РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

М.М. Васильев

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В ПРЯМОМ ДВУГРАННОМ УГЛЕ

Москва, 2006 г.

УДК 517.9+532.516

Васильев М.М. Течение вязкого теплопроводного газа в двугранном угле. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006.

Рассматривается стационарное течение вязкого теплопроводного газа, вызванное движением прямого двугранного угла в направлении его ребра с постоянной скоростью. Эта задача рассматривалась ранее в случае вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что течение является слоистым, то есть лишь одна компонента скорости отлична от нуля. Установлено, что в этом случае имеет место квадратичная зависимость энтальпии от скорости течения при произвольном значении числа Прандтля. В теории пограничного слоя аналогичная зависимость существует только при числе Прандтля, равном единице. С использованием этой зависимости рассматриваемая краевая задача сводится к краевой задаче для одной функции – скорости течения.

Vasiliev M.M. The viscous heat conducting gas flow in a dihedral angle. Preprint of the Keldysh Institute of Appl. Math. of RAS. Moscow. 2006.

We consider the viscous heat conducting gas steady flow caused by the motion of the right dihedral angle in the direction of the edge with the constant velocity. This problem was considered previously in the case of viscous incompressible fluid. It is assumed that the flow is layered, i.e. only one velocity component is different from zero. It is established that in this case occurs the square-law dependence of the enthalpy on velocity without any numerical restriction to Prandtl number. Analogous dependence exists in the boundary layer theory only if the Prandtl number is equal to one. With the help of this dependence, the considered boundary-value problem is reduced to the problem for only one function, which is the velocity of flow.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 05-01-00050; и Программы Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики".

E-mail: vasiliev@keldysh.ru
www.keldysh.ru

Введение

Задача о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости внутри прямого двугранного угла B исследовалась Л.Г.Лойцянским в 1936-1937 г. Ссылки на эти работы даны в монографии [1] (гл.VII, § 52)). Здесь эта задача впервые рассматривается для слоистого течения [2, гл. V, § 1] вязкого теплопроводного газа. Слоистому нестационарному течению вязкой несжимаемой жидкости в двугранном угле посвящен препринт [3]. На эти задачи обратил внимание автора В.Я. Нейланд в связи с течением вблизи линии сочленения крыла и фюзеляжа самолета.

В данной работе показано, что уравнения плоского стационарного слоистого течения вязкого теплопроводного газа имеют интеграл, выражающий квадратичную зависимость энтальпии от скорости течения при произвольном числе Прандтля. Этот интеграл позволяет свести рассматриваемую задачу к решению одного дифференциального уравнения для скорости течения с соответствующими граничными условиями. Отметим, что для уравнений пограничного слоя аналогичный интеграл существует только при числе Прандтля, равном единице.

Здесь получена асимптотика решения в окрестности ребра двугранного угла. Асимптотический характер течения вдали от этой окрестности хорошо известен. Это – не взаимодействующие между собой пограничные слои на плоских пластинах – гранях двугранного угла B.

В препринте использовались методы степенной геометрии. Эти методы позволяют просто и эффективно сводить краевые задачи к автомодельным, как для линейных, так и для нелинейных уравнений.

Некоторые общие сведения о степенной геометрии приводятся в Приложении A.

§ 1. Постановка задачи

Уравнения стационарного движения вязкого теплопроводного газа имеют следующий вид [4]:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}+\rho w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right), \tag{1.1}$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}+\rho w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right), \qquad (1.2)$$

$$\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right), \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0, \qquad (1.4)$$

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}+\rho w\frac{\partial h}{\partial z}=u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}+$$

$$+2\mu\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right), \qquad (1.5)$$

$$p=A\rho h \ \ \text{(уравнение Клапейрона)}, \qquad (1.6)$$

$$\mu=Ch^n. \qquad (1.7)$$

Здесь x, y, z — декартовы прямоугольные координаты, u, v, w — соответствующие компоненты вектора скорости, p — давление, ρ — плотность, h — энтальпия, μ — динамический коэффициент вязкости, $\sigma = \mu c_p/\lambda$ — число Прандтля, λ — коэффициент теплопроводности газа, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $A = (\gamma-1)/\gamma$, $\gamma = c_p/c_v = \text{const}$, c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, $n = \text{const}$, $C = \text{const}$.

Рассмотрим движение прямого двугранного угла B в направлении его ребра Oz с постоянной скоростью U. Будем считать соответствующее движение газа слоистым, полагая $u = v = 0$, а декартову систему координат $Oxyz$ связанной с движущимся углом B, грани которого лежат в плоскостях $x = 0$ и $y = 0$. Учитывая бесконечную протяженность угла B вдоль оси Oz и считая, что движение тела обусловлено только движением угла B, будем полагать функции w, p, ρ, h не зависящими от z. При сделанных предположениях уравнение неразрывности (1.4) превратится в тождество, а остальные уравнения системы (1.1)–(1.7) примут следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) = 0, \tag{1.10}$$

$$\mu\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right) = 0, \tag{1.11}$$

$$p = A\rho h, \tag{1.12}$$

$$\mu = Ch^n. \tag{1.13}$$

Таким образом, при $p = p_0 =$const нужно решить уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^n\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0, \tag{1.14}$$

$$h^n\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(h^n\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^n\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right) = 0, \tag{1.15}$$

с граничными условиями:

$$w \to w_\infty, \;\; h \to h_\infty \;\text{ при }\; x = y \to +\infty, \tag{1.16}$$

$$w = 0, \;\; h = h_w \;\text{ при }\; x = 0 \;\text{ и при }\; y = 0, \tag{1.17}$$

Граничные условия на обеих гранях берутся одинаковыми для симметрии задачи относительно плоскости $x = y$, что упрощает решение.

§ 2. Получение частного интеграла

Умножим обе части уравнения (1.14) на w и преобразуем полученное таким образом уравнение к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(wh^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) - h^n\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(wh^n\frac{\partial w}{\partial y}\right) - h^n\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{2.1}$$

Сложив это уравнение с (1.15), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^n\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^n\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w^2}{2}\right)\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(h^n\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{\sigma}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^n\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h}{\sigma}\right)\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^n\frac{\partial}{\partial x}\left(h+\sigma\frac{w^2}{2}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h^n\frac{\partial}{\partial y}\left(h+\sigma\frac{w^2}{2}\right)\right)=0. \tag{2.2}$$

Из уравнений (1.14) и (2.2) вытекает, что рассматриваемая система уравнений имеет частный интеграл:

$$h+\sigma\frac{w^2}{2}=B_1w+B_0. \tag{2.3}$$

Значения постоянных B_1 и B_0 определяются из граничных условий (1.16) и (1.17):

$$B_1=\frac{h_\infty-h_w}{w_\infty}+\frac{\sigma}{2}w_\infty,\quad B_0=h_w.$$

Таким образом, частный интеграл (2.3) можно записать в следующем виде

$$h=B_2w^2+B_1w+B_0, \tag{2.4}$$

где

$$B_2=-\frac{\sigma}{2},\quad B_1=\frac{h_\infty-h_w}{w_\infty}+\frac{\sigma}{2}w_\infty,\quad B_0=h_w.$$

Квадратичная зависимость энтальпии от скорости существует и для уравнений пограничного слоя в случае плоского стационарного движения вязкого теплопроводного газа при условии σ=1. Отметим, что это условие в случае слоистого течения не налагается.

§ 3. Об автомодельном решении

Записав уравнение (1.14) в виде

$$h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+n\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0 \tag{3.1}$$

и подставив в него выражение (2.4), получим

$$\begin{gathered}\left(B_2w^2+B_1w+B_0\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\\+n(2B_2w+B_1)\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)=0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Таким образом рассматриваемая краевая задача сводится к решению уравнения (3.2) с соответствующими граничными условиями и последующим вычислением энтальпии h по формуле (2.4) и плотности ρ с помощью уравнения Клапейрона (1.6) по формуле:

$$\rho = \frac{p_0}{Ah}.$$

Применение методов степенной геометрии к уравнению (3.2) (см. Приложение) приводит к следующему виду его автомодельного решения:

$$w = W_1(\xi), \text{ где } \xi = \frac{y}{x} \text{ или } w = W_2(\eta), \text{ где } \eta = \frac{x}{y}.$$

Для сохранения симметрии задачи относительно координат x и y можно искать решение в виде:

$$w = W(\zeta), \text{ где } \zeta = \xi + \eta \text{ или } \zeta = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Однако при этом получается краевая задача на бесконечном промежутке, что не удобно для расчетов. Поэтому положим

$$w = \Omega(\omega), \text{ где } \omega = \frac{2}{\zeta} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \ (x^2 + y^2 \neq 0). \tag{3.3}$$

В полярных координатах (r, ϑ) автомодельная переменная ω, очевидно, имеет вид $\omega{=}\sin 2\vartheta$. Сечения двугранного угла B плоскостями $z{=}\mathrm{const}$ представляют собой прямые линейные углы, стороны которых лежат на плоскостях $y{=}0$ и $x{=}0$, а координатные линии $\omega = k = \mathrm{const}$ ($k \in [0; 1]$) являются лучами, исходящими из начала координат, вдоль которых искомые функции имеют постоянные значения, что не позволяет удовлетворить условиям $w \to 0$ при $r \to 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ и $w \to w_\infty$ при $r \to \infty$, $\vartheta = \pi/2$.

Поэтому применим метод разделения переменных. При $r \to 0$ переменные разделяются, если в уравнении (3.2) сохранить только главные члены. Будем полагать,что малыми являются функция w и ее производные и производные функции h. При этих предположениях уравнение (3.2) переходит в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

имеющее в полярных координатах следующий вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = 0.$$

Разделение переменных $w = w_1(r) w_2(\vartheta)$ приводит к уравнениям

$$r^2 {w_1}'' + r {w_1}' - l^2 w_1 = 0, \tag{3.4}$$

$$ {w_2}'' + l^2 w_2 = 0, \tag{3.5}$$

где $l = \text{const}$.

Решение уравнения (3.5), обеспечивающее выполнение граничного условия для скорости на стенках двугранного угла B, получается при $l = 2$ и имеет вид: $w_2 = C_2 \sin 2\vartheta$ (C_2 =const). Уравнение Эйлера (3.4) имеет решение $w_1 = C_1 r^2$ (C_1 =const), удовлетворяющее условию $w_1(0) = 0$.

Таким образом, для главного члена асимптотики решения рассматриваемой задачи при $r \to 0$ получается следующее выражение;

$$w = C_3 r^2 \sin 2\vartheta, \tag{3.6}$$

где $C_3 = C_1 C_2$.

§ 4. Теплоизолированная стенка

В случае теплоизолированной стенки граничные условия для уравнений (1.14)–(1.15) можно записать в виде:

$$w = 0, \ \ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \ \text{ при } \ y = 0, \tag{4.1}$$

$$w = 0, \ \ \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \ \text{ при } \ x = 0, \tag{4.2}$$

$$w \to w_\infty, \ \ h \to h_\infty \ \text{ при } \ x = y \to \infty. \tag{4.3}$$

Как мы видели, следствием уравнений (1.14)–(1.15) является наличие частного интеграла (2.4). Поскольку на стенке $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{dh}{dw}\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ при $y = 0$ и $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dw}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ при $x = 0$, то в этом интеграле $B_1 = 0$, то есть $\frac{h - h_\infty}{\sigma} + \frac{w^2 - {w_\infty}^2}{2} = 0$ или

$$h = h_\infty \left(1 + \sigma \frac{\gamma - 1}{2} {M_\infty}^2 \left(1 - \frac{w^2}{{w_\infty}^2}\right)\right). \tag{4.4}$$

Здесь ${M_\infty}^2 = \frac{{w_\infty}^2}{{c_\infty}^2} = \frac{{w_\infty}^2 \rho_\infty}{\gamma p_\infty} = \frac{{w_\infty}^2}{(\gamma - 1) h_\infty}$, ${c_\infty}^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$ (M_∞, c_∞ – соответственно число Маха и скорость звука при $x = y \to \infty$).

Формула (4.4) при $\sigma = 1$ совпадает с известной формулой для случая изэнтропического движения идеального (невязкого) газа. Если при этом положить $w = 0$, то получится выражение для "энтальпии торможения" h_0, то есть энтальпии адиабатически и изэнтропически заторможенного идеального газа:

$$h_0 = h_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_\infty}^2\right). \qquad (4.5)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Некоторые сведения из степенной геометрии

Для удобства чтения, приведем некоторые сведения, относящиеся к степенной геометрии и используемые в данном препринте. Подробности см. в монографиях [5,6]. Методы степенной геометрии с успехом использовались в работах [5]–[14] и других.

Рассмотрим в качестве примера краевую задачу для одного дифференциального уравнения с двумя независимыми переменными. Обозначим независимые переменные через x_1, x_2, а искомую функцию через x_3 и пусть $X = (x_1, x_2, x_3)$. Дифференциальным мономом $a(X)$ называется произведение обычного монома $cx_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3} \stackrel{\text{def}}{=} cX^R$и производных вида $\partial^l x_3 / \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}$, где $c = \text{const}$, $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$, $l = l_1 + l_2$.

Каждому дифференциальному моному $a(X)$ соответствует его векторный показатель степени $Q(a) \in \mathbb{R}^3$, который определяется согласно формулам: $Q(cX^R) = R$; $Q\left(\partial^l x_3 / \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}\right) = -l_1 E_1 - l_2 E_2 + E_3$; $Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$, где E_j — j-ый единичный вектор, a_1, a_2 — дифференциальные мономы. Конечная сумма дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum a_k(X) \qquad (\text{A}.1)$$

называется дифференциальным полиномом. Дифференциальному полиному (А.1) в пространстве $\mathbb{R}^3$ соответствует носитель $\mathbf{S}(f) = \{Q(a_k)\}$, который представляет собой множество векторных показателей степени всех дифференциальных мономов этого полинома. Точки этого носителя будем обозначать через Q_k. Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется многогранником Ньютона-Брюно для полинома (А.1). Его граница $\partial\Gamma(f)$ состоит из "граней" $\Gamma_j^{(d)}$, где $d = \dim(\Gamma_j^{(d)})$. При $d = 0$ это вершины, при $d = 1$ это ребра, при $d = 2$ это обычные двумерные грани. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует укороченный полином $\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_k(X)$, где сумма берется по всем $k : Q(a_k) \in \Gamma_j^{(d)}$.

Пусть $\mathbb{R}^3_*$ — пространство, сопряженное пространству $\mathbb{R}^3$. Так что для $P=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^3_*$ и $Q=(q_1,q_2,q_3)\in\mathbb{R}^3$ определено скалярное произведение $\langle P,Q\rangle\stackrel{\text{def}}{=}p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$. Для каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многогранника $\Gamma(f)$ существует такой вектор $P\in\mathbb{R}^3_*$, что $\langle P,Q_i\rangle=\langle P,Q_l\rangle>\langle P,Q_m\rangle$ для любых $Q_i,Q_l\in\Gamma_j^{(d)}$ и $Q_m\in\Gamma\setminus\Gamma_j^{(d)}$. В пространстве $\mathbb{R}^3$ гиперплоскость $\langle P,Q\rangle=\langle P,Q_i\rangle$ является опорной к многограннику $\Gamma(f)$ и проходит через грань ${\Gamma_j}^{(d)}$, причем вектор P перпендикулярен к этой опорной плоскости и является внешним по отношению к многограннику $\Gamma(f)$.

Рассмотрим уравнение

$$f(X)=0, \tag{A.2}$$

где $f(X)$ — дифференциальный полином. Этому полиному соответствует его носитель $\mathbf{S}(f)$, его многогранник $\Gamma(f)$, множество граней $\Gamma_j^{(d)}$ и укороченные уравнения:

$$\hat{f}_j^{(d)}(X)=0. \tag{A.3}$$

Если решение уравнения (A.2) задано параметрически в виде

$$x_m=b_m\tau^{p_m}(1+o(1)), \tag{A.4}$$

$b_m\neq 0$ — постоянные, m=1, 2, 3, и $\tau\to\infty$, то выражение

$$x_m=b_m\tau^{p_m} \tag{A.5}$$

является первым приближением этого решения и удовлетворяет соответствующему укороченному уравнению (A.3).

Для каждого вектора $P\neq 0$ существует укороченное уравнение.

Пусть при $x_1\to\infty$ уравнение (A.2) имеет решение вида

$$x_3=x_1^{\gamma_3}\varphi_3(\zeta)+O(x_1^{\gamma_3-\varepsilon}),$$

где $\varepsilon>0$,

$$\zeta=x_2{x_1}^{-\gamma_2},\gamma_m=p_m/p_1,\quad m=2,3. \tag{A.6}$$

При этом вектор $-\gamma_mE_1+E_m$ перпендикулярен к вектору $P=(p_1,p_2,p_3)$. Тогда укороченное решение

$$x_3={x_1}^{\gamma_3}\varphi_3(\zeta), \tag{A.7}$$

является решением укороченной системы уравнений (A.3) [6, гл.VI, теорема 1.1].

Вектор P находится из условий его перпендикулярности к грани $\Gamma_j^{(d_1)}$ и к векторам, определяемым граничными условиями. Длина вектора P является произвольной и, согласно формуле (A.4), можно положить $p_1 = 1$, если исследуется асимптотика решения при $x_1 \to \infty$, и $p_1 = -1$, если $x_1 \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 480 с.

2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

3. Васильев М.М. О пограничном слое на двугранном угле. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Препринт N 71. 2005. 13 с.

4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.

5. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1979. 256 с. = Bruno A.D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, 1989, Part 1.

6. Брюно А.Д., Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998, 288 с. = Bruno A.D. Power Geometry in Algebraic and Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2000.

7. Bruno A.D. and Vasiliev M.M., Asymptotic analysis of the viscous fluid flow around a flat plate by the Newton polyhedron// Nonlinear analysis, Theory, Methods and Applications, 1997, 30:8 (Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis), pp. 4765-4770.

8. Bruno A.D. and Vasiliev M.M., Newton polyhedron and Prandtl equations for boundary layer// Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), 1998, 78 (Proc. of the Conf. GAMM 97, v.1), pp. 309-310.

9. Bruno, A.D., Algorithmic analysis of singular perturbations and boundary layers by power geometry// Proc. of the Int. Conf. BAIL 2002. Perth, Western Australia, 2002, pp. 251-256.

10. Vasiliev M.M., Asymptotics of some viscous, heat conducting gas flows// Proc. of the Int. Conf. BAIL 2002. Perth, Western Australia, 2002, pp. 251-256.

11. Vasiliev, M.M., About the obtaining self-similar solutions of the Navier-Stokes equations by methods of power geometry// Proc. of ISAAC-2001. World Scientific, Singapore, 2003, pp. 93-101.

12. Bruno A.D., Shadrina, T.V., The axially symmetric boundary layer on a needle// Proc. of the Int. Conf. BAIL 2004. Toulouse, France, 2004, 9 p.

13. Vasiliev M.M., On the self-similar solution of some magnetohydrodynamic problems// Proc. of the Int. Conf. BAIL 2004. Toulouse, France, 2004, 6 p.

14. Vasiliev M.M., About unsteady boundary layer on a dihedral angle// Proc. of the Int. Conf. BAIL 2006. Goettingen, Germany, 2006, 7 p.