РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Москва, 2006 г.

УДК 517.91

А.Д. Брюно. Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006.

Изучаются ряды по чисто мнимым степеням переменной с постоянными коэффициентами. Показано, что им могут соответствовать функции с очень сложными особенностями. Также рассматриваются разложения по комплексным степеням, коэффициенты которых либо постоянны либо являются многочленами от логарифма, а показатели степени лежат в некотором угле комплексной плоскости и возможно бесконечно много слагаемых с фиксированными вещественными частями показателя степени. Такие *разложения* названы *экзотическими*. Показано, как вычислять такие разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений весма общего вида. Приведены примеры.

A.D. Bruno. Exotic expansions of solutions to an ordinary differential equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2006.

First we study series of pure imaginary powers of the variable with constant coefficients. We show that they can correspond to functions with very complicated singularities. Next we consider expansions over complex power exponents with coefficients, which are either constants or polynomials in logarithm of the variable, and their power exponents are in an angle of the complex plane and there are infinitely many terms with fixed real parts of power exponents. We call such *expansions* as *exotic*. We show a way of computing such expansions of solutions to ordinary differential equations of very general form. Some examples are considered as well.

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050) и программы "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики" Президиума РАН.

E-mail: bruno@keldysh.ru
Сайт: www.keldysh.ru/электронная библиотека/
Каталог публикаций сотрудников ИПМ/препринт/

§ 1. Ряды с чисто мнимыми показателями степени

Будем считать, что комплексная переменная x изменяется на универсальной накрывающей, т.е. $x = \exp(\rho + i\varphi)$, $\rho + i\varphi = \operatorname{Ln} x$, где $i^2 = -1$, $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$, $\rho = \ln|x|$. Пусть $\alpha = \beta + i\gamma$ — комплексное число, где $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $\gamma \neq 0$. Тогда степенная функция

$$x^\alpha = \exp(\rho + i\varphi)(\beta + i\gamma) = \exp[\rho\beta - \varphi\gamma + i(\rho\gamma + \varphi\beta)].$$

При этом

$$|x^\alpha| = \exp(\rho\beta - \varphi\gamma). \tag{1.1}$$

Вещественная линейная функция $\varphi = a\rho + b$, где $a, b = \text{const} \in \mathbb{R}$, определяет некоторую прямую на универсальной накрывающей. На ней

$$|x^\alpha| = \exp[\rho(\beta - \gamma a) - b\gamma].$$

При $\rho \to -\infty$ предел

$$\lim[\rho(\beta - \gamma a) - b\gamma] = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \beta - \gamma a > 0, \\ -b\gamma, & \text{если } \beta - \gamma a = 0, \\ +\infty, & \text{если } \beta - \gamma a < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim|x^\alpha| = \begin{cases} 0, \ \text{если } \beta - \gamma a > 0, \\ \text{const} \in \mathbb{R}, \ \text{если } \beta - \gamma a = 0, \\ \infty, \ \text{если } \beta - \gamma a < 0. \end{cases}$$

При этом $\lim|x| = 0$, но $\lim|x^\alpha| = \infty$, если $\beta < \gamma a$. Это неравенство выполнено при $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn}\gamma$ и $|a| > |\beta|/|\gamma|$, т.е. при любых $\gamma \neq 0$ и β на универсальной накрывающей есть такой путь $\varphi = a\rho + b$, что $|x| \to 0$ и $|x^\alpha| \to \infty$. В частности, при $\beta = 0$ для этого достаточно равенства $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn}\gamma$.

Таким образом, степенная функция x^α с комплексным показателем α устроена довольно сложно, если $\varphi = \arg x$ меняется неограниченно в обе стороны. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что φ ограничено с одной стороны.

Рассмотрим теперь ряд

$$\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{i\gamma k}, \tag{1.2}$$

где $c_k = \text{const} \in \mathbb{C}$ и $\gamma = \text{const} \in \mathbb{R}$. Если $\gamma > 0$, то согласно (1.1)

$$|x^{i\gamma k}| = \exp(-\varphi\gamma k) = [\exp(-\varphi\gamma)]^k.$$

Поэтому при $\varphi\gamma > 0$ ряд (1.2) можно абсолютно суммировать как степенной ряд. По формуле Коши он будет абсолютно сходиться при

$$\exp(-\varphi\gamma) < 1/\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|} \stackrel{\text{def}}{=} \delta. \tag{1.3}$$

Если $\delta > 0$ и $\gamma > 0$, то неравенство (1.3) выполнено при $-\varphi\gamma < \ln\delta$, т.е. при

$$\varphi > -\gamma^{-1}\ln\delta. \tag{1.4}$$

Пример 1.1. Рассмотрим ряд

$$\eta(x) = x^i \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2ik}. \tag{1.5}$$

Согласно (1.3) для него $\gamma = 1$ и $\delta = 1$. Поэтому согласно (1.4) он абсолютно сходится при $\varphi > 0$. При этом его сумма

$$\eta(x) = \frac{x^i}{1+x^{2i}} = \frac{1}{x^{-i}+x^i} = \frac{1}{2\cos\mathrm{Ln}\, x}, \tag{1.6}$$

ибо $x^i = \exp(i\mathrm{Ln}\, x)$ и $2\cos\psi = e^{i\psi} + e^{-i\psi}$. При $\varphi = 0$ ряд (1.5) расходится, но функция $\eta(x) = 1/(2\cos\ln\, x)$ существует и имеет бесконечно много полюсов, скапливающихся к $x = 0$. Функция (1.6) имеет также разложение

$$\eta(x) = x^{-i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{-2ik}, \tag{1.7}$$

которое получается из (1.5) и (1.6) заменой x на x^{-1}. Разложение (1.7) абсолютно сходится при $\varphi < 0$.

Заметим, что области сходимости рядов (1.2) и $x^A\eta(x)$ совпадают при любом $A = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, если исключить точки $x = 0$ и $x = \infty$. Поэтому в дальнейших рассмотрениях исключим эти точки.

Рассмотрим обобщение ряда (1.2)

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s_k}, \tag{1.8}$$

где $c_k, s_k = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s_k = 0$, $|\mathrm{Im}\, s_{k+1}| > |\mathrm{Im}\, s_k| \geq 0$, s_k не имеют точек накопления и все $\mathrm{Im}\, s_k$ одного знака. Для его области абсолютной сходимости справедлива формула

$$\varphi\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, s_2) > \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, s_2)\overline{\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{|s_k|}}. \tag{1.9}$$

Для одностороннего ряда (1.8), где все $\mathrm{Im}\, s_k$ одного знака, область сходимости есть либо $\varphi > \varphi_0$, если $\mathrm{Im}\, s_k \geq 0$, либо $\varphi < \varphi_0$, если $\mathrm{Im}\, s_k \leq 0$.

Ряд (1.8) отнесем к классу $\mathcal{P}^+$, если $\operatorname{Im} s_k \geq 0$, и — к классу $\mathcal{P}^-$, если $\operatorname{Im} s_k \leq 0$. Аналогично ряд $x^A\zeta(x)$ отнесем к классу $\mathcal{P}^+$ или $\mathcal{P}^-$ в соответствии с классом ряда $\zeta(x)$ в (1.8).

§ 2. Экзотические ряды

Пусть на комплексной плоскости s с координатами $\operatorname{Re} s$, $\operatorname{Im} s$ через начало координат $s = 0$ проведены две прямые: ось $\operatorname{Im} s$ и отличная от нее наклонная прямая (рис. 1). Они делят плоскость на четыре вертикальных угла V_σ^τ, $\sigma, \tau = \pm 1$ (рис. 1). При этом каждый угол будем считать замкнутым, т.е. содержащим свою границу. Нижний индекс σ угла V_σ^τ соответствует знаку $\operatorname{Re} s$ на его границе, проходящей по наклонной прямой, а верхний — знаку $\operatorname{Im} s$ на его вертикальной границе. Степенной ряд

$$\xi(x) = \sum c_s x^s \quad \text{по} \quad s \in \mathbf{K}, \tag{2.1}$$

где $c_s = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, будем относить к классу $\mathcal{P}_\sigma^\tau$, если его носитель $\mathbf{K} \subset V_\sigma^\tau$. Более того, степенной ряд вида $x^A\xi(x)$ будем относить к тому же классу. При этом будем рассматривать только ряды вида (2.1), у которых носитель $\mathbf{K}$ не имеет предельных точек на комплексной плоскости s. Ряды (2.1) классов $\mathcal{P}_\sigma^\tau$ будем называть *экзотическими*. Согласно § 1 на универсальной накрывающей комплексной плоскости $x = \exp(\rho + i\varphi)$ область абсолютной сходимости ряда (2.1) класса $\mathcal{P}_\sigma^\tau$ может иметь вид

$$\sigma\rho < \sigma\rho_0, \quad \tau\varphi > \tau\varphi_0, \tag{2.2}$$

где ρ_0 и φ_0 — некоторые вещественные постоянные. Ряд (2.1) класса $\mathcal{P}_\sigma^\tau$ является асимптотическим при $|x|^\sigma \to 0$ и $\varphi \to \tau\infty$, ибо тогда $|x^\alpha| \geq |x^\beta|$, если $\sigma\operatorname{Re}\alpha \leq \sigma\operatorname{Re}\beta$, $\tau\operatorname{Im}\alpha \geq \tau\operatorname{Im}\beta$, что дает упорядоченность мономов x^α по показателям α.

§ 3. Экзотические разложения решений

3.1. Постановка задачи. Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y) = 0, \tag{3.1}$$

где f — дифференциальная сумма [1]. Для его решений $y = y(x)$ при $|x| \to 0$ и $|x| \to \infty$ будем искать *экзотические разложения*

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s \quad \text{по} \quad s \in \mathbf{K}, \quad s \neq r, \tag{3.2}$$

где носитель $\mathbf{K}$ лежит в сдвинутом на r вертикальном угле $r + V_\sigma^\tau$ с вершиной в точке r. Для обычных разложений (3.1), когда множество

$\mathbf{K}-r$ лежит в одном "горизонтальном угле", расположенном между двумя наклонными полупрямыми (рис. 2), процедура их поиска описана в [1; §§ 1,3]. Такие разложения относятся к обоим классам $\mathcal{P}_\sigma^\pm$ одновременно. Ниже укажем те изменения в этой процедуре, которые позволят получить экзотические разложения (3.2) решений уравнения (3.1).

Но сначала напомним те основные понятия из [1, § 1], которые остаются без изменения. По дифференциальной сумме $f(x,y)$ строится ее носитель $\mathbf{S}(f)$ и многоугольник $\Gamma(f)$, который является выпуклой оболочкой носителя $\mathbf{S}(f)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$, называемых гранями $\Gamma_j^{(d)}$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует свое укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(x,y) = 0. \tag{3.3}$$

Пусть согласно (1.5) [1]

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } \ |x| \to 0, \\ \ \ 1, & \text{если } \ |x| \to \infty. \end{cases} \tag{3.4}$$

Грани $\Gamma_j^{(d)}$ расположены на многоугольнике $\Gamma(f)$ либо слева, либо справа, либо вверху или внизу. Каждой боковой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует свое значение

$$\omega = \omega_j^{(d)} = \begin{cases} -1, & \text{если грань } \Gamma_j^{(d)} \text{ левая}, \\ \ \ 1, & \text{если грань } \Gamma_j^{(d)} \text{ правая}. \end{cases}$$

Для верхней и нижней грани $\Gamma_j^{(d)}$ величина $\omega_j^{(d)}$ принимает оба значения ± 1.

Если экзотическое разложение решения (3.2) относится к классу $\mathcal{P}_\sigma^\tau$, то $\sigma = -\omega$.

3.2. Определение нормального конуса вершины. Согласно [1, п. 1.5] нормальный конус $\mathbf{U}_k^{(1)}$ ребра $\Gamma_k^{(1)}$ — это вещественный луч $\mathbf{U}_k^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) = \lambda N_k,\ \lambda > 0\}$, где N_k — внешняя нормаль к ребру $\Gamma_k^{(1)}$. *Приведенным нормальным конусом* $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(1)}$ *ребра* $\Gamma_k^{(1)}$ будем называть внешний нормальный вектор $\omega_k^{(1)}(1, r_k)$ к ребру $\Gamma_k^{(1)}$, у которого первая компонента есть $\omega_k^{(1)}$, т.е. $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(1)} = \mathbf{U}_k^{(1)} \cap \{p_1 = \omega_k^{(1)}\}$. Если ребро $\Gamma_k^{(1)}$ горизонтально, то $\omega_k^{(1)} = \pm 1$, и

$$\omega_k^{(1)} r_k = \begin{cases} +\infty & \text{для верхнего ребра}, \\ -\infty & \text{для нижнего ребра}. \end{cases}$$

Пусть к боковой вершине $\Gamma_j^{(0)}$ примыкают ребра $\Gamma_k^{(1)}$ и $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ с приведенными нормальными конусами $\omega_k^{(1)}(1, r_k)$ и $\omega_{k+1}^{(1)}(1, r_{k+1})$ соответственно,

$r_k < r_{k+1}$ и $\omega_k^{(1)} = \omega_{k+1}^{(1)} = \omega$. *Приведенным нормальным конусом* $\mathbf{U}_j^{(0)}$ *вершины* $\Gamma_j^{(0)}$ будем называть множество векторов $P \stackrel{\mathrm{def}}{=} (p_1, p_2) = \omega(1, r)$, где r пробегает замкнутую полосу комплексной плоскости r с двумя выколотомы точками

$$r_k \leq \operatorname{Re} r \leq r_{k+1}, \quad r \neq r_k, r_{k+1} \tag{3.5}$$

(заштрихована на рис. 3). Нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$ — это множество $\lambda\tilde{\mathbf{U}}_j^{(0)}$ с $\lambda > 0$. Заметим, что это множество не является выпуклым, также как $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(0)}$.

Пусть $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$ — две соседние вершины многоугольника $\Gamma(f)$ и между ними находится его ребро $\Gamma_k^{(1)}$. Тогда $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(0)}$ и $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1}^{(0)}$ пересекаются по точкам вида $\omega(1, r)$, где r пробегает две полупрямые с $\operatorname{Re} r = r_k$: $\operatorname{Im} r < 0$ и $\operatorname{Im} r > 0$. Если вершина $\Gamma_j^{(0)}$ — верхняя или нижняя на многоугольнике $\Gamma(f)$, то примыкающие к ней ребра $\Gamma_k^{(1)}$ и $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ имеют приведенные нормальные конусы $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(1)} = \omega_k^{(1)}(1, r_k)$ и $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^{(1)} = \omega_{k+1}^{(1)}(1, r_{k+1})$ с разными значениями $\omega_k^{(1)} = -1$ и $\omega_{k+1}^{(1)} = 1$. Тогда вершине $\Gamma_j^{(0)}$ поставим в соответствие два приведенных нормальных конуса $\tilde{\mathbf{U}}_{j-}^{(0)} = \{P = \omega_k^{(1)}(1, r)\}$, где $r \neq r_k$,

$$\operatorname{Re} r \begin{cases} \leq r_k, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ нижняя,} \\ \geq r_k, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ верхняя,} \end{cases}$$

и $\tilde{\mathbf{U}}_{j+}^{(0)} = \{P = \omega_{k+1}^{(1)}(1, r)\}$, где $r \neq r_{k+1}$,

$$\operatorname{Re} r \begin{cases} \leq r_{k+1}, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ нижняя,} \\ \geq r_{k+1}, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ верхняя.} \end{cases}$$

Нормальный же конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ состоит из объединения трех множеств $\mathbf{U}_j^{(0)} = \{\lambda\tilde{\mathbf{U}}_{j-}^{(0)}\} \cup \{\lambda\tilde{\mathbf{U}}_{j+}^{(0)}\} \cup \{\lambda(0, \delta)\}$, где $\lambda > 0$ и

$$\delta = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ нижняя,} \\ 1, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ верхняя.} \end{cases}$$

Положим $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(0)} = \tilde{\mathbf{U}}_{j-}^{(0)} \cup \tilde{\mathbf{U}}_{j+}^{(0)}$.

На каждом боковом ребре $\Gamma_k^{(1)}$ имеются две вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$, одна из них — *верхняя*, а другая — *нижняя* на этом ребре.

Итак, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многоугольника $\Gamma(f)$ соответствует приведенный нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$. При этих определениях теорема 1.1 [1] обобщается следующим образом

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (3.1) *имеет решение* (3.2) *класса* $\mathcal{P}_\sigma^\tau$, *т.е. с определенными значениями* r *и* $\omega = -\sigma$, *и пусть грань* $\Gamma_j^{(d)}$ *удовлетворяет условиям*

a) $\omega(1, r) \in \tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$;

b) в случае

$$d = 0, \;\; \omega_j^{(0)} \mathrm{Re}\, r = \omega_k^{(1)}, \;\; \mathrm{Im}\, r \neq 0 \tag{3.6}$$

выполнено равенство

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, r) = \begin{cases} \;\;\tau & \textit{для нижней вершины}\; \Gamma_j^{(0)} \;\textit{ребра}\; \Gamma_k^{(1)}, \\ -\tau & \textit{для верхней вершины}\; \Gamma_j^{(0)} \;\textit{ребра}\; \Gamma_k^{(1)}; \end{cases}$$

во всех других случаях $\mathrm{Im}\, r$ *произвольно. Тогда укорочение*

$$y = c_r x^r \tag{3.7}$$

разложения (3.2) *является решением укороченного уравнения* (3.3), *соответствующего грани* $\Gamma_j^{(d)}$.

Условие b) делает однозначным выбор укороченного уравнения (3.3) в тех местах, в которых пересекаются нормальные конусы соседних вершин. При этом определяется

$$\tau = \begin{cases} \;\;\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, r) & \text{для нижней вершины ребра}, \\ -\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, r) & \text{для верхней вершины ребра}. \end{cases}$$

3.3. Определение конуса задачи и критических чисел. Пусть найдено укорочение (3.7) разложения решения (3.2). Делаем замену

$$y = c_r x^r + z \tag{3.8}$$

в уравнении (3.1) и получаем уравнение для z

$$g(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x) z + h(x, z) = 0,$$

где $g(x, z) = f(x, y)$ и $\mathcal{L}(x)$ — линейный дифференциальный оператор. Согласно теореме 3.1 для разложений z по степеням x^s получаем *конус задачи* $\mathcal{K}$, который выделяется двумя неравенствами:

1) $\omega \mathrm{Re}\, s \leq \omega \mathrm{Re}\, r$;

и при $\mathrm{Re}\, s = \mathrm{Re}\, r$ еще

2) $\tau \mathrm{Im}\, s > \tau \mathrm{Im}\, r$.

В случае (3.6) τ определено, в остальных случаях τ произвольно, т.е. получаются два конуса задачи с $\tau = -1$ и с $\tau = 1$, которые обозначим $\mathcal{K}^\tau$.

Согласно [1, п. 1.4] укороченному решению (3.7) соответствует характеристический многочлен $\nu(k)$ суммы $\mathcal{L}(x)z$, корни которого $k_1, \ldots, k_n$ являются собственными значениями решения (3.7). Те из собственных чисел k_j, которые лежат в конусе задачи $\mathcal{K}$, называются *критическими числами.* В случае (3.6) τ определено и конус задачи $\mathcal{K}$ единственен, поэтому критические числа однозначно определены. В остальных случаях имеются два конуса задачи $\mathcal{K}^\tau$ и для каждого из них — свой набор критических чисел. При этом критические числа k_j с $\operatorname{Re} k_j > \omega \operatorname{Re} r$ — общие для обоих $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^-$, а с $\operatorname{Re} k_j = \operatorname{Re} r$ — разные для разных τ.

При этих определениях остаются верными все построения и утверждения § 3 в [1], где $k_1, \ldots, k_s$ — комплексные критические числа.

Предложение 3.1. из [1] теперь звучит так.

Предложение 3.1. *Множество* $\mathbf{K}(k_1, \ldots, k_s)$ *не имеет точек накопления в* $\mathbb{C}$, *если носитель* $\mathbf{S}(f)$ *не имеет точек накопления в* $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Теперь уточненная теорема 3.1 [1] для решений уравнения (3.1) позволяет получать степенно-логарифмические разложения (3.2), где c_s суть многочлены от логарифма $\ln x$. Показатели s в разложении (3.2) можно упорядочить следующим образом. Согласно предложениям 3.2 и 3.3 из [1] множество $\mathbf{K}(k_1, \ldots, k_s) - r$ лежит в некотором центральном угле V с вершиной в нуле, стороны которого либо обе лежат на наклонных прямых, либо одна из них лежит на оси $\operatorname{Im} s$, т.е. угол V имеет вид V_σ^τ. Пусть векторы P_1 и P_2 — внешние нормали к сторонам угла V. Положим $P = P_1 + P_2 \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2)$. Теперь для каждой точки $s = s' + is'' \in \mathbb{C}$ положим $\|s\| = p_1 s' + p_2 s''$. Будем говорить, что точка $s \in \mathbb{C}$ предшествует точке $t \in \mathbb{C}$, если $\|s\| > \|t\|$. Разложение (3.2), т.е. коэффициенты c_s для $s \in \mathbf{K}$, вычисляются последовательно по этой упорядоченности показателей s так, как описано в леммах 3.1 и 3.2 в [1].

Замечание 3.1. Таким образом, экзотические разложения (имеющие бесконечное число показателей степени с фиксированной вещественной частью) решений ОДУ возникают в двух случаях:

1. Если характеристический многочлен укороченного уравнения, соответствующего вершине, имеет невещественный корень, вещественная часть которого совпадает с числом r_k одного из ребер, примыкающих к этой вершине.

2. Если степенное решение укороченного уравнения имеет критическое число, отличное от показателя степени этого решения, но с той же вещественной частью, что у этого показателя степени.

Впрочем, второй случай это вариант первого, ибо критические числа являются корнями характеристического многочлена укороченного уравнения $\mathcal{L}(x)z = 0$, соответствующего вершине после замены (3.8).

§ 4. Большой пример

4.1. Уравнение и его свойства. Рассмотрим уравнение

$$f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} y^4 + ay^3 + [x^2y'^2 - x^2yy'' - xyy'] + xy = 0, \tag{4.1}$$

где a — ненулевой комплексный параметр. Его носитель $\mathbf{S}(f)$ состоит из четырех точек $Q_1 = (0,4)$, $Q_2 = (0,3)$, $Q_3 = (0,2)$, $Q_4 = (1,1)$. Их выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ — это треугольник с вершинами $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$, $\Gamma_2^{(0)} = Q_3$, $\Gamma_3^{(0)} = Q_4$ и ребрами $\Gamma_1^{(1)} = [Q_1, Q_2, Q_3]$, $\Gamma_2^{(1)} = [Q_3, Q_4]$ и $\Gamma_3^{(1)} = [Q_4, Q_1]$ (рис. 4). На рис. 5 показаны вещественные нормальные конусы $\operatorname{Re}\mathbf{U}_j^{(d)}$ граней $\Gamma_j^{(d)}$. Отметим, что ребрам $\Gamma_k^{(1)}$ соответствуют следующие пары величин $\omega_k^{(1)}$, r_k: $\omega_1^{(1)} = \omega_2^{(1)} = -1$, $\omega_3^{(1)} = 1$; $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1/3$. Вершины Q_1 и Q_4 — верхняя и нижняя на треугольнике Γ. Поэтому $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_3^{(0)} = \pm 1$. Вершина Q_3 — левая, поэтому $\omega_2^{(0)} = -1$. Для $\omega = -1$ разбиение комплексной плоскости $r \in \mathbb{C}$ показано на рис. 6. Отметим, что укороченные уравнения, соответствующие вершинам $\Gamma_1^{(0)}$, $\Gamma_3^{(0)}$ и ребру $\Gamma_3^{(1)}$, являются алгебраическими. Поэтому они не дают интересных решений и здесь не будем их рассматривать.

4.2. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} y^4 + ay^3 + [x^2y'^2 - x^2yy'' - xyy'] = 0. \tag{4.2}$$

Поскольку $r_1 = 0$, то ищем его степенные решения $y = c_0 = \text{const}$. Для c_0 получаем определяющее уравнение $c_0^4 + ac_0^3 = 0$, которое имеет единственный ненулевой корень

$$c_0 = -a = y. \tag{4.3}$$

Найдем его критические числа. Первая вариация $\hat{f}_1^{(1)}$ есть

$$\frac{\delta \hat{f}_1^{(1)}}{\delta y} = 4y^3 + 3ay^2 + 2x^2y'\frac{d}{dx} - x^2y'' - x^2y\frac{d^2}{dx^2} - xy' - xy\frac{d}{dx}. \tag{4.4}$$

На решении (4.3) она дает оператор

$$\mathcal{L}(x) = -4a^3 + 3a^3 + ax^2\frac{d^2}{dx^2} + ax\frac{d}{dx} = a\left(x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} - a^2\right).$$

Ему соответствует характеристический многочлен

$$\nu(k) = a(k^2 - a^2).$$

Он имеет два корня

$$k_{1,2} = \pm a. \qquad (4.5)$$

Согласно п. 3.3 здесь имеются два конуса задачи

$$\mathcal{K}^\tau = \{k : \operatorname{Re} k \geq 0, \;\; \tau \operatorname{Im} k > 0\}, \;\; \tau = \pm 1. \qquad (4.6)$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\operatorname{Re} a = 0$. В этом случае в каждом из конусов задачи (4.6) имеется по одному критическому числу. Пусть для определенности $\operatorname{Im} a > 0$. Тогда $a \in \mathcal{K}^+$ и $-a \in \mathcal{K}^-$. Согласно § 3 из [1] имеем

$$\mathbf{K} = \{s = l, \text{ целое } l > 0\} \qquad (4.7)$$

и два множества

$$\mathbf{K}^\tau(\tau a) = \{s : s = l + m\tau a; \text{ целые } l, m \geq 0; \; l + m > 0\}. \qquad (4.8)$$

Поскольку критические числа τa не лежат в $\mathbf{K}$, то по теореме 3.1 [1] им соответствуют два семейства степенных разложений

$$\mathcal{F}_1^{(1)} 1^\tau = c_0 + \sum c_s x^s, \;\; s \in \mathbf{K}^\tau(\tau a), \qquad (4.9)$$

где коэффициент $c_{\tau a}$ — произвольная постоянная, а остальные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены. Носитель (4.8) каждого из разложений (4.9) располагается в четверти комплексной плоскости: $V_+^\tau = \{\operatorname{Re} s \geq 0, \; \tau \operatorname{Im} s \geq 0\}$.

Случай 2: $\operatorname{Re} a \neq 0$, $a \notin \mathbb{Z}$. В этом случае оба конуса задачи $\mathcal{K}^\tau$ содержат одно и то же критическое число a или $-a$. Пусть для определенности $\operatorname{Re} a > 0$. Тогда a — единственное критическое число. Согласно § 3 из [1]

$$\mathbf{K}(a) = \{s = l + ma; \text{ целые } l, m \geq 0; \; l + m > 0\}. \qquad (4.10)$$

Поскольку критическое число a не лежит в множестве $\mathbf{K}$ из (4.7), то по теореме 3.1 [1] получаем одно семейство разложений

$$\mathcal{F}_1^{(1)} 1 : \, y = c_0 + \sum c_s x^s, \;\; s \in \mathbf{K}(a), \qquad (4.11)$$

где коэффициент c_a — произвольная постоянная, а остальные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены. Его носитель (4.10) на комплексной плоскости s расположен в угле с вершиной в нуле, натянутом на точки $s = 1$ и $s = a$. Если $\operatorname{Im} a = 0$, то в разложении (4.11) все показатели степени вещественны.

Случай 3: $a \in \mathbb{Z}$. В этом случае оба конуса задачи $\mathcal{K}^\tau$ содержат одно и то же критическое число a или $-a$. Пусть для определенности $a > 0$, тогда a — единственное критическое число. Поскольку $a \in \mathbf{K}$ из (4.7), то $\mathbf{K}(a) = \mathbf{K}$ и согласно § 3 [1] получаем одно семейство разложений

$$\mathcal{F}_1^{(1)}1 : y = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \tag{4.12}$$

где c_k — многочлены от $\ln x$, многочлен $c_a(\ln x)$ содержит произвольный постоянный член, а остальные многочлены $c_k(\ln x)$ однозначно определены.

Теперь найдем нестепенные асимптотики решений, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Для этого согласно § 5 [1] в укороченном уравнении (4.2) делаем логарифмическое преобразование

$$\xi = \ln x. \tag{4.13}$$

Производную по ξ будем обозначать точкой. Поскольку

$$y' = \dot{y}/x, \;\; y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2, \tag{4.14}$$

то уравнение (4.2) принимает вид

$$\varphi(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^4 + ay^3 + \dot{y}^2 - y\ddot{y} = 0. \tag{4.15}$$

Его носитель состоит из трех точек Q_1, Q_2 и $Q_5 = (-2, 2)$ (рис. 7), многоугольник $\tilde{\Gamma}$ — это треугольник с этими вершинами. Поскольку теперь конус задачи $p_1 \geq 0$, то нас интересует только ребро $\tilde{\Gamma}^{(1)} = [Q_2, Q_5]$. Для него $\omega = +1$ и $\tilde{r}_1 = -2$, а укороченное уравнение есть

$$\hat{\varphi}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} ay^3 + \dot{y}^2 - y\ddot{y} = 0. \tag{4.16}$$

Ищем его степенные решения вида $y = \tilde{c}_{-2}\xi^{-2}$, $c_{-2} = \text{const}$. Для $\tilde{c}_{-2}$ получаем определяющее уравнение $a\tilde{c}_{-2}^3 + 4\tilde{c}_{-2}^2 - 6\tilde{c}_{-2}^2 = 0$, которое имеет только один ненулевой корень

$$\tilde{c}_{-2} = 2/a. \tag{4.17}$$

Характеристический многочлен для решения $y = \tilde{c}_{-2}/\xi^2$ есть

$$\nu(k) = -\tilde{c}_{-2}(k^2 + 3k).$$

Он имеет два корня $k_1 = -3$ и $k_2 = 0$. Поскольку конусы задачи $\mathcal{K}^\tau$ лежат в множестве $s \leq -2$, то имеем единственное критическое число k_1. Носитель уравнения лежит в решетке с базисом $B_1 = (2, 0)$, $B_2 = (0, 1)$. В ней же лежит сдвинутый носитель укороченного решения $y = \tilde{c}_{-2}\xi^{-2}$. Поэтому

$$\mathbf{K} = \{s = -2l, \text{ целое } l > 1\}.$$

Поскольку критическое число $k_1 = -3$ не лежит в $\mathbf{K}$, то

$$\mathbf{K}(-3) = \{s : s = -l; \text{ целое } l > 2\}$$

и согласно § 3 [1] получаем семейство разложений

$$\mathcal{G}_1^{(1)}1 : y = \tilde{c}_{-2}\xi^{-2} + \sum_{k=3}^{\infty} \tilde{c}_{-k}\xi^{-k}, \tag{4.18}$$

где постоянные коэффициенты таковы: $\tilde{c}_{-2}$ определен в (4.17), $\tilde{c}_{-3}$ — произвольный, остальные $\tilde{c}_{-k}$ однозначно определены.

Возвращаясь по (4.13) к переменной x, получаем семейство нестепенных асимптотик

$$y = \frac{\tilde{c}_{-2}}{(\ln x)^2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{-k}}{(\ln x)^k}. \tag{4.19}$$

Согласно [2] ему соответствует семейство сложных разложений

$$\mathcal{F}_1^{(1)}2 : y = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k x^k, \tag{4.20}$$

где ψ_0 — это ряд из (4.19), а ψ_k — ряды по целым убывающим степеням $\ln x$, которые однозначно определены.

Теперь решим уравнение (4.15) в явном виде. Для этого положим $\dot{y} = p$ и будем рассматривать p как функцию от y. Тогда $\ddot{y} = (dp/dy)p$ и уравнение (4.15) принимает вид

$$y^4 + ay^3 + p^2 - yp\frac{dp}{dy} = 0. \tag{4.21}$$

Полагая $p^2 = q$, получаем линейное неоднородное уравнение

$$-\frac{1}{2}y\frac{dq}{dy} + q + y^4 + ay^3 = 0. \tag{4.22}$$

Соответствующее ему однородное уравнение $-y(dq/dy) + 2q = 0$ имеет решение $q = cy^2$, где c — произвольная постоянная. Методом вариации этой постоянной получаем для нее из (4.22) уравнение

$$-\frac{1}{2}yc'y^2 + y^4 + ay^3 = 0,$$

т.е. $c' = 2(y + a)$. Оно имеет решение

$$c = y^2 + 2ay + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$q = cy^2 = y^2(y^2 + 2ay + C_1)$$

и

$$\frac{dy}{d\xi} = p = \pm\sqrt{q} = \pm\sqrt{y^2 + 2ay + C_1}. \tag{4.23}$$

Интегрирование уравнения (4.23) происходит по-разному в зависимости от значения C_1. Рассморим три случая (4–6).

Случай 4: $C_1 = 0$. В этом случае уравнение (4.23) принимает вид

$$\frac{dy}{y^2\sqrt{1 + 2a/y}} = \pm d\xi. \tag{4.24}$$

Положим $t^2 = 1 + 2a/y$, тогда

$$y = 2a/(t^2 - 1) \tag{4.25}$$

и уравнение (4.24) принимает вид $dt/a = \pm d\xi$. Его решения суть

$$t = \pm a(\xi + C_2),$$

где C_2 — произвольная постоянная. Из (4.25) получаем

$$y = \frac{2a}{a^2(\xi + C_2)^2 - 1}.$$

При $\xi \to \infty$ отсюда получаем степенное разложение по ξ^{-1}

$$y = \frac{2}{a\xi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2C_2}{\xi} + \frac{C_2^2 - a^{-2}}{\xi^2}\right)^k.$$

Это явный вид разложения (4.18).

Случай 5: $C_1 = a^2$. В этом случае уравнение (4.23) принимает вид

$$\frac{dy}{y(y + a)} = \pm d\xi.$$

Его интеграл имеет вид

$$\frac{1}{a}\ln\frac{y}{y + a} = \pm(\xi + C_2),$$

где C_2 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$\frac{y}{y + a} = \exp[\pm a(\xi + C_2)] \stackrel{\text{def}}{=} æ \tag{4.26}$$

и

$$y = \frac{aæ}{1 - æ} = -\frac{a}{1 - æ^{-1}}. \tag{4.27}$$

Полагая $\xi = \ln x$, получаем

$$æ = (\tilde{C}_2 x)^{\pm a}, \quad \tilde{C}_2 = \exp C_2. \tag{4.28}$$

Если $æ^{-1} \to 0$, то согласно (4.27) $y \to -a$, и

$$y = -a \sum_{k=0}^{\infty} æ^{-k}, \tag{4.29}$$

т.е. получаются решения, соответствующие (4.3). Если $\operatorname{Re} a \neq 0$, то получются случаи 2 и 3. Если $\operatorname{Re} a = 0$, то разложения (4.29), получающиеся при разных знаках перед a в (4.28), являются теми частями разложений (4.9), у которых $l = 0$ в (4.8), т.е. получен явный вид (4.27), (4.28) этих разложений.

Случай 6: $C_1 \neq 0$, $C_1 \neq a^2$. В этом случае уравнение $y^2 + 2ay + C_1 = 0$ имеет два различных ненулевых корня α и β. При этом $C_1 = \alpha\beta$. Подстановка Эйлера

$$t^2 = \frac{y - \beta}{y - \alpha}, \quad \text{т.е.} \quad y = \frac{\alpha t^2 - \beta}{t^2 - 1}, \tag{4.30}$$

приводит уравнение (4.23) к виду

$$-\frac{2dt}{\alpha t^2 - \beta} = \pm d\xi.$$

Его интеграл есть

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{t + \sqrt{\beta/\alpha}}{t - \sqrt{\beta/\alpha}} = \pm(\xi + C_2),$$

где C_2 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$\frac{t + \sqrt{\beta/\alpha}}{t - \sqrt{\beta/\alpha}} = \exp[\pm\sqrt{\alpha\beta}(\xi + C_2)] \stackrel{\text{def}}{=} æ, \tag{4.31}$$

т.е.

$$t = \frac{\sqrt{\beta/\alpha}(æ + 1)}{æ - 1}, \quad t^2 = \frac{\beta(æ + 1)^2}{\alpha(æ - 1)^2}.$$

Согласно (4.30) получаем

$$y = \frac{\alpha\beta[(æ + 1)^2 - (æ - 1)^2]}{\beta(æ + 1)^2 - \alpha(æ - 1)^2} = \frac{4\alpha\beta æ}{\beta(æ + 1)^2 - \alpha(æ - 1)^2} =$$

$$= \frac{4C_1}{\beta(æ^{1/2} + æ^{-1/2})^2 - \alpha(æ^{1/2} - æ^{-1/2})^2} = \frac{C_1}{\beta\cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi}, \tag{4.32}$$

где $C_1 = \alpha\beta$ и согласно (4.31) $2\psi = i\sqrt{C_1}(\ln x + C_2)$. Следовательно, y разлагается в ряд по степеням $æ = (\tilde{C}_2 x)^{\pm\sqrt{C_1}}$.

Если C_1 — вещественное отрицательное число, то число $i\sqrt{C_1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\gamma$ — вещественно. В этом случае $\psi = \gamma \ln(\tilde{C}_2 x)$ и согласно (4.32)

$$y = \frac{C_1}{\beta \cos^2 \ln[(\tilde{C}_2 x)^\gamma] + \alpha \sin^2 \ln[(\tilde{C}_2 x)^\gamma]}. \tag{4.33}$$

С другой стороны, из (4.32) видно, что y разлагается в ряд по целым степеням æ, т.е. по целым степеням $x^{2\gamma i}$, что дает ряд по чисто мнимым степеням x.

4.3. Разложения, соответствующие вершине Q_3. Вершине $\Gamma_2^{(0)} = Q_3$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(0)}(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^2 y'^2 - x^2 y y'' - x y y' = 0. \tag{4.34}$$

Его характеристический многочлен

$$\chi(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} r^2 - r(r-1) - r \equiv 0.$$

Поэтому любое выражение

$$y = c_r x^r \tag{4.35}$$

с произвольными постоянными c_r и $r \in \mathbb{C}$ является решением уравнения (4.34). Несложно показать, что это двупараметрическое семейство исчерпывает все решения уравнения (4.34). Согласно п. 4.1 приведенный нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_1^{(0)} = -(1, r)$, где

$$r : r \in \mathbb{C}, \ \ 0 \le \operatorname{Re} r \le 1, \ \ r \ne 0, \ \ r \ne 1. \tag{4.36}$$

Вычислим критические числа решения (4.35). Имеем

$$\frac{\delta \hat{f}_2^{(0)}}{\delta y} = 2x^2 y' \frac{d}{dx} - x^2 y'' - x^2 y \frac{d^2}{dx^2} - x y' - x y \frac{d}{dx}.$$

Подставляя сюда решение (4.35), получаем линейный оператор

$$\mathcal{L}(x) = c_r x^r \left[2 r x \frac{d}{dx} - r(r-1) - x^2 \frac{d^2}{dx^2} - r - x \frac{d}{dx} \right].$$

Из него получаем характеристический многочлен

$$\nu(k) = -c_r[k(k-1) + k - 2rk + r^2] = -c_r(k-r)^2.$$

Он имеет двукратный корень $k = r$, т.е. критических чисел нет.

Теперь изучим разложения решений

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \quad s \in \mathbf{K} \tag{4.37}$$

полного уравнения (4.1) с первым членом (4.35), удовлетворяющим неравенствам (4.36). Согласно предложению 3.2 из [1]

$$\mathbf{K} = \{s : s = r + lr + m(1-r); \text{ целые } l, m \geq 0; \ l + m > 0\}. \tag{4.38}$$

Поскольку критических чисел нет, то по теореме 3.1 [1] получаем двупараметрическое семейство разложений (4.37), где показатель степени r удовлетворяет ограничениям (4.36), а постоянные коэффициенты таковы: c_r — произвольный, все c_s однозначно определены.

Носитель (4.38) имеет две образующие r и $1-r$ и располагается на комплексной плоскости в угле с вершиной в точке r, стороны которого параллельны векторам $(\mathrm{Re}\, r, \mathrm{Im}\, r)$ и $(\mathrm{Re}\,(1-r), \mathrm{Im}\,(1-r))$. При этом подсумма в (4.37), соответствующая $m = 0$ в (4.38), является разложением решений (4.32) укороченного уравнения (4.2), соответствующего ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Здесь $r = \pm\sqrt{C_1}$.

Рассмотрим три случая, предполагая, что $\mathrm{Im}\, r > 0$.

Случай 1: $\mathrm{Re}\, r = 0$. В этом случае угол V заштрихован на рис. 8 и разложение (4.32) может быть записано в виде функции (4.33).

Случай 2: $0 < \mathrm{Re}\, r < 1$. В этом случае угол V заштрихован на рис. 9.

Случай 3: $\mathrm{Re}\, r = 1$. В этом случае угол V заштрихован на рис. 10. Значениям показателей s с $\mathrm{Re}\, s = 1$ из множества (4.38) соответствует подсумма в (4.37), которая будет получена ниже как решение укороченного уравнения, соответстующего ребру $\Gamma_2^{(1)}$.

4.4. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_2^{(1)}$. Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} [x^2 y'^2 - x^2 y y'' - x y y'] + x y = 0. \tag{4.39}$$

Поскольку $\tilde{\mathbf{U}}_2^{(1)} = -(1, 1)$, то степенные решения укороченного уравнения ищем в виде $y = c_1 x$. Для c_1 получаем определяющее уравнение $c_1^2 - c_1^2 + c_1 = 0$. Оно не имеет ненулевых решений. Следовательно, уравнение (4.39) не имеет подходящих степенных решений.

Найдем его нестепенные решения вида $y = \varphi(\ln x) x$. Для этого сделаем степенное преобразование

$$y = xz. \tag{4.40}$$

Тогда $y' = z + xz'$, $y'' = 2z' + xz''$ и уравнение (4.39) после сокращения на x^2 принимает вид

$$x^2 z'^2 - x^2 z z'' - x z z' + z = 0. \tag{4.41}$$

Носитель этого уравнения лежит на оси $q_1 = 0$, поэтому делаем логарифмическое преобразование (4.13). Согласно (4.14) уравнение (4.41) перейдет в

$$\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{z}^2 - z\ddot{z} + z = 0. \tag{4.42}$$

Носитель этого уравнения состоит из двух точек $Q_5 = (-2, 2)$ и $Q_6 = (0, 1)$. Ребру $[Q_5, Q_6]$ соответствует $r = 2$. Поэтому ищем степенные решения уравнения (4.42) в виде $z = c_2\xi^2$. Для c_2 получаем определяющее уравнение

$$4c_2^2 - 2c_2^2 + c_2 = 0.$$

Оно имеет единственный ненулевой корень

$$c_2 = -1/2.$$

Поскольку $\xi \to \infty$, то конус задачи лежит в множестве

$$k \leq r = 2. \tag{4.43}$$

Найдем критические числа. Первая вариация

$$\frac{\delta\varphi}{\delta z} = 2\dot{z}\frac{d}{d\xi} - \ddot{z} - z\frac{d^2}{d\xi^2} + 1.$$

Продставляя сюда решение $z = -\xi^2/2$, получаем линейный оператор

$$\mathcal{L}(x) = -2\xi\frac{d}{d\xi} + 1 + \frac{1}{2}z^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 1,$$

который дает характеристический многочлен

$$\nu(k) = \frac{1}{2}k(k-1) - 2k + 2 = \frac{1}{2}(k-4)(k-1).$$

Он имеет два корня $k_1 = 1$ и $k_2 = 4$. Неравенству (4.43) удовлетворяет только k_1. Поскольку уравнение (4.42) квазиоднородно, то множество $\mathbf{K}$ пусто,

$$\mathbf{K}(k_1) = \{s = l, \text{ целое } l < 2\}$$

и условие совместности автоматически выполнено. Получаем однопараметрическое семейство разложений

$$z = -\frac{1}{2}\xi^2 + c_1\xi + \sum_{l=0}^{\infty} c_{-l}\xi^{-l}, \tag{4.44}$$

где коэффициенты постоянны: c_1 — произвольный, а остальные однозначно определены. Разложению (4.44) соответствует семейство нестепенных асимптотик

$$y = \left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c_1 \ln x + \sum_{l=0}^{\infty} c_{-l}(\ln x)^{-l}\right] x \tag{4.45}$$

решений исходного уравнения (4.1). Согласно [2] можно показать, что ему соответствует семейство сложных разложений решений уравнения (4.1).

Решим теперь уравнение (4.42) в явном виде. Положим $\dot{z} = p$ и будем рассматривать p как функцию от z. Тогда $\ddot{z} = (dp/dz)p$ и уравнение (4.42) принимает вид

$$p^2 - zpdp/dz + z = 0.$$

Положим $p^2 = q$, тогда получим линейное неоднородное уравнение

$$-\frac{1}{2}z\frac{dq}{dz} + q + z = 0.$$

Соответствующее линейное уравнение $zdq/dz = 2q$ имеет решение $q = cz^2$. Вариацией постоянной c получаем уравнение $(-1/2)z^3c' + z = 0$, т.е.

$$c' = \frac{2}{z^2},$$

следовательно, $c = -(2/z) + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная, и

$$q = cz^2 = -2z + C_1z^2.$$

Итак, получили уравнение

$$\frac{dz}{d\xi} = p = \pm\sqrt{q} = \pm\sqrt{C_1z^2 - 2z}. \tag{4.46}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $C_1 = 0$. В этом случае уравнение (4.46) есть

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \pm\sqrt{-2}\,d\xi.$$

Интегрирование дает

$$2\sqrt{z} = \pm\sqrt{-2}\,(\xi + C_2),$$

где C_2 — произвольная постоянная. Отсюда получаем

$$z = -\frac{1}{2}\left(\xi + C_2\right)^2.$$

Это точное значение разложения (4.44).

Случай 2: $C_1 \neq 0$. В этом случае запишем уравнение (4.46) в виде

$$\frac{dz}{z\sqrt{C_1 - 2/z}} = \pm d\xi \tag{4.47}$$

и положим

$$t^2 = C_1 - \frac{2}{z}, \ \text{ т.е. } \ z = \frac{2}{C_1 - t^2}. \tag{4.48}$$

Тогда уравнение (4.47) примет вид

$$\frac{2dt}{C_1 - t^2} = \pm d\xi.$$

Его интеграл есть

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln \frac{t + \sqrt{C_1}}{t - \sqrt{C_1}} = \pm(\xi + C_2), \tag{4.49}$$

где C_2 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$\frac{t + \sqrt{C_1}}{t - \sqrt{C_1}} = \exp[\pm\sqrt{C_1}(\xi + C_2)] \stackrel{\text{def}}{=} æ. \tag{4.50}$$

Отсюда получаем

$$t = \frac{\sqrt{C_1}(æ + 1)}{æ - 1}.$$

Согласно (4.48) имеем

$$z = \frac{2(æ - 1)^2}{C_1[(æ - 1)^2 - (æ + 1)^2]} = -\frac{2(æ - 1)^2}{C_1\, 4æ} =$$

$$= -\frac{2}{C_1} \frac{(æ^{1/2} - æ^{-1/2})^2}{4} = \frac{2}{C_1} \sin^2 \psi,$$

где $2\psi = i \ln æ = \pm i \sqrt{C_1} \ln(\tilde{C}_2 x)$. Отсюда видно, что

$$z = -(æ - 2 + æ^{-1})/(2C_1),$$

т.е. z является многочленом Лорана от $(\tilde{C}_2 x)^{\sqrt{C_1}}$ и одновременно выражается как тригонометрическся функция от $\ln(\tilde{C}_2 x)$. Если постоянная C_1 — вещественна и отрицательна, то z является рациональной функцией от чисто мнимой степени x и одновременно имеет вид

$$z = \pm \frac{2}{C_1} \sin^2[\sqrt{|C_1|} \ln(\tilde{C}_2 x)].$$

Согласно (4.40) получаем асимптотику $y = xz$ решений уравнения (4.1) в случае $\mathrm{Re}\, r = 1$, т.е. явный вид подсуммы в (4.37) с $\mathrm{Re}\, s = 1$, которая обсуждалась в случае 3 п. 4.3.

§ 5. Заключение

Пусть решение уравнения (3.1) имеет разложение

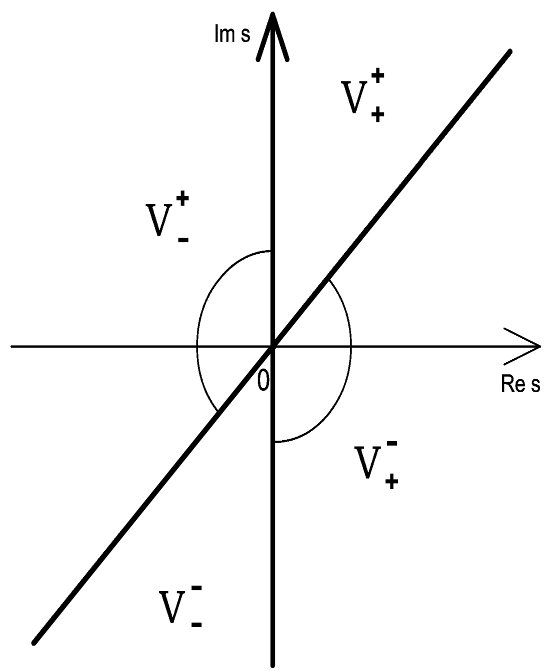
$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \quad s \in \mathbf{K}, \tag{5.1}$$

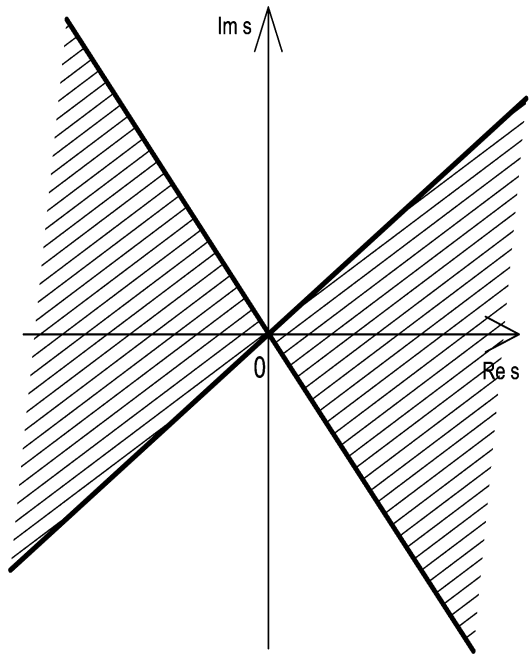
где $\mathbf{K} \cup \{r\}$ — это носитель разложения на комплексной плоскости. Пусть $\mathbf{L}$ — выпуклая оболочка множества $\mathbf{K} \cup \{r\}$ и $\partial\mathbf{L}$ ее граница. Тогда $\partial\mathbf{L}$ — это некоторая ломаная линия, состоящая из вершин и ребер. Точка r — ее вершина. Пусть L_1 и L_2 — ребра ломаной $\partial\mathbf{L}$, примыкающие к вершине r. Если первый член $c_r x^r$ разложения (5.1) соответствует некоторой вершине $\Gamma_j^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(f)$, то части разложения (5.1), носители которых лежат на ребрах L_1 и L_2, зачастую получаются как решения укороченных уравнений, соответствующих ребрам $\Gamma_k^{(1)}$ и $\Gamma_{k+1}^{(1)}$, примыкающих к вершине $\Gamma_j^{(0)}$. В частности, часть разложения (5.1) с такими показателями s, что $\operatorname{Re} s = \operatorname{Re} r$, вычисляется как решение укороченного уравнения, соответствующего одному из указанных ребер $\Gamma_k^{(1)}$ и $\Gamma_{k+1}^{(1)}$. Следовательно, хотя разложение (5.1) соответствует вершине, но его "граничные" части могут быть получены как разложения решений укороченных уравнений, соответствующих ребрам.

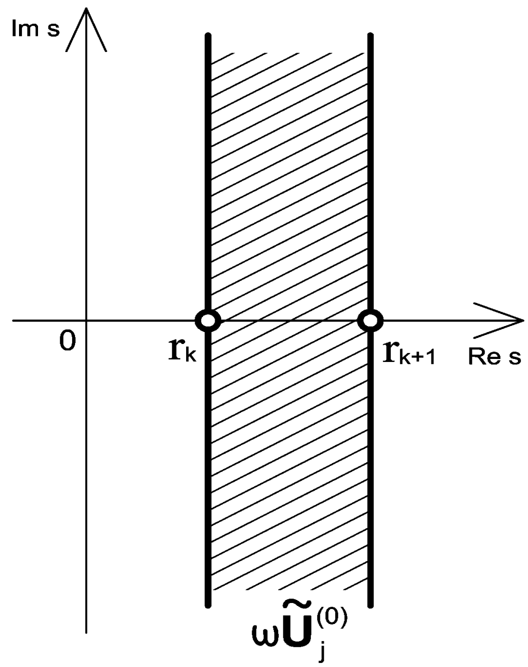
Литература

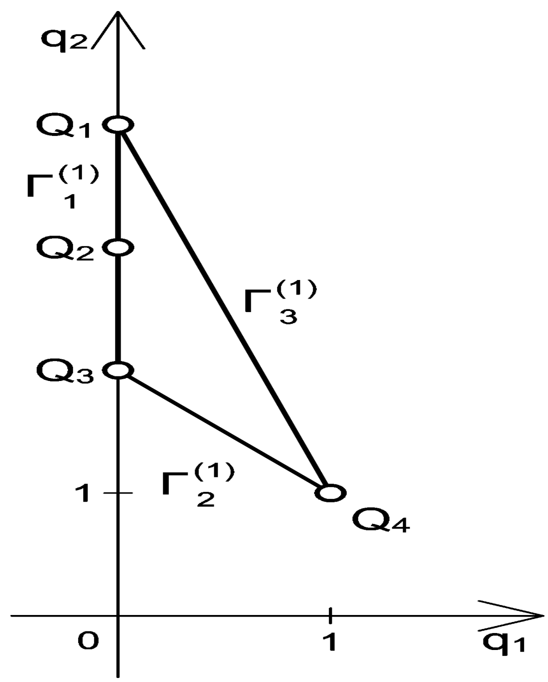
1. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциально уравнения // УМН, 2004, т. 59, N 3, с. 31–80.

2. Брюно А.Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциально уравнения // ДАН, 2006, т. 406, N 6, с. 730–733.

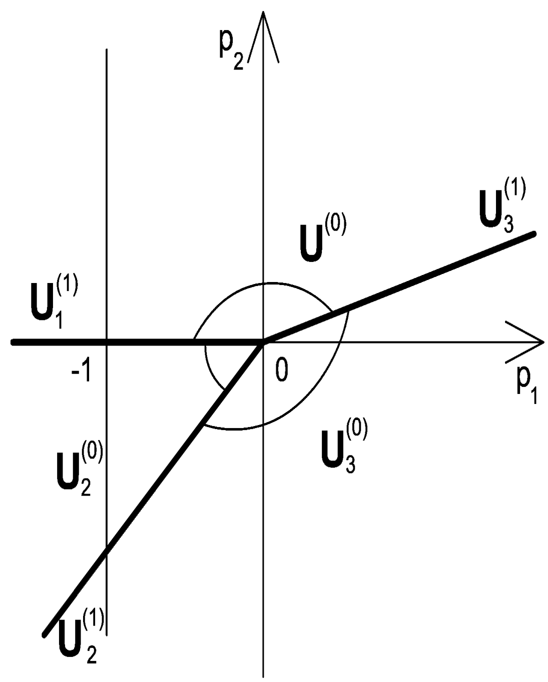

Im s
V_+^+
V_-^+
0
Re s
V_+^-
V_-^-


Im s
0
Re s

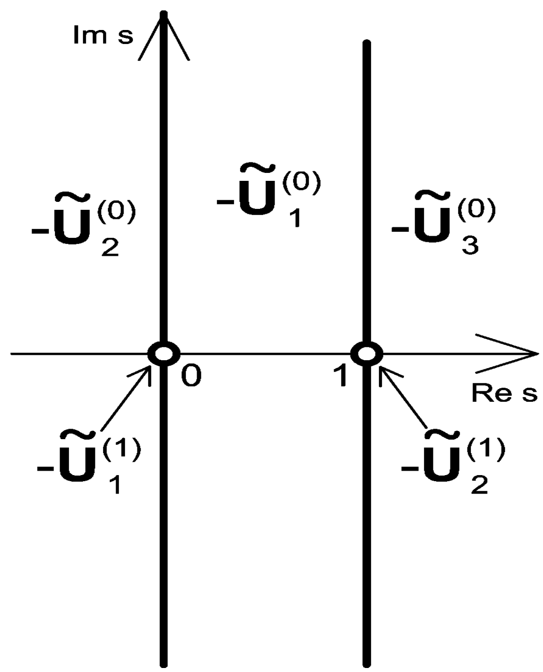

Im s
0
r_k
r_{k+1}
Re s
$\omega\tilde{\mathbf{U}}_j^{(0)}$



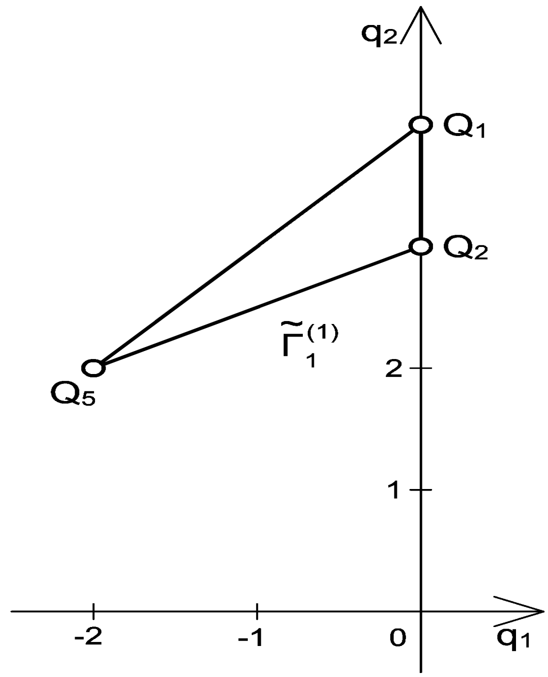
q2
Q1
Γ1(1)
Q2
Γ3(1)
Q3
1
Γ2(1)
Q4
0
1
q1



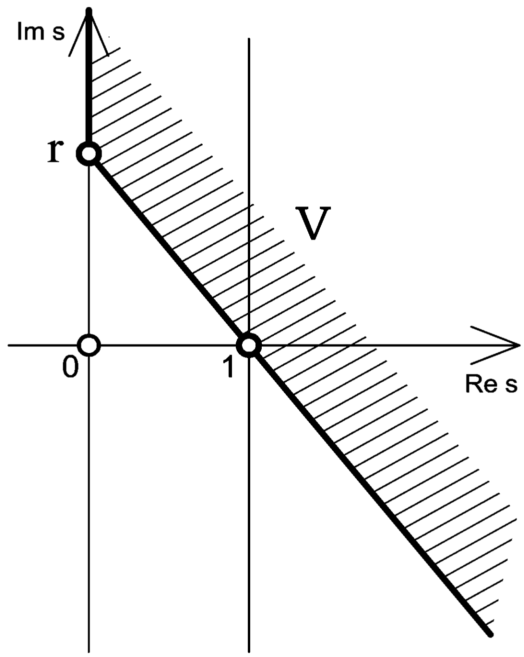
p_2
$\mathbf{U}_3^{(1)}$
$\mathbf{U}^{(0)}$
$\mathbf{U}_1^{(1)}$
-1
0
p_1
$\mathbf{U}_3^{(0)}$
$\mathbf{U}_2^{(0)}$
$\mathbf{U}_2^{(1)}$

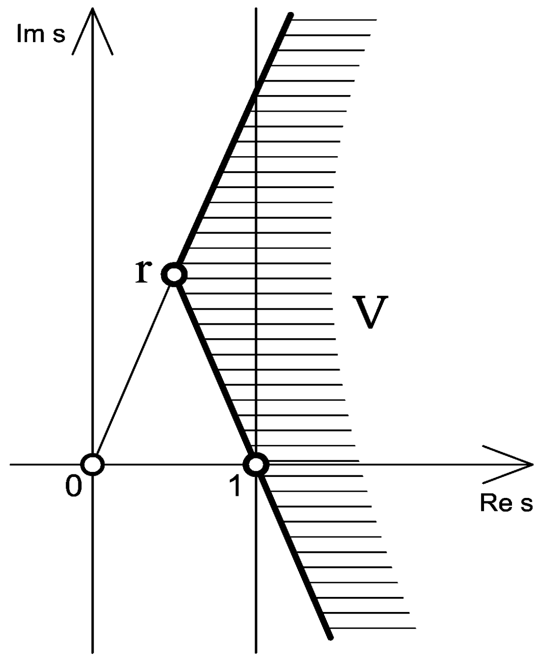


Im s
$-\tilde{U}_2^{(0)}$
$-\tilde{U}_1^{(0)}$
$-\tilde{U}_3^{(0)}$
0
1
Re s
$-\tilde{U}_1^{(1)}$
$-\tilde{U}_2^{(1)}$

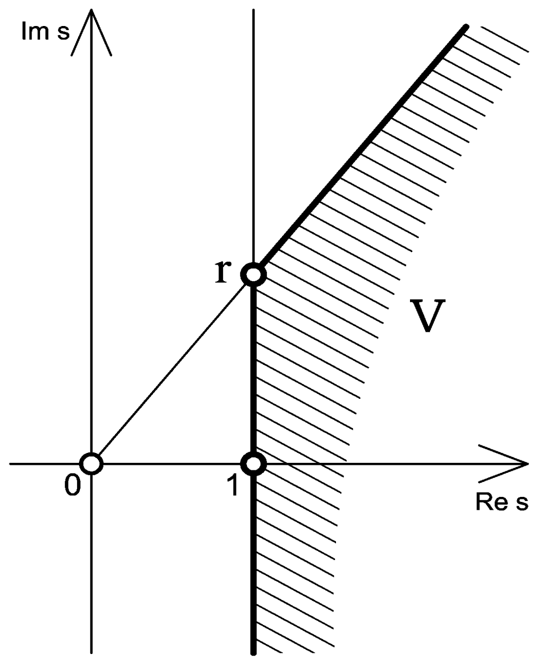


q2
Q1
Q2
$\widetilde{\Gamma}_1^{(1)}$
2
Q5
1
-2
-1
0
q1


Im s
r
V
0
1
Re s



Im s
r
V
0
1
Re s



Im s
r
V
0
1
Re s