РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

Ю.К. Мизякин, Т.Г. Еленина

Автомодельные решения двумерных нестационарных уравнений идеальной МГД

Москва 2006

Ю.К. Мизякин, Т.Г. Еленина

Автомодельные решения двумерных нестационарных уравнений идеальной МГД

Аннотация

Работа посвящена построению автомодельных решений задач для двумерных нестационарных уравнений идеальной МГД. Предполагается, что течение осесимметрично, в полоидальной плоскости вещество имеет только радиальную компоненту скорости. Двумерная нестационарная задача МГД сведена к задаче меньшей размерности для уравнения Грэда – Шафранова. Показано, что семейство автомодельных решений распадается на два типа в зависимости от показателя адиабаты.

Yu.K. Mizyakin, T.G. Yelenina

Self-similiar solutions of the two-dimensional non-stationary ideal MHD equations

Abstract

The aim of the paper is to construct the self – similiar solutions of the non–steady ideal MHD equations. It is assumed that the flow is axisymmetric, the matter has only radial component in the poloidal plane. 2D nonstationary problem is reduced to the Grad–Shafranof equation solution. As a result it is shown that there are the family of self – similiar solutions and they depend on adiabatic exponent.

Содержание

1 Введение

Настоящая работа посвящена построению автомодельных решений задач для двумерных нестационарных уравнений идеальной МГД в предположении, что, во–первых, течение осесимметрично и, во–вторых, в полоидальной плоскости вещество имеет только радиальную (в сферических координатах) компоненту скорости.

Под автомодельностью здесь подразумевается возможность сведения двумерной нестационарной задачи к задаче меньшей размерности, а именно для уравнения Грэда – Шафранова для функции магнитного потока. Уравнение Грэда – Шафранова содержит некоторые произвольные функции, и процедура решения задач для этого уравнения состоит как в выборе этих функций, так и в определении решения при тех или иных граничных условиях.

Задача построения автомодельных решений уравнений идеальной МГД рассматривается в связи с астрофизическими приложениями. Как правило, исследуются бессиловые конфигурации магнитного поля, так как в сильноразреженной космической плазме магнитные напряжения являются доминирующими. В качестве примера приведем работу [1], в которой рассматривалась эволюция бессилового магнитного поля, основания силовых линий которого вморожены в звезду и вращаются относительно оси симметрии с разными угловыми скоростями. Генерирующаяся при этом азимутальная компонента магнитного поля приводит к деформации полоидальных силовых линий, их раскрытию и образованию токового слоя. Подчеркнем, что хотя уравнение Грэда – Шафранова стационарно, то есть не содержит производных по времени, оно позволяет описать нестационарный процесс за счет того, что входящие в него произвольные функции могут зависеть от времени как от параметра.

Аналогичный подход использовался в [2] при анализе эволюции бессилового магнитного поля, основания силовых линий которого вморожены в дифференциально вращающийся диск. В работе [3] уравнение Грэда –

Шафранова использовалось для анализа эволюции бессилового магнитного поля, связывающего вращающуюся звезду и диск. В работах [4], [5] исследованы процессы, протекающие в коронах аккреционных дисков, для случаев цилиндрической или сферической симметрии. Работа [6] посвящена численному анализу такой задачи. В работах [7], [8] при помощи уравнения Грэда – Шафранова для функции магнитного потока описывались равновесные конфигурации идеальнопроводящей вращающейся плазмы с учетом газокинетического давления и гравитации.

Автомодельные (в указанном выше смысле) решения нестационарных уравнений идеальной МГД были построены в [9], [10]. В этих работах принималось, что плазма разлетается радиально и не вращается, учитывалось гравитационное поле центрального источника. Вмороженное в плазму магнитное поле имеет как полоидальную, так и азимутальную составляющие. Течение предполагалось осесимметричным. Семейство автомодельных решений, в которых функция магнитного потока зависит от радиальной координаты и времени в комбинации $r/a(t)$, построено при показателе адиабаты $\gamma = 4/3$.

В настоящей работе автомодельные решения указанного выше типа строятся для уравнений идеальной МГД, но с учетом вращения плазмы. Показано, что в случае изоротации магнитных силовых линий семейство автомодельных решений распадается на два типа в зависимости от величины показателя адиабаты. При $\gamma = 4/3$ из условий автомодельности следует, что плазма не вращается. Таким образом, этот случай сводится к проанализированному в [11]. При $\gamma = 5/3$ из условий автомодельности следует, что решение возможно в отсутствии гравитации. При этом магнитное поле является бессиловым в каждый момент времени.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ №06-02-16608).

Авторы благодарны А.В. Колдобе, Г.В. Устюговой и В.М. Чечеткину за

многочисленные полезные обсуждения и постоянную помощь в работе.

2 Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричное движение идеальнопроводящей плазмы, в котором в сферических координатах (r, θ, φ) скорость имеет ненулевыми только радиальную и азимутальную компоненты $\mathbf{v} = (u, 0, v)$, магнитное поле имеет все три компоненты $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, B_\varphi)$. В сферической системе координат такое МГД – течение описывается системой уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r} r^2 \rho u = 0, \\[2ex]
\rho \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) - \dfrac{\rho v^2}{r} + \dfrac{\partial p}{\partial r} = F_r - \rho \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}, \\[2ex]
\rho \left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + u \dfrac{\partial v}{\partial r} \right) + \dfrac{\rho u v}{r} = F_\varphi, \\[2ex]
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} - \dfrac{\rho v^2 \operatorname{ctg}\theta}{r} = F_\theta, \\[2ex]
\dfrac{\partial B_r}{\partial t} - \dfrac{1}{r \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta u B_\theta) = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial B_\varphi}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} r(u B_\varphi - v B_r) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} v B_\theta = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial B_\theta}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} r u B_\theta = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{p}{\rho^\gamma} + u \dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{p}{\rho^\gamma} = 0,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

где $\mathbf{F} = \dfrac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{B}, \mathbf{B}]$ – сила Ампера, p – давление плазмы, ρ – плотность плазмы, $\Phi = -\dfrac{GM}{r}$ – гравитационный потенциал центрального гравитирующего тела.

Полоидальные компоненты магнитного поля удобно представить через функцию магнитного потока Ψ

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta},$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Функция Ψ удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\mathbf{v}_p, \nabla)\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + u \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \tag{2.2}$$

выражающему вмороженность полоидальных силовых линий $\Psi = \mathrm{const}$ в плазму.

Азимутальные компоненты уравнения движения и индукции представимы в виде

$$\frac{\partial l}{\partial t} + u \frac{\partial l}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B}_p, \nabla) j, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial u j}{\partial r} = (r \sin\theta)^2 (\mathbf{B}_p, \nabla)\omega, \tag{2.4}$$

где $l = v\, r \sin\theta$ – удельный момент вращения относительно оси симметрии, $\omega = \dfrac{v}{r \sin\theta}$ – угловая скорость, $j = B_\varphi\, r \sin\theta$ – функция полоидального тока. Полоидальный ток течет вдоль линий $j = \mathrm{const}$.

3 Переход к автомодельным переменным

Будем искать автомодельные решения, в которых функция магнитного потока Ψ зависит от радиуса и времени в комбинации $\xi = r/a(t)$, где $a(t)$ некоторая функция. Подстановка $\Psi = \Psi(\xi, \theta)$ в (2.2) дает

$$-\frac{\dot{a} r}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{u}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0,$$

откуда в предположении, что $\partial\Psi/\partial\xi \sim B_\theta \neq 0$, получаем

$$u = \frac{\dot{a} r}{a} = \dot{a}\xi.$$

Заметим, что дифференцирование по t при фиксированных θ, Ψ есть лагранжева производная

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\theta,\Psi} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Действительно, в полоидальной плоскости частицы движутся только в радиальном направлении, а силовые линии полоидального магнитного поля $\Psi = \mathrm{const}$ вморожены в вещество. Таким образом, координаты (θ, Ψ) являются лагранжевыми координатами. Кроме того, так как рассматриваются течения такие, что $\Psi = \Psi(\xi, \theta)$, то паре (θ, Ψ) соответствует пара (ξ, Ψ), которая также является лагранжевыми координатами. Следовательно, дифференцирование при фиксированных ξ, Ψ также являются лагранжевой производной

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\xi,\Psi} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Таким образом, уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 \rho u}{\partial r} = 0$$

с учетом $u = \dot{a}r/a$ дает

$$\rho = \frac{D(\xi, \Psi)}{a^3}.$$

Как отмечалось выше, лагранжева производная $\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial r}$ представляет собой дифференцирование при фиксированных ξ, Ψ, поэтому уравнение баланса энтропии

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{p}{\rho^\gamma} = 0$$

дает

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = S(\xi, \Psi).$$

Так как $\rho \sim a^{-3}(t)$, то $p = a^{-3\gamma}P(\xi, \Psi)$.

Введем оператор

$$\mathbf{L} = a^3(\mathbf{B}_p, \nabla),$$

пропорциональный производной вдоль полоидального магнитного поля и не содержащий времени в явном виде

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\xi^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Ограничимся рассмотрением только таких функций ω и j, в которые зависимость от времени входит в виде множителя

$$\omega = b(t)\Omega(\Psi, \xi), \tag{3.1}$$

$$j = c(t)J(\Psi, \xi). \tag{3.2}$$

Тогда азимутальные компоненты уравнений движения и индукции допускают разделение переменных. Переписываем, в соответствии с (3.1) азимутальные уравнения движения и индукции в виде

$$(\xi\sin\theta)^2\Omega\frac{d(a^2b)}{dt} = \frac{c}{4\pi D}\mathbf{L}J,$$

$$J\left(\dot{c} + \frac{c\dot{a}}{a}\right) = \frac{b}{a}(\xi\sin\theta)^2\mathbf{L}\Omega,$$

откуда заключаем, что

$$\frac{1}{c}\frac{d(a^2b)}{dt} = \lambda = \text{const}, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{b}\frac{d(ac)}{dt} = \mu = \text{const}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\mathbf{L}J}{4\pi D(\xi\sin\theta)^2\Omega} = \lambda = \text{const}, \tag{3.5}$$

$$\frac{(\xi\sin\theta)^2\mathbf{L}\Omega}{J} = \mu = \text{const}. \tag{3.6}$$

4 Вывод уравнения движения вдоль силовой линии

Рассмотрим теперь уравнения движения в полоидальной плоскости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v^2}{r} + \frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\mathbf{B}, \mathbf{B}]_r - \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \frac{v^2\operatorname{ctg}\theta}{r} + \frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\mathbf{B}, \mathbf{B}]_\theta. \tag{4.2}$$

Умножая (4.1) на B_r, а (4.2) на B_θ и суммируя, получаем

$$B_r\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\rho}(\mathbf{B}_p,\nabla)p+(\mathbf{B}_p,\nabla)\Phi=$$

$$\frac{v^2}{r\sin\theta}\left(B_r\sin\theta+B_\theta\cos\theta\right)-\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{B_rB_\varphi}{r}\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r}+\frac{B_\theta B_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\theta B_\varphi}{\partial\theta}\right). \tag{4.3}$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\ddot a r}{a}=\ddot a\xi,\\
&B_r\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)=B_r\frac{\ddot a r}{a}=(\mathbf{B}_p,\nabla)\frac{\ddot a r^2}{2a},\\
&B_r\sin\theta+B_\theta\cos\theta=(\mathbf{B}_p,\nabla)r\sin\theta,\\
&\frac{B_rB_\varphi}{r}\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r}+\frac{B_\theta B_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\theta B_\varphi}{\partial\theta}=\frac{1}{(r\sin\theta)^2}(\mathbf{B}_p,\nabla)\frac{j^2}{2}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Далее удобно будет рассматривать величины, входящие в уравнения (3.1), (3.2) как функции аргументов $t,\ r,\ \Psi$ вместо $t,\ r,\ \theta$ в предположении, что $\partial\Psi/\partial\theta\neq 0$. Рассмотрим плотность ρ и давление p как функции аргументов $t,\ r,\ \Psi$. Введем

$$w(t,r,\Psi)=\int\limits_{\Psi=\mathrm{const}}\frac{dp}{\rho}=\int\limits_{\Psi=\mathrm{const}}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r'}\right)_\Psi dr',$$

где интегрирование проводится от некоторого фиксированного радиуса, зависящего от t. Имеем

$$\nabla w=\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\Psi\nabla r+\left(\frac{\partial w}{\partial\Psi}\right)_r\nabla\Psi=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_\Psi\nabla r+\left(\frac{\partial w}{\partial\Psi}\right)_r\nabla\Psi,$$

$$\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_\Psi\nabla r+\left(\frac{\partial p}{\partial\Psi}\right)_r\nabla\Psi.$$

Умножая эти соотношения скалярно на полоидальное магнитное поле $\mathbf{B}_p$, получаем

$$(\mathbf{B}_p,\nabla w)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_\Psi(\mathbf{B}_p,\nabla r),$$

$$(\mathbf{B}_p, \nabla p) = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_\Psi (\mathbf{B}_p, \nabla r),$$

отсюда

$$(\mathbf{B}_p, \nabla w) = \frac{1}{\rho}(\mathbf{B}_p, \nabla p). \tag{4.5}$$

Подставляя соотношения (4.4), (4.5) в (4.3), получаем

$$\begin{gathered}(\mathbf{B}_p, \nabla)\left(\frac{\ddot{a}r^2}{2a} + w + \Phi - \frac{(\omega r\sin\theta)^2}{2}\right) = \\ -\omega^2(\mathbf{B}_p, \nabla)\frac{(r\sin\theta)^2}{2} - \frac{1}{4\pi\rho(r\sin\theta)^2}(\mathbf{B}_p, \nabla)\frac{j^2}{2}.\end{gathered} \tag{4.6}$$

5 Вывод уравнения Грэда–Шафранова

Рассматривая p и w как функции переменных (t, r, Ψ) вместо (t, r, θ) найдем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_\Psi + \left(\frac{\partial p}{\partial \Psi}\right)_r \frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\Psi + \left(\frac{\partial w}{\partial \Psi}\right)_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_\Psi + \left(\frac{\partial w}{\partial \Psi}\right)_r \frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

откуда

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial r} + \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \Psi}\right)_r - \left(\frac{\partial w}{\partial \Psi}\right)_r\right]\frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

С учетом этих соотношений радиальная компонента уравнения движения принимает вид

$$\frac{\ddot{a}r}{a} + \frac{\partial w}{\partial r} + \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \Psi}\right)_r - \left(\frac{\partial w}{\partial \Psi}\right)_r\right]\frac{\partial \Psi}{\partial r} =$$

$$= \omega^2 r\sin^2\theta - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{4\pi\rho}\left[-\frac{B_\varphi}{r}\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r}\left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\right]$$

и может быть преобразована к формам

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\ddot{a}r^2}{2a}\right) + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \omega^2\sin^2\theta\frac{\partial r^2/2}{\partial r} + \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \Psi}\right)_r - \left(\frac{\partial w}{\partial \Psi}\right)_r\right]\frac{\partial \Psi}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\rho r^2\sin^2\theta}\frac{\partial (rB_\varphi\sin\theta)^2/2}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\rho r^2\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\ddot{a}r^2}{2a}\right)+\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\sin^2\theta\omega^2}{2}\right)+\omega r^2\sin^2\theta\frac{\partial\omega}{\partial r}+$$

$$+\frac{j}{4\pi\rho r^2\sin^2\theta}\frac{\partial j}{\partial r}+\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\Psi}\right)_r-\left(\frac{\partial w}{\partial\Psi}\right)_r\right]\frac{\partial\Psi}{\partial r}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi\rho r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r}.$$

Заметим, что в уравнении (3.6) оператор $(\mathbf{B_p},\nabla)$ можно заменить дифференцированием по r при постоянном Ψ. Обозначим

$$E=\frac{\ddot{a}r^2}{2a}+w+\Phi-\frac{\omega^2r^2\sin^2\theta}{2},$$

причем

$$\frac{\partial E}{\partial r}=\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_\Psi+\left(\frac{\partial E}{\partial\Psi}\right)_r\frac{\partial\Psi}{\partial r},$$

так же как

$$\frac{\partial j}{\partial r}=\left(\frac{\partial j}{\partial r}\right)_\Psi+\left(\frac{\partial j}{\partial\Psi}\right)_r\frac{\partial\Psi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r}=\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)_\Psi+\left(\frac{\partial \omega}{\partial\Psi}\right)_r\frac{\partial\Psi}{\partial r}.$$

С учетом этого последнее уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial E}{\partial\Psi}\right)_r\frac{\partial\Psi}{\partial r}+(r\sin\theta)^2\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial\Psi}\right)_r\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\Psi}\right)_r-\left(\frac{\partial w}{\partial\Psi}\right)_r\right]\frac{\partial\Psi}{\partial r}+$$

$$\frac{j}{4\pi\rho r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial j}{\partial\Psi}\right)_r\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{4\pi\rho r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r}=0.$$

Сокращая это уравнение на $\partial\Psi/\partial r$ и умножая на $4\pi\rho r^2\sin^2\theta$, получаем уравнение Грэда – Шафранова для функции магнитного потока Ψ

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+j\left(\frac{\partial j}{\partial\Psi}\right)_r+4\pi\rho r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\Psi}\right)_r-\left(\frac{\partial w}{\partial\Psi}\right)_r\right]+$$

$$+4\pi\rho(r\sin\theta)^4\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial\Psi}\right)_r+4\pi\rho(r\sin\theta)^2\left(\frac{\partial E}{\partial\Psi}\right)_r=0.$$

6 Условия автомодельности

В предположении (3.1) и (3.2) относительно зависимости ω и j от времени и с учетом (3.5), (3.6) уравнение (4.6) принимает вид

$$\mathbf{L}\left(\frac{\ddot{a}\xi^2}{2} + a^{2-3\gamma}W - a^{-2}\frac{GM}{\xi} - b^2 a\frac{(\Omega\xi\sin\theta)^2}{2}\right) = (\mu b^2 a - \lambda c^2)J\Omega. \quad (6.1)$$

Уравнение Грэда–Шафранова с учетом соотношений (3.1), (3.2) приобретает вид

$$\begin{aligned}&\Delta^*\Psi + c^2a^2J\frac{\partial J}{\partial\Psi} + a^{4-3\gamma}4\pi D(\xi\sin\theta)^2\left(\frac{1}{D}\frac{\partial P}{\partial\Psi} - \frac{\partial W}{\partial\Psi}\right) + \\ &+a^3b^2 4\pi D(\xi\sin\theta)^4\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi} + a4\pi D(\xi\sin\theta)^2\frac{\partial E}{\partial\Psi} = 0,\end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\Delta^* = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\sin\theta}{\xi^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$. Для построения автомодельного решения уравнения (6.1) и (6.2) следует решать совместно с уравнениями (3.6), (3.5), (3.4) и (3.3).

6.1 Решения без генерации азимутального магнитного поля

Решения без генерации азимутального магнитного поля соответствуют значениям $\lambda = \mu = 0$. В этом случае из уравнений (3.5), (3.6), (3.3) и (3.4) следует, что $\Omega = \Omega(\Psi)$, $J = J(\Psi)$ (поскольку $\mathbf{L}\Psi = 0$), $b \sim a^{-2}$, $c \sim a^{-1}$. Это означает, все точки одной силовой линии вращаются с одной угловой скоростью, так что не происходит "наматывания"силовой линии на ось вращения системы. Полоидальный ток течет вдоль силовых линий, так, что отсутствует азимутальная составляющая силы Ампера.

Уравнение (6.1) дает

$$\mathbf{L}\left(\frac{\ddot{a}\xi^2}{2a} + a^{2-3\gamma}W - a^{-2}\frac{GM}{\xi} - a^{-1}\frac{(\Omega\xi\sin\theta)^2}{2}\right) = 0.$$

Это означает, что величина (будем называть ее интегралом Бернулли)

$$E(t,\Psi) = \frac{\ddot{a}a\xi^2}{2} + a^{4-3\gamma}W(\Psi,\xi) - a^{-1}\frac{GM}{\xi} - a^{-2}\frac{(\Omega\xi\sin\theta)^2}{2}$$

постоянна вдоль силовой линии в каждый момент времени.

Подставляя в уравнение Грэда – Шафранова зависимости всех переменных от t: $r = a\xi$, $\rho = a^{-3}D$, $p = a^{3\gamma}P$, $j = J/a$, $\omega = \Omega/a^2$, $w = a^{3(1-\gamma)}W$, получаем

$$\Delta^*\Psi + J\frac{dJ}{d\Psi} + a^{4-3\gamma}\cdot 4\pi D(\xi\sin\theta)^2\left[\frac{1}{D}\frac{\partial P}{\partial\Psi} - \frac{\partial W}{\partial\Psi}\right] +$$

$$+a^{-1}\cdot 4\pi D(\xi\sin\theta)^4\Omega\frac{d\Omega}{d\Psi} + a\cdot 4\pi D(\xi\sin\theta)^2\frac{\partial E}{\partial\Psi} = 0.$$

Полученное уравнение содержит слагаемые, которые не зависят от t явно: первые два слагаемых и зависят от t через $a(t)$: $a^{4-3\gamma}$, a^{-1} и $a\partial E(t,\Psi)/\partial\Psi$.

Возможны варианты $\gamma = 4/3$ и $\gamma = 5/3$. В первом случае третье слагаемое не зависит от t. Во втором – третье слагаемое пропорционально a^{-1}, то есть имеет такую же зависимость от t, что и четвертое. Для того, чтобы конструкция $a(t)E(t,\Psi)$ имела аналогичную зависимость от t, следует положить

$$E(t,\Psi) = \frac{E_1(\Psi)}{a(t)} + \frac{E_2(\Psi)}{a^2(t)}.$$

В принципе к функции $E(t,\Psi)$ может быть добавлена произвольная функция от t, но в дальнейшем выяснится, что она должна быть равна нулю.

После выделения явной зависимости всех переменных от t интеграл Бернулли принимает вид

$$\frac{\ddot{a}\xi^2}{2} + a^{2-3\gamma}W(\xi,\Psi) - \frac{GM}{a^2\xi} - \frac{(\Omega\xi\sin\theta)^2}{2a^3} = \frac{E}{a}. \qquad (6.3)$$

При $\gamma = 4/3$ второе слагаемое пропорционально a^{-2}, при $\gamma = 5/3$ – a^{-3}. Если положить

$$\ddot{a} = \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{a^3},$$

где $\alpha, \beta = \mathrm{const}$, то в (6.3) зависимость от t будет содержаться в виде множителей a^{-2} и a^{-3} при величинах, которые не зависят от t явно.

Рассмотрим случаи $\gamma = 4/3$ и $\gamma = 5/3$ по отдельности. В каждом случае в уравнении Грэда – Шафранова и интеграле Бернулли приравняем нулю множители при a^{-2} и a^{-3}, что даст некоторые соотношения, не содержащие явной зависимости от t. Полагаем, что $E = E_1/a + E_2/a^2$.

1. В случае $\gamma = 4/3$ имеем

$$\Delta^*\Psi + J\frac{dJ}{d\Psi} + 4\pi D(\xi\sin\theta)^2\left[\frac{1}{D}\frac{\partial P}{\partial\Psi} - \frac{\partial W}{\partial\Psi}\right] + 4\pi D(\xi\sin\theta)^2\frac{dE_1}{d\Psi} = 0, \quad (6.4)$$

$$(\xi\sin\theta)^2\Omega\frac{d\Omega}{d\Psi} + \frac{dE_2}{d\Psi} = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\alpha\xi^2}{2} + W - \frac{GM}{\xi} = E_1(\Psi), \quad (6.6)$$

$$\frac{\beta\xi^2}{2} - \frac{(\Omega\xi\sin\theta)^2}{2} = E_2(\Psi). \quad (6.7)$$

Дифференцируя (6.7) по Ψ при фиксированном ξ, получаем

$$-(\xi\sin\theta)^2\Omega\frac{d\Omega}{d\Psi} - \Omega^2\xi^2\sin\theta\frac{\partial\sin\theta}{\partial\Psi} = \frac{dE_2}{d\Psi}.$$

Сравнивая это соотношение с (6.5), заключаем, что либо $\Omega = 0$, либо $\partial(\sin\theta)/\partial\Psi = 0$. Последнее соотношение означало бы, что $B_r \sim \partial\Psi/\partial\theta = \infty$, так что для выполнения (6.5), (6.7) следует положить $\Omega = 0$, $E_2 = 0$, $\beta = 0$.

Дифференцирование (6.6) по Ψ при фиксированном ξ и по ξ при фиксированном Ψ дает

$$\frac{\partial W}{\partial\Psi} = \frac{dE_1}{d\Psi}, \quad \alpha\xi + \frac{\partial W}{\partial\xi} + \frac{GM}{\xi^2} = 0.$$

Подставляя первое соотношение в уравнение Грэда – Шафранова (6.4), получаем

$$\Delta^*\Psi + J\frac{dJ}{d\Psi} + 4\pi(\xi\sin\theta)^2\frac{\partial P}{\partial\Psi} = 0.$$

Второе соотношение с учетом

$$\frac{\partial W}{\partial\xi} = \frac{1}{D}\frac{\partial P}{\partial\xi} \quad (6.8)$$

принимает вид

$$\left(\alpha\xi + \frac{GM}{\xi^2}\right)D + \frac{\partial P}{\partial\xi} = 0. \quad (6.9)$$

Уравнения (6.3), (6.9) совпадают с полученными в [11] при исходном предположении $v = 0$.

2. В случае $\gamma = 5/3$ имеем

$$\Delta^*\Psi + J\frac{dJ}{d\Psi} + 4\pi D(\xi\sin\theta)^2\frac{dE_1}{d\Psi} = 0, \tag{6.10}$$

$$\frac{1}{D}\frac{\partial P}{\partial\Psi} - \frac{\partial W}{\partial\Psi} + (\xi\sin\theta)^2\Omega\frac{d\Omega}{d\Psi} + \frac{dE_2}{d\Psi} = 0, \tag{6.11}$$

$$\frac{\alpha\xi^2}{2} - \frac{GM}{\xi} = E_1(\Psi), \tag{6.12}$$

$$\frac{\beta\xi^2}{2} + W - \frac{(\Omega\xi\sin\theta)^2}{2} = E_2(\Psi). \tag{6.13}$$

Из (6.12) следует, что либо $\Psi = \Psi(\xi)$ и в силу условий на оси симметрии $\Psi = 0$, либо $\alpha = 0$, $GM = 0$, $E_1 = 0$.

Рассмотрим второй случай. Уравнение (6.10) принимает вид

$$\Delta^*\Psi + J\frac{dJ}{d\Psi} = 0, \tag{6.14}$$

что означает бессиловую конфигурацию магнитного поля в каждый момент времени. Отметим, что газодинамические течения, в которых радиальная скорость линейно зависит от радиуса, исследованы в работе [13].

Дифференцируя (6.13) по Ψ и складывая с (6.11), получаем

$$\frac{1}{D}\frac{\partial P}{\partial\Psi} - \Omega^2\xi^2\sin\theta\frac{\partial\sin\theta}{\partial\Psi} = 0. \tag{6.15}$$

Дифференцирование (6.13) по ξ при фиксированном Ψ дает с учетом (6.8)

$$\beta\xi + \frac{1}{D}\frac{\partial P}{\partial\xi} - \Omega^2\xi\sin^2\theta = 0. \tag{6.16}$$

Соотношения (6.15), (6.16) эквивалентны (6.11), (6.13), но не содержат произвольных функций $W(\xi,\Psi)$ и $E_2(\Psi)$.

Для построения автомодельного решения следует найти функции $J(\Psi)$, $\Omega(\Psi)$, $P(\xi,\Psi)$, $D(\xi,\Psi)$ такие, что система уравнений (6.3), (6.15), (6.16) совместна, и саму функцию $\Psi = \Psi(\xi,\theta)$.

Пусть $\Psi = \Psi(\xi,\theta)$ – решение уравнения Грэда – Шафранова с некоторой функцией $J(\Psi)$. Разрешив это соотношение относительно θ (если это возможно), получим $\theta = \theta(\xi,\Psi)$.

Образуем функцию $f(\xi,\Psi)=\dfrac{\xi^2\sin^2\theta(\xi,\Psi)}{2}$. Уравнения (6.15) и (6.16) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial P}{\partial\Psi}-\Omega^2\dfrac{\partial f}{\partial\Psi}=0, \\ \\ \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial P}{\partial\xi}-\Omega^2\dfrac{\partial f}{\partial\xi}+\beta\xi=0. \end{cases} \tag{6.17}$$

Вопрос о совместности системы (6.17) мы оставляем открытым.

Разберем только один частный случай. Заметим, что если функции $P(\xi,\Psi)$ и $D(\xi,\Psi)$ зависимы, то

$$\frac{1}{D}dP=dW.$$

Дифференцируя первое уравнение (6.17) по ξ, второе – по Ψ и вычитая первое из второго, получим

$$\Omega\frac{d\Omega}{d\Psi}\frac{\partial f}{\partial\xi}=0,$$

откуда (в предположении $\partial f/\partial\xi\neq 0$) вытекает, что $\Omega=\mathrm{const}$. Уравнения (6.17) в этом случае интегрируются, что дает

$$W-\Omega^2 f+\frac{\beta\xi^2}{2}=\mathrm{const}.$$

Предполагая далее какую–либо зависимость $W(P)$, находим $P(\xi,\Psi)$ и $D(\xi,\Psi)=\left(\dfrac{dW}{dP}\right)^{-1}$. По своему смыслу функции P и D должны быть положительны.

6.2 Решения с генерацией азимутального магнитного поля

Рассмотрим случай, когда $\mu\neq 0$ и $\lambda\neq 0$. Условия автомодельности накладывают некоторые ограничения на вид функций $b(t)$ и $c(t)$. В уравнениях (6.2) и (6.1) слагаемые, содержащие ω и j должны иметь зависимость от времени, схожую с какими либо другими слагаемыми, или должны быть схожими в этом отношении между собой. Будем искать решения (3.3), (3.4) вида: $b \sim a^m$, $c \sim a^n$. Подставляя такие a и b в (3.3), (3.4), получаем два выражения для $\dot{a}$, и, приравнивая их, находим что

$$n = m + 1/2,$$
$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{\mu(m+2)}{\lambda(m+3/2)}a,$$
$$\dot{a} = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\sqrt{(m+2)(m+3/2)}}a^{-1/2}.$$

Дифференцируя последнее соотношение по времени и снова заменяя $\dot{a}$ его правой частью, получаем $\ddot{a} = -\varkappa a^{-2}$, где $\varkappa = \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\mu}{(m+2)(m+3/2)}$.

В предположении, что $2m+1 \neq 2-3\gamma$ и $2m+1 \neq -2$ уравнение (6.1), для случая $\gamma = 4/3$, в силу условий автомодельности распадается на две части, одна из них

$$\mathbf{L}\left(-\frac{\varkappa\xi^2}{2} + W - \frac{GM}{\xi}\right) = 0,$$

откуда определяем функцию $W(\Psi,\xi)$

$$W(\Psi,\xi) = E_1(\Psi) + \frac{\varkappa\xi^2}{2} + \frac{GM}{\xi}. \tag{6.18}$$

Вторая часть дает

$$\mathbf{L}\frac{(\Omega\xi\sin\theta)^2}{2} = \frac{\mu}{2}\frac{1}{m+3/2}J\Omega$$

или, с учетом (3.6)

$$\mathbf{L}(\Omega\xi\sin\theta)^2 = \frac{(\Omega\xi\sin\theta)^2}{m+3/2}\mathbf{L}\Omega$$

решение этого уравнения

$$\Omega = \Omega_1(\Psi)(\xi\sin\theta)^{-\delta}, \tag{6.19}$$

где $\Omega_1(\Psi)$ – некоторая произвольная функция, а $\delta = \dfrac{m+3/2}{m+1}$.

Уравнение Грэда – Шафранова, с учетом зависимости от времени всех слагаемых, также распадается на две части

$$\frac{\mu}{\lambda}\frac{m+2}{m+3/2}J\frac{\partial J}{\partial\Psi} - 4\pi D(\xi\sin\theta)^2\Omega^2\frac{\partial}{\partial\Psi}\frac{(\xi\sin\theta)^2}{2} = 0, \tag{6.20}$$

$$\Delta^* \Psi + 4\pi(\xi \sin\theta)^2 \frac{\partial P}{\partial \Psi} = 0. \tag{6.21}$$

Найдем J из (3.6) в соответствии с (6.19)

$$J = \mu^{-1} \frac{\delta}{\delta + 2} \Omega_1(\Psi) \mathbf{L} (\xi \sin\theta)^{\delta+2} \tag{6.22}$$

(в случае $\delta \neq 2$). Обозначим для краткости $(\xi \sin\theta)^{\delta+2} = g(\Psi, \xi)$, тогда из уравнения (3.5) найдем

$$4\pi D = \frac{1}{\mu\lambda} \frac{\delta}{\delta + 2} \frac{\mathbf{L}^2 g}{g}. \tag{6.23}$$

Подставляя такие Ω, J и D в первую часть уравнения Грэда–Шафранова (6.20) получим уравнение

$$\frac{m+2}{m+3/2} \frac{\partial}{\partial \Psi} (\Omega_1 \mathbf{L} g)^2 - \Omega_1^2 \mathbf{L}^2 g \frac{\partial g}{\partial \Psi} = 0. \tag{6.24}$$

Поскольку g – известная функция переменных (ξ, θ), а Ω_1 – прозвольна, то последнее уравнение неявно определяет Ψ как функцию переменных (ξ, θ). Для того, чтобы построить автомодельное решение необходимо решить совместно уравнения (6.21) и (6.24).

7 Выводы

В работе исследована возможность построения автомодельных решений уравнений нестационарной идеальной магнитной гидродинамики в случае осевой симметрии с учетом вращения плазмы и гравитации. Работа является непосредственным продолжением [14]. Показано, что в остутствие меридианальной составляющей скорости и в предположении, что функция магнитного потока зависит от сферического радиуса и времени в комбинации $\xi = r/a(t)$, задача сводится к решению уравнения Грэда – Шафранова, дополненому уравнением Бернулли и двум уравнениям соответственно на функцию полоидального тока и угловую скорость вращения. Все эти уравнения по своей структуре стационарны и содержат время лишь как параметр. Уравнение Грэда – Шафранова содержит некоторые произвольные функции, и процедура решения задач для этого уравнения состоит как в выборе этих функций, так и в определении решения при тех или иных граничных условиях. В отличие от [9], [10], [12] задача сведена к решению уравнения Грэда – Шафранова, в присутствии азимутальной составляющей скорости. В предположении об изоротации магнитных силовых линий из условий автомодельности для $\gamma = 4/3$ следует, что плазма не вращается, и этот случай сводится к проанализированному в [9], [10]. В случае $\gamma = 5/3$ решение возможно в отсутствии гравитации. Получено решение, в котором вращение твердотельно, а магнитное поле остается бессиловым в каждый момент времени. Проанализирован случай дифференциального вращения магнитных силовых линий.

Список литературы

[1] *Linden-Bell D., Boily C.* Self-similar solutions up to flashpoint in highly wound magnetostatics. MNRAS, 1994, V. 267, p. 146–152.

[2] *Lovelace R.V.E., Boily C.M.* Collimated magnetostatic fields. Astronomy and Astrophysics, 1996, V. 309, p. 997–1001.

[3] *Т.Г. Еленина, А.В. Колдоба.* Эволюция бессилового магнитного поля в системе ”звезда – диск”. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2003, N 71, 18 с.

[4] *Uzdensky D.A.* Partial field opening and current sheet formation in the disk magnetosphere. Astrophysical Journal, 2002, V.572, N 1, p.432–444.

[5] *Uzdensky D.A.* Shear-driven field-line opening and the loss of a force-free magnetostatic equilibrium. Astrophysical Journal, 2002, V.574, N 2, p.1011–1020.

[6] *Uzdensky D.A., Königl A., Litwin C.* Magnetically linked star—disk system I. Force—free magnetospheres and effects of disk resistivity. Astrophysical Journal, 2002, V. 565, N 2, p.1191–1204.

[7] *Catto P.J., Krasheninnikov S.I.* Effects of rotation on a finite plasma pressure equilibrium in a dipolar magnetic field. Physics Letters A, 1999, V. 258, p. 153–157.

[8] *Krasheninnikov S.I., Catto P.J.* Equilibrium of a gravitating plasma in a dipolar magnetic field. Physics Letters A, 1999, V. 260, p. 502–506.

[9] *Low B.C.* Self–similar magnetohydrodynamics. I. The $\gamma = 4/3$ polytrope and the coronal transient. Astrophysical Journal, 1982, V. 254, N 2, p. 796–805.

[10] *Low B.C.* Self–similar magnetohydrodynamics. II. The expansion of a stellar envelope into a surrounding vacuum. Astrophysical Journal, 1982, V. 261, N 1, p. 351–369.

[11] *Lou Y.Q., Rosner R., Ulmschneider P.* A computational code for two–dimentional unsteady magnetohydrodynamics by the method of characteristics. Astrophysical Journal, 1987, V. 315, N 1, p. 349–370.

[12] *Sanyal A.K., Ray D.* Self–similar magnetohydrodynamics. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1983, V. 26, N 4, p. 667–676

[13] *Л.И. Седов* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972, 440 p.

[14] *Т.Г. Еленина, Г.В. Устюгова.* Семейство автомодельных решений нестационарных уравнений идеальной МГД. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2004, N 55, 18 с.