а потому и не рекурсивно аксиоматизируемой, поскольку всякая рекурсивно аксиоматизируемая теория рекурсивно перечислима). Обычно теорию называют аксиоматизируемой, если она рекурсивно аксиоматизируема.

Множество называется *разрешимым*, если существует единый способ, позволяющий относительно любого объекта определить, принадлежит он этому множеству, или нет. Формальным уточнением этого понятия является понятие *рекурсивного множества* — такого множества, для которого существует (формальный) алгоритм, разрешающий это множество, т. е. дающий для любого объекта ответ, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Согласно *тезису Чёрча* термины «разрешимое» и «рекурсивное» можно рассматривать как синонимы. Множество называется *(рекурсивно-)перечислимым*, если существует алгоритм, порождающий это множество, т. е. такой алгоритм, который последовательно выдаёт элементы данного множества (быть может, с повторениями) и только их. Предполагается, что любой элемент множества рано или поздно будет получен. Очевидно, что всякое разрешимое множество перечислимо. Обратное неверно, поскольку можно привести примеры перечислимых, но не разрешимых множеств.

Теории, использующие язык предикатов первого (второго) порядка, называются теориями первого (второго) порядка. В некоторых случаях используются промежуточные языки, выходящие за рамки первого порядка, но не обладающие всеми возможностями языка второго порядка.

4.3. Доказательство. Если задано произвольное подмножество слов формального языка, а также множество правил вывода, каждое из которых представляет собой совокупность конечного множества слов, называемых *посылками* и одного слова, которое называется *заключением*, то *доказательством* или *выводом* в такой системе называется конечная последовательность слов, каждое из которых либо принадлежит исходному множеству, либо является заключением правила вывода, посылками которого служат некоторые слова из предшествующих данному слову в этой последовательности. Это общее понятие доказательства относится к любой формальной системе. Для всякой рекурсивно аксиоматизированной теории множество доказательств разрешимо, т. е. существует эффективный формальный способ отличить доказательство от цепочки слов, не являющейся таковым. Это означает, что для таких теорий правильность доказательства всегда может быть эффективно проверена (разумеется, речь идёт о потенциальной возможности этого).

4.4. Интерпретация и модель. При содержательном построении теории слова́ её языка (термы, формулы и пр.) с самого начала обладают определенным значением (или смыслом), соответствующим семантике языка. Формальные же языки и теории, хотя и строятся в расчёте на какую-либо конкретную семантику, тем не менее, как чисто синтаксические объекты, нуждаются в специальном приписывании им подходящей семантики или *интерпретации*, которая словам языка присваивает определенные значения. Например, если алфавит теории содержит предикатные и функциональные символы, то всякая интерпретация должна присвоить им в качестве значений, соответственно, конкретные предикаты и функции на предметной области, принадлежащей данной интерпретации. Поскольку формулы интерпретируются как предложения (утверждения), то каждая интерпретация порождает свою логическую оценку формул (предложений) в языке теории. Для *классической логики* эта оценка двузначна и придаёт каждому замкнутому *) предложению одно из двух значений — «истина» или «ложь» (если же предложение содержит свободные переменные, то ему приписывается то же значение, что и замыканию его кванторами общности). Интерпретация, в которой все предложения теории истинны (т. е. имеют оценку «истина») называется *моделью* **) этой теории.

4.5. Логика. Всякая формальная теория должна содержать формальную логику, т. е. логические аксиомы и правила вывода, благодаря которым становится возможным рассматривать формальные доказательства в теории как экспликаты содержательных математических доказательств. Несмотря на то, что в реальной жизни и в некоторых содержательных теориях существуют не только истинные и ложные предложения (высказывания), но также — неопределённые, бессмысленные, модальные и т. п., математике достаточна двузначная логика, т. е. такая логика, в которой каждое замкнутое предложение либо истинно, либо ложно. Надо сказать, что начиная с 20-го века широко изучаются всевозможные многозначные логики (в основном — логики высказываний), однако они фактически являются математическим, а не логическим аппаратом (см. ниже). Многовековой процесс построения логики привёл в XX веке к созданию современной математической логики, получившей название *классической логики*.

Основной логикой для построения математических теорий является классическая *логика предикатов первого порядка* (т. е. все предложения и правила вывода этой логики должны формулироваться в языке предикатов первого порядка). В силу самой конструкции её языка, класс всех её интерпретаций исчерпывается *алгебраическими системами* [21, 24]. В соответствии с лейбницевским понятием логики, её предложения должны быть истинными «во всех мирах», т. е. во всех конкретных алгебраических системах в том же языке. Такие предложения называются *общезначимыми*, *тождественно истинными* или *всюду истинными*.

Иначе говоря, интерпретация языка предикатов первого порядка состоит из предметной (индивидной) области и конкретных предикатов и функций на этой области, которые взаимно однозначно сопоставлены предикатным и функциональным символам языка (если имеются символы констант, то им сопоставляются некоторые элементы предметной области). Таким образом, любая такая интерпретация однозначно определяет логическое значение каждой замкнутой формулы. Если же формула не замкнута, то её значение может зависеть от значений свободных переменных и в этом случае ей приписывают то значение, которое принимает замыкание этой формулы кванторами общности.

Очень важным достоинством логики предикатов первого порядка является её **полная** рекурсивная аксиоматизируемость. Здесь под полнотой понимается так называемая *семантическая полнота*, которая состоит в том, что в данном исчислении выводимы (доказуемы) **все** истинные предложения и только они (что означает и непротиворечивость — см. п. 4.6). Таким образом, семантическая полнота логического исчисления означает доказуемость в нём всех общезначимых формул и только их. В отличие от логики, для прикладных математических теорий рассматривается либо син-

---

*) Предложение (формула) называется замкнутым, если оно не содержит свободных, т. е. не связанных кванторами переменных.

**) Очень часто термин «модель» употребляется как синоним интерпретации, однако удобнее различать эти понятия. Более точное определение понятия модели использует сопоставление двух теорий (не обязательно формальных), см., например, [28, т. 3].

таксическая полнота, *) либо полнота относительно каких-либо специальных семантик. Значение семантически полной формальной логики для математики трудно переоценить, поскольку в этом случае предложение истинно тогда и только тогда, когда оно доказуемо. Благодаря таким замечательным свойствам, логика предикатов первого порядка в настоящее время широко применяется во всей математике, несмотря на некоторую ограниченность её языка (см. п. 4.6).

Оценивать выразительную возможность логики предикатов первого порядка можно по-разному. Если рассматривать математическую теорию в языке только внутренних понятий теории, то некоторые её конструкции могут оказаться не выразимыми в языке первого порядка. Так, например, если при формализации теории групп использовать только групповые операции, то в таком языке не выразимо понятие периодической абелевой группы (см. [2]). Но если расширить язык теории групп языком натуральных чисел, то это понятие становится выразимым формулой первого порядка. Если учесть, что при содержательном определении указанного понятия также используются натуральные числа, то требование ограничиваться только теоретико-групповыми понятиями представляется неестественным. Отсутствие отрицательных примеров даёт основание считать, что логики первого порядка достаточно для построения любой математической теории, несмотря на то, что в чисто логическом плане язык второго порядка обладает бо́льшими выразительными возможностями, чем язык первого порядка. В следующем подпункте 4.6 будет показана недостаточность логики первого порядка в другом отношении, когда с помощью логики второго порядка получается результат, невозможный для логики первого порядка.

Более широкие логики второго и выше порядка применяются сравнительно редко и обычно с некоторыми ограничениями, с одной стороны ввиду неперечислимости множества всюду истинных формул, и следовательно, (рекурсивной) неаксиоматизируемости их [4, 34], а с другой — по причине недостаточной изученности. Фактически для формализации содержательной математической теории часто бывает достаточно некоторого рекурсивно аксиоматизированного фрагмента логики второго порядка.

Несколько слов о языке логики. В основе языка современной математической логики лежат общие понятия предиката или отношения и, как частный случай его, — функции. Этот, на первый взгляд бедный язык оказался достаточным для построения любых математических теорий. Тем не менее, вскоре после появления классической математической логики стали создаваться логики в языках, расширенных различными дополнительными операторами — модальными, временными, деонтическими и т. п. с общей тенденцией приблизить язык логики к естественному языку. Однако, если иметь в виду современную математику, то такие понятия, как необходимость, возможность, долженствование, время и т. п. не являются для неё универсальными и потому указанные теории являются не чистыми логиками, а прикладными теориями. В связи с этим возникает вопрос о возможности (или невозможности) построения чистой логики в более широких языках, чем язык предикатов.

4.6. Непротиворечивость. Теория считается непротиворечивой, если она не содержит наряду с каким-либо предложением также и его отрицание. Для теорий с классической логикой это равносильно тому, что не всякое предложение принадлежит этой теории. Для теорий в достаточно широком языке утверждение о непротиворечивости теории может быть сформулировано на этом же языке. Поэтому можно пытаться доказывать непротиворечивость теории в ней самой. Однако ясно, что такое доказательство, если даже оно будет получено, не означает действительной непротиворечивости теории, поскольку в противоречивой теории всегда доказуема её непротиворечивость. Идея Гильберта не подчинена этому явлению, поскольку он предлагал строить доказательство непротиворечивости сильно ограниченными средствами, которые он называл финитными. По его замыслу такие средства должны гарантировать от проникновения в доказательство противоречий. Однако отрицательные теоремы Гёделя исключают эту

*) Теория называется *синтаксически полной*, если для всякого замкнутого предложения в языке этой теории доказуемо либо оно, либо его отрицание. Классическая логика предикатов таким свойством не обладает.

возможность для таких основополагающих теорий (первого порядка), как арифметика или теория множеств.

Так называемые «отрицательные» Теоремы Гёделя (в усиленном Россером варианте) утверждают, что если формальная арифметика первого порядка непротиворечива, то она неполна и даже принципиально непополнима в том смысле, что в любом непротиворечивом рекурсивно аксиоматизируемом расширении арифметики существует неразрешимая замкнутая формула, т. е. недоказуемая формула, отрицание которой также недоказуемо (первая теорема Гёделя). Поскольку каждая замкнутая формула в интерпретации либо истинна, либо ложна, то это означает, что существует истинная арифметическая формула, не доказуемая в формальной арифметике. Вторая теорема утверждает, что при том же условии непротиворечивости в арифметике недоказуема формула, утверждающая непротиворечивость арифметики. (Сказанное относится не только к арифметике, но и к любой достаточно богатой теории.)

Таким образом, теоремы Гёделя показывают невозможность полной аксиоматизации Арифметики в языке первого порядка и невозможность доказательства её непротиворечивости любыми внутренними средствами. Однако это отнюдь не означает, что вообще не существует математических средств решения этих вопросов. Например, вполне естественными являются следующие две возможности: во-первых, использование логики второго порядка, и во-вторых, расширение математических правил вывода. Обе эти возможности были успешно реализованы и привели к желаемым результатам. Оказалось, что в арифметике второго порядка теоремы Гёделя не имеют места, и более того, в языке второго порядка существует конечная полная аксиоматизация арифметики натуральных чисел [4]. В рамках языка первого порядка непротиворечивость формальной арифметики была доказана с помощью таких правил, как (ограниченная) трансфинитная индукция (см., например [8, 9, 26, 30]), либо конструктивное правило Карнапа [20]. Более того, формальная арифметика становится семантически полной при добавлении таких правил.

Правило Карнапа (ω-правило, правило бесконечной индукции) имеет следующий вид: если для формулы $A(x)$ доказаны предложения $A(0), A(1), \ldots, A(n), \ldots$, то доказано предложение $\forall x A(x)$. Это правило имеет бесконечную посылку и потому выглядит безнадёжно неэффективным, однако без ущерба для основного результата его можно заменить так называемым *конструктивным правилом Карнапа*: если имеется алгоритм, который по любому натуральному числу n дает доказательство формулы $A(n)$, то доказано $\forall x A(x)$. Здесь посылка задаётся уже конечным объектом — алгоритмом. Добавления к арифметике конструктивного правила Карнапа так же достаточно для доказательства непротиворечивости арифметики, как и добавления неконструктивного правила.

Такого рода правила едва ли можно назвать финитными (в смысле Гильберта), но возникает вопрос: на каком основании необходимо считать надёжными и убедительными только «финитные» средства? Несмотря на различие точек зрения на допустимость тех или иных правил вывода, практически все современные математики не сомневаются в том, что эти доказательства достаточны для того, чтобы считать непротиворечивость формальной арифметики бесспорным фактом.

В свое время некоторые математики возражали против этих доказательств, считая применяемые в них правила слишком неконструктивными. По-видимому, настало время считать указанные правила вполне допустимыми, поскольку никаких разумных оснований для их запрета не существует. Фактически основанием возражений является не опасение противоречий, а прагматическая идеология, предъявляющая к математике такие же требования, как и к естественным наукам. В этом отношении история развития математики даёт нам целый ряд поучительных примеров, когда неоправданное требование «реальности» математических понятий накладывало априорный запрет на понятия, которые впоследствии прочно вошли в математику. Сначала математический мир не хотел признавать существования отрицательных чисел. Столкновение с иррациональными числами привело к отлучению на долгое время геометрии от арифметики. Мнимые и комплексные числа также как и отрицательные долгое время считались несуществующими и потому незаконными. Более современной иллюстрацией подобного явления служат возражения против аксиомы выбора [15], которая ныне широко применяется в различных математических теориях, поскольку без неё невозможно получить многие важные результаты. Нам трудно объяснить такой консерватизм, но похоже, что недоверие к правилам Карнапа и трансфинитной индукции имеет тот же характер.

Отметим один интересный результат, касающийся формальной арифметики. Нетрудно доказать, что без аксиомы индукции система арифметических аксиом непротиворечива. Более общий результат получил А. Мостовский [36]: в формальной арифметике доказуема непротиворечивость любой её конечно аксиоматизируемой подтеории.

§ 5. О математике вообще

Можно привести ряд признаков, отличающих математику от естественных наук. Одним из них является тот факт, что (по крайней мере, в большей части современной математики) математические объекты не претендуют на роль адекватных аналогов реальных объектов. Более того, наличие у формальной теории реальной (т. е. материальной) модели не может служить доказательством её непротиворечивости, поскольку идеальные математические объекты и отношения могут быть адекватно соотнесены только с идеальными же понятиями. Поэтому математика фактически является замкнутой в себе системой, а следовательно, и все её понятия и утверждения не должны зависеть от каких-либо внешних моделей. В этом свете возражения неономиналистов против использования в математике некоторых теоретико-множественных понятий на том основании, что они не имеют реальных аналогий, являются совершенно несостоятельными.

Заметим, что вопрос об адекватности математических понятий реальным предметам и явлениям лишён точного смысла, поскольку, даже экспериментируя с материальными объектами, мы имеем дело лишь с их образами в человеческом языке (в широком смысле, т. е. не обязательно вербальном). Таким образом, возникает вопрос об адекватности этого языка и т. д.

В то же время с помощью математических теорий решаются многие задачи реального мира и предсказывается развитие процессов в нем. Этот факт свидетельствует об определённой объективности абстрактных математических конструкций, но отнюдь не о какой-то зависимости математики от вещественных понятий. Это свидетельствует также и об объективности классической логики, которая лежит в основе всех математических теорий (кроме интуиционистских, логика которых является фрагментом классической). В подтверждение этой точки зрения, которая оспаривается некоторыми математиками (см., например, [18]), приведем высказывания известных математиков и физика.

М. Кац и С. Улам [17, с. 8]: «Математика — это замкнутый в себе микрокосм, обладающий, однако, мощной способностью отражать и моделировать любые процессы мышления и, вероятно, всю науку вообще. Она всегда приносила большую пользу и ещё в большей мере продолжает приносить её сейчас».

Е. Вигнер [7, с. 546]: «Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны. Мы должны испытывать чувство благодарности за этот дар. Следует надеяться, что он не покинет нас и в будущих исследованиях и что он будет — хорошо это или плохо — развиваться к нашему большому удовлетворению, а может быть, и к нарастающему беспокойству, расширяя область познания окружающего нас мира».

Думаем, что большинство математиков в основном согласно с приведёнными высказываниями, хотя поставленный в них вопрос о непонятной эффективности математики в описании реальных явлений оставлен без ответа. Однако от ответа на этот вопрос зависит правильное понимание роли математики в познании реального мира — является ли математика лишь удобным языком, или её связь с реальным миром более глубокая. Одна из гипотез, имеющая древнее происхождение, состоит в том, что мир устроен по математическим (и следовательно, идеальным) законам и потому математические теории адекватно описывают строение реального мира. Непосредственно в таком виде эта гипотеза, хотя и правдоподобна, но не достаточна, поскольку не объясняет существа явления. Если дополнить её другой гипотезой, которая предполагает, что существует единая логика, присущая как человеческому мышлению, так и устройству реального мира, то получится достаточно убедительный ответ на вопрос. Вторая гипотеза имеет косвенное подтверждение, основанное на предположении **единственности логики**, что выглядит весьма правдоподобно в силу самого понятия логики, как истинности во всех мирах.

В книге [27, с. 180] высказана подобная точка зрения на логику: «*Логическое* выражает собою не субъективный переход развивающегося во времени сознания от представления к представлению, а *объективную и неизменную связь* мыслей, которая всегда пребывает, как бы люди ни менялись и сколько бы их ни умирало... Истина — *общезначима*; поэтому и логическая мысль должна соответствовать формальному требованию общезначимости; в истине всё имеет своё необходимое *основание в Безусловном*; поэтому и мысль, чтобы быть логичной, должна соответствовать этой форме безусловности: в ней всё должно быть обосновано и связано безусловно необходимой связью. Логическою мы называем такую связь мыслей, которая необходима *сама по себе*, а не в силу каких-либо меняющихся психологических свойств мыслящего. Поэтому самому это — связь *сверхвременная*, не зависящая от каких-либо свойств нашей умирающей действительности».

Тот факт, что логика (по крайней мере — основной её фрагмент) в наше время получила полное формальное описание, позволяет нам судить о логических, т. е. самых общих закономерностях реального мира, и потому в той мере, в какой эмпирические данные, играющие роль нелогических аксиом, соответствуют реальности, математические теории будут правильным описанием реальных закономерностей. Поэтому математика — это не просто удобный язык для описания реального мира, но и надежное эвристическое средство, позволяющее предсказывать неизвестные ранее явления, которые логически следуют из эмпирических аксиом.

Отметим некоторые особенности современной математики. В настоящее время математические теории разделяются на *формализованные* (т. е. являющиеся формальными системами) и *неформализованные*, которые мы будем называть *содержательными* или *интуитивными*. Последние строятся традиционно интуитивно, исходя из семантических свойств основных объектов. Построение математической теории в виде формального исчисления, во-первых, дает точное описание всех её постулатов — аксиом и, во-вторых, наличие формального доказательства какого-либо предложения делает абсолютным факт его следования из аксиом теории, поскольку правильность формального доказательства алгоритмически проверяема. Кроме того, для формальной теории имеется больше возможностей доказательства её метатеоретических свойств, в частности, непротиворечивости. В то же время формализация теории, предназначенной для изучения какого-либо содержательного объекта, в некоторых случаях может ограничить возможности теории в смысле полноты описания свойств этого объекта. Так обстоит дело, например, с формальной арифметикой натуральных чисел в языке первого порядка, которая не полна по отношению к содержательной теории натуральных чисел и не может быть пополнена [34], что означает существование истинных арифметических предложений, которые не могут быть доказаны в формальной арифметике (т. е. формально не следуют из её аксиом). Этот факт иногда используют как аргумент против самого метода формализации, хотя он относится только к теориям в языке первого порядка, в то время как для языков второго и выше порядков подобный факт не установлен и, как уже говорилось выше, в языке второго порядка формальная арифметика семантически полна [4]. На самом деле формальное построение математических теорий является единственной возможностью наиболее точной характеризации понятий. Всякое неформальное, т. е. не аксиоматическое определение понятия в конечном счёте опирается на неопределяемые элементарные понятия, такие как точка, прямая, множество и т. п. Единственная возможность достаточно точно определить такие понятия — это аксиоматизация. При этом, если удаётся построить категоричную *) систему аксиом, то все используемые понятия можно считать определёнными однозначно (с точностью до изоморфизма). В этом отношении альтернативы методу формализации нет. Античные математики, хотя и стремились к аксиоматическому построению математических теорий, но не до конца понимали его значение. Так Евклид, наряду с аксиоматизацией своей геометрии пытался определить понятия точки, прямой и плоскости в естественном языке.

§ 6. Что есть истина в математике

В естественных науках под истинностью какого-либо предложения (в языке данной науки) понимается определённая адекватность семантического значения этого предложения семантическому значению соответствующего предложения в «языке фактов». Язык фактов — это естественный или символический язык, который используется для описания результатов наблюдений или экспериментов в какой-либо области реального мира. При этом молчаливо и без достаточных оснований предполагается, что описание фактов адекватно самой реальности, поскольку в противном случае теряется познавательное значение науки. Однако такое описание фактов зависит от тезавруса, т. е. накопленных ранее знаний и базовых языковых конструкций, от технических достижений в области эксперимента и т. п., т. е. является относительным и зависящим от времени. Этим и объясняется изменчивость физических теорий, доходящая до отрицания предыдущих. С этим приходится мириться, поскольку других возможностей нет. Однако для математических истин характерна их неизменность, т. е. независимость от времени и других внешних условий.

Например, в книге [17] по этому поводу сказано следующее: «В одном отношении математика стоит особняком среди других наук: никакой её результат не может быть зачеркнут дальнейшим развитием науки. Однажды доказанная теорема уже никогда не станет неверной, хотя впоследствии может выясниться, что она является лишь тривиальным частным случаем какой-то более общей истины. Математические знания не подлежат пересмотру, и общий их запас может лишь возрастать».

Прежде чем говорить об истине в математике, следует уточнить о каком понятии истины идёт речь. Существует внутреннее понятие истинности в логико-математических теориях как значение оценочной функции. Например, если задана конкретная алгебраическая система с определенной предметной областью — носителем, то для её предикатов априори определены

*) Система аксиом называется категоричной, если все её модели изоморфны. Обычно рассматривается категоричность в какой-либо мощности, когда изоморфны все модели данной мощности.

истинностные значения для всех возможных значений их аргументов. Такое понятие в рамках настоящей работы мы не обсуждаем. Поэтому когда мы говорим об истинности математических теорем, мы имеем в виду **метаматематическое** понятие, аналогичное естественно-научному, но с той разницей, что роль реального мира здесь играет идеальный математический мир, т. е. здесь речь идёт о сопоставлении разных понятий (конструкций) внутри математики. Обычно сопоставляются семантическое значение формулы и её доказуемость или принадлежность к какой-либо теории.

Что же конкретно следует понимать под (метаматематической) истинностью теорем в идеальной математике? Начиная с древности и до сравнительно недавнего времени математические понятия рассматривались как идеализированные объекты реального мира, а математические аксиомы считались очевидными истинными свойствами таких объектов. Доказательство какого-либо утверждения представляло собой цепочку умозаключений, каждое из которых сохраняет истинность, идущую от бесспорных посылок. Поэтому считалось, что доказанность теоремы гарантирует её реальную истинность, так что эти понятия просто отождествлялись. При таком взгляде вопрос о непротиворечивости системы посылок не возникал. В новое время, когда математические понятия не соотносятся с реальными объектами, а модели математических теорий строятся внутри самой математики, сходное по форме понятие истинности изменилось по существу. Прежде всего, ссылка на содержательный («реальный») смысл исходных понятий и их свойств уже не считается гарантией непротиворечивости даже интуитивно построенной содержательной теории. Поскольку в противоречивой теории доказуемы любые предложения, доказательство непротиворечивости теории (или, что то же, системы её аксиом) стало необходимым условием истинности её теорем. Таким образом, мы можем констатировать, что вопрос об истинности теорем сводится к вопросам правильности доказательств и непротиворечивости теорий, т. е. предложение считается истинным, если оно доказано в непротиворечивой теории (выведено из её аксиом). Поясним, что это понятие истинности не связано с нашей уверенностью в непротиворечивости теории или правильности доказательства — они просто декларируются. Поэтому можно сказать, что оно **абсолютно** (объективно) в силу своей условности. Важной особенностью математики и математической логики является тот факт, что любая непротиворечивая теория имеет модель, причём указанная формальная истинность предложения влечёт его фактическую истинность в любой модели теории (см. § 7), что и обеспечивает абсолютную стабильность математических теорем.

Относительно доказательств мы уже говорили, что для формальных теорий понятие доказательства имеет точное формальное определение. При этом вопрос о том, является ли произвольная цепочка формул доказательством или нет, решается алгоритмически, т. е. объективно, и следовательно, множество доказательств разрешимо. (Заметим, что это не означает разрешимости множества теорем — оно неразрешимо уже для чистой логики предикатов [32]). Что касается неформальных доказательств, составляющих фактическое большинство и в наше время, то по современным меркам они должны быть настолько «логическими», чтобы был возможен перевод их в формальные. Можно сказать, что тезис Гильберта (см. § 3) теперь фактически является не гипотезой, а требованием, которому должны удовлетворять математические доказательства. Таким образом, одна компонента понятия истинности математических теорем — доказанность — выглядит вполне надёжно обоснованной. Подробнее о ней — в следующем параграфе. Иначе обстоит дело с непротиворечивостью, о чём мы будем говорить ниже. Мы рассмотрим возможные решения этих вопросов не только для формальных, но и для содержательных теорий.

§ 7. О доказательствах

В современной математике, в силу разделения её языка на синтаксическую и семантическую части, возникли два понятия следствия из посылок. Одно из этих понятий, которое мы будем называть *логическим* или *дедуктивным*, совпадает с понятием логической выводимости (доказуемости) предложения A из посылок Γ, что обозначается обычно так: $\Gamma \vdash A$. Второе понятие, которое мы назовём *семантическим**), связано с моделями множества Γ и состоит в следующем. Предложение A является семантическим следствием множества предложений Γ, если оно истинно в любой модели множества Γ, что обозначается так: $\Gamma \models A$. Поскольку логический вывод сохраняет истинность во всех интерпретациях, то ясно, что $\Gamma \vdash A$ влечёт $\Gamma \models A$. Обратное далеко не столь очевидно, но оно следует из теоремы Гёделя о полноте [33]. Таким образом, эти понятия оказываются равносильными, и следовательно, если Γ — это (непротиворечивая) система аксиом теории, то выводимость (доказуемость) формулы A из Γ равносильна её семантической истинности в этой теории.

Теорема Гёделя о полноте утверждает, что всякое непротиворечивое множество формул (в языке предикатов первой ступени) имеет модель. Отсюда следует, что для любой формулы A, если $\Gamma \models A$, то $\Gamma \vdash A$. Действительно, предположим, что $\neg(\Gamma \vdash A)$. Нетрудно доказать, что тогда множество $\Gamma, \neg A$ — непротиворечиво и потому по теореме Гёделя оно имеет модель, в которой формула $\neg A$ истинна, а это противоречит тому, что $\Gamma \models A$. Поэтому $\neg(\Gamma \models A)$, откуда по правилу контрапозиции получаем $\Gamma \vdash A$. Отсюда же следует и семантическая полнота исчисления предикатов первой ступени.

Все доказательства предложений любой математической теории можно разделить на два вида. К первому виду отнесём такие доказательства, которые касаются только синтаксических свойств теории без ссылок на какую-либо интерпретацию. Таковыми, например, являются все формальные доказательства в формальных теориях, которые фактически являются выводами слов в языке теории из аксиом строго по формальным правилам. Будем называть такие доказательства *синтаксическими*. Второй вид — это доказательства, апеллирующие к каким-либо интерпретациям языка теории. Назовем их *семантическими*. Как уже было сказано выше, правильность формального синтаксического доказательства устанавливается алгоритмически, и следовательно, можно сказать, — абсолютно надёжно. Согласно тезису Гильберта (см. § 3), всякое неформальное доказательство имеет формальный эквивалент и потому мы можем считать надёжным любое синтаксическое доказательство.

Доказательства второго вида содержат апелляцию к семантике, которая, как правило, не является аксиоматической теорией и не всегда может быть аксиоматизирована (как это имеет место для содержательной арифметики). Поэтому посылки таких доказательств черпаются из заранее не определённого множества содержательных предложений такой теории. Хотя для всякого семантического доказательства можно получить синтаксический аналог, если формализовать соответствующую содержательную теорию, однако последнее не всегда возможно по разным причинам. Тем не менее для каждого семантического доказательства существует возможность получить его синтаксический эквивалент путём аксиоматизации не всей теории, а только её конечно аксиоматизируемого фрагмента, содержащего посылки доказательства. Такая возможность следует из того факта, что любое доказательство содержит лишь конечное множество посылок. Это утверждение верно как для формальных так и для неформальных теорий (первого

*) Традиционно за этим видом следствия закрепился термин «логическое», хотя на наш взгляд это не соответствует смыслу понятия «логический», что больше подходит к первому виду.

порядка). Таким образом оценку правильности семантического доказательства можно свести к оценке правильности синтаксического доказательства. Подчеркнём, что здесь речь идёт о проверке правильности доказательств, безотносительно к непротиворечивости всей теории.

§ 8. Подробнее о непротиворечивости

Рассмотрим теперь вопрос о возможности надёжного доказательства непротиворечивости теорий. Как мы уже отмечали на примере арифметики, нужный результат может быть получен путем расширения логических средств доказательства дополнительными правилами. Другая возможность — доказательство непротиворечивости теории путем построения математической модели — может быть вполне убедительной, если непротиворечива сама модель и отображение теории в модель достаточно конструктивно (финитно). Поскольку моделью как правило является содержательная математическая теория, то может показаться, что мы попадаем в безвыходную ситуацию: чтобы доказать непротиворечивость теории, нужно построить какую-либо её модель, которая в свою очередь принадлежит теории, непротиворечивость которой также должна быть доказана. Подчеркнём, что модель непременно должна принадлежать математической теории (не обязательно формальной), т .е. не должна апеллировать к каким-либо реальным понятиям. Практически такую ситуацию очень часто удается разрешить путем построения финитной модели, непротиворечивость которой невозможно подвергнуть сомнению. Наглядным примером этого является доказательство непротиворечивости логики предикатов первого порядка, которое мы рассмотрим в следующем параграфе. Заметим, что надёжная правильность формальных доказательств основана на непротиворечивости формальной математической логики, что также требует доказательства, и следовательно, это доказательство не может быть формальным. Как вырваться из возникающего здесь круга, мы продемонстрируем в § 9.

Вопрос о непротиворечивости теорий несравненно более трудный, чем вопрос о доказательствах. Для формальных теорий он несколько облегчается чёткостью постановки и существованием различных подходов, например, таких, как использованные для доказательства непротиворечивости арифметики (см. п. 4.6). Если теория не формальная, то далеко не всегда удаётся найти прямое доказательство её непротиворечивости. В этом случае приходится апеллировать к какой-либо её наиболее простой модели.

Определённую уверенность в непротиворечивости содержательно построенных математических теорий создаёт распространённое (по крайней мере, среди математиков) мнение, что исходные понятия, лежащие в основе любой математической теории, имеют объективный характер и не являются произвольным плодом свободной человеческой фантазии. Вопрос об объективности математических понятий относится уже к области философии, однако, как показывает исторический опыт, большинство математиков и философов всегда считало и считает математические объекты принадлежащими в том или ином смысле реальному, и следовательно, объективному, а потому и непротиворечивому **миру идей**. (Отметим, что существование противоречащих друг другу идей означает не противоречивость всего мира идей, а только принадлежность этих идей разным мирам, подобно тому, как в математике существуют противоречащие друг другу теории, например, аксиоматики разных геометрий, непротиворечивые порознь, противоречивы в совокупности). В подтверждение этого мнения приведём одну цитату [6, с. 317]: «Каковы бы ни были философские оттенки, в которые понятие математических объектов окрашивалось у того или иного математика или философа, имеется по крайней мере один пункт, в котором они единодушны: это то, что эти объекты нам *даны* и не в нашей власти приписывать им произвольные свойства так же, как физик не может изменить какое-либо природное явление. ... и даже сегодня не один математик, афиширующий непримиримый формализм, в глубине души охотно подписался бы под следующим признанием Эрмита: *Я полагаю, что числа и функции Анализа не являются произвольным созданием нашего ума; я думаю, что они существуют вне нас с такой же необходимостью, как и предметы объективной реальности, и мы их встречаем или открываем и изучаем их так же, как физики, химики и зоологи*».

Признав объективность исходных понятий, мы с необходимостью вынуждены будем признать и объективность их свойств, выраженных аксиомами теории. Это, конечно, ещё не доказывает непротиворечивость всякой математической теории, однако вселяет надежду на возможность такого доказательства, и даже — интуитивную уверенность в этом. Противники такой точки зрения обычно ссылаются на канторовскую теорию множеств, исходные объекты которой являются настолько простыми и естественными, что не вызывают никакого сомнения в их объективности. Однако, на наш взгляд возникающие там противоречия вызваны не противоречивостью исходных понятий и их свойств, а необоснованным распространением свойств ограниченных (в том или ином смысле) множеств на неограниченные. Кроме того, такие понятия, как множество всех множеств, или множество всех объектов, обладающих свойством, область определения которого ничем не ограничена, могут оказаться внутренне противоречивыми, подобно понятию всемогущества, если придавать ему неограниченное значение. Надо сказать, что изучение больших трансфинитов может преподнести ещё ряд сюрпризов, подобных ситуации с аксиомами выбора и детерминированности. Интуитивно обе эти аксиомы не вызывают сомнений, к тому же для счётных семейств множеств аксиома выбора является следствием аксиомы детерминированности, но для произвольных семейств эти аксиомы несовместимы [15]. Поэтому необходимо дальнейшее изучение различных аспектов бесконечных множеств, чтобы прояснить вопрос о том, придётся ли примириться с существованием нескольких несовместимых теорий множеств, подобно тому, как существуют различные геометрии, или же удастся построить одну, примиряющую разные взгляды теорию.

Аксиома выбора (в явном виде впервые сформулированная Цермело) утверждает, что для любого семейства попарно непересекающихся непустых множеств существует множество, содержащее ровно по одному элементу из каждого множества этого семейства. На аксиоме выбора основана чрезвычайно важная для построения теории множеств теорема Цермело о возможности полного упорядочения любого множества. Правда, имеются и интуитивно «нежелательные» следствия. (Подробное обсуждение этой аксиомы содержится в книге [29]).

Чтобы сформулировать аксиому детерминированности, рассмотрим множество I бесконечных последовательностей натуральных чисел — так называемое бэровское пространство. Множество $A \subseteq I$ называется *детерминированным*, если оно удовлетворяет следующей бесконечной формуле:

$$\exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots (x_0 x_1 x_2 x_3 \ldots \in A) \vee \forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots (x_0 x_1 x_2 x_3 \ldots \notin A).$$

Нетрудно заметить, что эта формула представляет собой закон исключённого третьего, распространённый на бесконечные формулы. Аксиома детерминированности утверждает, что всякое множество $A \subseteq I$ детерминировано. Интуитивно обе аксиомы — выбора и детерминированности выглядят весьма правдоподобно, но как уже было сказано, в неограниченном случае они несовместимы. Если же применять аксиому выбора только к счётным семействам множеств, то в этом случае аксиома выбора следует из аксиомы детерминированности. Скорее всего, условие счётности не является необходимым для совместимости этих аксиом и потому представляет большой интерес вопрос о более широких достаточных условиях. Вполне возможно, что теория множеств, построенная в рамках этих условий, окажется достаточно содержательной и может послужить хорошей основой для многих математических теорий. Отметим, что с помощью аксиомы детерминированности решается континуум-проблема в канторовской постановке, а именно, доказывается, что между $\aleph_0$ и мощностью континуум нет промежуточных мощностей.

В следующем параграфе в качестве примера доказательства непротиворечивости с помощью подходящей модели мы рассмотрим одно из доказательств непротиворечивости логики предикатов первого порядка.

§ 9. Непротиворечивость логики предикатов

Логика предикатов определяется аксиоматически в виде явно описанной системы аксиом и правил вывода *). В данном случае мы не можем рассчитывать на формальное доказательство её непротиворечивости, поскольку оно использует формальную логику, непротиворечивость которой нам нужно ещё доказать. Таким образом, уже на самом первом этапе построения формальной математики мы вынуждены прибегнуть к содержательным, т. е. интуитивно построенным доказательствам. К счастью, доказательство непротиворечивости исчисления предикатов первой ступени настолько просто реализуемо финитно, что не может вызвать никаких сомнений в его правильности. Для доказательства непротиворечивости этого исчисления достаточно рассмотреть одноэлементную модель, на которой все его формулы однозначно переходят (отображаются) в формулы так называемого *исчисления высказываний* **). При этом все аксиомы переходят в тавтологии (тождественно истинные формулы логики высказываний), а правила вывода сохраняют тавтологичность формул (т. е., если посылки правила являются тавтологиями, то и заключение также тавтология). Таким образом, все доказуемые формулы исчисления предикатов в одноэлементной модели переходят в тавтологии. Поскольку легко привести пример формулы, не переходящей в тавтологию, то это означает существование недоказуемых формул, а значит и непротиворечивость исчисления предикатов. Таким образом, непротиворечивость логики предикатов первой ступени мы можем считать надёжно доказанной. (Разумеется, приведенные здесь рассуждения являются только схемой доказательства, но все необходимые детали описываются вполне эффективно).

Логика высказываний (*пропозициональная логика*, *булева алгебра*) является важным фрагментом логики предикатов. Её основателем считается Дж. Буль (1815—1864). Множеством её объектов являются два *логических значения* — «истина» и «ложь», обычно обозначаемые буквами 1 и 0. Её формулы строятся из этих констант и переменных с помощью тех же логических операций, что и формулы логики предикатов, за исключением кванторов. Собственно логика высказываний состоит из тавтологий — формул, которые при любой подстановке констант 1 и 0 в качестве значений переменных принимают значение 1. Логика высказываний, представленная в виде аксиоматической системы называется *исчислением высказываний*. Его непротиворечивость легко доказывается вполне финитными средствами. Название «булева алгебра», с одной стороны, указывает на её создателя, а с другой — на тот факт, что она совпадает (изоморфна) с двуэлементной алгеброй с так называемыми *булевыми операциями*. Булева алгебра является моделью исчисления высказываний, её операции умножения, суммы и дополнения интерпретируют логические операции конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Исчисление предикатов является расширением исчисления высказываний путём добавления в алфавит предметных переменных, предикатных и функциональных символов, а также кванторов $\forall$ и (или) $\exists$, что приводит к соответствующему расширению понятия формулы. Аксиоматика исчисления предикатов получается добавлением к аксиомам и правилам вывода исчисления высказываний аксиом и правил вывода для кванторов.

К сожалению, для многих математических теорий такой способ доказательства непротиворечивости не проходит, поскольку для них не существует более простой модели, чем основная (которая обычно называется

---

*) По поводу аксиоматики этого исчисления см. любое пособие по математической логике, например, [11, 19, 25, 31] и др.

**) См. предыдущую сноску.

стандартной). Такими теориями являются, например, арифметика и теория множеств. О возможных доказательствах непротиворечивости этих теорий говорилось выше.

§ 10. Резюме

Разногласия во взглядах на истинность математических теорем в конечном счёте сводятся к разному пониманию отношения математики к реальному миру. Абсолютизация человеческих представлений о реальном мире, характерная для людей не только древности, но и совсем недалёких времён, привела к ряду заблуждений в оценке места математики среди других наук. Поверхностное восприятие того факта, что зарождение и в значительной мере дальнейшее развитие математики происходило путём решения прикладных задач, послужило распространению прагматической точки зрения на математику, хотя при более глубоком анализе обнаруживается принципиальная независимость математики от реального мира, точнее — от наших представлений о нём. В наше время это тем более очевидно, что благодаря более глубокому пониманию роли и возможностей науки, понятие «реальный мир» потеряло свою однозначность и фактически обозначает целый спектр виртуальных миров. В то же время в математике с помощью формализации основных конструкций происходит постоянное уточнение важнейших интуитивных понятий, что с одной стороны способствует избавлению от некоторых иллюзий, а с другой — создаёт уверенность в объективности математических результатов.

В этом отношении представляет интерес следующее мнение философов из [3, стр. 206]: «Незаметное смещение общих философских понятий иногда ведёт к осязательным ошибкам в философии математики. Так, часто из того факта, что математика применяется на практике, делается вывод, что математическая теория в своей истинности проверяется или обосновывается практикой. Такой вывод может получиться только при смешении таких понятий, как опыт и практика, истинность и содержательность. Мы можем утверждать, что математическая теория стимулируется практикой в своём развитии, что она отражает реальность, *содержательна* (в смысле возможного соответствия некоторой системе реальных связей), но отсюда не следует, что она проверяется на опыте, подобно эмпирическим теориям, что ей присуща *истинность* [в прагматическом смысле — авт.] или что она обосновывается посредством использования. Такие смешения ведут к искажению сути математического знания со всеми проистекающими отсюда методологическими заблуждениями».

«Кризис» в математике, вызванный использованием чрезмерно расширенного понятия множества, привёл в конечном счёте к самому значительному прогрессу в математике, в результате которого математика освободилась от несвойственных ей ограничений, налагаемых на неё попытками связать её с реальными моделями. Благодаря созданию формализованной математической логики и, соответственно, математических понятий доказательства и непротиворечивости, понятие истинности окончательно приобрело однозначный математический характер: теорема истинна, если она формально-логически следует из аксиом непротиворечивой теории. Такое понятие истинности абсолютно в том смысле, что оно не зависит от каких-либо неоднозначных внешних условий. Какими бы средствами ни были решены вопросы о доказательстве выводимости и непротиворечивости, указанное понятие истинности сохраняется. Поскольку развитие математики представляет собой монотонный процесс в сторону расширения накопленных знаний, когда ничто из достигнутого не отбрасывается, то возможные изменения (расширения) математического языка и, соответственно, логики могут изменить содержание, но не характер (сущность) понятия истинности в математике. При этом вопрос о доказательстве непротиворечивости теорий стал более острым и сложным. Если раньше для обоснования непротиворечивости было достаточно указать подходящую реальную модель, то теперь этот критерий стал несостоятельным. Благодаря тому, что вопрос приобрёл чёткий математический смысл, его решение также должно быть только математическим. Отрицательные теоремы Гёделя, казалось бы сделали эту задачу для важнейших математических теорий безнадёжной — в рамках принятого языка и логики, однако для такой основополагающей теории как Арифметика были найдены математические доказательства, использующие более широкие средства доказательства, чем традиционные. Эти средства вполне естественны для математики и в наше время уже не вызывают возражений. Таким образом, значительная часть математики получила прочное математическое обоснование поскольку для многих теорий существуют арифметические модели. В этом свете снизился интерес к доказательству непротиворечивости других формальных теорий, поскольку в них столь же трудно ожидать противоречий, как и в арифметике. Особое место занимает теория множеств, которая, по-видимому, должна разделиться на несколько параллельных ветвей, но чтобы судить об этом, требуются дополнительные исследования.

Очень важно отметить, что хотя формализация математической логики и понятия доказательства сыграла кардинальную роль в развитии математики, получение новых математических результатов происходит, и по-видимому, будет происходить в дальнейшем в основном интуитивным образом (точнее во взаимодействии интуитивных и формальных средств). Поэтому вопрос о природе и значении интуиции отнюдь не упраздняется с формализацией математики. Как отмечалось в § 3, математическая интуиция не потеряла своего значения как средства доказательства, что выразилось в тезисе Гильберта, который утверждает эквивалентность интуитивных и формальных доказательств. В наше время истинность этого тезиса не вызывает сомнений хотя бы потому, что он фактически отражает общепризнанные свойства математических доказательств. В эвристическом же отношении интуиция по-прежнему остаётся основным средством получения доказательств. К сожалению, до сих пор изучением этого явления занимались, как правило, только философы, хотя вопрос о природе интуиции безусловно заслуживает научного изучения.

§ 11. Заключение

В заключение скажем несколько слов о некоторых проблемах и перспективах оснований математики. Следует сразу заметить, что основное развитие математики происходит традиционными методами без оглядки на состояние оснований. При этом, как и во все предыдущие времена, игнорирование обоснования, как правило, не приводит к каким-либо непоправимым катастрофам и «кризисам». Тем не менее вопрос оснований математики всегда будет актуальным в силу непрерывного расширения математических объектов и методов их изучения. Кроме того, остаются не до конца изученными многие интересные проблемы принципиального характера. Например, следующие.

— Изучение альтернативных теорий множеств с различными дополнительными аксиомами (например, ограничивающими класс кардиналов).

— Как скажется на свойствах математических теорий использование различных рекурсивно аксиоматизируемых фрагментов логики второго и выше порядка?

— Изучение разумных не финитных правил вывода и результатов их применения в математических теориях.

— Изучение возможности полных аксиоматизаций теорий путём погружения их в неконсервативные расширения.

Этот список можно продолжить, и это означает, что проблема оснований математики далека от своего завершения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асмус В. Ф. Проблема интуиции в философии и математике. — М.: Мысль, 1965.
2. Барвайс Дж. Введение в логику первого порядка. Справочная книга по математической логике. Ч. 1. — М.: Наука, 1982. [Перевод с английского: Handbook of mathematical logic. — Barwise J. (Ed), North-Holland P. C., 1977.]
3. Беляев Е. А., Перминов В. Я. Философские и методологические проблемы математики. — Изд-во Московского университета, 1981.
4. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994. [Перевод с английского: Boolos George S., Jeffrey Richard C. Computability and logic. — Cambridge University press, 1989.]
5. Бунге М. Интуиция и наука. — М.: Прогресс, 1967. [Перевод с английского: Bunge M. Intuition and Science. — New York, 1962.]
6. Бурбаки Н. Начала математики. Ч. 1, кн. 1. Теория множеств. — М.: Мир, 1965. [Перевод с французского: Elements de Mathematique par N. Bourbaki. Livre 1. Theorie des ensembles. — Troisieme edition, 1958.]
7. Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // УФН. — Т. 94, вып. 3. — 1968. — С. 535–546. [Перевод с английского: Wigner E. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // Comm. Pure and Appl. Math. — V. 131, 1. — 1960.]
8. Генцен Г. Непротиворечивость чистой теории чисел // Математическая теория логического вывода. — М.: Наука. — 1967. — С. 77–153. [Перевод с немецкого: Gentzen G. Die Wiederspruchsfreiheit der reinen Zahlenteorie // Math. Ann. — 112, № 4. — 1936. — P. 493–565.]
9. Генцен Г. Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел // Математическая теория логического вывода. — М.: Наука. — 1967. — С. 154–190. [Перевод с немецкого: Gentzen G. Neue Fassung des Wiederspruchsfreiheitsbeweises fur die reine Zahlentheorie // Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. — Neue Folge. — Heft 4. — 1939. — Leipzig (Hirzel). — P. 19–44.]
10. Гильберт Д. Основания геометрии. — М-Л.: ОГИЗ, 1948. (Добавление IX). [Перевод с немецкого: Grundlagen der Geometrie von Dr.David Hilbert. — Siebente Auflage. 1930, Leipzig und Berlin.]
11. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. — М.: ИЛ, — 1947. [Перевод с немецкого: Hilbert Von D., Ackermann W. Grundzuge der theoretischen Logik. — Zweite, verbesserte Auflage, New York, 1946.]
12. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. — Т. 1. — М.: Наука, 1979, Т. 2. — 1982. [Перевод с немецкого: Hilbert D., Bernays P. Grundlagen der Mathematik. — V. I. — Zweite Auflage. Springer-Verlag, 1968, II — 1970.]
13. Гречаный П. П., Попов П. А. Сто лет дороги в никуда. — М.: Новый Центр, 2003.
14. Декарт Р. Правила для руководства ума. Избранные произведения. М.1950. [Перевод с французского: Descartes R. Oeuvres, t. X. Paris, 1908.]
15. Кановей В. Г. Аксиома выбора и аксиома детерминированности. — М.: Наука, 1984.
16. Карнап Р. Значение и необходимость. — М.: ИЛ, 1959. [Перевод с английского: Carnap R. Meaning and necessity. — Chicago, 1956.]
17. Кац М., Улам С. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы. — М.: Мир, 1971. [Пер. с англ.: Kac Mark, Ulam Stanislaw M. Mathematics and Logic. Retrospect and Prospects. — N.-Y. Washington. London. 1968.]
18. Клайн М. Математика. Утрата определённости. — М.: Мир, 1984. [Перевод с английского: orris Kline. MATHEMATICS. The Loss of Certainty. — N-Y, Oxford University Press, 1980.]
19. Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957. [Перевод с английского: Introduction to metamathematics by Stephen Cole Kleene. — 1952. D. van Nostrand Company, inc. New York, Toronto.]
20. Кузнецов А. В. Полнота системы аксиом арифметики с правилом конструктивно-бесконечной индукции // УМН. — Т. 12, вып. 4. — 1957. — С. 218–219.
21. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
22. Марков А. А. Теория алгорифмов // Тр. Мат. Ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. — 42. — М-Л.: Изд. АН СССР. — 1954.
23. Математическая логика и её применения. — М.: Мир, 1965. [Перевод с английского: Logic, Methodology and Philosophy of Science. — Proceedings of the 1960 International Congress. Stanford, California, 1962.]

24. Математическая энциклопедия. — Т. 1. — М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1977.
25. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1971. [Перевод с английского: Introduction to Mathematical Logic by Elliot Mendelson. — D. Van Nostrand Company, Inc.]
26. Новиков П. С. On the consistency of certain logical calculus // Мат. сб. — 12 (54), вып. 2. — 1943. — С. 231–261.
27. Кн. Евгений Трубецкой. Смысл жизни. — М. 1918.
28. Философская энциклопедия. — Т. 1–5. — М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1960–1970.
29. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966. [Перевод с англ.: Fränkel Abraham A., Bar-Hillel Yehoshua. Foundations of Set Theory. — 1958. Amsterdam.]
30. Хлодовский И. Н. Новое доказательство непротиворечивости арифметики // УМН. — Т. 14, № 6. — 1959. — С. 105–140.
31. Шёнфилд Дж. Математическая логика. — М.: Наука, 1975. [Перевод с англ.: Shoenfield Josef R. Mathematical Logic. — Addison-Wesley Publishing Company. 1967.]
32. Church A. A note on the Entscheidungsproblem // J. Symbolic Logic. V. 1, № 3. — 1936.
33. Gödel K. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls // Mh. Math. Physik. Bd. — 37. — 1930.
34. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematika und verwandter Systeme // Mh. Math.Physik, Bd. — 38. — 1931.
35. Gödel K. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // Ergebnisse eines math. Koll. — 1932-33. — Heft 4. — P. 34–38.
36. Mostowski A. Models of axiomatic systems // Fund. Math. — 39. — 1952. — P. 133–158.
37. Russell B. Introduction to Mathematical Philosophy. — London. George Allen & Unwin, 1919.
38. Whitehead A. N., Russel B. Principia mathematica. — V. 1–3. — Cambridge, 1910–1913. (2-е изд., 1925–1927).

Поступило в редакцию 16 V 2006