РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно

СЛОЖНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОДУ

Москва, 2006 г.

УДК 517.925

А.Д. Брюно. Сложные разложения решений системы ОДУ. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений весьма общего вида. Пусть ее укороченная система имеет решение в виде произведений степеней независимой переменной на ряды по степеням ее кратных логарифмов. Показывается, что при отсутствии критических чисел такую нестепенную асимптотику решения исходной системы можно продолжить в степенно-логарифмическое разложение решения исходного уравнения. Получаются ряды по степеням независимой переменной, коэффициенты которых суть ряды по степеням ее кратных логарифмов. Приводятся примеры таких вычислений. Основной упор делается на объяснение алгоритмов вычислений.

A.D. Bruno. Complicated expansions of solutions to an ODE system. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2006.

We consider a system of ordinary differential equations of a very general form. Let its truncated system have a solution in the form of products of powers of the independent variable and of series of powers of its multiple logarithms. We show, that under absence of critical numbers such a nonpower asymptotic behavior of a solution to the initial system can be prolonged as a power-logarithmic expansion of a solution to the initial system. It consists of series of powers of the independent variable, coefficients of which are series of powers of its multiple logarithms. We give examples of the calculations. The main attention is given to explanations of the computational algorithms.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050).

E-mail: bruno@keldysh.ru

§ 1. Теория

1.1. Постановка задачи. Сначала напомним некоторые понятия и результаты степенной геометрии [1–5]. Пусть $x_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} t$ — независимая и $x_1, \ldots, x_n$ — зависимые переменные, $x_i \in \mathbb{C}$. Положим $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. *Дифференциальным мономом* $a(X)$ называется произведение обычного монома

$$cx_0^{m_0} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \stackrel{\mathrm{def}}{=} cX^M, \tag{1.1}$$

где $c = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, $M = (m_0, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, и конечного числа производных вида

$$d^l x_i / dx_0^l \stackrel{\mathrm{def}}{=} d^l x_i / dt^l, \quad l \in \mathbb{N}, \quad i > 0. \tag{1.2}$$

Сумма дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum a_i(X) \tag{1.3}$$

называется *дифференциальной суммой.*

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_i(X) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

где $f_i(X)$ — дифференциальные суммы. Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } t \to 0, \\ \ \ 1, & \text{если } t \to \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

Пусть $t \to 0$ или ∞ и решение системы (1.4) имеет вид

$$x_i = t^{r_i} \left(b_i + \sum b_{is} t^s \right), \quad s \in \mathbf{K}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

где показатели степени $r_i, s \in \mathbb{R}$ и $s\omega < 0$. Тогда выражение

$$x_i = b_i t^{r_i}, \quad b_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.7}$$

является *асимптотикой* решения (1.6).

Если все b_i постоянны, то асимптотика (1.7) — степенная. В этом случае в разложении (1.6) все коэффициенты b_{is} являются либо комплексными постоянными, либо многочленами от логарифма $\ln t$ [3,4].

Если b_i зависят от t, то асимптотика (1.7) — *нестепенная.* Способ нахождения нестепенных асимптотик указан в [5]. При этом b_i разлагаются в ряды по убывающим степеням $\ln t$:

$$b_i = (\ln t)^{\rho_i} \left(\beta_i + \sum_{\sigma < 0} \beta_{i\sigma} (\ln t)^{\sigma} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.8}$$

где $\beta_i = \text{const} \in \mathbb{C}$ и коэффициенты $\beta_{i\sigma}$ либо постоянны, либо являются многочленами от кратных логарифмов $\ln\ln t$ и т.д. При этом нестепенная асимптотика (1.7), (1.8) является решением соответствующей укороченной системы

$$\hat{f}_i(X) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_{ij_i}^{(d_i)}(X) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.9}$$

нормальный конус которой

$$\mathbf{U}_J^{(D)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U}_{1j_1}^{(d_1)} \cap \ldots \cap \mathbf{U}_{nj_n}^{(d_n)} \tag{1.10}$$

содержит вектор $\omega(1, r_1, \ldots, r_n)$.

Задача. Для нестепенной асимптотики (1.7), (1.8), являющейся решением укороченной системы (1.9) и имеющей $\omega(1, r_1, \ldots, r_n) \in \mathbf{U}_J^{(D)}$, найти разложение (1.6) соответствующего решения полной системы (1.4), где b_{is} — ряды по убывающим степеням логарифмов (может быть кратных).

Для одного дифференциального уравнения (т.е. при $n = 1$) эта задача решена в [6,7].

Здесь предлагается решение этой задачи для случая, когда укороченная система (1.9) удовлетворяет некоторому ограничению (не дает критических чисел для решения (1.7), (1.8)).

В дальнейшем изложении используются понятия, методы и результаты из [2–7].

1.2. Критические числа нестепенной асимптотики. Для каждого уравнения $\hat{f}_i(X) = 0$ укороченной системы (1.9) рассмотрим первые вариации

$$\mathcal{M}_{ij}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta \hat{f}_i}{\delta x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.11}$$

и образуем из них матрицу

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{ij}(X)). \tag{1.12}$$

Ее элементы — это линейные дифференциальные операторы по $t = x_0$, коэффициенты которых суть дифференциальные суммы. Сделаем в матрице (1.12) степенное преобразование

$$x_i = t^{r_i} y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad Y = (y_1, \ldots, y_n), \tag{1.13}$$

где r_i — те же самые, что и в (1.7). Получим матрицу операторов

$$\mathcal{N}(t, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(X) = (\mathcal{N}_{ij}(t, Y)).$$

Сделаем в ней логарифмическое преобразование

$$\xi = \ln t = \ln x_0.$$

Тогда

$$\mathcal{N}_{ij}(t,Y) = t^{u_{ij}}\tilde{\mathcal{N}}_{ij}(\xi,Y),$$

где u_{ij} — это степень по t оператора $\mathcal{N}_{ij}$, $\tilde{\mathcal{N}}_{ij}$ — дифференциальный оператор по ξ, коэффициенты которого суть дифференциальные суммы от ξ, Y:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{ij} = \sum_{k=0}^{l} \psi_{ijk}(\xi,Y)\frac{d^k}{d\xi^k}. \tag{1.14}$$

Согласно теореме 1.2 [3]

$$u_{ij} = v_i - r_j, \;\; i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{1.15}$$

где $v_i = \langle R, Q_{i1}\rangle$ с $Q_{i1} \in \mathbf{S}(\hat{f}_i)$, $R = (r_1,\ldots,r_n)$ и r_j — те же, что в (1.7), (1.13). В каждый коэффициент ψ_{ijk} согласно (1.8) подставим

$$y_i = \xi^{\rho_i}\left(\beta_i + \sum_{\sigma<0}\beta_{i\sigma}\xi^{\sigma}\right), \;\; i = 1,2,\ldots,n, \tag{1.16}$$

т.е. $Y = B(\xi)$, где $B = (b_1,\ldots,b_n)$, и выделим члены с наибольшей степенью ξ. Пусть m_{ij} — наибольшая из всех этих степеней в ψ_{ijk} по всем k, т.е.

$$\begin{gathered}\psi_{ijk}(\xi,B(\xi)) = \alpha_{ijk}\xi^{m_{ij}} + \ldots, \;\; \alpha_{ijk} = \mathrm{const}, \;\; i,j = 1,\ldots,n, \\ k = 0,\ldots,l, \;\; \sum_{k=0}^{l}|\alpha_{ijk}| \neq 0.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Положим

$$\tilde{\mathcal{N}}_{ij0} = \xi^{m_{ij}}\sum_{k=0}^{l}\alpha_{ijk}\frac{d^k}{d\xi^k}. \tag{1.18}$$

Тогда $\tilde{\mathcal{N}}_{ij} = \tilde{\mathcal{N}}_{ij0} + \ldots$. Рассмотрим многочлены

$$\nu_{ij}(s) = \xi^{m_{ij}}\sum_{k=0}^{l}\alpha_{ijk}s^k. \tag{1.19}$$

Тогда $n \times n$-определитель

$$\det\left(\nu_{ij}(s)\right), \;\; i,j = 1,\ldots,n \tag{1.20}$$

является конечной суммой степеней ξ, коэффициенты которой являются многочленами. Коэффициент при старшей степени ξ назовем *характеристическим многочленом* укороченного решения (1.7), (1.8) и обозначим $\nu(s)$. Его корни $s_1,\ldots,s_n$ — это собственные числа решения

(1.9), (1.10). Те вещественные из них, которые лежат в конусе задачи, т.е. $\omega s_i < 0$, являются *критическими числами укороченного решения* (1.7), (1.8).

1.3. Вычисление разложения (1.6), (1.8). Напомним, что если степенная асимптотика (1.7) с $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ не имеет критических чисел, то в разложении (1.6) показатели степени s пробегают множество $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}$. Для нестепенной асимптотики (1.8) под $\mathbf{K}$ будем понимать то же самое множество, что и для степенной асимптотики (1.7).

Теорема 1. *Если укороченное решение* (1.7), (1.8) *не имеет критических чисел, то ему соответствует единственное разложение* (1.6). *При этом показатели s пробегают множество $\mathbf{K}$, а кратность логарифмов в* (1.6) *не превосходит наибольшей их кратности в* (1.7), (1.8).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в [6].

§ 2. Примеры

Для системы уравнений Н. Ковалевского

$$\begin{aligned} f_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \ddot{\sigma}\tau + \dot{\sigma}\dot{\tau}/2 + a_1 + a_2\sigma + a_3\dot{\tau}p + a_4\tau + a_5p^2 = 0, \\ f_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\ddot{\tau} + \dot{\sigma}\dot{\tau}/2 + b_1 + b_2\dot{\sigma}p + b_3\sigma + b_4\tau + b_5p^2 = 0, \quad \cdot \stackrel{\text{def}}{=} d/dp \end{aligned} \tag{2.1}$$

в [5] были вычислены все нестепенные асимптотики. Оказалось, что они относятся к трем случаям. Вычислим для этих случаев критические числа нестепенных асимптотик. Здесь $n = 2$, $t = p$, $x_1 = \sigma$, $x_2 = \tau$, коэффициенты a_i и b_i суть рациональные функции от параметров задачи x, y. К системе (2.1) в случае $B \neq C$, $x_0 \neq 0$, $x_0 = z_0 = 0$ сводится система уравнений Эйлера–Пуассона, описывающая движения твердого тела с закрепленной точкой [8].

2.1. Случай 1. В этом случае укороченная система есть

$$\hat{f}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{\sigma}\tau + \dot{\sigma}\dot{\tau}/2 + a_2\sigma = 0, \quad \hat{f}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\ddot{\tau} + \dot{\sigma}\dot{\tau}/2 + b_2\dot{\sigma}p + b_3\sigma = 0, \tag{2.2}$$

$R = (-1, 2)$, $\omega = -1$. Нестепенная асимптотика (1.7) определена на кривой

$$x = \frac{2y(y-1)}{y+2}$$

и имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= cp^{-1}\left[\ln p - (\beta_1 + (6/5)(1 + \ln\ln p)) + O\left((\ln p)^{-1}\right)\right], \\ \tau &= -\frac{2yp^2}{y+2}\left[1 + \frac{2}{\ln p} + \frac{3 + 2\beta_1 + (12/5)\ln\ln p}{(\ln p)^2} + O\left(\frac{1}{(\ln p)^3}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.3}$$

где c и β_1 — произвольные постоянные.

Для укороченной системы (2.2) матрица (1.12) первых вариаций (1.11) есть

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \tau\dfrac{d^2}{dp^2} + \dfrac{\dot\tau}{2}\dfrac{d}{dp} + a_2 & \ddot\sigma + \dfrac{\dot\sigma}{2}\dfrac{d}{dp} \\ \ddot\tau + \dfrac{\dot\tau}{2}\dfrac{d}{dp} + b_2 p\dfrac{d}{dp} + b_3 & \sigma\dfrac{d^2}{dp^2} + \dfrac{\dot\sigma}{2}\dfrac{d}{dp} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Степенное преобразование (1.13) имеет вид

$$\sigma = p^{-1}S, \;\; \tau = p^2 T.$$

Тогда

$$\dot\sigma = -\frac{1}{p^2}S + \frac{1}{p}\dot S, \;\; \ddot\sigma = \frac{2}{p^3}S - \frac{2}{p^2}\dot S + \frac{1}{p}\ddot S,$$
$$\dot\tau = 2pT + p^2\dot T, \;\; \ddot\tau = 2T + 4p\dot T + p^2\ddot T. \tag{2.4'}$$

Подставляя эти выражения в (2.4), получаем матрицу

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \mathcal{N}_{21} & \mathcal{N}_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где

$$\mathcal{N}_{11} = pT^2\frac{d^2}{dp^2} + \left(pT + \frac{1}{2}p^2\dot T\right)\frac{d}{dp} + a_2,$$
$$\mathcal{N}_{12} = \frac{2}{p^3}S - \frac{2}{p^2}\dot S + p^{-1}\ddot S + \left(-\frac{1}{2p^2}S + \frac{1}{2p}\dot S\right)\frac{d}{dp},$$
$$\mathcal{N}_{21} = 2T + 4p\dot T + p^2\ddot T + \left(pT + \frac{p^2}{2}\dot T + b_2 p\right)\frac{d}{dp} + b_3,$$
$$\mathcal{N}_{22} = p^{-1}S\frac{d^2}{dp^2} + \left(-\frac{1}{2p^2}S + \frac{1}{2p}\dot S\right)\frac{d}{dp}.$$

Теперь делаем логарифмическую замену $\xi = \ln p$, тогда

$$\dot T = T'/p, \;\; \ddot T = (T'' - T')/p^2, \tag{2.6}$$

где штрих означает производную по ξ. Матрица $\mathcal{N}$ принимает вид

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \mathcal{N}_{21} & \mathcal{N}_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{N}_{11} = T\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) + \left(T + \frac{T'}{2}\right)\frac{d}{d\xi} + a_2,$$
$$\mathcal{N}_{12} = \frac{2S}{p^3} - \frac{2S'}{p^3} + \frac{1}{p^3}(S'' - S') + \left(-\frac{S}{2p^3} + \frac{S'}{2p^3}\right)\frac{d}{d\xi},$$

$$\mathcal{N}_{21} = 2T + 4T' + T'' - T' + \left(T + \frac{T'}{2} + b_2\right)\frac{d}{d\xi} + b_3,$$
$$\mathcal{N}_{22} = \frac{S}{p^3}\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) + \left(-\frac{S}{2p^3} + \frac{S'}{2p^3}\right)\frac{d}{d\xi}.$$

Здесь $\mathcal{N}_{ij} = t^{u_{ij}}\tilde{\mathcal{N}}_{ij}$, где согласно (1.15)

$$u_{11} = -1 - (-1) = 0, \;\; u_{12} = -1 - 2 = -3,$$
$$u_{21} = -1 - (-1) = 0, \;\; u_{22} = -1 - 2 = -3,$$

ибо согласно (2.2) $v_1 = v_2 = -1$, а $r_1 = -1$ и $r_2 = 2$. Следовательно, матрица $\tilde{\mathcal{N}}$ есть

$$\tilde{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{N}}_{11} & \tilde{\mathcal{N}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{N}}_{21} & \tilde{\mathcal{N}}_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{\mathcal{N}}_{11} = T\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{T'}{2}\frac{d}{d\xi} + a_2,$$
$$\tilde{\mathcal{N}}_{12} = 2S - 3S' + S'' + \left(-\frac{S}{2} + \frac{S'}{2}\right)\frac{d}{d\xi},$$
$$\tilde{\mathcal{N}}_{21} = 2T + 3T' + T'' + \left(T + \frac{T'}{2} + b_2\right)\frac{d}{d\xi} + b_3,$$
$$\tilde{\mathcal{N}}_{22} = S\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(-\frac{3S}{2} + \frac{S'}{2}\right)\frac{d}{d\xi}.$$

Согласно (2.3) имеем $S = c\xi + \ldots$, $T = -2y/(y+2) + \ldots$. Поэтому главная часть матрицы $\tilde{\mathcal{N}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{2y}{y+2}\dfrac{d^2}{d\xi^2} + a_2 & 2c\xi - \dfrac{1}{2}c\xi\dfrac{d}{d\xi} \\ -\dfrac{4y}{y+2} + b_3 + \left(-\dfrac{2y}{y+2} + b_2\right)\dfrac{d}{d\xi} & c\xi\dfrac{d^2}{d\xi^2} - \dfrac{3}{2}c\xi\dfrac{d}{d\xi} \end{pmatrix}.$$

Заменяя в этой матрице $d^l/d\xi^l$ на s^l и сокращая второй столбец на $c\xi$, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{2y}{y+2}s^2 + a_2 & 2 - \dfrac{s}{2} \\ -\dfrac{4y}{y+2} + b_3 + \left(-\dfrac{2y}{y+2} + b_2\right)s & s^2 - \dfrac{3}{2}s \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Согласно [8]

$$a_2 = \frac{x}{y-1}, \;\; b_2 = 2y - x, \;\; b_3 = \frac{2y^2 + 2x - 2y - xy}{y-1}. \tag{2.8}$$

На кривой $x = 2y(y-1)/(y+2)$ имеем

$$a_2 = \frac{2y}{y+2}, \;\; b_2 = \frac{6y}{y+2}, \;\; b_3 = \frac{8y}{y+2}$$

и матрица (2.7) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2y}{y+2}(1-s^2) & 2-\dfrac{s}{2} \\ \dfrac{4y}{y+2}(1+s) & s\left(s-\dfrac{3}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен

$$\nu(s) = \frac{2y}{y+2}(1+s)[(1-s)s(2s-3)-2(4-s)] = -\frac{y}{y+2}(1+s)^2(2s^2-7s+8).$$

Поскольку уравнение $2s^2-7s+8=0$ имеет комплексные корни, то вещественное собственное число единственно: $s=-1$. Оно не лежит в конусе задачи $s>0$, поэтому критических чисел нет. Согласно теореме 1 нестепенная асимптотика (2.3) продолжается в сложное разложение

$$\sigma = p^{-1}\left(\sigma_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_s p^s\right), \quad \tau = p^2\left(\tau_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \tau_s p^s\right),$$

где $p^{-1}\sigma_0$ и $p^2\tau_0$ даны в (2.3), σ_s, τ_s суть однозначно определенные ряды по убывающим целым степеням логарифма $\ln p$, коэффициенты которых являются многочленами от двукратного логарифма $\ln\ln p$.

2.2. Случай 2. Здесь укороченная система снова (2.2), $R=(4,2)$, $\omega=1$. Нестепенная асимптотика (1.7) определена на кривой

$$x = \frac{16y(y-1)}{8y-9}$$

и имеет вид

$$\sigma = \frac{cp^4}{(\ln p)^4}\left[1 - \frac{\beta_1 + (13/5)(1+\ln\ln p)}{\ln p} + O\left(\frac{1}{(\ln p)^2}\right)\right], \tag{2.9}$$

$$\tau = -\frac{yp^2}{8y-9}\left[1 - \frac{2}{\ln p} + \frac{3-\beta_1/2-(13/10)\ln\ln p}{(\ln p)^2} + O\left(\frac{1}{(\ln p)^3}\right)\right],$$

где c и β_1 — произвольные постоянные.

Поскольку укороченная система здесь та же (2.2), что и в случае 1, то матрица $\mathcal{M}$ также не менятся, т.е. имеет вид (2.4). Степенное преобразование (1.13) имеет вид $\sigma = p^4 S$, $\tau = p^2 T$, поэтому имеем $\dot\sigma = 4p^3 S + p^4 \dot S$, $\ddot\sigma = 12p^2 S + 8p^3\dot S + p^4 \ddot S$ и (2.4′). Подставляя эти выражения в (2.4), получаем матрицу

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \mathcal{N}_{21} & \mathcal{N}_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{N}_{11} = p^2 T \frac{d^2}{dp^2} + \left(pT + \frac{1}{2}p^2\dot{T}\right)\frac{d}{dp} + a_2,$$

$$\mathcal{N}_{12} = 12p^2 S + 8p^3\dot{S} + \left(2p^3 S + \frac{p^4}{2}\dot{S}\right)\frac{d}{dp},$$

$$\mathcal{N}_{21} = 2T + 4p\dot{T} + p^2\ddot{T} + \left(pT + \frac{p^2}{2}\dot{T} + b_2 p\right)\frac{d}{dp} + b_3,$$

$$\mathcal{N}_{22} = p^4 S\frac{d^2}{dp^2} + \left(2p^3 S + \frac{p^4}{2}\dot{S}\right)\frac{d}{dp}.$$

При логарифмической замене $\xi = \ln p$ справедливо (2.6) и матрица $\mathcal{N}$ принимает вид

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \mathcal{N}_{21} & \mathcal{N}_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{N}_{11} = T\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) + \left(T + \frac{T'}{2}\right)\frac{d}{d\xi} + a_2,$$

$$\mathcal{N}_{12} = 12p^2 S + 8p^2 S' + 4p^2(S'' - S') + \left(2p^2 S' + \frac{p^2}{2}S'\right)\frac{d}{d\xi},$$

$$\mathcal{N}_{21} = 2T + 4T' + T'' - T' + \left(T + \frac{T'}{2} + b_2\right)\frac{d}{d\xi} + b_3,$$

$$\mathcal{N}_{22} = p^2 S\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) + \left(2p^2 S + \frac{p^2}{2}S'\right)\frac{d}{d\xi}.$$

Здесь $\mathcal{N}_{ij} = t^{u_{ij}}\tilde{\mathcal{N}}_{ij}$, где согласно (1.15)

$$u_{11} = 4 - 4 = 0, \quad u_{12} = 4 - 2 = 2,$$
$$u_{21} = 4 - 4 = 0, \quad u_{22} = 4 - 2 = 2,$$

ибо согласно (2.2) $v_1 = v_2 = 4$, а $r_1 = 4$ и $r_2 = 2$. Следовательно, матрица $\tilde{\mathcal{N}}$ есть

$$\tilde{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{N}}_{11} & \tilde{\mathcal{N}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{N}}_{21} & \tilde{\mathcal{N}}_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где

$$\tilde{\mathcal{N}}_{11} = T\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{T'}{2}\frac{d}{d\xi} + a_2,$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{12} = 12S + 4S' + 4S'' + \frac{1}{2}(4S + S')\frac{d}{d\xi},$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{21} = 2T + 3T' + T'' + \left(T + \frac{T'}{2} + b_2\right)\frac{d}{d\xi} + b_3,$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{22} = S\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(2S + \frac{S'}{2}\right)\frac{d}{d\xi}.$$

Согласно (2.8) на кривой $x = 16y(y-1)/(8y-9)$ имеем

$$a_2 = \frac{16y}{8y-9}, \quad b_2 = -\frac{2y}{8y-9}, \quad b_3 = \frac{14y}{8y-9};$$

согласно (2.9) $S = c/\xi^4 + \ldots$, $T = -y/(8y-9) + \ldots$ Поэтому матрица (2.10) принимает вид

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{y}{8y-9}s^2 + \dfrac{16y}{8y-9} & \dfrac{12c}{\xi^4} + \dfrac{2c}{\xi^4}s \\ -\dfrac{2y}{8y-9} + \dfrac{14y}{8y-9} + \left(-\dfrac{y}{8y-9} - \dfrac{2y}{8y-9}\right)s & \dfrac{c}{\xi^4}s^2 + \dfrac{2c}{\xi^4}s \end{pmatrix}.$$

Сокращая левый столбец на $y/(8y-9)$ и правый на c/ξ^4, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 16 - s^2 & 12 + 2s \\ 3(4-s) & s^2 + 2s \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен

$$\nu(s) = (4-s)[(4+s)(s^2+2s) - 3(12+2)] = (4-s)(s-2)(s^2+8s+18).$$

Этот характеристический многочлен имеет только два вещественных корня, $s = 2$ и $s = 4$. Оба они не лежат в конусе задачи $s < 0$. По теореме 1 нестепенная асимптотика (2.9) продолжается в сложное разложение

$$\sigma = p^4\left(\sigma_0 + \sum_{s=1}^{\infty}\sigma_s p^{-2s}\right), \quad \tau = p^2\left(\tau_0 + \sum_{s=1}^{\infty}\tau_s p^{-2s}\right),$$

где $p^4\sigma_0$ и $p^2\tau_0$ даны в (2.9), σ_s, τ_s суть однозначно определенные ряды по убывающим целым степеням логарифма $\ln p$, коэффициенты которых являются многочленами от двукратного логарифма $\ln\ln p$.

2.3. Случай 3. В этом случае укороченная система есть

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \ddot{\sigma}\tau + \dot{\sigma}\dot{\tau}/2 + a_2\sigma + a_3\dot{\tau}p + a_4\tau + a_5p^2 = 0, \\ \hat{f}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\ddot{\tau} + \dot{\sigma}\dot{\tau}/2 + b_2\dot{\sigma}p + b_3\sigma + b_4\tau + b_5p^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

$R = (2,2), \omega = 1.$ Нестепенная асимптотика (1.7) определена на прямой $x = 2$, $y \neq 2$ и имеет вид

$$\sigma = p^2\left[-\frac{1}{2y-2} + \frac{\kappa_1}{(2y-2)^3\ln p} + \frac{\kappa_2 - (2y-2)y\beta_2 + \kappa_3\ln\ln p}{(2y-2)^5(\ln p)^2} + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{(\ln p)^3}\right)\right], \quad \tau = p^2\left[\eta_0\ln p + \beta_2 + \eta_1\ln\ln p + O\left(\frac{1}{\ln p}\right)\right], \tag{2.12}$$

где $\kappa_1 = (y-2)(3y-2)$, $\kappa_2 = (y-2)(3y-2)(6y^2-10y+5)$, $\kappa_3 = -y(y-2)(3y-2)^2(3y-4)$, $\eta_0 = 2(y-1)(y-2)/y$, $\eta_1 = (y-2)(3y-2)(3y-4)/(2y-2)$, а постоянная β_2 — произвольна.

Здесь матрица $\mathcal{M}$ первых вариаций есть

$$\begin{pmatrix} \tau\dfrac{d^2}{dp^2} + \dfrac{\dot\tau}{2}\dfrac{d}{dp} + a_2 & \ddot\sigma + \left(\dfrac{\dot\sigma}{2} + a_3 p\right)\dfrac{d}{dp} + a_4 \\ \ddot\tau + \left(\dfrac{\dot\tau}{2} + b_2\right)\dfrac{d}{dp} + b_3 & \sigma\dfrac{d^2}{dp^2} + \dfrac{\dot\sigma}{2}\dfrac{d}{dp} + b_4 \end{pmatrix}.$$

После степенного преобразования $\sigma = p^2 S$, $\tau = p^2 T$ получаем матрицу

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \mathcal{N}_{21} & \mathcal{N}_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{N}_{11} = p^2 T\frac{d^2}{dp^2} + \left(pT + \frac{1}{2}p^2\dot T\right)\frac{d}{dp} + a_2,$$

$$\mathcal{N}_{12} = 2S + 4p\dot S + \left(pS + \frac{p^2}{2}\dot S + a_3 p\right)\frac{d}{dp} + a_4,$$

$$\mathcal{N}_{21} = 2T + 4p\dot T + p^2\ddot T + \left(pT + \frac{p^2}{2}\dot T + b_2 p\right)\frac{d}{dp} + b_3,$$

$$\mathcal{N}_{22} = p^2 S\frac{d^2}{dp^2} + \left(pS + \frac{p^2}{2}\dot S\right)\frac{d}{dp} + b_4.$$

После логарифмической замены $\xi = \ln p$ она принимает вид

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \mathcal{N}_{21} & \mathcal{N}_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{N}_{11} = T\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) + \left(T + \frac{T'}{2}\right)\frac{d}{d\xi} + a_2,$$

$$\mathcal{N}_{12} = 2S + 4S' + S'' - S' + a_4 + \left(S + \frac{S'}{2} + a_3\right)\frac{d}{d\xi},$$

$$\mathcal{N}_{21} = 2T + 4T' + T'' - T' + \left(T + \frac{T'}{2} + b_2\right)\frac{d}{d\xi} + b_3,$$

$$\mathcal{N}_{22} = S\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) + \left(S + \frac{S'}{2}\right)\frac{d}{d\xi} + b_4.$$

Согласно (2.12) $S = -1/(2y-2) + \ldots$, $T = \eta_0\xi + \ldots$ Согласно [8] на прямой $x = 2$ имеем

$$a_2 = \frac{2}{y-1}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{2}{y-1}, \quad b_2 = 2(y-1),$$

$$b_3 = \frac{2y^2 - 4y + 4}{y-1}, \quad b_4 = \frac{2}{y-1}.$$

Поэтому матрица $\tilde{\mathcal{N}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \eta_0 \xi s^2 & -\dfrac{1}{y-1} + \dfrac{2}{y-1} - \dfrac{s}{2(y-1)} \\ 2\eta_0\xi + \eta_0\xi s & -\dfrac{s^2}{2(y-1)} + \dfrac{2}{y-1} \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен $\eta_0\xi(s^2-1)(4-s^2)/[2(y-1)]$. Он имеет четыре вещественных корня $s = \pm 1$, $s = \pm 2$. Из них два лежат в конусе задачи $s < 0$. Следовательно, имеются два критических числа $s = -1$ и $s = -2$ и теорема 1 неприменима. Следовательно, она не может гарантировать существование сложного разложения (1.6) решений с нестепенной асимптотикой (2.12).

Литература

1. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 256 с.

2. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

3. Брюно А.Д. Разложения решений системы ОДУ. Препринт N 59. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2003. 27 с.

4. Брюно А.Д. Степенные асимптотики решений системы ОДУ // ДАН, 2006, т. 410, N 5, с. 583–586.

5. Брюно А.Д. Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт N 40. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002. 23 с.

6. Брюно А.Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт N 36. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005. 16 с.

7. Брюно А.Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2006, т. 406, N 6, с. 730–733.

8. Брюно А.Д., Лунев В.В. О вычислении степенных разложений модифицированных движений твердого тела // ДАН, 2002, т. 386, N 1, с. 11–17.