ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, том 409, № 1, с. 12–14

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

О ВАРИАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

© 2006 г. А. И. Аптекарев, Ю. Г. Рыков

Представлено академиком А.А. Гончаром 26.12.2006 г.

Поступило 02.02.2006 г.

Целью настоящей работы является демонстрация некоторого метода получения обобщенных решений для некоторых систем гиперболического типа. Этот метод представляет собой некоторый вариационный принцип, подобный известному принципу Лакса–Олейник для одного уравнения [1, 2] и его расширению на некоторые нестрого гиперболические системы [3]. Однако новизна предлагаемого здесь подхода заключается в том, что соответствующий вариационный принцип строится на основе равновесия потенциала во внешнем поле. Это позволяет построить вариационное представление для обобщенных решений строго гиперболической системы в недивергентной форме.

Мы построим вариационное представление для системы уравнений

$$\begin{aligned} &\alpha_t + \frac{\beta-\alpha}{4}\alpha_x = 0, \\ &\ln(\beta-\alpha)_t - \left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)_x = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\alpha = \alpha(t, x)$, $\beta = \beta(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+$, с начальными

$$\alpha(0, x) = \alpha_0(x), \quad \beta(0, x) = \beta_0(x)$$

и граничными

$$\alpha(t, 0) = \beta(t, 0)$$

условиями.

В гладком случае система (1) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} &\alpha_t + \frac{\beta-\alpha}{4}\alpha_x = 0, \\ &\beta_t - \frac{\beta-\alpha}{4}\beta_x = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва

Заметим, что система (2) является строго гиперболической при $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, ее решения допускают разрывы. Систему (2) называют континуальным пределом цепочки Тода. Ее “дисперсионная” регуляризация была объектом исследования П. Дейфта и К. Маклафлина в [5] (также см. [6]). Нас же будут интересовать разрывные решения непосредственно системы (1), а не ее регуляризации.

Далее мы покажем, что функции, построенные в соответствии с предложенным вариационным принципом, в области гладкости удовлетворяют системе (1) или (2), а при наличии линии разрыва выполняются соотношения Гюгонио для системы (1).

Вследствие того что система (1) является недивергентной, напомним, что понимается под соотношением Гюгонио в этом случае (см. [4]).

Определение 1. Пусть имеется система уравнений

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0, \qquad (3)$$

где $(t, x) \in \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$, $A(\mathbf{u})$ – матрица размера 2×2. Пусть локально решение этой системы может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{u}_0 + H(x - Vt)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0), \qquad (4)$$

где $H(\theta)$ – функция Хевисайда, V – локальное направление линии разрыва. Тогда *соотношением Гюгонио* для (3) в случае решения (4) называется соотношение

$$-V(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) + \int_0^1 A(\Phi(s; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1))\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)ds = 0, \qquad (5)$$

где $\Phi(s; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$, $\Phi(0; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_0$, $\Phi(1; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1$ – некоторый путь, соединяющий значения $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_1$.

Замечание 1. Соотношение (5) существенно зависит от выбора пути Φ, если только $A(\mathbf{u})$ не представляет собой полный дифференциал некоторой вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{u})$, т.е. $D\mathbf{F}(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u})$. В этом случае система (3) будет дивергентной и соотношение (5) не зависит от выбора пути. В случае же недивергентных систем такая неоднозначность лежит в природе вещей и выбор конкретного соотношения (5) должна определять физическая задача. Это будет продемонстрировано на примере системы (1).

РАВНОВЕСИЕ СЕМЕЙСТВА МЕР ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ x ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ t

Для получения представления решений задачи (1), (2) рассмотрим задачу равновесия потенциала во внешнем поле. Определим соответствующий логарифмическому ядру потенциал меры μ, заданной на $\mathbb{R}$:

$$V_\mu(\lambda) = \int \ln\frac{1}{|\lambda - z|}d\mu(z). \qquad (6)$$

Величину меры нормируем параметром x

$$\int d\mu(\lambda) = x.$$

Пусть $Q(\lambda)$ – зависящая от параметра t, непрерывная функция Q: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, называемая внешним полем,

$$Q(t, \lambda) = Q_1(t, \lambda) + Q_0(\lambda), \quad Q_1(0, \lambda) = 0. \qquad (7)$$

Для обеспечения компактности носителя S_x определяемой ниже равновесной меры $\bar{\mu}_x$ от поля Q дополнительно требуют, чтобы

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \frac{Q(\lambda)}{\ln|\lambda|} = +\infty.$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$W_\mu := \frac{1}{2}\int V_\mu(\lambda)d\mu(x, \lambda) +$$

$$+ \int Q(t, \lambda)d\mu(x, \lambda) \to \min_\mu \to W_{\bar{\mu}_x}. \qquad (8)$$

Физически задача (8) означает, что мы ищем такое распределение заряда $\bar{\mu}_x(\lambda, t)$ на прямой, чтобы минимизировать его полную энергию во внешнем поле (7). Известно [7, 8], что такая минимизирующая мера $\bar{\mu}_x$ существует и единственна и характеризуется соотношением равновесия

$$V_{\bar{\mu}_x}(\lambda) + Q(t, \lambda)\begin{cases} = \gamma_Q & \text{на} \quad \operatorname{supp}\bar{\mu} =: S_x, \\ \geq \gamma_Q & \text{на} \quad \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (9)$$

где константа γ_Q называется константой равновесия.

Семейство носителей $\{S_x\}_{x>0}$ равновесных мер $\bar{\mu}_x$ – важная характеристика задачи. Это монотонное семейство компактов (см. [8]), т.е.

$$S_{x'} \subseteq S_x, \quad x' \leq x.$$

Зная семейство $\{S_x\}_{x>0}$, можно восстановить входную характеристику задачи, т.е. внешнее поле Q,

$$Q(\lambda) = \int_0^\infty g_{S_x}(\lambda)dx, \qquad (10)$$

здесь $g_K(\lambda)$ – функция Грина компакта K. Для нахождения носителя S_x полезным оказывается рассмотрение функционала $F_Q(K)$ на регулярных компактах $K \subset \mathbb{R}$, введенного Машкаром и Саффом в [9]. Пусть ω_K – мера Робена компакта K (т.е. ω_K есть равновесная мера задачи (8), (9) при $Q(\lambda) = 0$ и $\operatorname{supp}\mu \subset K$) и через $\operatorname{cap}(K)$ обозначена логарифмическая емкость компакта K (т.е. $\operatorname{cap}(K) = \exp(-\gamma_0)$ из (9) при $Q(\lambda) = 0$ и $\operatorname{supp}\mu \subset K$). По определению

$$F_Q(K) := -x\ln\operatorname{cap}(K) + \int Q(\lambda)d\omega_K(\lambda). \qquad (11)$$

Оказывается (см. [9, 8]), что носитель равновесной меры S_x минимизирует этот функционал, точнее, для любого компакта K справедливо

$$F_Q(K) \geq F_Q(S_x) = \gamma_Q. \qquad (12)$$

Обозначим через (Δ) класс внешних полей $Q(\lambda)$, таких, что носители равновесных мер S_x являются отрезками, т.е.

$$Q \in (\Delta) \Leftrightarrow S_x = \Delta_x := [\alpha(x), \beta(x)], \quad \forall x > 0. \quad (13)$$

Именно начальные данные (Q_0 в (7)) из этого класса будут интересовать нас в этой работе. Например, известно, что любое выпуклое поле Q принадлежит (Δ), хотя основной интерес для нас будут представлять невыпуклые Q_0 из (Δ).

НЕДИВЕРГЕНТНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Для получения представления решений задачи (1) рассмотрим задачу равновесия потенциала (8), (9) во внешнем поле $Q(t, \lambda)$. В предположении, что $Q \in (\Delta)$, функционал (11) имеет вид

$$-x\ln\frac{\beta - \alpha}{4} + \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{Q(t, \lambda)}{\sqrt{(\lambda - \alpha)(\beta - \lambda)}}d\lambda \to \min_{\alpha, \beta} \qquad (14)$$

при фиксированных t, x; $\operatorname{supp}\bar{\mu} = [\alpha, \beta]$.

Возьмем $Q(t, \lambda) = -\dfrac{\lambda t}{2} + Q_0(\lambda)$, тогда задача (14) превращается в следующую:

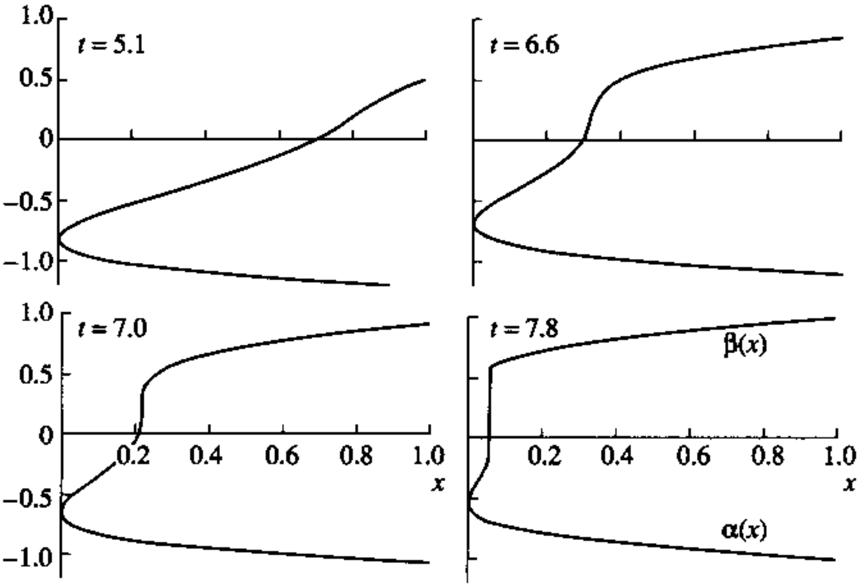

Рис. 1. Решение задачи (14) при начальном внешнем поле $Q_0(\lambda) := \lambda^4 - \frac{\lambda^2}{\lambda} + 4\lambda$.

$$-x\ln\frac{\beta-\alpha}{4} - t\frac{\alpha+\beta}{4} + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Q(t,\lambda)}{\sqrt{(\lambda-\alpha)(\beta-\lambda)}}d\lambda \to \min_{\alpha,\beta} \qquad (15)$$

при фиксированных t, x. Здесь Q_0 из класса (Δ) (см. (13)), связана с начальными данными соотношением (10),

$$Q_0(\lambda) = \int_0^{\infty} g_{\Delta_x}(\lambda)dx, \qquad (16)$$

где

$$g_{\Delta_x}(\lambda) = \ln\left|\frac{\lambda - a_0(x) + \sqrt{(\lambda - a_0(x))^2 - 4b_0(x)^2}}{2b_0(x)}\right|;$$

здесь обозначено

$$a_0(x) := \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}(x), \quad b_0(x) := \frac{\beta_0-\alpha_0}{4}(x).$$

Справедлива

Теорема 1. *В случае единственности минимума в задаче* (15), (16) *функции* $\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)$ *являются гладким решением системы* (1); *те точки* t, x, *где таких минимумов два, локально образуют кривую, вдоль которой справедливы соотношения Гюгонио для* (1) *в смысле определения* 1.

На рис. 1 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие теорему 1.

Таким образом, исходя из представления, основанного на некотором разумном физическом подходе, для недивергентной квазилинейной гиперболической системы произведен отбор "допустимых" соотношений Гюгонио из всех возможных в соответствии с определением 1. Наличие вариационного представления можно рассматривать как альтернативную форму условия возрастания энтропии на ударной волне.

Работа поддержана грантами РФФИ (05-01-00522), НШ (1551.2003.1), Программой № 1 ОМН РАН и проектом ИНТАС (03-51-6637).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lax P.D.* // Communs Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 4. P. 537–566.
2. *Олейник О.А.* // ММО. 1956. Т. 5. С. 433–454.
3. *E W., Rykov Yu.G., Sinai Ya.G.* // Communs Math. Phys. 1996. V. 177. P. 349–380.
4. *le Floch Ph.* Shock Waves for Nonlinear Hyperbolic Systems in Nonconservative Form. Prepr. Inst. Math. Appl. № 593. Minneapolis, 1989.
5. *Deift P., McLaughlin T.-R.* A Continuum Limit of the Toda Lattice // Mem. Amer. Math. Soc. 1998. V. 624.
6. *Aptekarev A.I., Assche W. Van* // J. Phys. A: Math. and Gen. 2001. V. 34. P. 10627–10637.
7. *Гончар А.А., Рахманов Е.А.* // Мат. сб. 1984. Т. 125. № 1. С. 117–127.
8. *Буяров В.С., Рахманов Е.А.* // Мат. сб. 1999. Т. 190. № 5. С. 11–22.
9. *Maskar H.N., Saff E.B.* // Constr. Approx. 1985. V. 1. P. 71–91.