

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Бахолдин И.Б.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
МНОГОВОЛНОВЫХ СТРУКТУР РАЗРЫВОВ
В СЛАБОДИССИПАТИВНЫХ МОДЕЛЯХ С ДИСПЕРСИЕЙ

Москва-2006

УДК 532.59+533.6+533.95

Бахолдин И.Б. Методы исследования многоволновых структур разрывов в слабодиссипативных моделях с дисперсией

Ранее разработанные методы исследования бездиссипативных и слабодиссипативных структур разрывов применены к исследованию разрывов с резонансными состояниями. На примере обобщенного уравнения Кортевега-Бюргера установлено, что для слабодиссипативных сред с дисперсией и нелинейностью встречаются три типа структур разрывов: стационарные, периодические по времени и стохастические. Стационарные слабодиссипативные структуры внутри себя содержат бездиссипативные структуры разрывов типа переходов между однородными или волновыми состояниями. Волновые состояния могут быть одноволновыми или резонансными многоволновыми. По одну из сторон от внутреннего бездиссипативного разрыва может иметься несколько волновых зон различного типа, описываемых усредненными уравнениями. Эти волновые зоны разделяются слабыми разрывами типа бифуркаций. Структура разрыва может быть не единственной. В связи с этим возникают гистерезисы, т. е. тип разрыва зависит от пути эволюции системы. Проведен общий анализ возможного набора разрывов для рассматриваемой слабодиссипативной модели с дисперсией.

Bakholdin I.B. Methods of analysis of multi-wave shock structures in low-dissipative models with dispersion

Previously developed methods of analysis of non-dissipative and low-dissipative shocks are applied for shocks with resonance states. It is found for the model described by generalized Korteweg–Burgers equation that three types of shock structures are observed: stationary, time-periodic and stochastic. Stationary low-dissipative structures contain internal non-dissipative shock structures. These structures are transitions between one-wave and resonance multi-wave states. Several wave zones of different type are observed for one side of the shock. These zones are described by averaged equations and divided by weak bifurcation type shocks. Shock structure may be not unique. The type of the shock depends on character of evolution of system. General analysis of all shocks for the model under consideration is fulfilled.

Содержание

1	Предварительный теоретический анализ	4
2	Зависимость типа разрыва от его амплитуды	9
3	Исследование стохастических и периодических решений	11
4	Исследование стационарных структур резонансного типа	12
5	Физическая интерпретация решений	22
6	Проблема неединственности структуры разрыва	22
7	Особенности использованного численного метода	25
8	Выводы и обсуждение	27

Введение

В работах [1]-[5] изложены основы теории бездиссипативных разрывов. При решении эволюционных уравнений в частных производных с дисперсией в случае начальных данных типа сглаженной ступеньки со временем возникают решения, в которых имеются волновые зоны и однородные состояния, описываемые некоторыми усредненными и упрощенными уравнениями соответственно. При таком описании решения оказываются автомодельными, а переходы между волновыми зонами или однородными состояниями рассматриваются как структуры бездиссипативных разрывов. В некоторых случаях решения со временем становятся хаотическими.

Методы теории бездиссипативных разрывов были обобщены для исследования структур разрывов в дисперсионных моделях со слабой диссипацией [5], [6]. Слабодиссипативные структуры разрывов представляют собой переходы между однородными состояниями, но внутри этих переходов также имеются волновые зоны, описываемые асимптотически, т.е. при стремлении параметра диссипации к нулю, усредненными уравнениями, отличающимися от усредненных уравнений в бездиссипативном случае только некоторыми дополнительными недифференциальными членами. Переходы между волновыми зонами или однородными состояниями, имеющиеся внутри слабодиссипативной структуры, как и в чисто бездиссипативном случае, рассматриваются как структуры бездиссипативных разрывов. Такой подход позволяет с одной стороны использовать методики теории бездиссипативных разрывов для анализа диссипативных структур, а с другой при исследовании бездиссипативных структур

позволяет заменять бездиссипативные уравнения слабодиссипативными, что во многих случаях упрощает задачу, поскольку у слабодиссипативных структур в отличие от аналогичных бездиссипативных автомодельных решений со временем не увеличивается протяженность волновых зон. Наглядно это демонстрируют результаты данной работы, где исследуются структуры разрывов для слабодиссипативного уравнения. Но в результате этого исследования выявляются и новые типы бездиссипативных структур.

Исследование различных решений задачи о структуре разрыва представляет прежде всего непосредственный практический интерес, например, для определения результатов воздействия ударной волны и разработки способов модификации ее структуры с целью снижения этого воздействия. Выявленные свойства периодических стохастических и стационарных структур разрывов могут быть использованы для обнаружения распространяющейся волны, оценки ее амплитуды и параметров среды при помощи акустических, оптических и электромагнитных измерений. Это исследование актуально также с математической точки зрения для развития методов решения гиперболических уравнений, см. п.б.

1 Предварительный теоретический анализ

В работе [3] рассматривались структуры бездиссипативных разрывов для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза

$$a_t + [b_1 a + a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx}]_x = 0 \quad (1.1)$$

Были выявлены разрывы солитонного типа (переход между однородным состоянием и периодическим состоянием, стремящимся при $t \rightarrow \infty$ к последовательности уединенных волн) и разрыв с излучением (переход между однородным состоянием и последовательностью уединенных волн) в случае $b_3 b_5 < 0$, а также и разрыв с излучением и стохастические решения в случае $b_3 b_5 > 0$. В работе [6] в правую часть данного уравнения был включен диссипативный член, и для демонстрации возможностей методики была исследована слабодиссипативная структура разрыва с внутренним бездиссипативным разрывом с излучением. Задачей настоящей работы является получение полного представления о всех типах слабодиссипативных разрывов и возникающих при этом внутренних бездиссипативных разрывах для данной модели.

Исследуемое здесь обобщенное уравнение Кортевега–Бюргерса имеет вид

$$a_t + [b_1 a + a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx}]_x = \varepsilon a_{xx} \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2), как и обычное уравнение Кортевега–Бюргерса, описывает широкий круг физических явлений, например, распространение длинных волн

в жидкости при наличии ледового покрытия [7], [8] (в этом случае a — отклонение поверхности жидкости), частный случай ($b_3 = 0, \varepsilon = 0$) этого уравнения можно вывести для описания магнитозвуковых волн в холодной плазме [9].

В соответствии с результатами работы [1] тип бездиссипативного разрыва зависит от числа пересечений ветвей дисперсионной кривой по обе стороны разрыва и прямой, соответствующей его фазовой скорости. При этом в случае слабой диссипации бездиссипативные разрывы встраиваются внутрь диссипативной структуры, а волновые зоны в стационарных слабодиссипативных структурах описываются усредненными уравнениями [6]. Поэтому и в слабодиссипативном случае для анализа возможного типа разрыва следует рассмотреть дисперсионное соотношение, но уже для бездиссипативного варианта исследуемой системы, т.е. для уравнения (1.1).

Дисперсионное соотношение для уравнения (1.1) имеет вид:

$$\omega = (b_1 + a_e)k - b_3k^3 + b_5k^5 \quad (1.3)$$

Здесь a_e однородное состояние, относительно которого производится линеаризация уравнения. В случае $b_3b_5 < 0$ дисперсионная кривая не имеет точек перегиба, поэтому прямая $U = \omega/k$ либо один раз пересекает дисперсионную кривую при $k > 0$, либо не пересекает ее. Первый случай соответствует одной стороне разрыва, второй случай — другой стороне. При этом для того, чтобы определить конкретный тип разрыва следует найти значения k как решения системы уравнений

$$\omega = (b_1 + a_{1,2})k - b_3k^3 + b_5k^5, \quad U = \frac{\omega}{k} \quad (1.4)$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены значения справа и слева от разрыва.

В случае $b_3b_5 < 0$ при расчете уравнения (1.1) с начальными данными типа сглаженной ступеньки со временем возникает решение, которое при использовании усредненных уравнений можно рассматривать как автомодельное (зависящее от x/t). В этом решении однородное состояние и волновая зона разделяются разрывами. В зависимости от значения величины U в бездиссипативном случае при $b_3b_5 < 0$ теория предсказывает два типа разрыва: солитонный тип и разрыв с излучением. В обоих случаях структура разрыва представляет собой переход между однородным и периодическим состоянием, при этом в первом случае в пределе при $t \rightarrow \infty$ эта последовательность стремится к последовательности уединенных волн. Если значения k для одной из сторон комплексны, то может возникнуть разрыв с излучением, а если действительны, — то разрыв солитонного типа, что и подтверждается расчетами.

В случае наличия слабой диссипации те же разрывы включаются внутрь слабодиссипативных структур. Единственное отличие в том, что в при наличии диссипации $U = (a_1 + a_2)/2$ (данное соотношение получается из закона

сохранения, в виде которого можно представить рассматриваемое уравнение [6]), тогда как в бездиссипативном случае эта величина может быть получена только в результате решения уравнений в частных производных или системы усредненных уравнений [3].

В случае $b_3 b_5 > 0$ дисперсионная ветвь имеет одну точку перегиба. Имеется два случая возможного разрыва. В случае, когда для одной из сторон разрыва пересечения нет, корни уравнения (1.4) комплексны, а для другой имеется два действительных и два мнимых, согласно теории может существовать структура типа разрыва с излучением. Ранее такая структура была найдена как посредством численного решения уравнения в частных производных, так и посредством анализа системы уравнений бегущих волн [3]. В случае, когда для одной из сторон разрыва два действительных и два мнимых корня (одно пересечение), а для другой — четыре действительных (два пересечения), теория, построенная из предположения о том, что нелинейные решения воспроизводят свойства линейных, предсказывает отсутствие эволюционных структур разрыва. Расчет уравнения (1.1) действительно показывает появление решений стохастического типа. Однако оказалось, что такие решения могут наблюдаться и тогда, когда корни комплексны, т.е. граница перехода от регулярных решений к стохастическим не совпадает с критерием, основанном на комплексности корней. Можно также предположить, что имеет место гистерезис: тип решения зависит от начальных стадий эволюции системы. Таким образом, интерес для дальнейшего исследования в слабодиссипативном случае представляет собой именно вариант $b_3 b_5 < 0$, в особенности анализ условий перехода от регулярных решений к стохастическим а также характер поведения решений в случае, когда имеется четыре действительных корня. Приведенные ниже исследования показывают, что в слабодиссипативном случае также наблюдается гистерезис при переходе от регулярных решений к разрывам с излучаемой волной к стохастическим решениям, но там, где в бездиссипативном случае решения были стохастическими возможны регулярные стационарные решения, а также решения, периодически колеблющиеся по времени.

Ранее [10], [11] для уравнения (1.1) были исследованы стационарные ограниченные решения уравнений бегущих волн. При этом было введено понятие так называемого резонансного дерева. Напомним основные принципы метода исследования стационарных решений. Рассмотрим уравнения бегущих волн для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза. Для этого положим производную по времени равной нулю и один раз проинтегрируем полученное уравнение, это уравнение эквивалентно некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$b_1 a + a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx} = c \equiv \frac{d}{dx} \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u}),$$

$$\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T, \quad \mathbf{F} = \left(u_1, u_2, u_3, \frac{c - b_1 u_0 - u_0^2/2 - b_3 u_2}{b_5} \right)^T, \quad (1.5)$$

$$u_i = \frac{\partial^i a}{\partial x^i}, \quad c = b_1 u_{00} + u_{00}^2/2 + b_3 u_{20} + b_5 u_{40}$$

Начальные данные здесь следующие: $u_i|_{x=0} = u_{i0}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Величина u_{40} требуется только для вычисления константы c . Рассмотрим все ограниченные решения данной системы. Поскольку величина c может варьироваться путем изменения u_{00} (а также b_1), то не теряя общности рассуждений положим эту величину равной нулю. Величина u_{40} таким образом из рассмотрения исключается. Варьируя данные $(u_{00}, u_{10}, u_{20}, u_{30}, b_1)$ решая численно систему (1.5) выявим в пространстве соответствующих переменных область начальных данных, соответствующих ограниченными решениям.

Представление об этой области дает сечение плоскостью $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, показанное на рис.1, l_1, l_2, l_3, l_4 - некоторые асимптотические лучи, между которыми заключена рассматриваемая фигура. Двумерная область ограниченных решений представляет собой некоторую перистую фигуру, составленную из так называемых резонансных листьев — двумерных областей которым соответствуют двухволновые решения с фиксированным рациональным соотношением периодов волн и наличием фазовых колебаний между ними. Поэтому эта область и была названа резонансным деревом, "стволы" резонансного дерева (положительная полуось b_1 и продолжение луча l_1 в обратном направлении) соответствуют состоянию равновесия системы (1.5). Дерево в силу наличия определенной эквивалентности вариаций u_0 и b_1 состоит из двух однотипных фрагментов, расположенных в области $b_1 > 0$ и $b_1 < 0$ (верхний фрагмент можно взаимнооднозначно отобразить в нижний с помощью некоторого преобразования). В свою очередь каждый из этих фрагментов состоит еще из двух подфрагментов I и II. Ориентируясь на верхний фрагмент будем называть их верхним и нижним ярусами. Наиболее выделяются листья серии $1/n$ (серия I), где $n = 2, 3, 4, \dots$, расположенные ближе к началу координат и образующие нижний ярус дерева и серии $n/(n+1)$ (серия II), образующие верхний ярус. Ярусы соединяются друг с другом у ствола резонансного дерева, т.е. у прямой, которой соответствуют решения в виде константы. Кроме того, двумерное сечение резонанс-

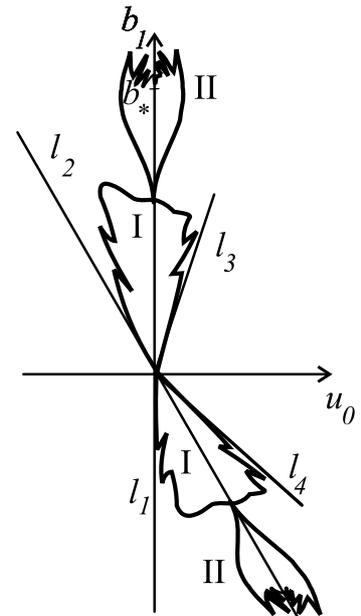


Рис. 1

ного дерева включает в себя одномерные нерезонансные ветви, расположенные вблизи ствола, а также резонансные чисто периодические ветви, которые либо находятся внутри резонансных листьев, либо как и листья врезаются в область неограниченных решений. Заметим, что резонанс $1/2$ можно отнести как серии резонансов I, так и серии II. Резонансный лист $1/2$ был обнаружен в нижнем ярусе резонансного дерева. Но это не исключает наличия решений, соответствующих верхнему ярусу. Наличие резонансных ветвей, врезающихся внутрь области неограниченных решений позволяет сделать предположение о том, что в некоторых случаях резонансные стационарные двухволновые решения оказываются притягивающими решениями, что и подтверждается приведенными ниже исследованиями.

Ранее были разработаны методы поиска структуры разрыва как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4], [5]. Помимо теоретически прогнозируемых и наблюдаемых в численном эксперименте эволюционных структур разрывов с излучением для уравнения (1.1) были обнаружены структуры типа переходов между периодическими одноволновыми и периодическими двухволновыми резонансными состояниями. Для заданного значения скорости и заданного значения c , см. (1.5), имеется несколько однопараметрических семейств решений рассматриваемого типа. Иначе говоря, амплитуда излучаемой волны может быть определена в некоторых пределах произвольно, в отличие от ранее исследованного [3] эволюционного разрыва с излучением, где при тех же условиях амплитуда излучаемой волны вполне определена. Вопрос об эволюционности таких структур и наблюдаемости их в нестационарной задаче оставался открытым. Помимо метода поиска структур разрывов был разработан и метод поиска периодических стационарных решений. Обнаружилось, что существует счетное множество трехпараметрических семейств таких решений, одно из семейств следует рассматривать как одноволновое решение, другие семейства — как резонансные многоволновые решения с различными счетными отношениями периодов волн. Таким образом, по своим параметрическим свойствам семейства одноволновых и многоволновых периодических решений равноценны. Поэтому на базе многоволновых решений, как и на базе одноволновых, можно вывести усредненные уравнения, которые будут описывать возможно существующие резонансные волновые зоны. Исследования, приведенные ниже, показали, что такие зоны действительно существуют, наблюдаются и стационарные бездиссипативные разрывы типа переходов между одноволновыми и многоволновыми резонансными состояниями, однако это решения несколько иного типа, чем тот который описан в [4], [5] — волновые зоны в найденных решениях образованы периодическими волнами несимметричного типа.

2 Зависимость типа разрыва от его амплитуды

Положим $b_5 = b_3 = 1$, $b_1 = -U = -(a_1 + a_2)/2$ [6], [5]. Начальные данные для численного эксперимента возьмем в виде $a = \Delta a(1 - \tanh((x - \delta)/l))/2$, ($a_1 = 0$, $a_2 = \Delta a$). С целью выявления всех возможных типов установившихся решений будем изменять амплитуду начального разрыва Δa и параметр ε , при этом возможна также вариация параметра l с целью определения зависимости типа решения от начальных данных. Вариация величины ε возможна как изначально для всего расчета, так и в процессе расчета, в зависимости от характера вариации конечное установившееся решение при этом может быть различным.

Методика определения типа установившегося решения следующая. Рассматривается график величины $\max_x(a)$ в зависимости от времени, возможно три варианта: график при $t \rightarrow +\infty$ стремится к некоторой константе, становится некоторой периодической функцией или выходит на стохастический режим. Соответственно возникает стационарная, периодическая по времени или стохастическая слабодиссипативная структура разрыва. На рис.2 представлена общая схема зависимости типа решения от амплитуды разрыва Δa и диссипативного параметра ε , полученная как результат анализа численных экспериментов, а также аналитических исследований, приведенных ниже.

В некоторых областях для одних и тех же значений параметров возможно несколько типов решений: стационарное, периодическое, стохастическое. На рис.2 показаны линии, ограничивающие зоны соответствующих решений.

Зафиксируем величину Δa и будем рассматривать, как меняется тип решения, если параметр ε пробегает значения от бесконечности до нуля. Очевидно, что при больших значениях ε установившееся решение всегда будет стационарным. При уменьшении параметра ε может появиться значение, при котором возможно и стохастическое нестационарное решение, возникающее при соответствующем выборе начальных данных, стационарное решение при этом сохраняется. Граница соответствующей зоны отмечена кривой 1.

Имеются интервалы параметра Δa , для которых по мере дальнейшего уменьшения параметра диссипации стационарное решение замещается периодическим по времени или стохастическим решением (граница соответствующих областей отмечена как кривая 2). Далее, если есть периодическое решение, то по мере уменьшения параметра диссипации периодическое оно замещается стохастическим. При этом в областях, где есть периодическое решение может существовать и стохастическое. Его можно получить при соответствующем выборе начальных данных, или же если диссипативный параметр уменьшать не постепенно, а сразу взять его малым. В целом зависимость типа решения от диссипативного параметра сходна с той, что наблюдается при турбулентных процессах [13]. Так анализируя график зависимости $\max(a)(t)$

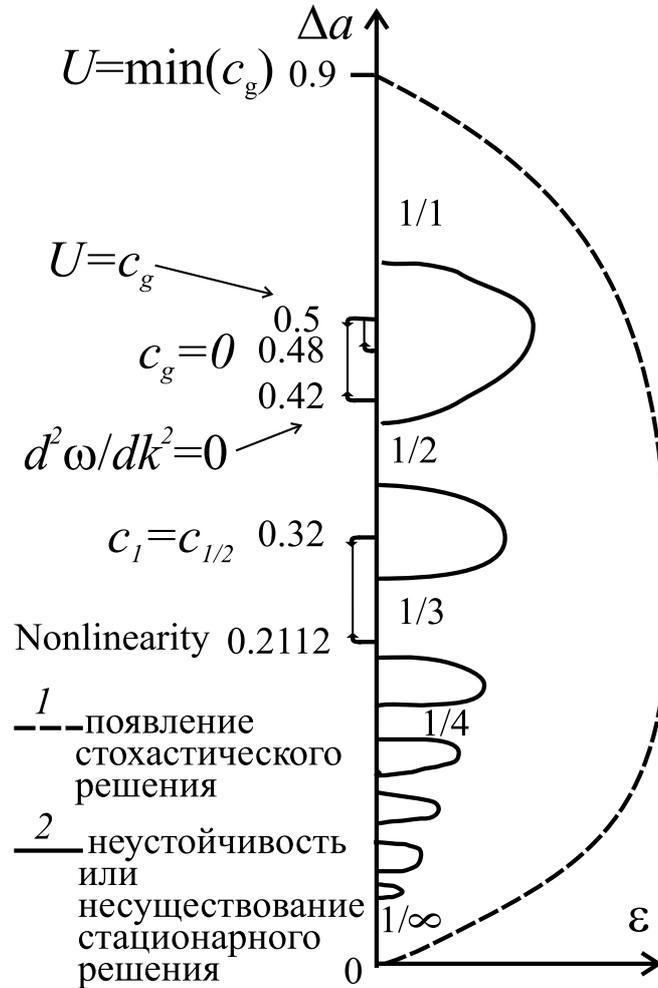


Рис. 2

при изменении параметра ϵ , показанный на рис.3, можно прийти к выводу, что в данном случае переход от от стационарного решения к периодическому можно рассматривать как бифуркацию Хопфа [13], поэтому можно предположить, что помимо устойчивого периодического решения для данных областей существует еще и неустойчивое стационарное решение.

Для других интервалов параметра Δa сохраняется устойчивое стационарное решение при $\epsilon \rightarrow 0$, хотя при этом существует еще и стохастическое решение, которое можно получить, если сразу сделать параметр диссипации малым. Исследование показывает, что для таких областей существует стационарное решение с внутренним бездиссипативным разрывом резонансного типа, описываемое усредненными уравнениями. Это решение рассматривается в разделе 4.

Имеется также область значений $\Delta a > \delta_* = 0.9$ (при этом условии минимальная групповая скорость в области слева от разрыва, больше его скорости U , поэтому слева от разрыва волн нет), для которой существует только стационарное решение с внутренним бездиссипативным разрывом типа перехода между однородным и одноволновым состоянием. Фактически решения для

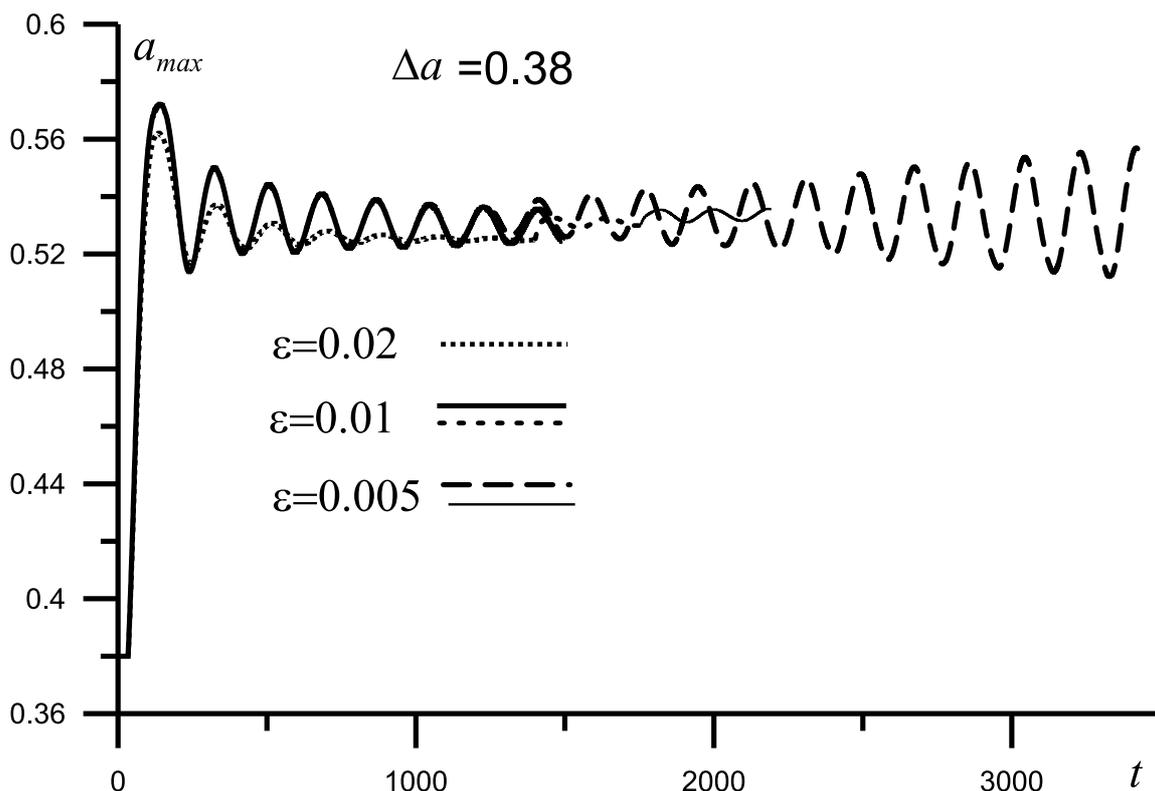


Рис. 3

Исследование зависимости решения от значения параметра ε . Численный эксперимент №1: вначале $\varepsilon = 0.001$ — тенденция к формированию стационарного решения (значение ε близко к границе устойчивости), далее замена $\varepsilon = 0.005$ — рост колебаний и переход к периодическому решению. Численный эксперимент №2: вначале $\varepsilon = 0.02$ — стационарное решение сформировалось, далее $\varepsilon = 0.01$ — колебания медленно затухают, далее $\varepsilon = 0.005$ — как и в эксперименте №1 колебания начинают расти.

этой области уже исследовались в работах [3], [6].

3 Исследование стохастических и периодических решений

Для описания нестационарных волновых зон можно применить статистические методы усреднения, и, перейдя в систему координат, движущуюся со скоростью диссипативного разрыва $U = \Delta a/2$ получить усредненные уравнения, связывающие средние по времени показатели нестационарной структуры разрыва:

$$-UM(a)_x + [(M(a)^2 + D(a))/2]_x + b_3M(a)_{xx} + b_5M(a)_{xxxx} = \varepsilon M(a)_{xx}$$

$$M(a) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a(t)}{T}, \quad D(a) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{[a(t) - M(a)]^2}{T}, \quad T = t_2 - t_1$$

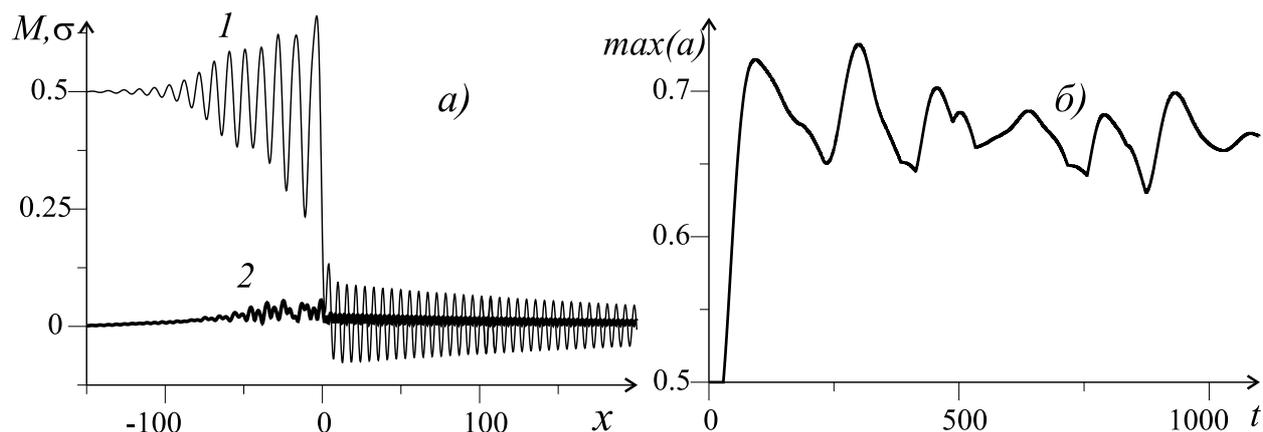


Рис. 4

Здесь T — достаточно протяженный интервал времени. Интегралы можно аппроксимировать конечными суммами значений $a(t)$ в последовательные расчетные моменты времени $t = n\Delta t$, примеры найденных численно оценок значений $M(a)(x)$ (кривая 1) и $\sigma(a)(x) = \sqrt{D(a)(x)}$ (кривая 2) приведены на рис.4а, график зависимости $a(t)$, демонстрирующий то, что решение носит стохастический характер показан на рис.4б. Можно вывести и усредненные уравнения для моментов более высокого порядка. Такой подход может дать законченный количественный результат только если цепочку моментных уравнений можно усечь, пренебрегая моментами высшего порядка. Например, в случае, показанном на рис.4а ($\Delta a = 0.5$, 1 — график величины $M(x)$, 2 — график величины $\sigma(x)$), пренебрежимо мала величина $D(a)$. Заметим, что такой статистический подход корректен именно для диссипативного случая. В бездиссипативном случае фактор, тормозящий нарастание хаоса, отсутствует, поэтому при рассмотрении автомодельных зависимостей $M(a) = g_1(x/t)$, $D(a) = g_2(x/t)$ может оказаться, что эти величины вовсе не выходят на предельные стационарные значения.

Этот же подход применим и к периодическим по времени решениям с той разницей, что здесь достаточно сделать усреднение по периоду. На рис.5а показан пример графиков a_{xx} для фрагмента периодического решения, взятых через равные промежутки времени и сдвинутых по вертикали для удобства просмотра, охвачен приблизительно один период, см. рис.5б, где показана зависимость максимального значения амплитуды от времени, $\Delta a = 0.4$.

4 Исследование стационарных структур резонансного типа

Типичный пример установившихся графиков a и a_{xx} в случае структуры резонансного типа показан на рис.6 (резонанс при $n = 3$ по приведенной ниже классификации).

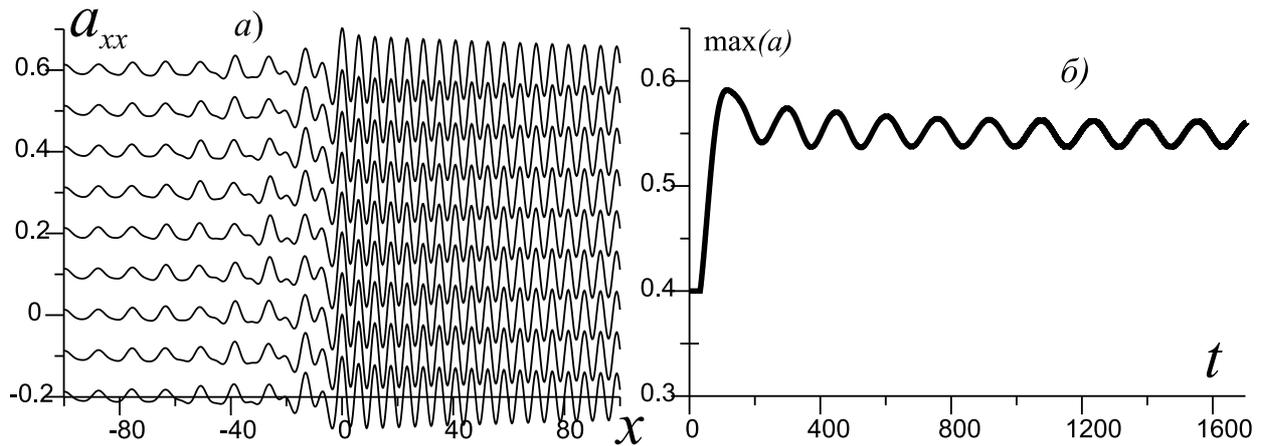


Рис. 5

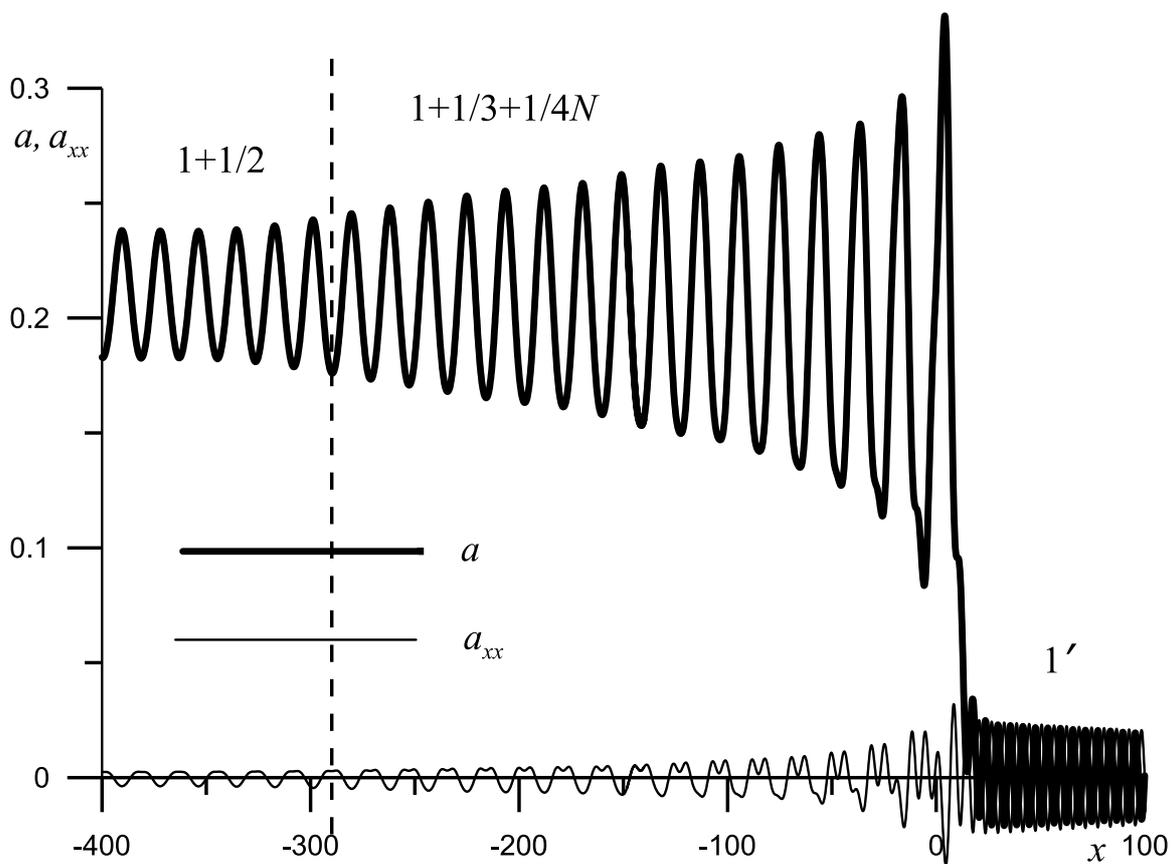


Рис. 6

Общая схема такого решения представлена на рис.7а. Решение в наиболее общем случае содержит три волновые зоны, описываемые усредненными уравнениями (уравнения и их вывод для одноволнового случая приведены в работах [6], [5], отличие метода в случае резонансных многоволновых решений состоит только в способе поиска периодических решений, см. ниже). Две из них разделяются бездиссипативным разрывом резонансного типа, а две другие — слабым разрывом типа бифуркации. Общая схема решения: $1 + 1/(n-1) | 1 + 1/n + 1/(n+1)N || 1'$, $n = 3, 4, \dots$; Здесь различные элементы

решения рассматриваются слева направо (как на графике) и имеют следующие обозначения: $1 + 1/n$ - волновая зона, в которой волна интерпретируется как сумма двух волн, у которых отношение пространственных периодов равно n , $|$ - слабый разрыв типа бифуркации, $1 + 1/n + 1/(n + 1)$ - переходная зона с периодической волной несимметричного типа (отмечено буквой N), причина такого обозначения понятна из схемы, показанной на рис.8а (подробный разбор ее дается ниже), эти волны соответствуют переходной ветви, $||$ - сильный разрыв типа перехода между областью с резонансным взаимодействием волн и одноволновой областью, $1'$ - одноволновая область. Если рассматривать графики дисперсионной кривой и прямой $U = \omega/k$, то волну 1 условно можно сопоставлять с первым пересечением, волны $1/n$, $1/(n + 1)$, $1/(n + 2)$ - со вторым пересечением, волну $1'$ - со случаем, когда пересечение только одно. Стартовое решение серии имеет схему $1 + 1/2N||1'$ ($n = 2$), см. рис.7б. Формально ранее исследованное решение с разрывом с одной излучаемой волной можно обозначить как решение типа $1/1||1'$ ($n = 1$). В соответствии с этой классификацией и даны обозначения вида $1/n$ интервалов на рис.2. Предельным решением серии является решение с разрывом типа обобщенной уединенной волны $1 + 1/\infty||1'$, см. рис.7в.

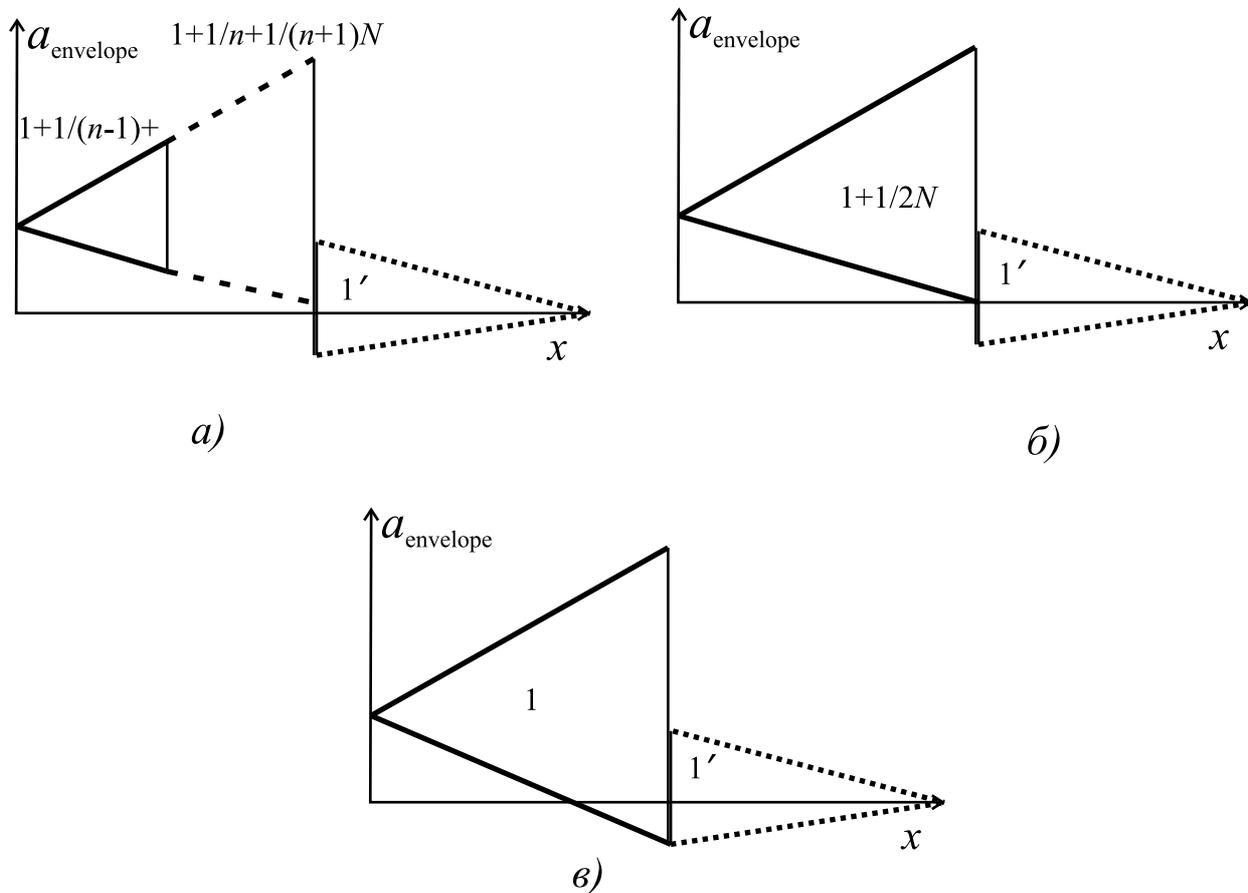
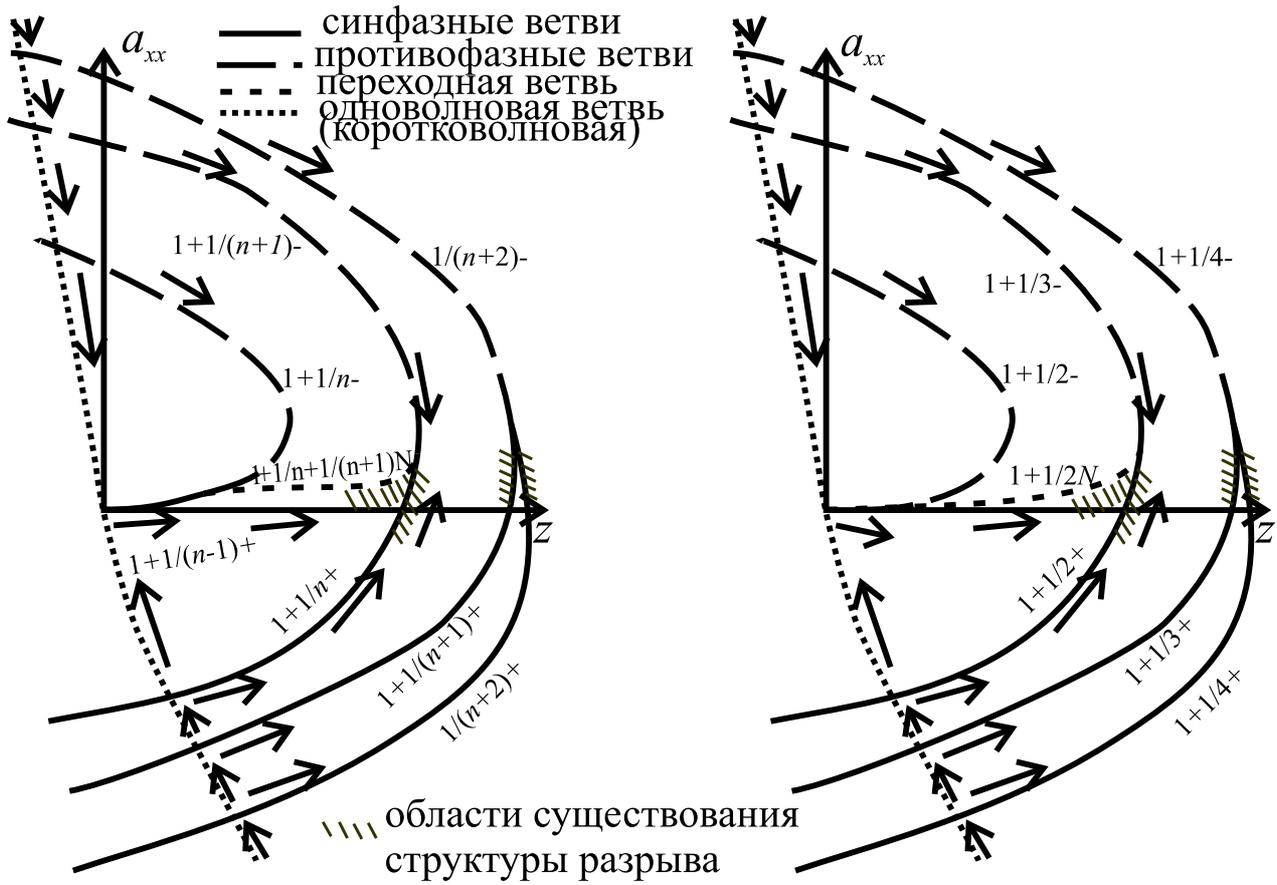
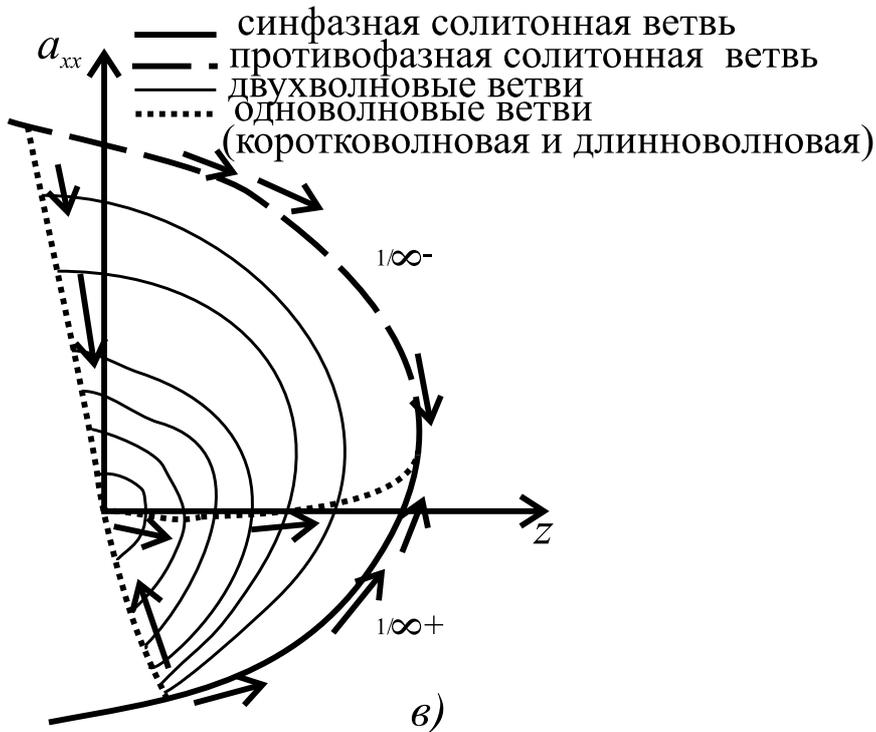


Рис. 7



а)

б)



в)

Рис. 8

При составлении данной схемы учитывались также и некоторые аналитические результаты. Согласно теореме о центральном многообразии [14] существует некоторый интервал $0 < \Delta a < \delta_\infty$, для которого все слабонелинейные решения системы (1.5) аналогичны решениям динамической системы второго порядка, такой же как и в случае классического уравнения Кортевега–де Вриза, у которой есть решения только в виде периодических и одиночных уединенных волн (не мультисолитонов). То есть у полной системы (1.5) нет решений в виде структур разрывов, но есть решение в виде одиночной обобщенной уединенной волны. Численный анализ системы (1.5) показывает, что граница рассматриваемого интервала соответствует $\Delta a \approx 0.04$, при меньших значениях Δa мультисолитоны отсутствуют (метод поиска обобщенных уединенных волн и мультисолитонов изложен в [4], [5]). При этом имеются также периодические решения, которые непрерывно примыкают к этому решению (см. рис.8в), что и позволяет построить решение с внутренним слабодиссипативным разрывом обобщенно-солитонного типа. Очевидно это решение является предельным решением рассматриваемой серии с конечными значениями n .

С другой стороны также согласно теореме о центральном многообразии существует аналогичный интервал $0.5 < \Delta a < \Delta_{1/1}$, для которого среди слабонелинейных решений имеется только решение в виде обобщенного 1:1-солитона. Решение в виде интересующей нас структуры разрыва в рассматриваемом случае не является слабонелинейным, но можно применить более простое утверждение о том что любое стационарное решение полной системы при $\Delta a \rightarrow 0.5+$ может быть с точностью до сколь угодно высокого порядка приблизительно описано динамической системой того же типа, что и система стационарных решений нелинейного уравнения Шредингера. Это означает, что среди стационарных ограниченных решений возможны только решения типа последовательностей уединенных волн разнесенных на достаточно большое расстояние (пример графика такого решения показан в работе [2]), но не решения, где такие уединенные волны группируются близко друг другу, а поэтому невозможны и структуры типа переходов от однородного состояния к периодическому, см. метод поиска структуры разрыва с излучением как предельного решения последовательностей мультисолитонов [3].

На схеме, приведенной на рис.8а, показано наиболее типичное для случая, когда существует стационарное решение усредненных уравнений типа структуры слабодиссипативного разрыва, расположение на плоскости (z, a_{xx}) ветвей симметричных периодических решений, соответствующих описанным выше волновым состояниям. Здесь z значение u_0 при $u_1 = u_3$ при $t = 0$, a_{xx} - значение u_2 при $t = 0$. При исследовании удобно сделать сдвиг и рассматривать величину $z' = z - \Delta a$ и величину $a'_{xx} = a_{xx} - a_{xxl}$ где a_{xxl} значение второй производной для длинной линейной волны, амплитуды z , тогда длинноволновая нелинейная ветвь будет касаться оси z в начале координат, что удобно

для ее распознавания. Здесь и на рис.9 подразумевается, что использованы именно такие переменные, а штрихи опущены.

Ветви были построены с помощью программы поиска симметричного периодического решения, в которой задается параметр n - число локальных экстремумов от начальной точки периода до точки, где решение продолжится симметричным образом (методы поиска периодических решений описаны в [4], [5], [6]). Для каждого значения z программа находит методом пристрелки значение a_{xx} соответствующее периодическому решению и заданному значению n . На схеме знаком плюс отмечены ветви субъективно воспринимаемые как соответствующие синфазному взаимодействию волн и знаком минус — как противофазному. Таким образом строятся графики не всех возможных ветвей периодических решений, а только тех, которые имеют отношение к исследуемому решению. Показана также гипотетическая переходная ветвь несимметричного решения, соединяющая две бифуркационные точки. На рис.8а штрихами отмечены зоны, для которых должна иметься структура разрыва типа перехода между резонансным многоволновым и одноволновым состоянием (метод поиска структур типа переходов между одноволновым и двухволновым резонансным состоянием описан в [4], [5]). На рис.8б и рис.8в показаны варианты этой же схемы при $n = 2$ и $n = \infty$.

Решение усредненных уравнений в стационарном случае сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения, выражающего тот факт, что при уменьшении x поток энергии падает в силу воздействия диссипации [6], [5]:

$$\frac{dE}{dX} = -\varepsilon \langle a_x^2 \rangle, \quad E = zP + Vz^2/2 - z^3/6 + b_5 \tilde{a}_{xx}(0)/2, \quad P = const$$

Здесь X — медленная переменная, $\langle \rangle$ — усреднение по времени. Заметим, что согласно этим уравнениям, решения, описывающие огибающие волновых зон, для двух разных значений ε_1 и ε_2 получаются друг из друга растяжением по координате x в $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ раз. Это использовалось для проверки наличия стационарного решения усредненных уравнений путем непосредственного расчета уравнения (1.2).

Для проверки возможности построения решения, в котором поток энергии уменьшается с уменьшением x рассматривалась бифуркационная диаграмма, аналогичная показанной на рис.9, но в переменных (z, E) , с целью выяснения направлений уменьшения потока энергии. Результаты этого исследования показаны на рис.8 стрелками, указывающими направления уменьшения потока энергии или что то же самое, направления роста x . Из диаграммы видно, что рассматриваемое решение действительно можно построить. Для того чтобы найти решение, описывающее слабодиссипативную структуру разрыва следует последовательно проинтегрировать это уравнение вначале вдоль симметричной ветви $1 + 1/n$ от состояния равновесия за разрывом и до точки

бифуркации, далее вдоль несимметричной переходной ветви до любой точки, для которой существует структура разрыва типа перехода между резонансным и одноволновым состоянием. Амплитуда волны перед разрывом находится с использованием интегралов импульса и энергии [3], [5]. Далее уравнение интегрируется для одноволнового состояния перед разрывом. Точка, в которой следует встраивать бездиссипативный разрыв таким образом определена в некоторых пределах произвольно, см. п.7. Было обнаружено, что фактически наблюдается разрыв с максимально возможной амплитудой волны, излучаемой вправо. Эта амплитуда совпадает с максимально возможной амплитудой периодической составляющей при которой существуют обобщенные уединенные волны при применении алгоритма их поиска, описанном в [4], [5]. При таком допущении решение определяется однозначно.

Исследование для интервала существования решения усредненных уравнений типа структуры разрыва при $n = 3$ показывает, что его границы определяются сверху тем, что при некотором значении Δa перестает существовать бифуркационная точка, а снизу — тем, что перестает существовать переход между резонансным состоянием и однородной волной.

На рис.9 показаны конкретные (просчитанные) примеры систем ветвей. Ветви показаны поточечно, расчет велся с некоторым шагом Δz . Для точек, соответствующих каждому значению $n = 1, 2, 3, 4, 5$ использовались специальные символы: круг, треугольник, и т.д. В связи с тем, что некоторые ветви рассчитываются несколькими способами (1 рассчитывается как 2, 3, 4, 5; 2 рассчитывается как 4), эти обозначения иногда накладываются друг на друга, поэтому минимальные значения n указаны непосредственно на рисунке цифрами со стрелкой.

На рис.9а показан случай, когда при $\varepsilon \rightarrow 0$ стационарного решения нет ($\Delta a = 0.3$), причем выбрано значение Δa вблизи верхней границы интервала существования решения. В этом случае нет бифуркации для ветви $1 + 1/2+$, исходящей из начала координат, невозможно перейти от точки A к точке B . При $\Delta a = 0.29$ и $\Delta a = 0.28$ разрыва ветви $1 + 1/2+$ нет, но стационарное решение наблюдается только при конечных значениях ε . Для $\Delta a = 0.28$ при уменьшении ε поведение графика $\max a(t)$ сходно с показанным на рис.3. Возможно здесь возникает бифуркация Хопфа, т.е. стационарное решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует но не устойчиво. При дальнейшем уменьшении величины Δa стационарное решение начинает наблюдаться и при малых значениях ε . Этот случай показан на рис.9б ($\Delta a = 0.21$), это типичный случай бифуркационной диаграммы, приведенной на рис.8а, значение Δa выбрано вблизи нижней границы интервала существования стационарного решения.

При дальнейшем уменьшении амплитуды разрыва ($\Delta a = 0.2$) стационарное решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ перестает наблюдаться при малых значениях ε , причем при уменьшении ε переход от стационарного решения к нестационарному но-

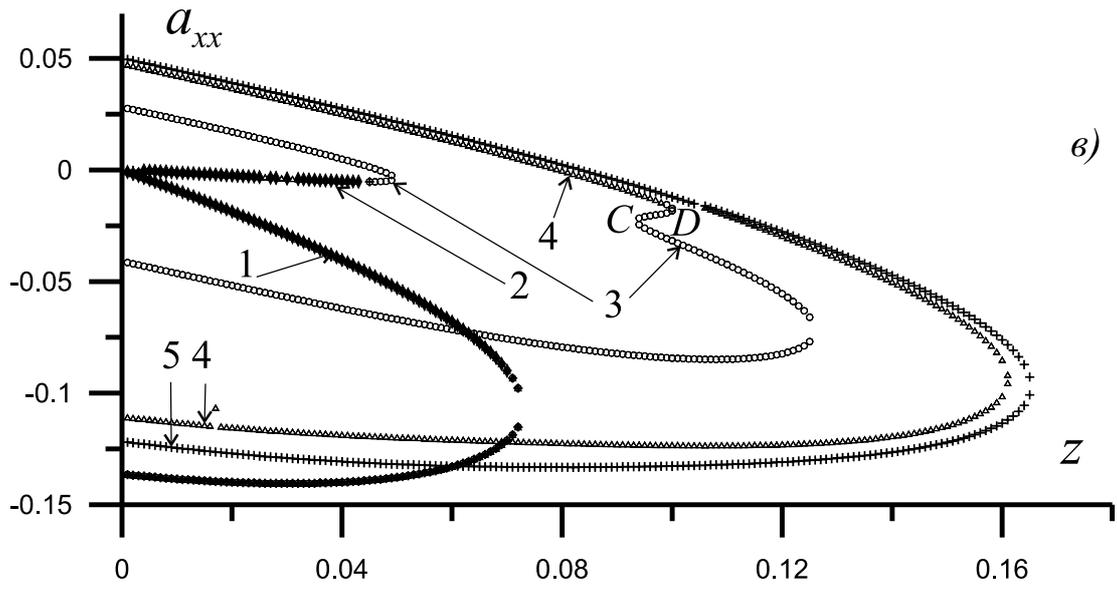
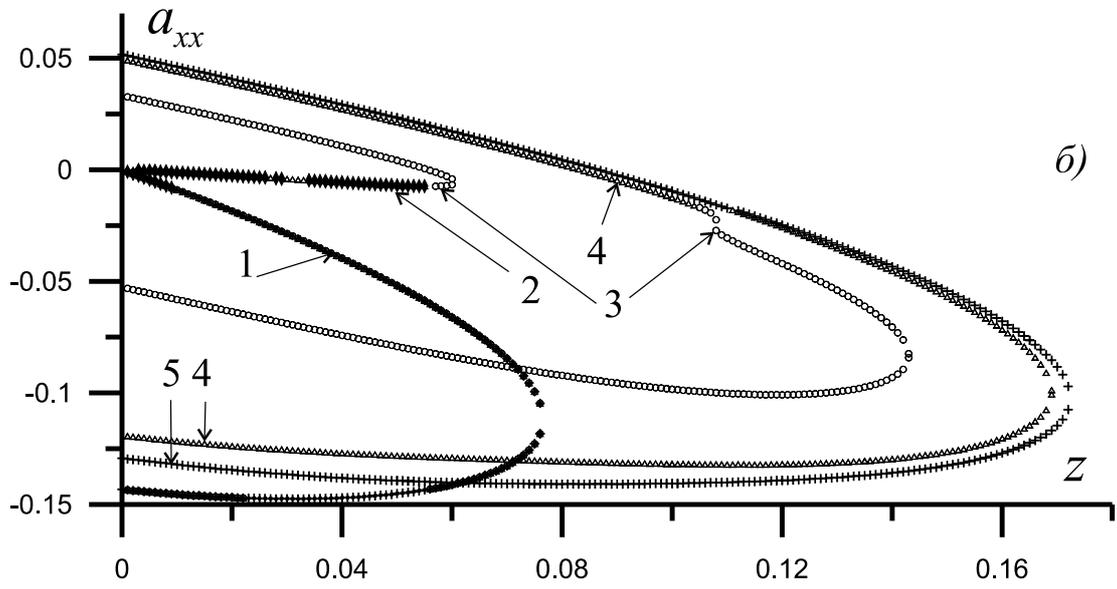
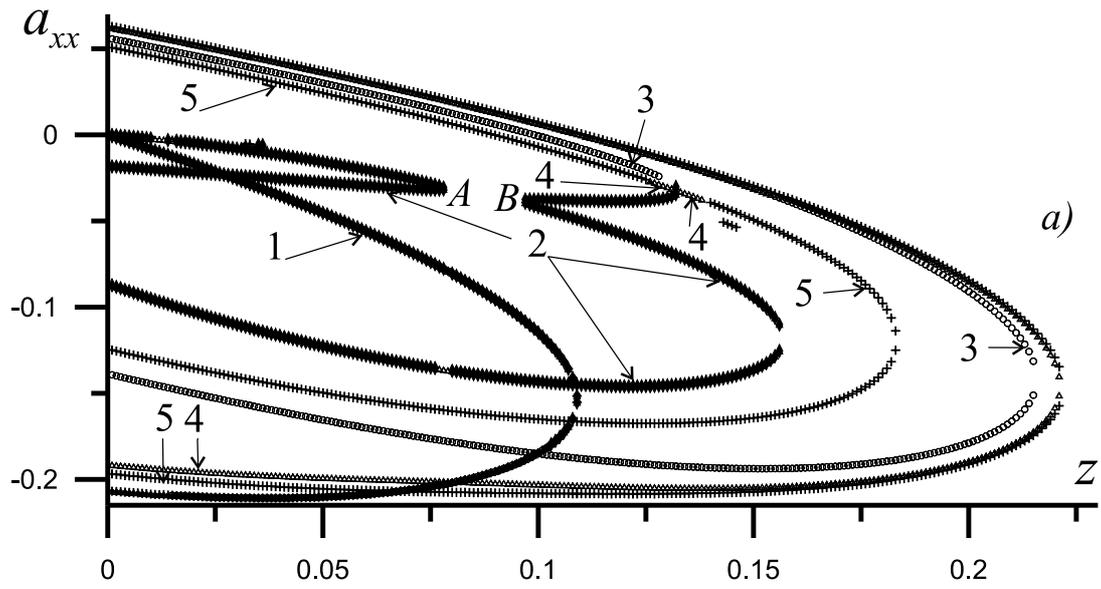


Рис. 9

сит резкий характер (как и в случае $\Delta a = 0.3$, когда стационарного решения усредненных уравнений нет), а не с постепенным нарастанием колебаний, как на рис.3. Система ветвей для этого случая показана на рис.9в. Отсутствие стационарного решения повидимому связано с тем, что исчезает структура внутреннего бездиссипативного разрыва на переходной ветви между $1 + 1/2+$ и $1 + 1/3+$. В то же время невозможно продолжение переходной ветви до бифуркационной точки на ветви $1 + 1/4+$, поскольку там уже есть ответвление симметричной ветви $1 + 1/5+$ (вырожденная вилкообразная бифуркация). Замечено, что при исчезновении стационарной структуры на синфазной ветви $1 + 1/3+$ образуется нечто вроде опрокинувшееся волны, см. рис.9в, на рис.9б уже заметно, что эта ветвь начинает искривляться. Поясним, почему это так. Исследование структур типа перехода между одноволновым периодическим состоянием и двухволновым резонансным состоянием показывает, что встречаются только структуры с переходом на синфазное двухволновое состояние. Решения ищутся как суперпозиция уединенных волн фиксированной амплитуды и периодической волны, амплитуда которой в некоторых пределах произвольна. Поэтому при росте амплитуды периодической волны растет и амплитуда обобщенного мультисолитона. При рассмотрении предельного решения в виде структуры разрыва амплитуде мультисолитона соответствует введенный выше параметр z . Но поток энергии для решения типа мультисолитона растет с ростом амплитуды периодической составляющей. Поэтому функция $E(z)$ должна быть монотонно возрастающей. Построив расчетный график $E(z)$ можно убедиться, что на участке CD эта функция монотонно убывающая, а поэтому для этого участка структуры разрыва быть не может. Исследование аналогичных графиков в случаях a и b показывает, что справа от бифуркационной точки для ветви $1 + 1/3+$ функция $E(z)$ монотонно возрастает, а слева от бифуркационной точки для ветви $1 + 1/4-$ — убывает. Таким образом следует ожидать, что в этих случаях бифуркационная точка является предельной точкой, для которой существует структура разрыва для рассматриваемых симметричных периодических ветвей. Логично предполагать, что если для бифуркационной точки существует структура бездиссипативного разрыва, то она существует и на части переходной ветви, ответвляющейся от этой точки, и наоборот, если в бифуркационной точке нет структуры бездиссипативного разрыва, то ее нет и на переходной ветви.

Похожие закономерности были выявлены при исследовании интервала существования для $n = 4$. Так, при дальнейшем снижении амплитуды разрыва при $\Delta a = 0.185$ в системе ветвей появляется исходящая из начала координат ветвь $1 + 1/3+$, не имеющая точки бифуркации и аналогичная ветви $1 + 1/2+$ на рис.9а, при $\Delta a = 0.18$ у рассматриваемой ветви появляется бифуркация. Конфигурация ветвей повторяется, но число n увеличивается на единицу.

Для $n = 2$ стационарное решение наблюдается при малых значениях ε на интервале $0.35 < \Delta a < 0.37$. При $\Delta a = 0.34$ и $\Delta a = 0.38$ переход от стационарных решений к нестационарным происходит по типу, показанному на фиг.3. При увеличении амплитуды разрыва периодические по времени установившиеся решения наблюдаются вплоть до $\Delta a = 0.48$ ($\varepsilon = 0.01$). Во всех этих случаях расположение ветвей такое, как показано на фиг.7б.

Таким образом, исследование бифуркаций ветвей периодических решений системы (1.5) позволяет локализовать границы интервалов существования стационарного решения, описывающего слабодиссипативную структуру разрыва.

Анализ численно полученных стационарных решений уравнения (1.2) при конечных значениях ε в случае, когда путем исследования систем ветвей можно установить, что решения усредненных уравнений, описывающие структуру разрыва, отсутствуют, показывает, что эти решения невозможно интерпретировать как решения усредненных уравнений.

Следует обратить внимание на то, что усредненные уравнения не обязательно должны относиться к гиперболическому типу. Стационарные решения слабодиссипативных уравнений в отличие от автомодельных решений бездиссипативных существуют и в случае, когда такие уравнения псевдогиперболические, т.е. с комплексными характеристическими скоростями. На рис.2 стрелками отмечены три участка, для которых в зоне слева от разрыва нелинейное уравнение Шредингера [12], описывающее слабонелинейные волновые пакеты, относится к так называемому самофокусирующемуся типу, т.е. типу для которого неустойчивы однородные периодические состояния, этим случаям соответствуют псевдогиперболические усредненные уравнения. Это следующие участки: $0.2112 < \Delta a < 0.32$ ($3/25 < k^2 < 1/5$) и $0.42 < \Delta a < 0.5$ ($3/10 < k^2 < 1/2$) — модуляционно неустойчивы длинные волны, $0.48 < \delta a < 0.5$ ($1/2 < k^2 < 3/5$) — модуляционно неустойчивы короткие волны. Границам участков соответствуют некоторые особые точки, среди которых в контексте проблем, рассматриваемых в данной работе, следует отметить $\Delta a = 0.32$ — линейный резонанс $1/2$ (численное исследование нелинейных решений показывает, что в этой точке отсутствует симметричная длинноволновая ветвь) и $\Delta a = 0.5$ — линейный резонанс $1/1$ (касание прямой $U = \omega/k$ и дисперсионной кривой). В рассмотренных стационарных решениях при достаточном удалении влево от внутреннего бездиссипативного разрыва волны можно рассматривать как слабонелинейные длинные, а значит описываемые нелинейным уравнением Шредингера. Тем не менее на части из рассматриваемых участков были выявлены стационарные решения и модуляционная неустойчивость не наблюдалась. Возможно эта неустойчивость носит конвективный характер или подавляется за счет диссипации.

5 Физическая интерпретация решений

На основе анализа дисперсионного соотношения можно прийти к выводу, что с физической точки зрения решение, представляющее собой структуру слабодиссипативного разрыва, должно содержать внутренний бездиссипативный разрыв, на котором излучаются две волны. Одна из них (короткая) излучается вправо, а другая (длинная) — влево. Но левая волна должна отражаться, поскольку соответствующая дисперсионная кривая имеет точку перегиба, что порождает каустику и отраженную короткую волну, излучаемую вправо. В свою очередь отраженная волна после взаимодействия с внутренним бездиссипативным разрывом может вызвать вновь отраженную волну, направленную влево, процесс отражений может повторяться многократно. Можно ожидать, что в результате этого процесса возникнет хаос, что и наблюдается в наиболее общем случае. С другой стороны многократные отражения могут стать упорядоченными при возникновении резонанса в системе, тогда решение станет периодическим по времени. Такие решения аналогичны собственным функциям, описывающим захват периодических волн в волноводах. Продолжая эту аналогию, можно вспомнить, что наличие таких решений зависит от ширины волновода, поэтому и наблюдаются они только при конечных значениях ε , т.е. при конечной ширине волновой зоны. Наконец многократных отражений может и не быть, тогда решение станет стационарным.

6 Проблема неединственности структуры разрыва

Согласно теории уравнений бегущих волн для диссипативных систем [6], [5] в слабодиссипативном случае при заданном значении Δa в принципе может быть конечное или счетное число стационарных структур разрывов и можно допустить, что однопараметрическому семейству решений усредненных уравнений соответствует конечное число слабодиссипативных структур, но они либо не наблюдаются при начальных данных рассматриваемого типа, либо неустойчивы.

Исходя из теоретических соображений, основанных на оценках размерностей инвариантных многообразий системы (1.5) [4], [5], можно утверждать, что для структуры разрыва типа перехода между резонансным и одноволновым периодическим состоянием для заданного значения скорости существует однопараметрическое семейство решений, т.е. амплитуда излучаемой волны в некоторых пределах может быть произвольной. Структура такого разрыва, может быть найдена как предел некоторой последовательности решений типа обобщенных уединенных волн. Численный анализ решений динамической системы (1.5) показывает, что существует минимальное и максимальное значение амплитуды излучаемой волны при которых существуют обобщенные уеди-

ненные волны. Сопоставление этих результатов с данными расчета структуры слабодиссипативного разрыва показывает, что реализуется решение именно с максимальным значением излучаемой волны. Заметим, что такое решение является решением с минимальной энергией (достигается минимум $\int_{x_1}^{x_2} a^2 dx$, x_1 и x_2 точки слева и справа от внутреннего бездиссипативного разрыва, достаточно удаленные от него), что соответствует предположению о том, что вследствие диссипации система опускается на минимально возможный энергетический уровень. Фактически таким образом выставляется дополнительное граничное условие на разрыве.

С другой стороны ранее было обнаружено, что для случая решения с внутренним бездиссипативным разрывом типа 1/1 вблизи границы существования решения для фиксированного значения Δa действительно имеется несколько структур с одинаковыми параметрами однородных состояний, эти структуры отличаются друг от друга только порядком расположения уединенных 1:1-уединенных волн, из которых они собраны, расположение уединенных волн в таких случаях "разреженное" [3]. Структуры такого типа при непосредственных расчетах обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза и Кортевега–Бюргерса не наблюдались. Заметим, что неединственность подобного типа (два решения) ранее была обнаружена для композитного материала в случае разрыва типа перехода между однородным и резонансным двухволновым состоянием [15].

По поводу неединственности континуального типа уместно сделать сопоставление с другой моделью, анализ которой нетрудно осуществить в полном объеме [2]. Для модифицированного уравнения Кортевега–Бюргерса

$$a_t + (a^3)_x + a_{xxx} = \varepsilon a_{xx}$$

можно формально, т.е. пользуясь только усредненными уравнениями, построить слабодиссипативные стационарные структуры разрывов, содержащие внутренние бездиссипативные разрывы типа кинков разрывов солитонного типа. Причем эти решения могут содержать любое число произвольно заданных параметров, а именно расстояний между внутренними бездиссипативными структурами, составляющими слабодиссипативную структуру. Но нетрудно также проверить непосредственно, исследуя динамические системы, описывающие стационарные решения, что таких структур нет как у модифицированного уравнения Кортевега–Бюргерса, так и у модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза. Реальным является только одно решение, не содержащее кинков. Этот пример показывает, что если решение слабодиссипативных усредненных уравнений содержит свободные параметры, как в случае, рассмотренном в п.4, то в реальности может оказаться, что существует только одно решение полной системы.

По поводу второго (дискретного) типа неединственности тоже можно при-

вести аналогии. Для модифицированного уравнения Кортевега–Бюргера с полиномом четвертой степени [16] а также для уравнений вязкоупругих сред [17], [18] (нескалярные модели со сложной нелинейностью) исследовались нестационарные (но автомодельные) решения задачи о распаде произвольного разрыва. Имеется неединственность этих решений, причем характер наблюдаемого решения зависит от начальных данных. Фактически для того, чтобы получить большинство решений требуется брать начальные данные не типа сглаженной ступеньки, а изначально включить в них все желаемые разрывы, т.е. это не есть данные для задачи о распаде произвольного разрыва в общепринятом смысле. Подобный прием для поиска структуры разрыва можно было бы применить и в данном случае, т.е. взять начальные данные, близкие к желаемой структуре разрыва и понаблюдать их эволюцию, однако это трудно осуществимо, в связи с тем, что непосредственное исследование динамической системы (1.5) при малых значениях ε затруднено. Поскольку рассматриваемые здесь решения стационарны, а не автомодельны, то не обязательно при таких численных экспериментах будет иметься аналогия в результатах.

Близко примыкающей к вопросу о единственности является и проблема регуляризации, а именно нахождение слабых решений гиперболических уравнений, например уравнения $a_t + P(a)_x = 0$, где $P(a)$ некоторая нелинейная функция как предельного решения уравнения вида:

$$a_t + P(a)_x = \varepsilon_2 a_{xx} + \varepsilon_3 a_{xxx} + \dots, \quad \{\varepsilon_i\} \rightarrow 0$$

Слабое решение зависит от выбора соотношений между коэффициентами ε_i , например, исходя из результатов работы [2] можно прийти к выводу, что для модифицированного уравнения Кортевега–Бюргера при разном выборе знака коэффициента при производной третьего порядка получаются совершенно разные предельные решения, при некоторых вариантах выбора коэффициентов можно рассматривать только предельное среднестатистическое решение.

Неединственность решения задачи о распаде произвольного разрыва означает некорректность постановки задачи о слабом решении в пространстве с интегральной среднеквадратической нормой. Тем не менее, если отказаться от этой нормы и рассматривать как базовую не задачу о распаде, а задачу о столкновении разрывов, то есть задачу, где в качестве начальных данных используются данные с конкретными структурами взаимодействующих разрывов, то в случае единственности этих решений (постановка задачи об эволюции некоторых непрерывных начальных данных становится корректной). При наличии единственности решения задачи о распаде произвольного разрыва задача о столкновении всегда имеет единственное решение, а в случае неединственности требует специального исследования. Задача о столкновении разрывов является, например, базовой в методе характеристик и в численных методах решения гиперболических уравнений, использующих выделение раз-

рыва. Пример расчета уравнений нелинейной геометрической оптики солитонов, приводящий к задаче о столкновениях разрывов имеется в [5].

В этой связи следует отметить, что в рассматриваемом случае проблема неединственности решения о структуре разрывов не оказывает влияния на проблему единственности слабых решений уравнения $a_t + (a^2)_x = 0$, поскольку задача о распаде разрыва здесь всегда разрешается однозначно, на макроскопическом уровне безразлично, какова структура разрыва: стохастическая, периодическая по времени или стационарная. Но тип структуры становится уже не безразличным том случае, если уравнение (1.2) рассматривается как модельное, а данные структуры исследуются с целью дальнейшего приложения к более полной не скалярной или сложнонелинейной модели, где возможны столкновения разрывов различных типов и неединственность решения задачи о распаде разрыва.

Итак, можно допустить, что помимо найденных есть еще какие-то стационарные решения, устойчивые или неустойчивые, а рассмотренные в п.4 стационарные решения называть первичными, т.е. получаемыми непрерывной эволюцией по параметру ε от ∞ до некоторого конечного значения, по аналогии с тем как в теории турбулентности вводится понятие "первичный режим" [13], т.е. режим, получаемый эволюцией из нулевого числа Рейнольдса.

7 Особенности использованного численного метода

Несколько слов о методике расчетов. По сравнению с методиками, описанными в работах [19], [6] были сделаны некоторые важные усовершенствования.

При расчетах применялась трехслойная численная схема с центральными разностями второго порядка точности по пространству и по времени при аппроксимации всех бездиссипативных членов, т.е. использовалась та же аппроксимация, что и в чисто бездиссипативном случае. Но диссипативный член εa_{xx} аппроксимировался по схеме Дюфорта–Франкеля (схема ромб):

$$a_{xx} = \frac{a_{k-1}^n + a_{k+1}^n - a_k^{n+1} - a_k^{n-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} a_{tt} + O(\Delta t^4 / \Delta x^2, \Delta x^2) \quad (7.1)$$

Ранее в диссипативных расчетах использовалась более простая аппроксимация диссипативного члена:

$$a_{xx} = \frac{a_{k+1}^n + a_{k-1}^n - 2a_k^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (7.2)$$

В случае уравнения теплопроводности схема, построенная на аппроксимации (7.1) абсолютно устойчива [20], но для обеспечения точности второго порядка требуется следить за выполнением соотношения $\Delta t = c\Delta x^2$. При расчетах обобщенного уравнения Кортевега–Бюргера, описанных в данной

работе, для поддержания устойчивости и для совместимости с чисто бездиссипативными расчетами включалось условие $\Delta t \ll \Delta x^5$, поэтому погрешность, вносимая схемным членом с a_{tt} здесь имеет порядок $c^2 \Delta x^8$. Фактически в расчетах выбиралась $c = 0.05$, $\Delta x = 0.25$, поэтому погрешность, связанная с аппроксимацией временной производной в виде (7.1), пренебрежимо мала и не оказывает влияния на качественное поведение решений. Это усовершенствование позволяет по одной программе проводить расчеты как бездиссипативных так и диссипативных моделей. Приведенная в [6] двухслойная схема с центральными пространственными разностями и с пересчетом по времени по методу Рунге-Кутты позволяла проводить только диссипативные расчеты, поскольку в ней схемные эффекты типа отрицательной диссипации компенсировались явно включенной в расчет положительной диссипацией. Таким образом бездиссипативные и диссипативные расчеты ранее выполнялись двумя различными методами, что не давало возможности, например, непрерывным образом переходить от одних к другим, меняя параметр ε .

Другое усовершенствование - включение поглощающих слоев на границах расчетной области. Расчет на бесконечной прямой аппроксимируется расчетом на достаточно протяженном отрезке, на границе которого выставляются некоторые граничные условия, совместимые с предположением о наличии однородного состояния вблизи границы, поэтому могут возникать отраженные волны. Для устранения граничных счетных эффектов в правую часть уравнения (1.2) включался дополнительный диссипативный член $f(x)a_{xxxxxx}$, где $f(x)$ - некоторая достаточно гладкая неотрицательная функция, отличная от нуля только вблизи границ расчетной области. Аппроксимация производной шестого порядка осуществлялась по шаблону, аналогичному приведенному выше шаблону для производной второго порядка (7.1), т.е. вначале была получена стандартная аппроксимация с центральными разностями по типу шаблона (7.2), а затем в ней член a_k^n был заменен на полусумму значений в верхнем и нижнем слое $(a_k^{n+1} + a_k^{n-1})/2$. Включение производной шестого порядка не усложняет существенным образом расчетные формулы, поскольку при использовании центральных пространственных разностей ширина шаблонов для производных пятого и шестого порядка оказывается одинаковой. Поскольку включение члена с производной шестого порядка носит технический характер, то отслеживать, насколько точно он аппроксимируется такой схемой не обязательно, главное избежать появления отраженных волн от границ. При отсутствии поглощающих слоев на границе такие волны, хоть и небольшой амплитуды, всегда присутствуют в расчете диссипативной структуры разрыва методом установления, поскольку с формальной точки зрения волновые зоны, описываемые усредненными уравнениями здесь имеют бесконечную протяженность, а расчет разрыва на достаточно протяженном отрезке является некоторой идеализацией. В бездиссипативном расчете протяженность волно-

вых зон, описываемых усредненными уравнениями, в каждый конкретный момент времени конечна, но фазовая скорость распространения возмущений как реальных, так и порожденных схемными эффектами оказывается существенно большей скорости продвижения границ волновых зон, на которую приходится ориентироваться при определении границ расчетного отрезка. Поэтому и здесь наблюдаются отраженные волны. При отсутствии диссипации со временем это может приводить к накоплению случайных возмущений и даже к остановке расчета из-за градиентной катастрофы в следствие случайной концентрации таких возмущений в одном месте. Ранее исключение отраженных волн достигалось путем периодического сокращения и увеличения протяженности расчетной области [19], создания своеобразной ловушки для волн, что требовало постоянного наблюдения за расчетом и ручного вмешательства.

Другая цель введения члена с производной шестого порядка – достижение математически корректной постановки задачи. Поглощающие слои можно было бы ввести и с помощью членов с производными второго или четвертого порядка. Но применение схем с центральными разностями требует постановки одинакового числа граничных условий на границах расчетного отрезка. Как показали расчеты, некорректность, связанная с избыточным числом граничных условий обычно допустима, поскольку этот недостаток корректируется за счет схемных эффектов, тем не менее для большей устойчивости расчетов этот недостаток желательно исправить явным способом. В случае обобщенных уравнений Кортвега–де Вриза и Кортвега–Бюргера число граничных условий в математически корректной постановке начально-краевой задачи на отрезке определяется членом со старшей производной. В случае, когда старшая производная нечетная, число граничных условий на левой и правой границе различно. Вводя дополнительный диссипативный член со старшей производной получаем корректную постановку задачи.

8 Выводы и обсуждение

Результаты проведенного численного исследования подтвердили основные теоретические предположения о том, что резонансные стационарные решения играют роль притягивающих решений при нестационарных процессах. Подтверждено теоретическое предположение о наличии резонансных многоволновых зон описываемых усредненными уравнениями, построенными на базе семейств стационарных резонансных многоволновых решений. Подтверждено наличие наблюдаемых структур разрывов типа переходов между одноволновыми и двухволновыми резонансными состояниями. Выявлены новые типы разрывов — бифуркационные переходы между резонансными двухволновыми состояниями.

Результаты исследования показали, что существуют бездиссипативные струк-

туры разрывов, не реализующиеся в задаче о распаде произвольного разрыва, поставленной как распад начальных данных с двумя однородными состояниями. При анализе бездиссипативных разрывов такая постановка в отличие от диссипативного случая может не давать полной картины всех возможных наблюдаемых разрывов. Более общая постановка этой задачи такова, что в качестве начальных данных по разные стороны от начального разрыва рассматриваются не только однородные, но и волновые однородные состояния всех возможных типов. Возможно, что при исследовании задачи о распаде произвольного разрыва в таком широком смысле выявляются все эволюционные типы разрывов.

Результаты исследования также подтвердили сделанное в работах [6], [5] предположение о том, что сложная нелинейность и сложная дисперсия может приводить к одинаковым качественным эффектам. В работе [16] были исследованы решения задачи о распаде произвольного разрыва для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза со старшей производной третьего порядка, но с нелинейностью типа полинома четвертого порядка. Были обнаружены нестационарные структуры разрывов, циклически колеблющиеся с течением времени, аналогичные тем, которые рассматриваются здесь. Очевидно, в обоих случаях это связано с наличием конкурирующих притягивающих решений, наличие которых в одном случае связано с нелинейностью, а в другом — с дисперсией. Кроме того, и в рассматриваемом здесь случае встречается ситуация, когда для некоторой области параметров начального разрыва имеется как решение со стационарными структурами, реализуемое при специальном выборе начальных данных, т.е. и нестационарное решение, т.е. наблюдается гистерезис.

В данной работе проанализирован тип возможного решения при всех значениях амплитуды начального разрыва. В особенности следует отметить, что проведен анализ при достаточно малых амплитудах начального разрыва. Это позволяет пользуясь преобразованиями координат определять тип решения при малых значениях параметра b_5 , что является актуальной задачей, поскольку в случае асимптотических моделей члены с высшими производными рассматриваются как уточняющие более низкое приближение. Выявленные эффекты (наличие стационарных, периодических и стохастических решений) во многом сходны с эффектами при турбулентных процессах. Это сходство не случайно, поскольку используемая здесь методика в принципе применима для описания турбулентных процессов при использовании для исследования пространственно двумерных уравнений вместо одного измерения полиномиальных разложений высокого порядка по аналогии с тем, как это делается при выводе уравнений мелкой воды или Бусснеска.

Обнаруженные здесь закономерности качественного поведения решений очевидно справедливы не только для рассмотренного здесь уравнения, но и

для аналогичных моделей, в которых имеется дисперсионная ветвь с точкой перегиба и соответственно возможен резонанс линейных волн, связанный с тем, что прямая, соответствующая фазовой скорости, пересекает эту ветвь два раза. Таким свойством обладает, например, быстрая магнитозвуковая ветвь в холодной плазме. Однако в различных моделях механики сплошной среды, например в случае волн в композитных материалах, встречается и другой случай резонанса, связанный с пересечением двух разных ветвей, но также приводящий к появлению бездиссипативных структур типа переходов между одноволновыми и двухволновыми резонансными состояниями и требующий дальнейшего исследования [15].

Список литературы

- [1] Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных разрывов в бездиссипативных системах// Прикл. матем. механ. - 1999. - Т. 63. - Вып. - 1. - С. 52-62.
- [2] Бахолдин И.Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега – де Вриза// Изв. РАН. Механ. жидк. газа - 1999. - № 4. - С.95-109.
- [3] Бахолдин И.Б. Скачок с излучением в моделях, описываемых обобщенным уравнением Кортевега-де Вриза// Прикл. матем. механ. - 2001. - Т. 65. - вып. 1. - С. 59-68.
- [4] Бахолдин И.Б. Уединенные волны и структуры разрывов в бездиссипативных моделях с усложненной дисперсией// Прикл. матем. механ. - 2003. - Т. 67. - вып. 1. - С. 49-64.
- [5] Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. — М.: Физматлит, 2004. — 318 с.
- [6] Бахолдин И.Б. Методы исследования структур диссипативных и бездиссипативных разрывов в системах с дисперсией// Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2005. — Т. 45. № 2. — С. 330–343.
- [7] Ильичев А. Т. , Марченко А. В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газов. 1989. № 1. С. 88–95.
- [8] Бахолдин И.Б. Структуры гидравлических прыжков при наличии ледового покрытия// Изв. РАН. Механ. жидк. газа - 2000. - № 4. - С. 139-146.
- [9] Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.

- [10] Бахолдин И. Б. Нелинейные резонансы и волновые разрывы в средах с дисперсией высокого порядка // Изв. РАН. Мех. жидк. и газов. 1996. № 4. С. 113–124.
- [11] Bakholdin I. B. Nonlinear resonances in models described by the modified Korteweg–de Vries and Schrödinger equations // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. / Suppl.: Phys. Vib. 1995. V. 59, № 4. P. 209–221.
- [12] Grimshaw R., Malomed B., Benilov E. S. Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth-order Korteweg-de Vries equation // Physica D. 1984. V. 77. P. 473–485.
- [13] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.:Физматлит. 2005. 287с.
- [14] Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. — М.: Физматлит, 2003. — 256 с.
- [15] Бахолдин И. Б., Томашпольский В. Я. Уединенные волны в модели предварительно напряженного нелинейного композита // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 4. С. 527-538.
- [16] Куликовский А. Г., Чугайнова А. П. Моделирование влияния мелкомасштабных дисперсионных процессов в сплошной среде на формирование крупномасштабных явлений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 6. С. 1119–1126.
- [17] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А., Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.:Физматлит. 2001. 607с.
- [18] Чугайнова А. П. Асимптотическое поведение нелинейных волн в упругих средах с дисперсией и диссипацией// Теор. и матем. физика. 2006, т.174, №2, с.240-256.
- [19] Бахолдин И. Б. Волновые разрывы, описываемые модифицированным уравнением Шредингера // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38, № 8. - С. 1331–1350.
- [20] Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.