

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.КЕЛДЫША

П. Ю. Томин

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИЗМЕРЕНИЯ
ПАРАМЕТРОВ ФЕМТОСЕКУНДНОГО
ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА**

Москва 2006

П. Ю. Томир, Обратная задача измерения параметров фемтосекундного лазерного импульса.

Аннотация. Рассмотрена проблема измерения параметров фемтосекундного лазерного импульса. Исследован способ измерения, основанный на явлении генерации второй гармоники в нелинейных оптических средах. Описана математическая модель эксперимента. Рассмотрен и реализован метод обобщенных проекций. Предложен способ фильтрации данных при наличии экспериментальной ошибки. Проведенное численное моделирование демонстрирует совпадение исходных и восстановленных параметров в рамках выбранного приближения¹.

P. Yu. Tomir, Inverse problem of measuring the ultrashort laser pulse parameters.

Abstract. The problem of measuring the ultrashort laser pulse parameters is considered. The measuring method that is based on the second harmonic generation phenomenon in non-linear optical medium is investigated. Mathematical model of the experiment is described. The generalized projections method is considered and realized. The method for filtering data with experimental noise is proposed. The mathematical modeling of the problem demonstrates the coincidence of original and reconstructed parameters within the framework of the approach considered.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00836).

Содержание

Введение	3
Описание эксперимента	3
Математическая модель	5
Метод обобщенных проекций	7
Численный эксперимент	8
Заключение	23
Литература	24

Введение

В последние годы в мировой науке наметился значительный прогресс в целом ряде областей лазерной физики и лазерных технологий. Достижения современной лазерной физики широко используются и в области фундаментальных исследований, и при решении многих прикладных задач. Особенностью таких исследований является то, что в этом случае используется не только высокая интенсивность лазерного излучения, но и предельно малая длительность лазерного импульса. Измерения параметров импульса (зависимости интенсивности и фазы от времени) стандартными методами в фемтосекундном диапазоне невозможны, т.к. не существует инструментов с полушириной аппаратной функции фемтосекундной длительности. В работе исследован способ измерения, основанный на явлении генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах [1].

Описание эксперимента

Схема эксперимента по измерению параметров фемтосекундного импульса представлена на рисунке ниже.

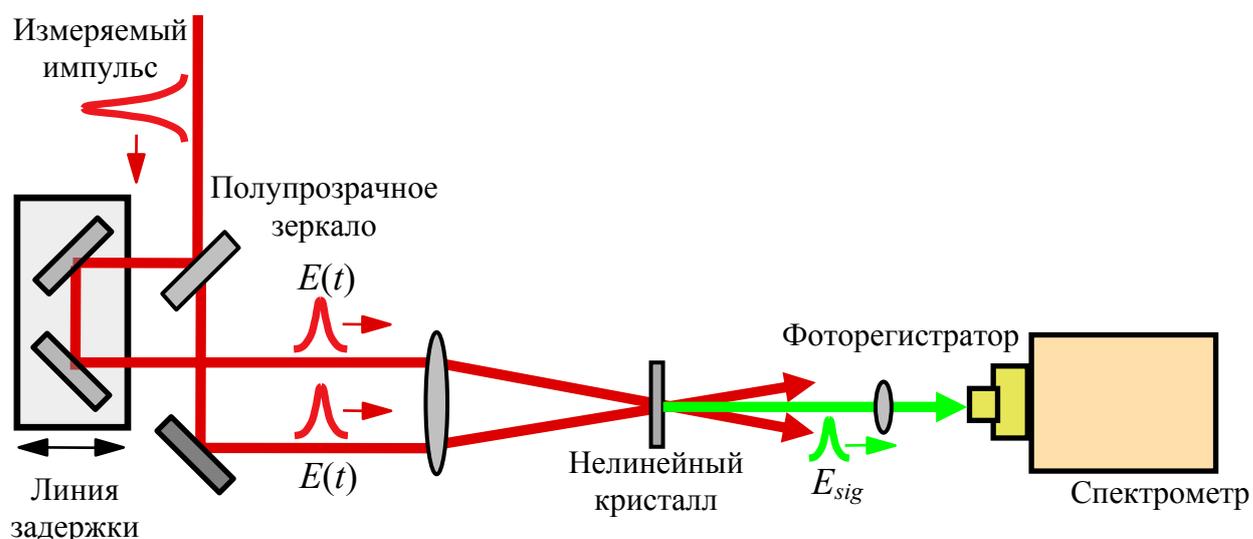


Рис. 1. Схема эксперимента

Экспериментальная установка включает в себя: систему деления измеряемого импульса надвое с регулируемой линией задержки, нелинейный кристалл и регистрирующую систему, состоящую из фоторегистратора и спектрометра. Два импульса, т.е. две пересекающиеся внутри нелинейного кристалла электромагнитные волны с частотой ω , могут при некоторых условиях в зоне пересечения вызвать свечение кристалла на частоте второй гармоники 2ω , которое и попадает на регистрирующую систему.

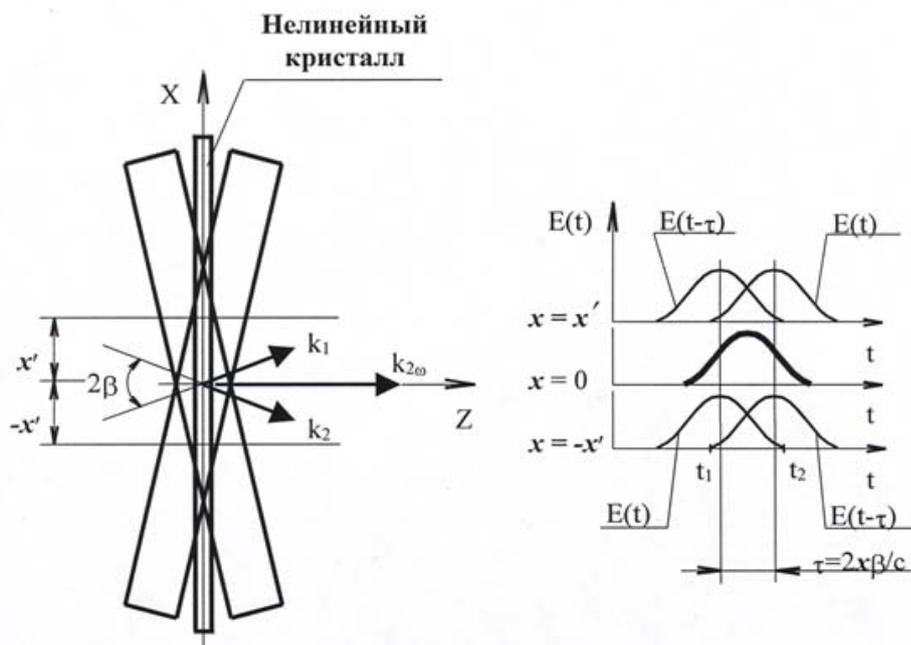


Рис. 2. Схема падения импульсов на нелинейный кристалл

Рассмотрим ситуацию, возникающую при пересечении очень тонкого нелинейного кристалла двумя одинаковыми световыми импульсами с волновыми векторами k_1 и k_2 , распространяющимися под углами $\pm\beta$ к оси Z (рис. 2). Как видно из рисунка оба этих импульса пересекают кристалл одновременно лишь на оси системы при $x = 0$. В той области кристалла, где значения x положительны, первый импульс отстает от второго, при отрицательных значениях x — опережает его. При некотором фиксированном значении x' задержка равна $\tau(x') = 2\beta x'/c$. Т.к. оба этих импульса появились в результате деления исходного импульса надвое, то при фиксированном значении x' суммарное электрическое поле может быть представлено как $E_{\Sigma}(t) = E(t) + E(t - \tau)$. В этом случае электрическое поле генерируемой в нелинейном кристалле электромагнитной волны второй гармоники $E_{sig}(t, \tau) \propto E(t)E(t - \tau)$.

В измерительной схеме возможно зарегистрировать лишь полную энергию второй гармоники, излученной из той или иной точки кристалла за все время ее генерации, т.е. за все время, пока в этой точке присутствуют обе

пересекающиеся волны (на рис. 2 этот временной интервал ограничен значениями t_1 и t_2). Соответственно, энергия второй гармоники, излученная из некоторой точки нелинейного кристалла с координатой $x = \tau c/2\beta$ равна

$$\xi_{sig}(\tau) \propto \int_{t_1}^{t_2} I(t)I(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)I(t-\tau)dt,$$

где $I(t)$ – интенсивность измеряемого импульса, $I(t)I(t-\tau) = 0$ вне $[t_1, t_2]$.

Заметим, что последний интеграл в этой формуле есть ни что иное как автокорреляционная функция $I(t)$, кроме того выписанные уравнения не содержат информации о фазе. Как известно, поиск функции по ее автокорреляции – типичная некорректно поставленная задача. Для перехода к двумерным методам измерения в систему включается спектрограф. Это позволяет получить спектрограмму, т.е. набор спектров второй гармоники, излучаемых из каждой точки кристалла с координатой $x = \tau c/2\beta$:

$$I_{frog}(\omega, \tau) \propto \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_{sig}(t, \tau) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)E(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

Математическая модель

Зависимость электрического поля от времени имеет вид

$$E(t) = A(t)e^{i\varphi(t)},$$

где $A(t) = \sqrt{I(t)}$ – амплитуда, а $\varphi(t)$ – фаза электромагнитной волны в моменты времени t . Для поля второй гармоники E_{sig} , заменяя знак пропорциональности на знак равенства, имеем $E_{sig}(t, \tau) = E(t)E(t-\tau)$. Для

спектрограммы имеем $I_{frog}(\omega, \tau) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_{sig}(t, \tau) e^{-i\omega t} dt \right|^2$.

Таким образом, наша модель описывается следующими уравнениями:

$$E(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}, \quad (1)$$

$$E_{sig}(t, \tau) = E(t)E(t-\tau), \quad (2)$$

$$I_{frog}(\omega, \tau) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_{sig}(t, \tau) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (3)$$

По известной функции $I_{frog}(\omega, \tau)$ требуется найти $E(t)$.

В работе рассмотрен и реализован метод решения системы уравнений (1)-(3), называемый методом обобщенных проекций.

Отметим принципиальные ограничения на возможности рассмотренного способа измерения [2]. Поскольку спектрограмма является модулем комплекснозначной величины, она не включает в себя так называемую абсолютную фазу φ_0 , т.е. первый член разложения в ряд Тейлора функции $\varphi(t)$. Таким образом, этот параметр не меряется в эксперименте. Также заметим, что фаза не определена в точках, где интенсивность равна или близка к нулю. Кроме того, схема имеет неопределенность в направлении времени.

Пусть $\varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \varphi_3 t^3 + \dots$ – разложение в ряд Тейлора функции $\varphi(t)$. Ограничимся тремя первыми членами разложения, тогда

$$E(t) = A(t) \exp[i\varphi(t)] = A(t) \exp[i(\varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2)].$$

Далее

$$\begin{aligned} E_{sig}(t, \tau) &= E(t)E(t - \tau) = \\ &= A(t) \exp[i(\varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2)] \cdot A(t - \tau) \exp[i(\varphi_0 + \varphi_1(t - \tau) + \varphi_2(t - \tau)^2)] = \\ &= A(t)A(t - \tau) \exp\left\{i\left[2\varphi_0 + \varphi_1(2t - \tau) + \varphi_2(t^2 + (t - \tau)^2)\right]\right\}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} I_{frog}(\omega, \tau) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_{sig}(t, \tau) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t - \tau) \exp\left\{i\left[2\varphi_0 + \varphi_1(2t - \tau) + \varphi_2(t^2 + (t - \tau)^2)\right]\right\} e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \\ &= \left| \exp(2i\varphi_0 - i\varphi_1\tau) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t - \tau) \exp\left\{i\left[2\varphi_1 t + \varphi_2(t^2 + (t - \tau)^2)\right]\right\} e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \\ &= |\exp(2i\varphi_0 - i\varphi_1\tau)|^2 \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t - \tau) \exp\left\{i\left[2\varphi_1 t + \varphi_2(t^2 + (t - \tau)^2)\right]\right\} e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t - \tau) \exp\left\{i\left[2\varphi_1 t + \varphi_2(t^2 + (t - \tau)^2)\right]\right\} e^{-i\omega t} dt \right|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, спектрограмма не содержит информации о φ_0 .

Перейдем к неопределенности в направлении времени.

$$E(t) = A(t) \exp[i\varphi(t)],$$

$$E_{sig}(t, \tau) = E(t)E(t - \tau),$$

$$I_{frog}(\omega, \tau) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_{sig}(t, \tau) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)E(t-\tau) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \exp[i\varphi(t)] A(t-\tau) \exp[i\varphi(t-\tau)] \exp(-i\omega t) dt \right|^2.$$

Сделаем замену переменных: $t = \tau - \theta$, получим:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(-(\theta - \tau)) \exp[i\varphi(\tau - \theta)] A(-\theta) \exp[i\varphi(-\theta)] \exp(i\omega\theta) d\theta \right|^2 =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(-\theta) \exp[-i\varphi(-\theta)] A(-(\theta - \tau)) \exp[-i\varphi(-(\theta - \tau))] \exp(-i\omega\theta) d\theta \right|^2.$$

Отсюда видно, что спектрограмма не изменяется при одновременном отображении функции $E(t)$ по времени и замене знака $\varphi(t)$ на противоположный. В этом заключается неопределенность в направлении времени.

Метод обобщенных проекций

Рассмотрим метод обобщенных проекций [3], позволяющий в итерационном процессе найти неизвестную функцию $E(t)$ по известной спектрограмме $I_{frog}(\omega, \tau)$. Схема данного метода приведена на рисунке ниже.

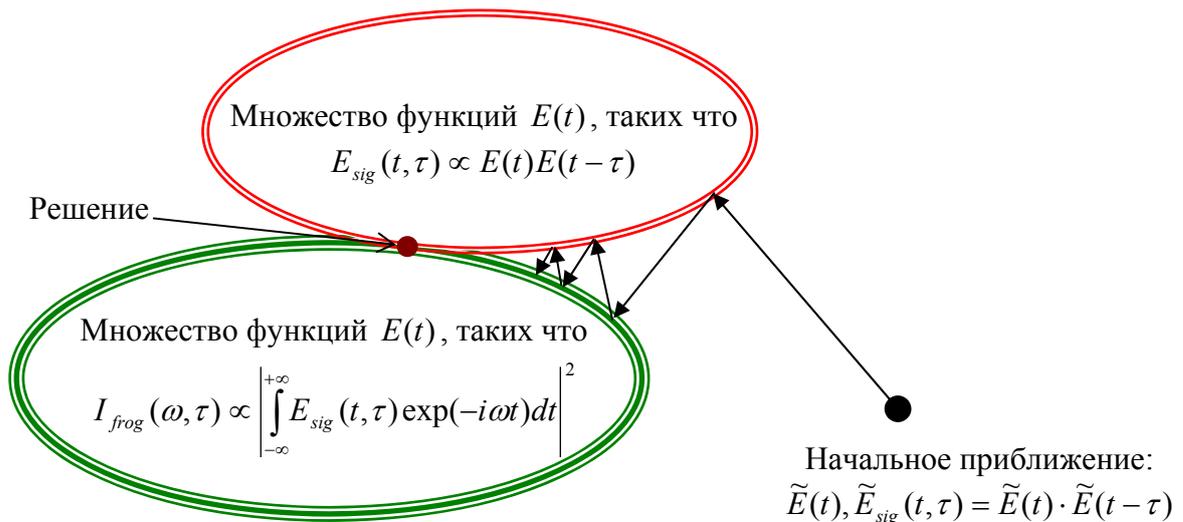
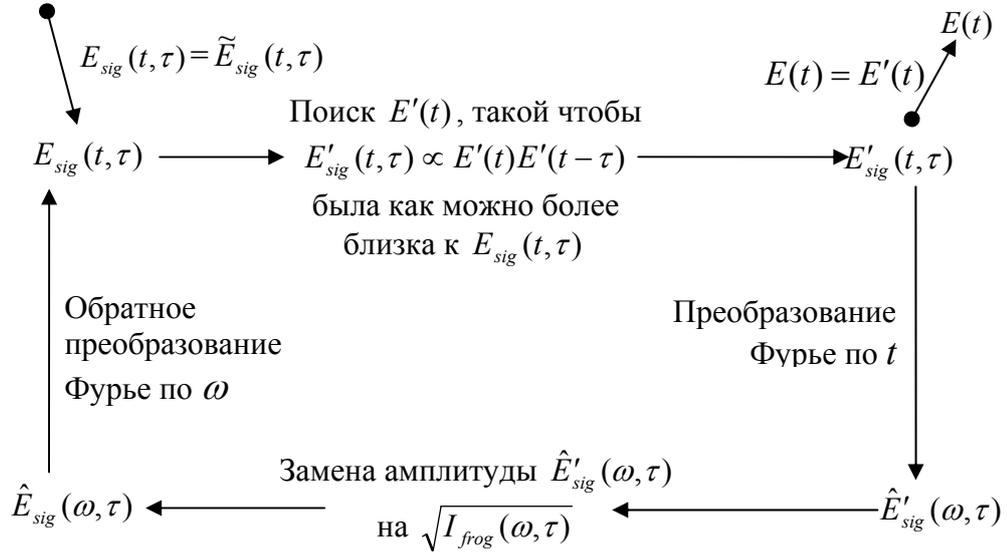


Рис. 3. Схема метода обобщенных проекций

Сходимость метода гарантирована для выпуклых множеств. Итерационный алгоритм следующий:

Начальное приближение:

$$\tilde{E}(t), \tilde{E}_{sig}(t, \tau) = \tilde{E}(t) \cdot \tilde{E}(t - \tau)$$



Требуется найти функцию $E'(t)$, такую чтобы $E'_{sig}(t, \tau) \propto E'(t)E'(t - \tau)$, причем $E'_{sig}(t, \tau)$ и $E_{sig}(t, \tau)$ должны быть как можно более близки друг к другу. Это можно сделать путем минимизации функционала

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_{sig}(t, \tau) - E'_{sig}(t, \tau)|^2 dt d\tau, \quad (4)$$

где $E'_{sig}(t, \tau) = E'(t)E'(t - \tau)$.

Как только функция $E'(t)$ найдена, полагаем $E'_{sig}(t, \tau) = E'(t)E'(t - \tau)$ и продолжаем итерационный процесс.

Численный эксперимент

Получаемая спектрограмма есть матрица размерности $N \times N$. Для определенности будем считать, что узлы ω_n и τ_n заданы на равномерной сетке отрезка $[0, 1]$ с числом интервалов N . Аналогично $t_n = nh, n = 0..(N - 1)$, где $h = 1/N$. Таким образом, задача заключается в восстановлении $2N$ неизвестных точек по известным N^2 точкам, т.е. является переопределенной.

Преобразуем выражение (1):

$$E(t) = A(t) \exp[i\varphi(t)] = A(t) \cos[\varphi(t)] + iA(t) \sin[\varphi(t)] = E^r(t) + iE^i(t), \quad (5)$$

где $E^r(t) = A(t) \cos[\varphi(t)], E^i(t) = A(t) \sin[\varphi(t)]$.

Для аппроксимации неизвестных функций $E^r(t)$ и $E^i(t)$ будем использовать стандартные B -сплайны третьей степени [4]. Такой сплайн имеет вид:

$$B(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{2}|x|^3, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3, & 1 \leq |x| \leq 2, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases} \quad \underline{B(x)}$$

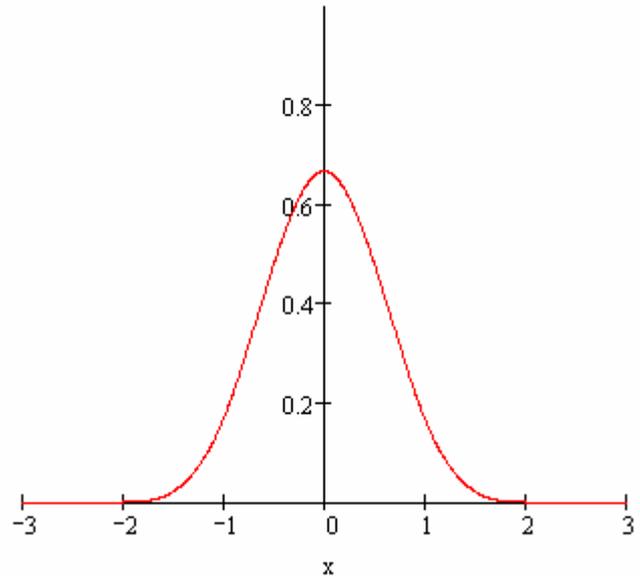


Рис. 4. График функции $B(x)$

Такой способ приближения кажется достаточно разумным, т.к. форма функции $B(x)$ хорошо согласуется с физическими свойствами функций $I(t)$ и $\varphi(t)$.

Приближаемые функции записываются в виде $\tilde{E}^\alpha(t) = \sum_{n=-1}^{M+1} e_n^\alpha B\left(\frac{t - nH}{H}\right)$, $\alpha = r, i$, где $H = 1/M$, M – число интервалов сплайна.

Неизвестные коэффициенты e_n^r, e_n^i определяются по методу наименьших квадратов из условия [10]

$$\min_{e_n^\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} [E^\alpha(t_j) - \tilde{E}^\alpha(t_j)]^2. \quad (6)$$

Далее, $\tilde{E}^\alpha(t_j) = T_{jk} e_k^\alpha$, где T – линейный оператор $R_{M+3} \rightarrow R_N$, имеющий вид $T_{jk} = B\left(\frac{t_j - kH}{H}\right)$.

Пусть $f_j^\alpha = E^\alpha(t_j)$. Можно легко показать, что (6) равносильно системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$T^T T \cdot e^\alpha = T^T f^\alpha.$$

Матрица системы пятидиагональная, число обусловленности $\sim 10^5$. Для решения использовался метод сопряженных градиентов. Как только коэффициенты e_n^r, e_n^i найдены, принимаем

$$E^\alpha(t) = \sum_{n=-1}^{M+1} e_n^\alpha B\left(\frac{t-nH}{H}\right), \alpha = r, i. \quad (7)$$

Отметим, что B -сплайны обладают свойством сходимости, а порядок приближения определяется неравенством [4]

$$\|f(x) - S^3(x, f)\| \leq H^3 \omega(f''', H).$$

Приближаемая функция удовлетворяет волновому уравнению, поэтому для порядка приближения имеем, по крайней мере, $O(H^3)$.

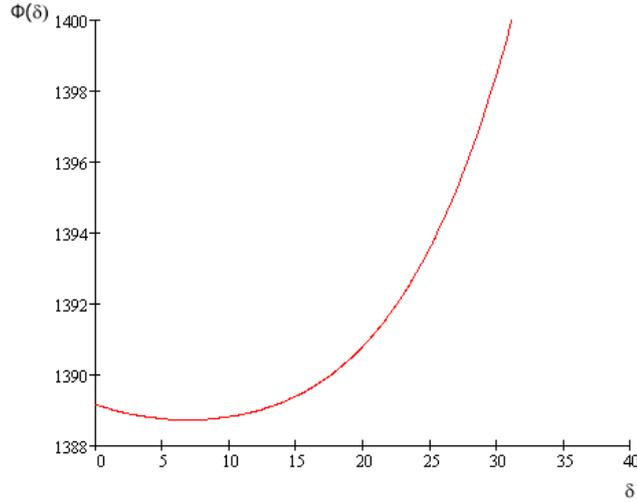
Для функционала (4), подставляя выражение (5), имеем:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_{sig}(t, \tau) - E(t)E(t-\tau)|^2 dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| E_{sig}(t, \tau) - \left\{ \left[E^r(t)E^r(t-\tau) - E^i(t)E^i(t-\tau) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \left[E^r(t)E^i(t-\tau) + E^i(t)E^r(t-\tau) \right] \right\} \right|^2 dt d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразуем подинтегральное выражение:

$$\begin{aligned} \dots &= \left\{ E_{sig}^r(t, \tau) - \left[E^r(t)E^r(t-\tau) - E^i(t)E^i(t-\tau) \right] \right\}^2 + \\ &+ \left\{ E_{sig}^i(t, \tau) - \left[E^r(t)E^i(t-\tau) + E^i(t)E^r(t-\tau) \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу разложения (7) функционал (8) может рассматриваться как функция $2 \times (M+3)$ переменных относительно коэффициентов e_n^r, e_n^i . Задача поиска минимума решалась методом наискорейшего (градиентного) спуска, для минимизации функции одной переменной использовался метод золотого сечения. На рис. 5 представлен график функционала $\Phi(\vec{x} - \delta \cdot grad \Phi(\vec{x}))$ как функции одной переменной δ при фиксированном $\vec{x} = \{e_{-1}^r, e_0^r, \dots, e_{M+1}^r, e_{-1}^i, e_0^i, \dots, e_{M+1}^i\}$. Из графика видно, что функция имеет единственный минимум.

Рис. 5. График функции $\Phi(\delta)$

Для $\text{grad}\Phi(\vec{x})$, где $\vec{x} = \{e_{-1}^r, e_0^r, \dots, e_{M+1}^r, e_{-1}^i, e_0^i, \dots, e_{M+1}^i\}$, из (8) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial e_k^r} = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle 2 \left\{ E_{sig}^r(t, \tau) - \left[E^r(t)E^r(t-\tau) - E^i(t)E^i(t-\tau) \right] \right\} \times \right. \\ & \times \left\{ - \left[B_k(t)E^r(t-\tau) + B_k(t-\tau)E^r(t) \right] \right\} + \\ & + 2 \left\{ E_{sig}^i(t, \tau) - \left[E^r(t)E^i(t-\tau) + E^i(t)E^r(t-\tau) \right] \right\} \times \\ & \left. \times \left\{ - \left[B_k(t)E^i(t-\tau) + B_k(t-\tau)E^i(t) \right] \right\} \right\rangle dt d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial e_k^i} = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle 2 \left\{ E_{sig}^r(t, \tau) - \left[E^r(t)E^r(t-\tau) - E^i(t)E^i(t-\tau) \right] \right\} \times \right. \\ & \times \left\{ B_k(t)E^i(t-\tau) + B_k(t-\tau)E^i(t) \right\} + \\ & + 2 \left\{ E_{sig}^i(t, \tau) - \left[E^r(t)E^i(t-\tau) + E^i(t)E^r(t-\tau) \right] \right\} \times \\ & \left. \times \left\{ - \left[B_k(t-\tau)E^r(t) + B_k(t)E^r(t-\tau) \right] \right\} \right\rangle dt d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

где $B_k(t) = B\left(\frac{t - kH}{H}\right)$.

Для вычисления интегралов (8), (10), (11) использовалась следующая квадратурная формула:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x_i, y_j) \cdot h^2, \quad \text{где } x_i = ih, y_j = jh, h = 1/N, \text{ пределы}$$

суммирования выбираются исходя из финитности интегрируемой функции.

Оценка погрешности численного интегрирования выражается неравенством [6]:

$$|R| \leq \frac{A_1 + A_2}{N^2}, \quad A_k = \max_{x_1, x_2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \right|.$$

Таким образом, по отношению к общему числу узлов $\eta = N^2$ погрешность имеет порядок $O(\eta^{-1}) = O(h^2)$.

В случае комплекснозначной функции одной переменной дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется следующим образом [7]. Пусть в точках $t_k = k\Delta t, k = 0, 1, \dots, N-1$, где $\Delta t = a/2N, a > 0$, заданы значения $z_k = z(t_k)$ функции $z(t)$. \hat{z}_l – ДПФ ряда комплексных чисел $z_k, k = 0, 1, \dots, N-1$, определяется следующими формулам:

$$\hat{z}_l = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \exp(-i\omega_l t_k), l = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $\omega_l = l\Delta\omega, l = 0, 1, \dots, N-1, \Delta\omega = \pi/a$.

Справедливы формулы для обратного ДПФ:

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{z}_l \exp(i\omega_l t_k), k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Спектрограммы для обработки получались в результате решения прямой задачи. Результаты решения обратной задачи для симметричного импульса представлены на рисунках ниже. Здесь $N = 32, M = 8$.

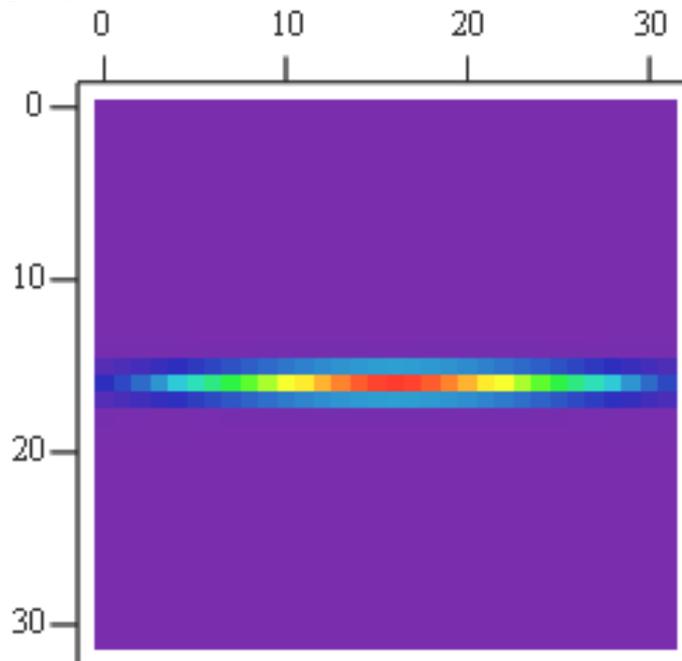


Рис. 6. Исходная спектрограмма

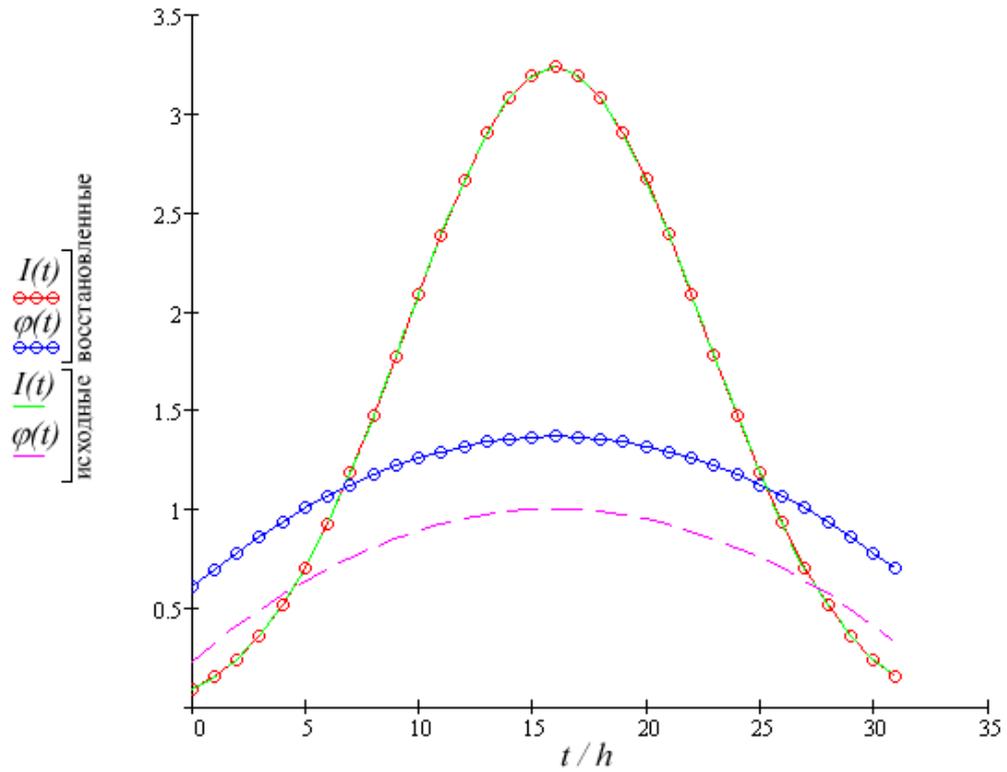


Рис. 7. Исходные и восстановленные параметры

Спектрограмма, построенная по восстановленным функциям (восстановленная):

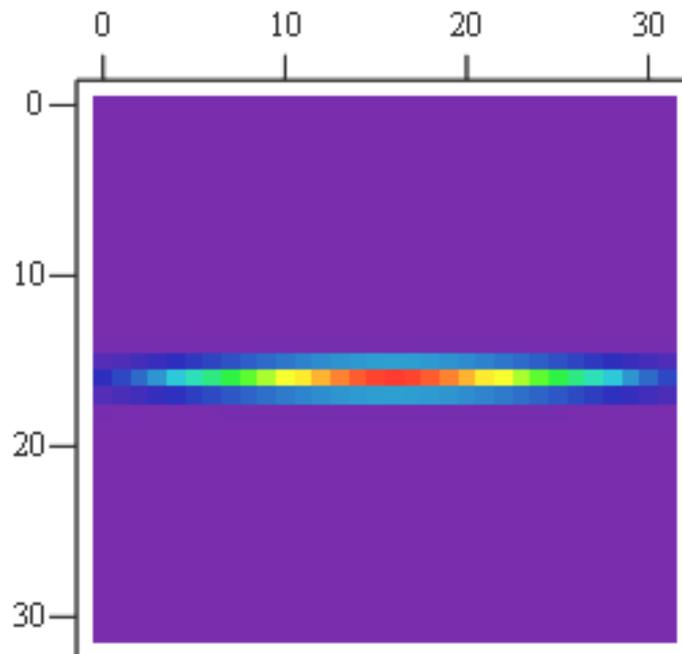


Рис. 8. Восстановленная спектрограмма

Результат восстановления при другом выборе начального приближения:

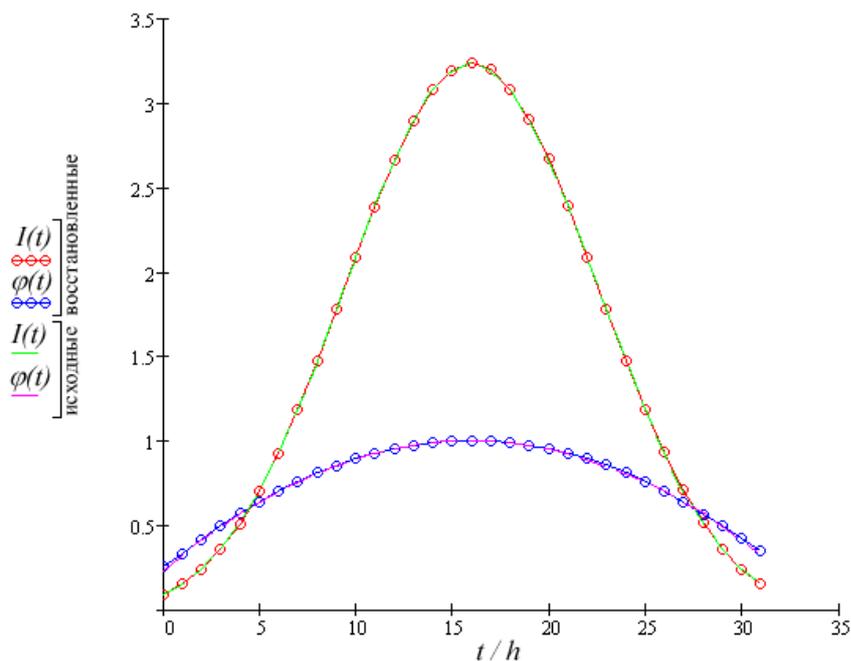


Рис. 9. Исходные и восстановленные параметры импульса.

Различие в результатах связано с описанной неопределенностью в определении абсолютной фазы φ_0 . Из графиков видно, что исходные и восстановленные параметры, в пределах выбранного приближения совпадают.

Для более сложной зависимости фазы от времени ($N = 32, M = 16$):

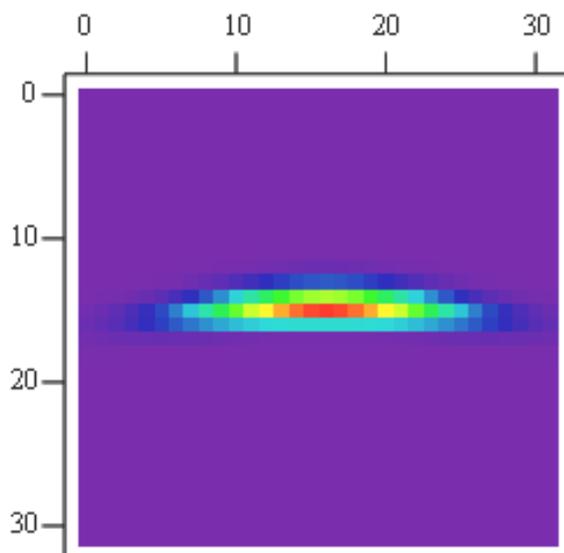


Рис. 10. Исходная спектрограмма

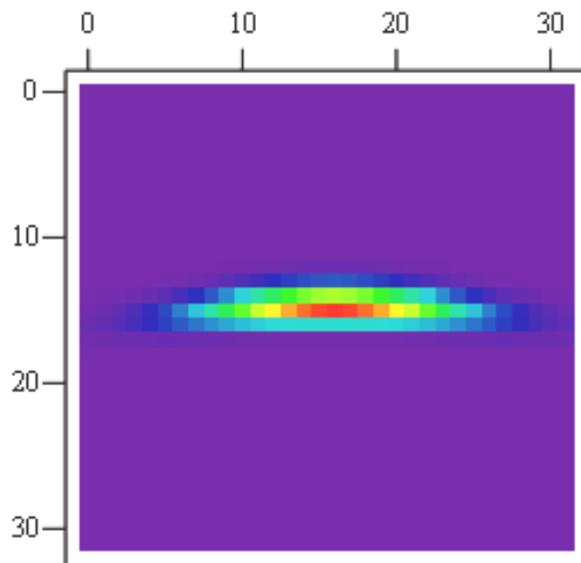


Рис. 11. Восстановленная спектрограмма

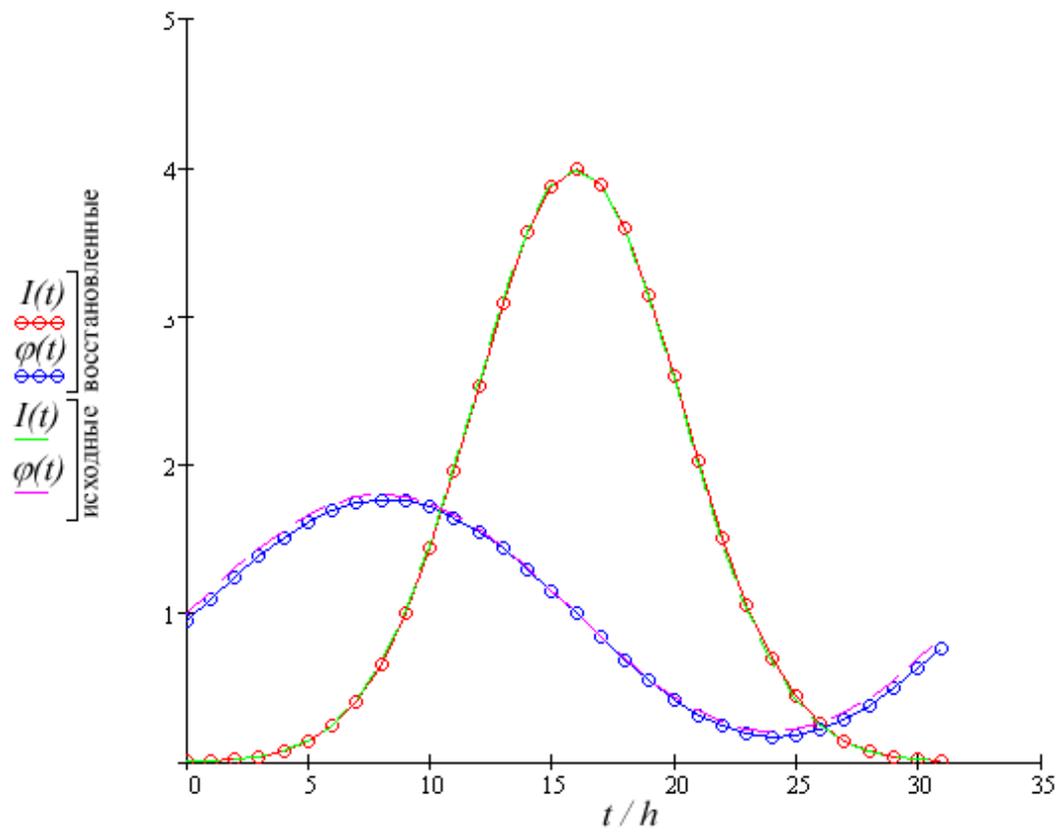


Рис. 12. Исходные и восстановленные параметры импульса

Для более сложного несимметричного импульса ($N = 32, M = 32$):

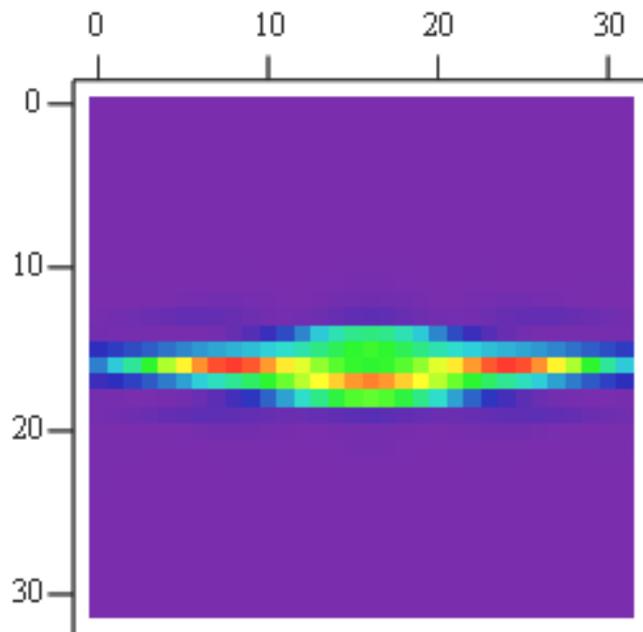


Рис. 13. Исходная спектрограмма

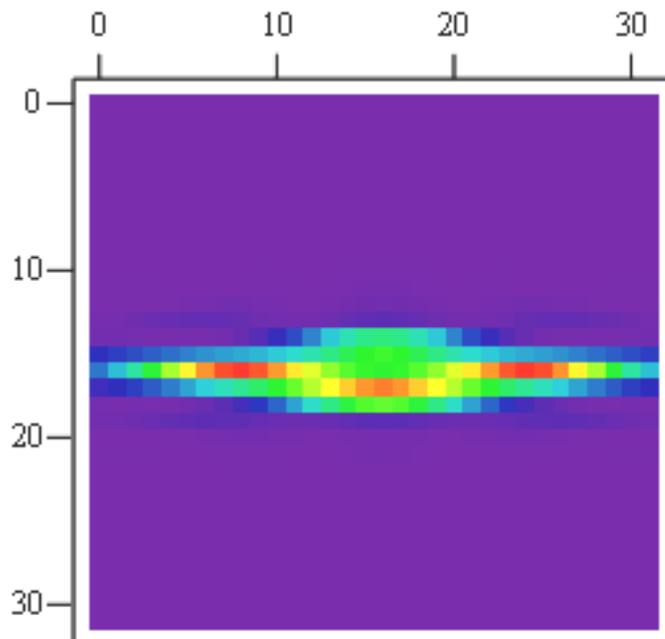


Рис. 14. Восстановленная спектрограмма

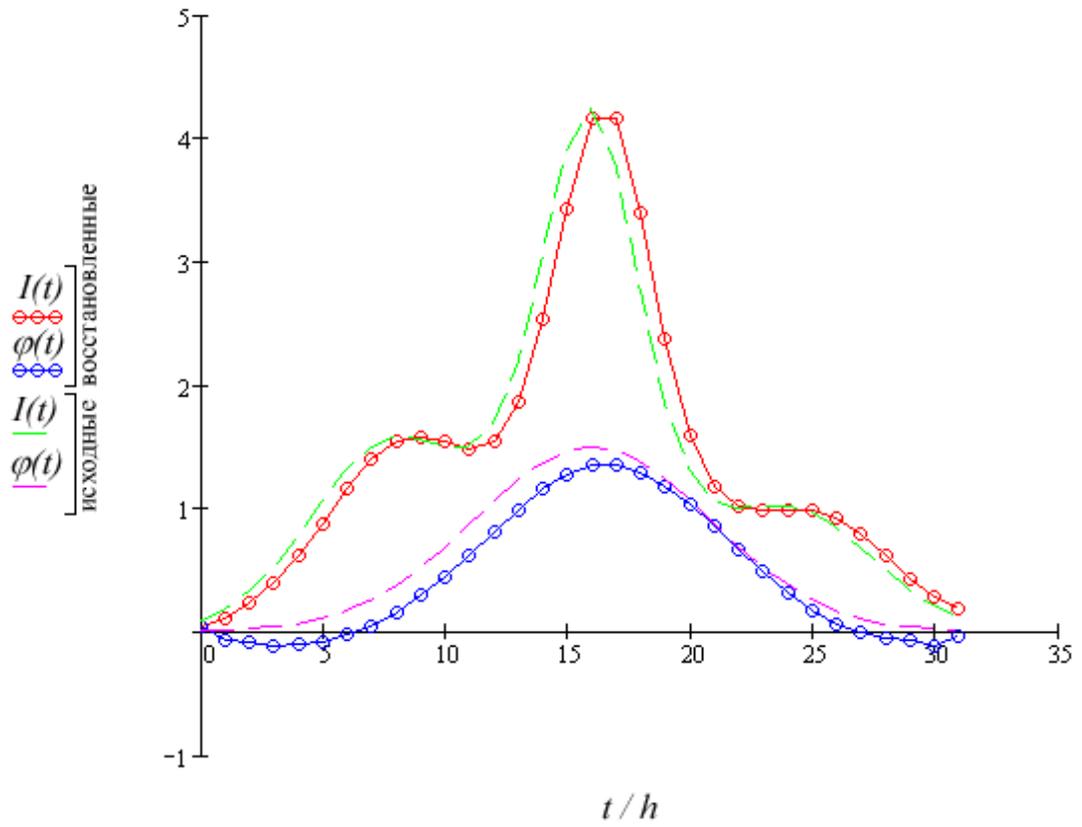


Рис. 15. Исходные и восстановленные параметры импульса

Несимметричный импульс ($N = 32, M = 16$):

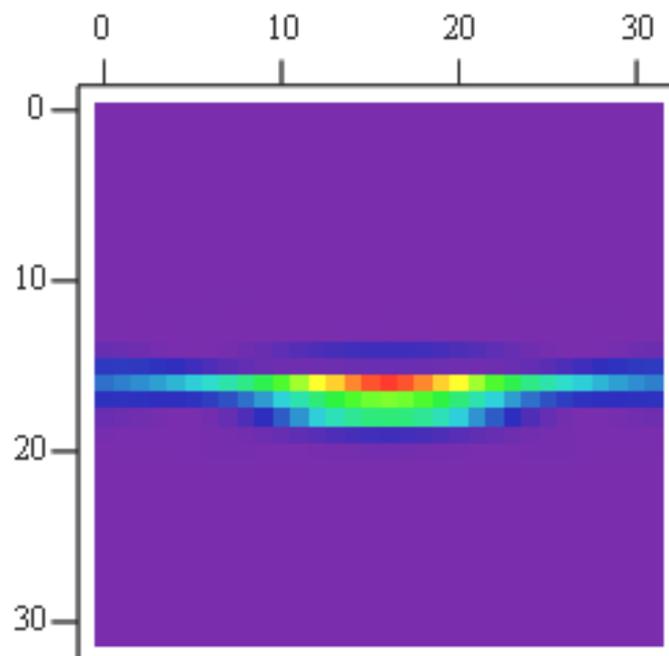


Рис. 16. Исходная спектрограмма

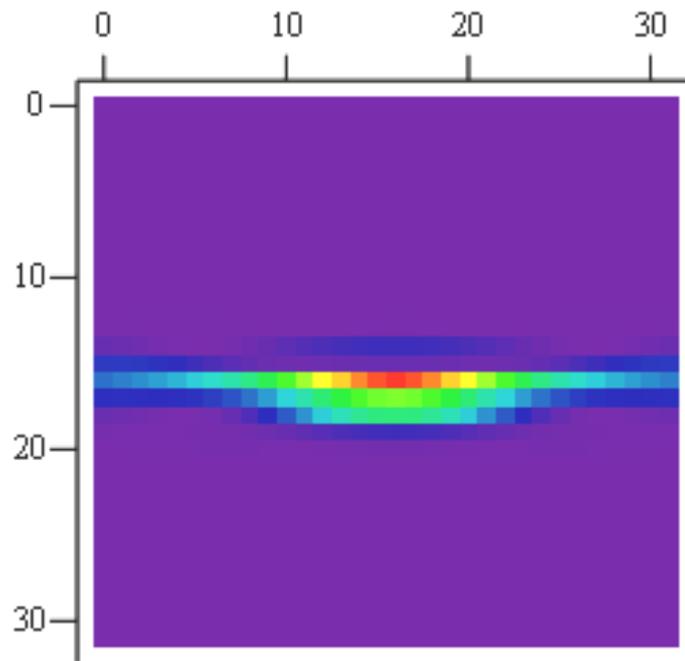


Рис. 17. Восстановленная спектрограмма

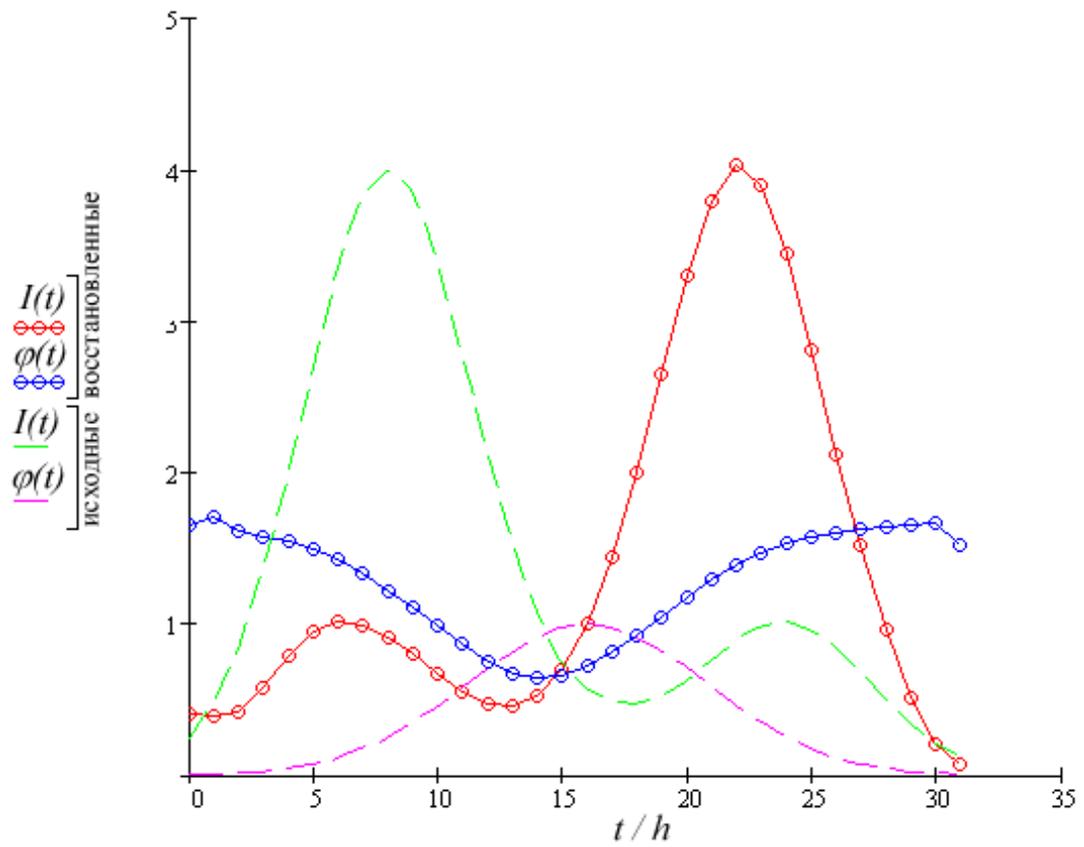


Рис. 18. Исходные и восстановленные параметры импульса.

При восстановлении проявилась неопределенность в направлении времени, характерная для схемы измерения.

При обработке экспериментальных данных возникает вопрос фильтрации [8]. На полученную в результате решения прямой задачи накладывался шум, моделирующий экспериментальную ошибку, распределенную по Гауссу с заданной дисперсией. Фильтрация производилась следующим образом. Пусть $\hat{I}_{frog}(\Omega_1, \Omega_2)$ - двумерное преобразование Фурье функции $I_{frog}(\omega, \tau)$. Применим фильтр вида:

$$\tilde{I}_{frog}(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{\hat{I}_{frog}(\Omega_1, \Omega_2)}{1 + \frac{\sigma^2}{\hat{I}_{frog}^2(\Omega_1, \Omega_2)}}.$$

Параметр σ , характеризующий спектральную плотность шума, подбирался экспериментально. В результате обратного преобразования Фурье получим $\tilde{I}_{frog}(\omega, \tau)$. Т.к. информация содержится в основном в центре спектрограммы, то умножим функцию $\tilde{I}_{frog}(\omega, \tau)$ на $\exp\left(-\frac{\alpha(\omega - \Omega/2)^2 + \beta(\tau - T/2)^2}{\Omega^2 + T^2}\right)$, где $\Omega = \max \omega$, $T = \max \tau$, α и β подбирались экспериментально.

Результат для симметричного импульса представлен ниже. Дисперсия $\sim 0,05 \cdot \max_{\omega, \tau} I_{frog}(\omega, \tau)$, $N = 32$, $M = 16$.

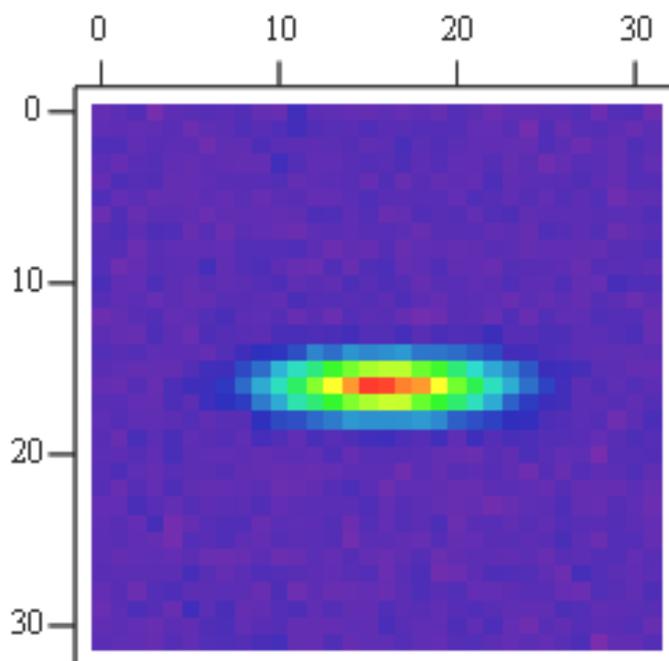


Рис. 19. Исходная спектрограмма

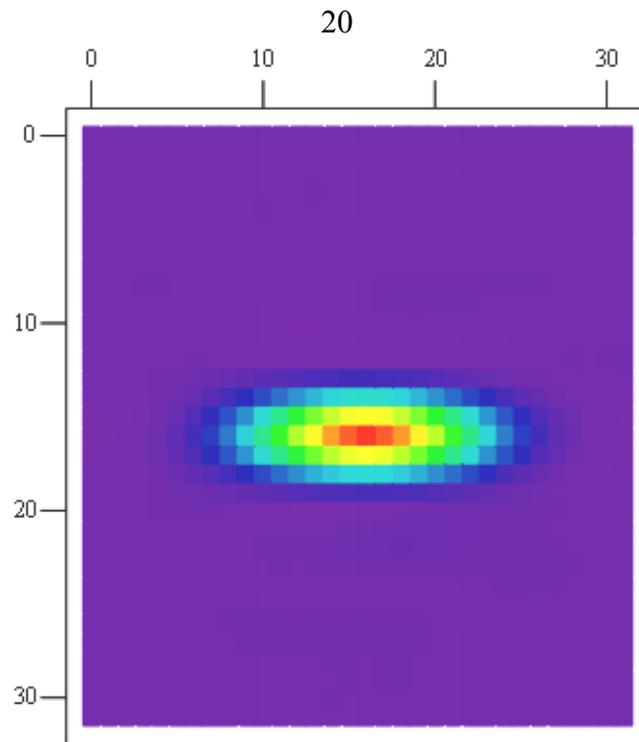


Рис. 20. Исходная спектрограмма после фильтрации

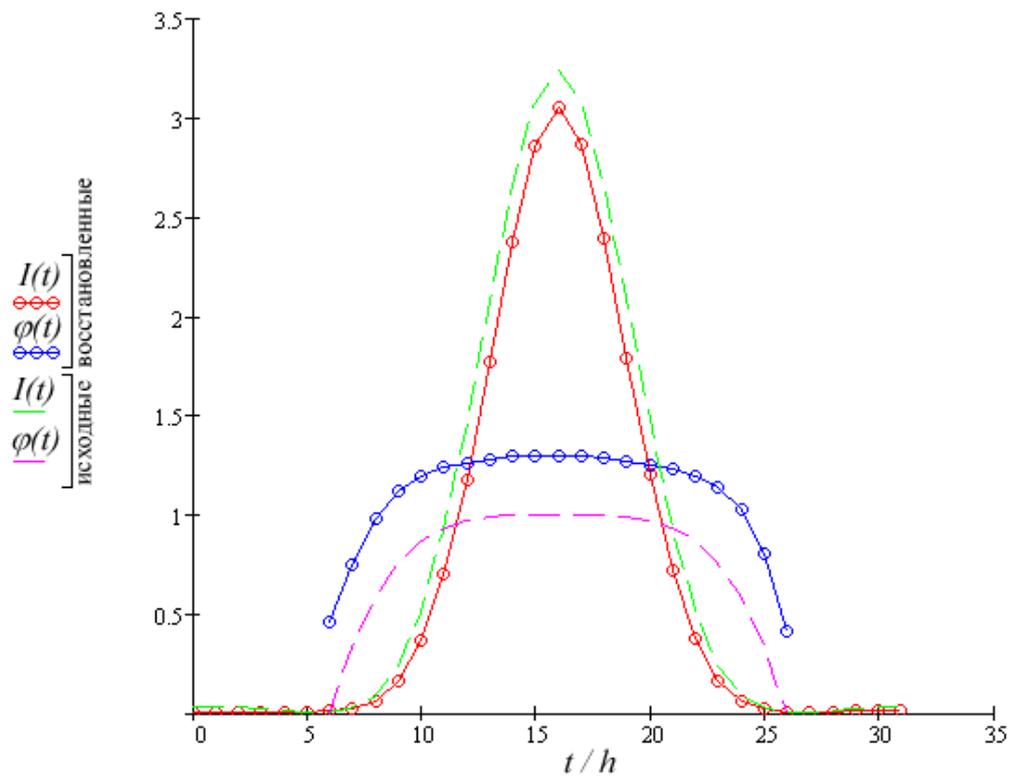


Рис. 21. Исходные и восстановленные параметры импульса

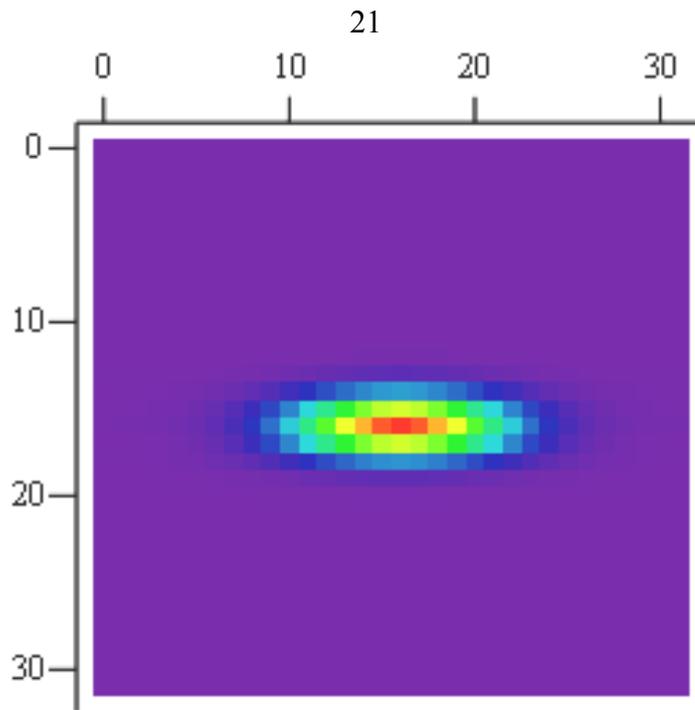


Рис. 22. Восстановленная спектрограмма

Для спектрограммы более сложного импульса и дисперсии $\sim 0,1 \cdot \max_{\omega, \tau} I_{frog}(\omega, \tau)$, $N = 32$, $M = 16$, результат имеет вид:

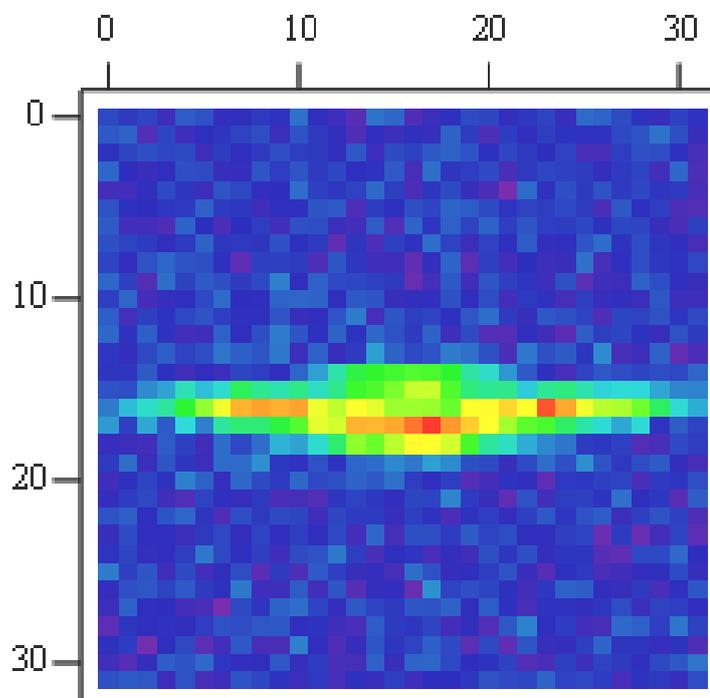


Рис. 23. Исходная спектрограмма

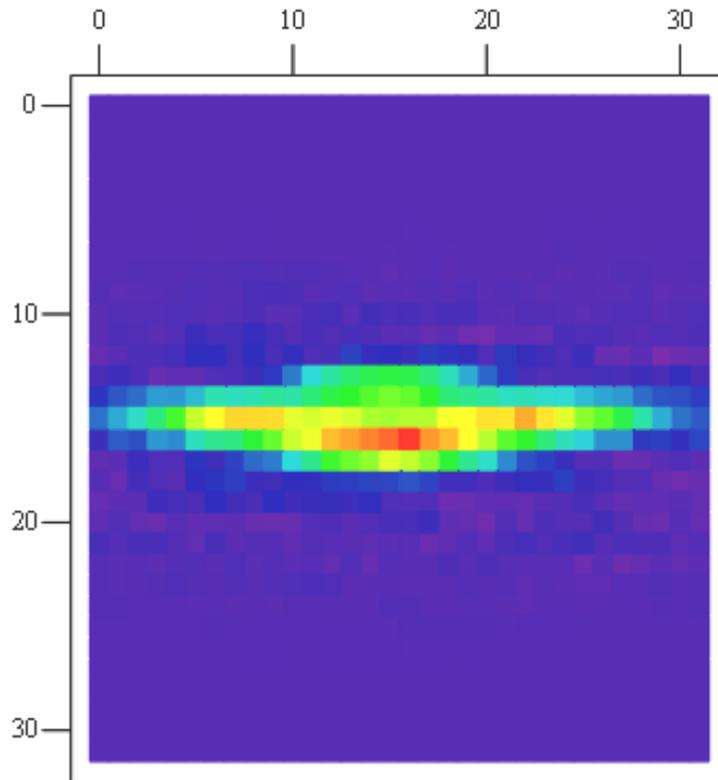


Рис. 24. Исходная спектрограмма после фильтрации

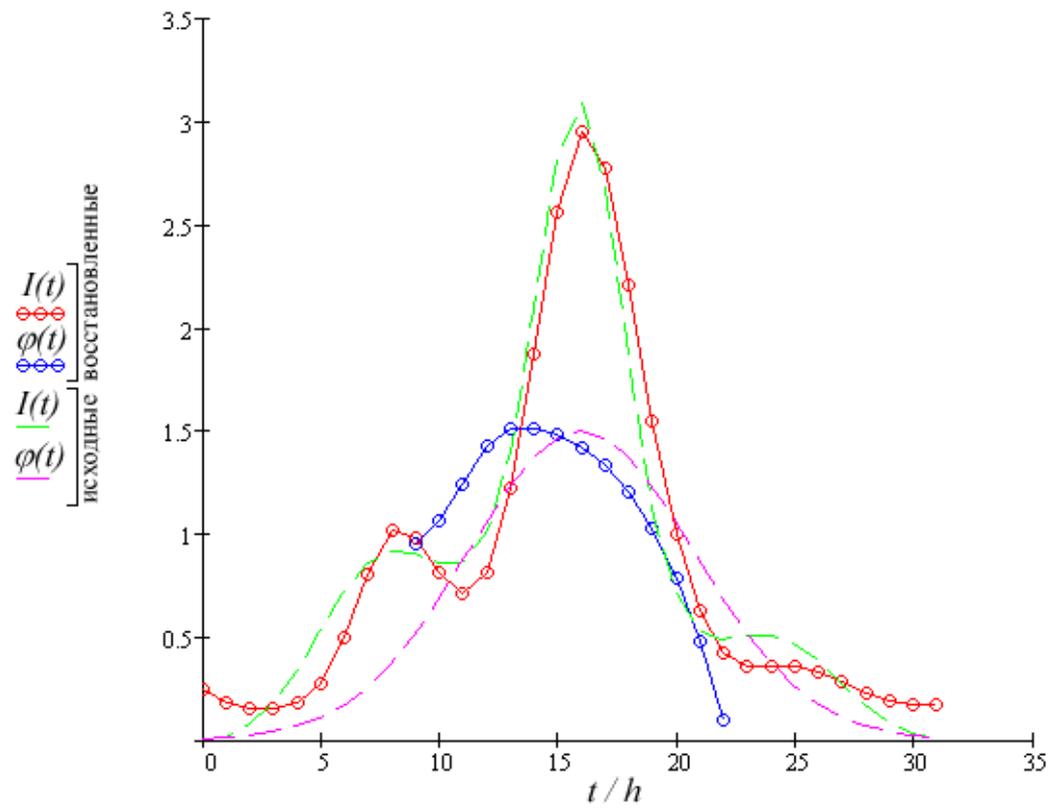


Рис. 25. Исходные и восстановленные параметры импульса

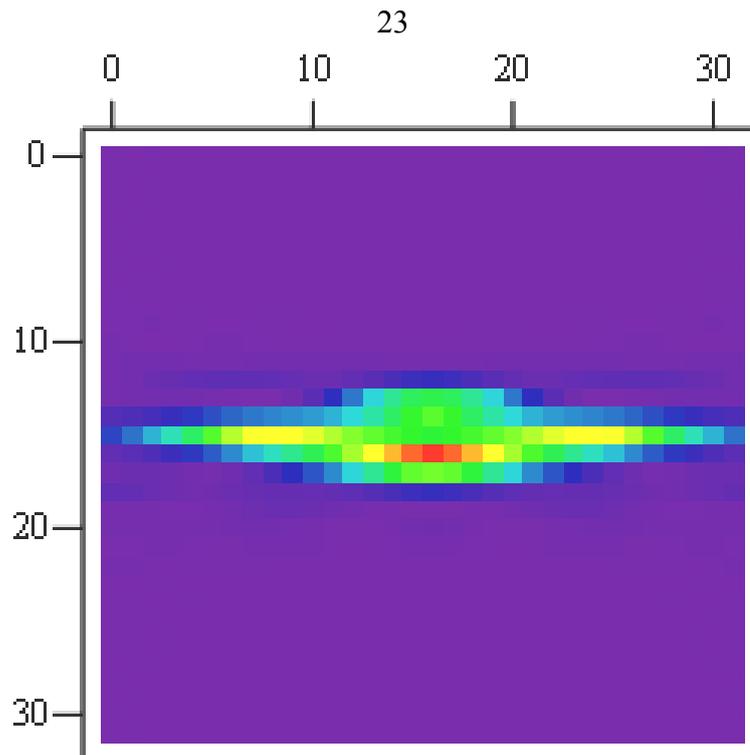


Рис. 26. Восстановленная спектрограмма

Заключение

Рассмотрена проблема измерения параметров фемтосекундного лазерного импульса. Исследован способ измерения, основанный на явлении генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах.

Предложена математическая модель, описывающая эксперимент. Отмечены и аналитически обоснованы неопределенности, возникающие при таком методе измерения, их наличие продемонстрировано в численном эксперименте. Рассмотрен и реализован метод обобщенных проекций.

Проведено численное моделирование, результаты демонстрируют хорошее совпадение исходных и восстановленных параметров.

Рассмотрена задача фильтрации исходных данных при наличии экспериментальной ошибки. Предложен и реализован алгоритм, позволяющий определять зависимости интенсивности и фазы от времени при зашумленной спектрограмме. Результаты показывают достаточно хорошее соответствие между исходными и восстановленными зависимостями интенсивности и фазы от времени, что позволяет судить о применимости предложенного способа фильтрации и устойчивости итерационного процесса.

Автор благодарит А. Х. Пергамент за предложенную тему для исследования и за полезные обсуждения данной работы.

Литература

- 1) D.J. Kane, R. Trebino, Single-shot measurement of the intensity and phase of an arbitrary ultrashort pulse by using frequency-resolved optical gating. *Opt. Lett.*, Vol. 18, pp. 823-825, 1993.
- 2) R. Trebino, *Frequency-Resolved Optical Gating: The Measurement of Ultrashort Laser Pulses*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- 3) Kenneth W. DeLong, David N. Fittinghoff, Rick Trebino, B. Kohler, K.R. Wilson, Pulse Retrieval in Frequency-Resolved Optical Gating Based on the Method of Generalized Projections. *Opt. Lett.*, Vol. 19, pp. 2152-2154, 1994.
- 4) С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике*. М.: Наука, 1976.
- 5) А.Х. Пергамент, *Метод регуляризации и задачи статистического оценивания функций*. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, №53, 1984.
- 6) Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков, *Численные методы*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.
- 7) А. Имамов, *Приближенное решение задачи сглаживания*. Препринт семинара «Вычислительные методы прикладной математики» под руководством Г.И.Марчука. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975.
- 8) D.N. Fittinghoff, K.W. DeLong, R. Trebino, C.L. Ladera, Noise Sensitivity in Frequency-Resolved-Optical-Gating Measurements of Ultrashort Pulses. *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 12, pp. 1955-1967, 1995.