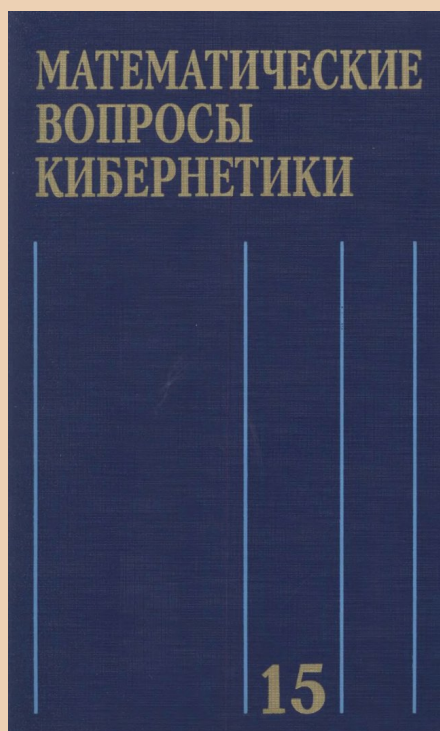




Е. В. Дебрев

**О безусловных
рёберных тестах для
регулярных семейств
графов**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Дебрев Е. В. О безусловных рёберных тестах для регулярных семейств графов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — С. 183–198.
URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2006-183>

О БЕЗУСЛОВНЫХ РЁБЕРНЫХ ТЕСТАХ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ СЕМЕЙСТВ ГРАФОВ*)

Е. В. ДЕБРЕВ

(МОСКВА)

§ 1. Введение

В статье рассматриваются безусловные рёберные тесты для неориентированных графов без петель и кратных рёбер, заданных на фиксированном конечном множестве нумерованных вершин.

Неформально задача может быть описана следующим образом. Пусть на фиксированном конечном множестве нумерованных вершин задано семейство графов, замкнутое относительно изоморфизмов (регулярное семейство). Для любого графа G из заданного семейства и любой пары различных вершин рёберная проверка показывает, принадлежит ли ребро, соединяющее эти две вершины, графу G . Требуется построить безусловный тест, состоящий из минимального числа рёберных проверок, который различает графы заданного семейства, т. е. такой, что наборы значений входящих в тест рёберных проверок попарно различны для графов из семейства.

Изучению таких тестов посвящены работы [2–4]; в этой статье получены дальнейшие результаты, опирающиеся на результаты упомянутых работ. Цель настоящей статьи — завершить изучение семейств графов с не более, чем двумя классами подобия вершин, начатое в [3, 4]. (определения даны в работе [4] и приводятся ниже) и, таким образом, подвести итог изучению безусловных рёберных тестов для всех регулярных семейств графов.

Все графы, рассматриваемые в статье, заданы на фиксированном конечном множестве из n нумерованных вершин, которое обозначается через V_n . Множество рёбер графа G обозначается через $E(G)$; ребро, соединяющее вершины u и v обозначается через uv или через vu (все рёбра неориентированные). Два графа на V_n равны, если совпадают их множества рёбер.

Множество всех рёбер на V_n обозначается через E_n . Дополнением графа G , заданного на множестве вершин V_n , будем называть граф с тем же множеством вершин и с множеством рёбер, равным $E_n \setminus E(G)$, т. е. дополнению множества рёбер $E(G)$ до E_n . Дополнение графа G будет обозначаться $\bar{G}$.

Пусть G_1 и G_2 — два графа на множестве вершин V_n . Под их *симметрической разностью* будем понимать граф на V_n с множеством рёбер,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00994) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-5400.2006.1).

равным симметрической разности $E(G_1) \Delta E(G_2)$, который будем обозначать $G_1 \Delta G_2$. Иными словами, ребро $r \in E_n$ принадлежит графу $G_1 \Delta G_2$ тогда и только тогда, когда r принадлежит ровно одному из графов G_1, G_2 .

Пусть G_1 и G_2 — два различных графа на множестве вершин V_n . Будем говорить, что ребро $r, r \in E_n$, *различает графы G_1 и G_2* , если r принадлежит ровно одному из этих графов. Иными словами, ребро r различает графы G_1 и G_2 , если оно содержится в их симметрической разности. Множество рёбер $T, T \subseteq E_n$, образует *безусловный тест* для семейства графов $\mathcal{G}$, если для любых двух различных графов G_1 и G_2 , где $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, найдётся ребро $r, r \in T$, различающее графы G_1 и G_2 .

Число рёбер в тесте называется *объёмом теста*. Для фиксированного семейства графов $\mathcal{G}$ на множестве вершин V_n рассмотрим все тесты. Минимум величины объёма теста, взятый по всем тестам для $\mathcal{G}$, обозначается $L(\mathcal{G})$. Тесты для семейства $\mathcal{G}$, объём которых равен $L(\mathcal{G})$, называются *минимальными*.

Граф R на множестве вершин V_n будем называть *различающим* для семейства графов $\mathcal{G}_n$, заданных на V_n , если его рёбра образуют безусловный тест для этого семейства. Из определения следует, что граф R является различающим для семейства графов $\mathcal{G}_n$ тогда и только тогда, когда R имеет хотя бы одно общее (различающее) ребро с каждым из графов вида $G_1 \Delta G_2$, где $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_n, G_1 \neq G_2$. Количество рёбер в различающем графе совпадает с объёмом теста. Различающий граф, соответствующий минимальному тесту для семейства $\mathcal{G}_n$, называется *минимальным*.

Дополнение различающего графа для семейства $\mathcal{G}_n$ называется *коразличающим* графом для этого семейства. Нетрудно видеть, что различающий граф R является минимальным тогда и только тогда, когда его дополнение $\bar{R}$ содержит максимальное число рёбер среди всех коразличающих графов. Дополнение минимального различающего графа будем называть *максимальным* коразличающим графом.

Пусть $\mathcal{G}_n$ — семейство графов на множестве вершин V_n . Рассмотрим семейство $\{G | \bar{G} \in \mathcal{G}_n\}$, для которого будем использовать обозначение *со- $\mathcal{G}_n$* . Если граф R является различающим для семейства графов $\mathcal{G}_n$, то он является различающим и для семейства *со- $\mathcal{G}_n$* , и наоборот. Следовательно, для любого семейства графов $\mathcal{G}_n$ выполнено равенство: $L(\mathcal{G}_n) = L(\text{со-}\mathcal{G}_n)$.

Пусть $\mathcal{G}_n$ — семейство графов на множестве вершин V_n , а $\mathfrak{S}_n$ — группа всех перестановок множества V_n (симметрическая группа перестановок n элементов). Зададим действие перестановки $\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n$, на семействе $\mathcal{G}_n$ следующим образом. Пусть $G \in \mathcal{G}_n$, тогда граф $\sigma(G)$ на том же множестве вершин задается следующим множеством ребер:

$$E(\sigma(G)) = \{\sigma(u)\sigma(v) | uv \in E(G)\}.$$

Семейство $\mathcal{G}_n$ называется *регулярным*, если оно выдерживает действие симметрической группы, т. е. включение $\sigma(G) \in \mathcal{G}_n$ выполнено для всех G, σ , где $G \in \mathcal{G}_n, \sigma \in \mathfrak{S}_n$. Иными словами, регулярное семейство вместе со всяким графом G содержит и все его образы под действием симметрической группы, т. е. все графы на множестве вершин V_n , изоморфные G .

Пусть G — граф на множестве вершин V_n . Вершины u и v графа G называются *подобными*, если граф G выдерживает действие перестановки вершин u и v . Нетрудно видеть, что вершины u и v подобны, тогда и только тогда, когда вершина u соединена рёбрами с теми же вершинами, что и v . Отношение подобия вершин является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются *классами подобия* вершин (графа G).

Введём обозначения для некоторых семейств графов. Пусть p — натуральное число, $1 \leq p \leq n-1$. Разобьём множество вершин V_n произвольным

образом на два подмножества, состоящие из p и $n-p$ вершин соответственно. На подмножествах разбиения построим клики, соединив попарно вершины в каждом из подмножеств. Получившийся граф G состоит из двух непересекающихся по вершинам клик. Семейство, состоящее из всех графов на множестве вершин V_n , изоморфных G при фиксированном значении параметра p , обозначим $\mathcal{K}_{p, n-p}$. Дополнение всякого графа из семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$ есть полный двудольный граф на n вершинах с долями размера p и $n-p$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{K}_{p, n-p} = \mathcal{K}_{n-p, p}$, поэтому достаточно рассматривать семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$ при $1 \leq p \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Рассмотрим при каждом натуральном n , $n \geq 2$, объединение семейств $\mathcal{K}_{p, n-p}$, $p = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ и введём для него специальное обозначение:

$$\mathcal{K}^n = \bigcup_{p=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{K}_{p, n-p}.$$

Объединение семейства $\mathcal{K}^n$ с семейством, состоящим только из полного графа на n вершинах, $n \geq 2$, будем обозначать

$$\mathcal{K}_0^n = \mathcal{K}^n \cup \{K_n\}.$$

Полный граф в семействе $\mathcal{K}_0^n$ является «вырожденным» случаем графа, состоящего из двух клик: одна из клик пуста, а другая содержит все вершины.

Пусть t — натуральное число, $2 \leq t \leq n-2$. В множестве V_n выделим произвольным образом подмножество, состоящее из t вершин, и на этом подмножестве построим клику, соединив в нём попарно все вершины. Получившийся граф Q состоит из t -клики и $n-t$ изолированных вершин. Семейство, состоящее из всех графов на множестве вершин V_n , изоморфных Q при фиксированном значении параметра t , обозначим $\mathcal{Q}_t^n$.

Очевидно, что при всех значениях параметров каждое из семейств $\mathcal{K}_{p, n-p}$, $\mathcal{K}^n$, $\mathcal{K}_0^n$ и $\mathcal{Q}_t^n$ регулярно.

Далее будет использоваться следующая конструкция графа. При каждом n и t , $n \geq 4$, $2 \leq t \leq n-2$, на множестве вершин V_n построим полный граф K_n . Далее зафиксируем некоторое подмножество C , $C \subseteq V_n$, из t вершин — пусть для определённости это будут вершины, имеющие номера от 1 до t , — и из графа K_n выбросим рёбра клики, построенной на C . Обозначим полученный граф через $R(t, n)$. Этот граф содержит $\binom{n}{2} - \binom{t}{2}$ рёбер.

Иным способом граф $R(t, n)$ можно построить, объединив $n-t$ полных звёзд*) с центрами в вершинах с номерами $n-t+1, n-t+2, \dots, n$.

Утверждение 1 [4, теорема 1]. Пусть граф G имеет не менее трех классов подобия вершин. Тогда для всякого регулярного семейства $\mathcal{G}_n$, содержащего граф G , выполнено неравенство:

$$L(\mathcal{G}_n) \geq \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \binom{n}{2} - \frac{3}{2}n.$$

Утверждение 2 [4, теорема 2]. Граф на n вершинах имеет не более двух классов подобия вершин тогда и только тогда, когда он является графом одного из следующих видов:

- 1) полный граф (один класс подобия);

*) В данной работе под звездой понимается граф (не обязательно связный), в котором все рёбра имеют общую вершину — центр звезды, и под полной звездой — звезда, в которой центр соединён рёбрами со всеми остальными вершинами.

- 2) пустой граф (один класс подобия);
- 3) граф из семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$, где $1 \leq p \leq n-1$ (два класса подобия);
- 4) граф из семейства $co\text{-}\mathcal{K}_{p, n-p}$, где $1 \leq p \leq n-1$ (два класса подобия);
- 5) граф из семейства $\mathcal{Q}_t^n$, где $2 \leq t \leq n-2$ (два класса подобия);
- 6) граф из семейства $co\text{-}\mathcal{Q}_t^n$, где $2 \leq t \leq n-2$ (два класса подобия).

Утверждение 3 [4, лемма 11]. Пусть $\mathcal{G}_n$ — непустое регулярное семейство графов, $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{K}^n$ и $n \geq 3$. Тогда выполнено следующее двойное неравенство:

$$(n-1)/2 \leq L(\mathcal{G}_n) \leq n-1.$$

Если же $n=2$, то $L(\mathcal{G}_n)=0$.

Утверждение 4 [3, теорема 1]. Минимальные различающие графы для семейства $\mathcal{K}_0^n$ — это в точности деревья на n вершинах.

Утверждение 5 [3, теорема 2]. При всех $n \geq 3$ выполнено:

$$L(\mathcal{K}^n) = L(\mathcal{K}_0^n) = n-1.$$

Утверждение 6 [4, теорема 3]. При всех натуральных n, t , $n \geq 4$, $2 \leq t \leq n-2$ выполнено следующее двойное неравенство:

$$\frac{n(n-t)}{4} \leq L(\mathcal{Q}_t^n) \leq \binom{n}{2} - \binom{t}{2}.$$

§ 2. Простейшие объединения семейств

Результат применения безусловного рёберного теста удобно формулировать в терминах рёберных проверок. С каждым ребром r , $r \in E_n$, свяжем *рёберную проверку*: для любого графа G на n вершинах значение рёберной проверки на ребре r *положительно* («да»), если r принадлежит графу G , и *отрицательно* («нет») в противном случае.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{G}_n$ — регулярное семейство графов на n вершинах. Тогда выполнены следующие неравенства:

$$L(\mathcal{G}_n \cup \{K_n\}) \leq L(\mathcal{G}_n) + 1, \quad (1)$$

$$L(\mathcal{G}_n \cup \{\bar{K}_n\}) \leq L(\mathcal{G}_n) + 1. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим любой минимальный различающий граф для семейства $\mathcal{G}_n$, обозначим его R . Если $K_n \in \mathcal{G}_n$, то (1), очевидно, верно.

Пусть $K_n \notin \mathcal{G}_n$. Рассмотрим набор значений рёберных проверок R на графе K_n . Он состоит только из положительных ответов. В семействе $\mathcal{G}_n$ имеется не более одного графа, дающего тот же набор значений теста, так как R является различающим для $\mathcal{G}_n$. Если такого графа в семействе $\mathcal{G}_n$ нет, то R является различающим для семейства $\mathcal{G}_n \cup \{K_n\}$. Если же такой граф в семействе $\mathcal{G}_n$ имеется, то он отличается от K_n хотя бы одним ребром; обозначим это ребро r . Нетрудно видеть, что граф $R \cup \{r\}$ будет различающим для $\mathcal{G}_n \cup \{K_n\}$, а он имеет на одно ребро больше, чем R . Тем самым, неравенство (1) доказано.

Неравенство (2) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. При всяком $n \geq 3$

$$L(\mathcal{K}_0^n \cup co\text{-}\mathcal{K}_0^n) = n.$$

Доказательство. Согласно утверждению 5, при всех $n \geq 3$ справедливо равенство $L(\mathcal{K}_0^n) = n - 1$, причём множество минимальных различающих графов для семейства $\mathcal{K}_0^n$ есть в точности множество всех деревьев на n вершинах (утверждение 4).

Аналогично, для семейства $co\text{-}\mathcal{K}_0^n$ при всех $n \geq 3$ выполнено равенство $L(co\text{-}\mathcal{K}_0^n) = n - 1$ и множество минимальных различающих графов есть множество всех деревьев на n вершинах.

Рассмотрим семейство графов $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0^n \cup co\text{-}\mathcal{K}_0^n$, и некоторое дерево D на n вершинах. Для каждого из семейств $\mathcal{K}_0^n$, $co\text{-}\mathcal{K}_0^n$ граф D является различающим, следовательно для каждого набора значений рёберных проверок имеется не более одного соответствующего графа в каждом из классов. Таким образом, для всякого набора значений проверок на рёбрах дерева D имеется не более двух соответствующих графов в $\mathcal{K}$.

Нетрудно видеть, что всегда найдётся такое ребро r , что его добавление к D образует треугольник (простой цикл на трёх вершинах); обозначим другие два ребра этого треугольника a и b .

Покажем, что граф $D' = D \cup \{r\}$ является различающим для семейства $\mathcal{K}$. Для этого достаточно доказать следующее: для каждой пары графов G_1, G_2 , где $G_1 \in \mathcal{K}_0^n$, а $G_2 \in co\text{-}\mathcal{K}_0^n$, таких, что наборы значений проверок на рёбрах графа D для графов G_1 и G_2 совпадают, значение проверки на ребре r различно. Рассмотрим все четыре возможные комбинации значений проверок на рёбрах a и b .

Случай 1: значения проверок на обоих рёбрах a, b — «нет». Граф G_1 состоит из двух клик. Из значения проверки на ребре a следует, что концы этого ребра лежат в разных кликах. То же верно в отношении ребра b . Следовательно концы ребра r лежат в одной клике графа G_1 и значение проверки на этом ребре есть «да».

Граф G_2 является полным двудольным графом. Из значений проверок на рёбрах a и b следует, что оба конца каждого из этих двух рёбер лежат в одной доле, и, следовательно, все вершины треугольника лежат в одной из долей графа G_2 , откуда вытекает, что значение проверки на ребре r — «нет».

Таким образом, дающие одинаковый набор рёберных проверок на D графы G_1 и G_2 различаются по значению проверки на r .

Случай 2: значение проверки на ребре a есть «да», а на ребре b — «нет». В графе G_1 вершины ребра a находятся в одной клике, а вершины ребра b — в разных, следовательно вершины ребра r лежат в разных кликах, и проверка на нём имеет значение «нет».

В графе G_2 вершины ребра a лежат в разных долях, а вершины ребра b — в одной, следовательно вершины ребра r лежат в разных долях, и значение проверки на нём — «да».

Значение проверки на ребре r для графов G_1 и G_2 различно.

Случай 3: значение проверки на ребре a — «нет», а на ребре b — «да». Этот случай аналогичен предыдущему.

Случай 4: значение проверки на обоих рёбрах a, b есть «да». В графе G_1 вершины рёбер a и b находятся в одной клике, следовательно вершины ребра r лежат в ней же, и значение проверки на ребре r — «да». В графе G_2 вершины ребра a лежат в разных долях, и вершины ребра b — тоже в разных долях, следовательно вершины ребра r лежат в одной доле, и значение проверки на нём — «нет». И в этом случае значение проверки на ребре r для графов G_1 и G_2 различно.

Итак, граф D' является различающим для семейства $\mathcal{K}$, при этом он имеет ровно n рёбер.

Нетрудно видеть, что граф D' является минимальным при $n \geq 3$. Действительно, семейство $\mathcal{K}_0^n$ содержит в точности 2^{n-1} граф. При $n \geq 3$ семейства $\mathcal{K}_0^n$ и $co\text{-}\mathcal{K}_0^n$ различны, следовательно их объединение содержит более 2^{n-1} графов. Граф, имеющий $n - 1$ ребер не может быть различающим для семейства, содержащего более 2^{n-1} графов. Теорема доказана.

Лемма 1. При всяком n , и всяких $t_1, t_2, \dots, t_h$, где $n \geq 4$, $2 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_h \leq n - 2$, граф $R(t_1, n)$ является различающим для семейства

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{Q}_{t_1}^n \cup \mathcal{Q}_{t_2}^n \cup \dots \cup \mathcal{Q}_{t_h}^n.$$

Кроме того, при всяком t , $2 \leq t \leq t_1$, граф $R(t, n)$ также будет различающим для семейства $\mathcal{G}_n$.

Доказательство. Докажем, что граф $R(t_1, n)$ является различающим для семейства $\mathcal{G}_n$. Пусть $X \in \mathcal{G}_n$; граф X содержится в семействе $\mathcal{Q}_{t_i}^n$, где t_i — одно из чисел $t_1, t_2, \dots, t_h$.

Рассмотрим два случая: либо есть вершина u , $u \in V_n$, которая в графе X имеет степень $t - 1$ (принадлежит клике), а в $R(t_1, n)$ имеет степень $n - 1$ (лежит вне выброшенной клики), либо такой вершины нет.

В первом случае, граф $R(t_1, n)$ содержит все рёбра, инцидентные u . Рассмотрим те из них, на которых проверки для графа X имеют значение «да». Нетрудно видеть, что концы этих рёбер (включая вершину u) — это в точности все вершины степени $t - 1$ графа X (вершины t -клики). Таким образом, в первом случае граф X определяется однозначно.

Во втором случае множество вершин степени $t - 1$ графа X (вершины t -клики) совпадает с множеством вершин степени $n - t_1$ (вершины выброшенной t_1 -клики), что возможно лишь при $t = t_1$. В этом случае граф X также определён однозначно.

При всяком t , $2 \leq t \leq t_1$, граф $R(t, n)$ является надграфом графа $R(t_1, n)$ и, следовательно, также является различающим для семейства $\mathcal{G}_n$. Лемма доказана.

Всякая нижняя оценка для величины $L(\mathcal{Q}_{t_1}^n)$, очевидно, является таковой и для $L(\mathcal{G}_n)$, где $\mathcal{G}_n = \mathcal{Q}_{t_1}^n \cup \mathcal{Q}_{t_2}^n \cup \dots \cup \mathcal{Q}_{t_h}^n$. С учётом леммы 1, отсюда следует, что для величины $L(\mathcal{G}_n)$ верны верхняя и нижняя оценки, которые утверждение 6 устанавливает для семейства $\mathcal{Q}_{t_1}^n$, т. е. верны соотношения:

$$\frac{n(n - t_1)}{4} \leq L(\mathcal{G}_n) \leq \binom{n}{2} - \binom{t_1}{2}.$$

Отсюда, правда, не следует, что минимальные различающие графы для этих семейств совпадают.

§ 3. Объединения семейств $\mathcal{Q}_t^n$ с другими семействами

В доказательстве леммы 1 граф, отвечающий заданным значениям рёберных проверок, строится явно и из однозначности этого построения заключается, что набор рёберных проверок является тестом. Далее свойство графа быть различающим для того или иного семейства будет устанавливаться по преимуществу косвенно, без явного описания процедуры построения графа, отвечающего заданному набору рёберных проверок. Для этого потребуются анализ симметрических разностей графов, принадлежащих изучаемым семействам. Для описания симметрических разностей введём некоторые термины и соглашения.

Пусть на множестве вершин V_n задан граф G . Если в некотором подмножестве C , $C \subseteq V_n$, все вершины попарно соединены друг с другом, то мы

будем говорить, что в графе G имеется $|C|$ -клика. Если наоборот, вершины из некоторого C попарно несмежны в графе G , то мы будем говорить, что в графе G имеется $|C|$ -антиклика. Там, где это не приводит к путанице, будем называть кликами и антикликами как подмножества вершин, так и порождаемые ими подграфы.

Далее, пусть A и B — непересекающиеся подмножества в V_n . Будем говорить, что A и B соединены в графе G , если для каждой пары вершин x, y , где $x \in A, y \in B$, в графе G есть ребро xy . Будем говорить, что A и B разъединены в G , если наоборот, ни для одной пары вершин x, y , где $x \in A, y \in B$, в графе G нет ребра xy . Ссылка на граф G будет опускаться, если из контекста ясно, о каком графе идёт речь.

Далее мы будем описывать структуру симметрических разностей графов в терминах клик, антиклик и их соединений. При этом, если граф описывается как набор клик и антиклик, некоторые из которых соединены между собой, будет всегда подразумеваться, что:

а) множества вершин указанных клик и антиклик попарно не пересекаются;

б) в граф также возможно входит некоторое количество изолированных вершин (антиклика надлежащего размера), дополняющее общее число вершин до n , т. е. мы позволим себе пренебрегать в описаниях графов изолированными вершинами.

Приведём несколько примеров. Приняв указанные соглашения, всякий граф из семейства $\mathcal{Q}_t^n$ можно описать как t -клик; всякий граф из $co\text{-}\mathcal{Q}_t^n$ — как t -антиклик, соединённую с $(n - t)$ -кликой. Всякий граф из $\mathcal{K}_{p,q}$ — как разъединённые p -клик и q -клик, всякий граф из $co\text{-}\mathcal{K}_{p,q}$ — как соединённые p -антиклик и q -антиклик.

Лемма 2. Пусть $X \in \mathcal{Q}_t^n, Y \in co\text{-}\mathcal{Q}_s^n$, где $n \geq 4, 2 \leq t \leq n - 2, 2 \leq s \leq n - 2$. Тогда в симметрической разности $X \Delta Y$ каждая из n вершин, за исключением, быть может, одной, имеет ненулевую степень.

Доказательство. Граф X разбивает множество всех n вершин на подмножество X_1 вершин, принадлежащих t -кликке ($|X_1| = t$) и подмножество X_2 всех остальных (изолированных) вершин. Граф Y тоже разбивает все вершины на два подмножества: в Y_1 входят s вершин (степени $n - s$), принадлежащих кликке $\bar{Y}$, а в Y_2 — все остальные вершины (степени $n - 1$).

Вместе эти два разбиения приводят к четырём множествам вершин A, B, C, D , каждое из которых в симметрической разности $X \Delta Y$ порождает клику или антиклик, так, как определяется табл. 1. Множество вершин в пересечении i -го столбца и j -й строки есть $X_i \cap Y_j$.

Таблица 1

	X_1	X_2
Y_1	$(s + t + x - n)$ -клика A	$(n - t - x)$ -антиклика B
Y_2	$(n - s - x)$ -антиклика C	x -клика D

Для удобства, поскольку это не приводит к путанице, будем употреблять буквы A, B, C, D как в качестве обозначений для множеств вершин, так и в качестве обозначений для порождаемых этими множествами в $X \Delta Y$ графов.

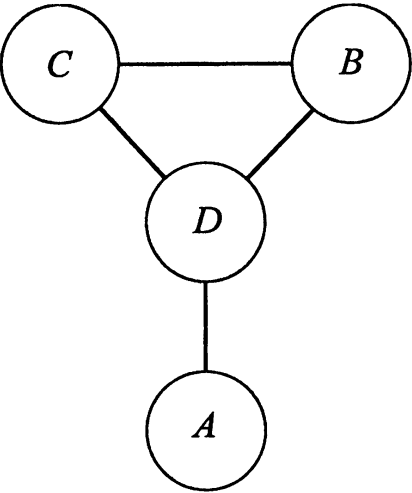
В графах X и Y любые два различных множества из четвёрки A, B, C, D либо соединены, либо разъединены, следовательно то же самое верно и для графа $X \Delta Y$.

В графе X соединены два подмножества вершин, находящихся внутри t -кликки, а любые два других разъединены. В графе Y наоборот, разъедине-

ны два подмножества, находящиеся внутри клики $\bar{Y}$, а любые два других соединены.

В табл. 2 перечислены все неупорядоченные пары вершин с информацией о том, соединены они в $X \Delta Y$, или нет.

Таблица 2



	соединены в...		
пара множеств	X	Y	$X \Delta Y$
A, B	нет	нет	нет
A, C	да	да	нет
A, D	нет	да	да
B, C	нет	да	да
B, D	нет	да	да
C, D	нет	да	да

С учётом этого, граф симметрической разности схематично представлен на рисунке, где круги представляют множества вершин, а линии между ними обозначают пары соединённых между собой множеств.

Заметим, что A и D — соединённые между собой клики, поэтому в симметрической разности $X \Delta Y$ множество $A \cup D$ порождает клику на $|A| + |D| = s + t - n$ вершинах. Однако, вершины в множествах B и C соединены только с вершинами множества D , поэтому A и D рассматриваются порознь.

В зависимости от того, пуста клика D или нет, рассмотрим следующие два случая.

Случай 1: клика D пуста, т. е. $x = 0$. Тогда антиклики C и B не могут быть пустыми, так как $s < n$ и $t < n$. Следовательно, поскольку они соединены, их вершины имеют ненулевую степень. Вершины клики A могут иметь нулевую степень только если в A есть всего одна вершина, а все остальные содержатся в $B \cup C$. Случай 1 разобран, утверждение леммы верно.

Случай 2: клика D непуста, $x > 0$. Каждая вершина в $A \cup C \cup B$ соединена с каждой вершиной в D и потому имеет ненулевую степень. Вершины D , очевидно, имеют степень $n - 1$: каждая из них соединена с остальными вершинами D (если таковые имеются), и с каждой вершиной каждого из множеств A, C, B . Случай 2 разобран, утверждение леммы также верно. Лемма доказана.

Далее, для того, чтобы доказать, что некоторый граф R является различающим для некоторого регулярного семейства $\mathcal{G}_n$, неоднократно будет использоваться следующее простое соображение. Пусть семейство $\mathcal{G}_n$ разбито на два непересекающихся подмножества: $\mathcal{G}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$. Тогда для того, чтобы доказать, что граф R является различающим для $\mathcal{G}_n$, достаточно показать, что

- а) граф R является различающим для $\mathcal{A}_n$,
- б) граф R является различающим для $\mathcal{B}_n$, и
- в) граф R различает любые два графа G_1 и G_2 , где $G_1 \in \mathcal{A}_n$, $G_2 \in \mathcal{B}_n$ (т. е. $E(G_1 \Delta G_2) \cap E(R) \neq \emptyset$).

Ясно, что этот принцип можно распространить на три и более подмножеств в разбиении.

Лемма 3. Пусть $n \geq 4$ и непустое регулярное семейство $\mathcal{G}_n$ представлено в виде:

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{Q}_{t_1}^n \cup \mathcal{Q}_{t_2}^n \cup \dots \cup \mathcal{Q}_{t_h}^n \cup co\text{-}\mathcal{Q}_{s_1}^n \cup co\text{-}\mathcal{Q}_{s_2}^n \cup \dots \cup co\text{-}\mathcal{Q}_{s_p}^n,$$

где

$$2 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_h \leq n-2,$$

$$2 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq n-2.$$

Тогда граф $R(r, n)$, где $r = \min(t_1, s_1)$, является различающим для семейства $\mathcal{G}_n$.

Доказательство. По лемме 1 граф $R(r, n)$ является различающим для семейства

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q}_{t_1}^n \cup \mathcal{Q}_{t_2}^n \cup \dots \cup \mathcal{Q}_{t_h}^n.$$

По той же лемме 1 граф $R(r, n)$ является различающим для семейства

$$\mathcal{B} = co\text{-}\mathcal{Q}_{s_1}^n \cup co\text{-}\mathcal{Q}_{s_2}^n \cup \dots \cup co\text{-}\mathcal{Q}_{s_p}^n,$$

так как различающие графы для семейства являются таковыми и для семейства дополнительных графов (ко-семейства).

Кроме того, $r \geq 2$ и, следовательно, по построению графа $R(r, n)$, в нём содержатся две различные полные звезды. В силу леммы 2 симметрическая разность любых двух графов G_1 и G_2 , где $G_1 \in \mathcal{A}$, $G_2 \in \mathcal{B}$, имеет с $R(r, n)$ хотя бы одно общее ребро. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть граф $X \in \mathcal{Q}_t^n$, а граф $Y \in co\text{-}\mathcal{H}_{n-n-p}$, где $n \geq 4$, $2 \leq t \leq n-2$, $1 \leq p \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда в симметрической разности $X \Delta Y$ каждая из n вершин, за исключением, быть может, одной, имеет ненулевую степень.

Доказательство. Обозначим через C множество вершин, входящих в клику в графе X (вершины степени $t-1$). Граф Y является полным двудольным графом, который разбивает все вершины V_n на доли A и B , содержащие p и $n-p$ вершин соответственно.

Рассмотрим граф $X \Delta Y$. В нём вершины множества $A \setminus C$ имеют степень не меньше $|B|$, так как каждая из них соединена рёбрами со всеми вершинами из множества B . Аналогично, вершины множества $B \setminus C$ имеют степень не меньше $|A|$, так как каждая из них соединена рёбрами со всеми вершинами из множества A .

Вершины множества $A \cap C$ образуют клику и каждая из них соединена ребром со всеми вершинами множества $B \setminus C$. Аналогично, вершины множества $B \cap C$ образуют клику и каждая из них соединена ребром со всеми вершинами множества $A \setminus C$.

Из сказанного следует, что во множествах $A \setminus C$ и $B \setminus C$ изолированных вершин нет, во множестве $A \cap C$ они могут быть только если $|A \cap C| = 1$ и $|B \setminus C| = 0$, а во множестве $B \cap C$ — только если $|B \cap C| = 1$ и $|A \setminus C| = 0$. Нетрудно видеть, что множества $A \cap C$ и $B \cap C$ не могут одновременно содержать изолированные вершины, так как в этом случае общее число вершин n было бы равно двум. Следовательно, в $X \Delta Y$ может быть не более одной изолированной вершины (которая содержится либо во множестве $A \cap C$, либо в $B \cap C$). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть граф $X \in \mathcal{Q}_t^n$, а граф $Y \in \mathcal{H}_{n-n-p}$, где $n \geq 4$, $2 \leq t \leq n-2$, $1 \leq p \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда для симметрической разности $X \Delta Y$ реализуется одна из следующих возможностей.

1. В $X \Delta Y$ каждая из n вершин, за исключением, быть может, одной, имеет ненулевую степень.

2. Симметрическая разность $X \Delta Y$ есть p -клика; этот случай возможен лишь при $t = n - p$.

3. Симметрическая разность $X \Delta Y$ есть $(n-p)$ -клика; этот случай возможен лишь при $t = p$.

Доказательство. Клика X разбивает множество n вершин на два подмножества размеров t и $n-t$, в первое входят вершины, принадлежащие клике, а во второе — все остальные. Граф Y также разбивает множество вершин на два подмножества размеров p и $n-p$, отвечающие двум кликам в графе.

Эти два разбиения вместе разбивают n вершин на четыре подмножества, каждое из которых в симметрической разности порождает либо клику, либо антиклику, как описано в табл. 3.

Таблица 3

	t -клика	дополнение t -клики
p -клика	x -антиклика A	$(p-x)$ -клика B
$(n-p)$ -клика	$(t-x)$ -антиклика C	$(n-p-t+x)$ -клика D

Буквами A, B, C, D здесь и далее в доказательстве леммы обозначаются как указанные множества вершин, так и графы, порождённые ими в симметрической разности $X \Delta Y$.

Если положить x равным числу вершин в пересечении A множества вершин t -клики X с множеством вершин p -клики графа Y , то число вершин в остальных пересечениях выражается через x так, как это отражено в таблице выше. При этом величина x ограничена следующими неравенствами: $x \geq 0$, $x \leq p$, $x \leq t$.

Отметим, что в общем случае некоторые из множеств вершин A, B, C, D могут оказаться пустыми. Если же X и Y — какие-то два различных непустых множества вершин из указанных четырёх, то, как нетрудно видеть, X и Y либо соединены, либо разъединены.

Таблица 4

	соединены в...		
пара множеств	X	Y	$X \Delta Y$
A, B	нет	да	да
A, C	да	нет	нет
A, D	нет	нет	нет
B, C	нет	нет	нет
B, D	нет	нет	нет
C, D	нет	да	да

Выясним, каким образом соединены пары множеств. Для этого заметим, что в X соединены множества A и C , так как они находятся в t -клике, а любые другие два из A, B, C, D разъединены. В Y соединены только пары множеств, находящиеся в одной клике. Все шесть неупорядоченных пар различных множеств представлены в табл. 4, описывающей соединения между множествами.

Таким образом, граф симметрической разности $X \Delta Y$ состоит из четырёх подграфов B, A, C, D , последовательно соединённых в указанном порядке: B соединён с A , A — с C , C — с D . Графы B, A, C, D представляют собой соответственно $(p-x)$ -клику, x -антиклику, $(t-x)$ -антиклику и $(n-p-t+x)$ -клику.

Некоторые из множеств вершин A, B, C, D , как уже отмечалось ранее, могут оказаться пустыми, что приводит к рассмотрению следующих случаев.

С л у ч а й 1: $p - x = 0$, т. е. клика B пуста. Имеем:

$$\begin{aligned} |B| &= 0, \\ |A| &= x = p \geq 1, \\ |C| &= t - x = t - p, \\ |D| &= n - p - t + x = n - t \geq 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим два подслучая в зависимости от значения $|C|$. Если $t = p$, то $|C| = 0$, и тогда, как нетрудно видеть, симметрическая разность $X \Delta Y$ состоит из одной клики D размера $n - t$, т. е. утверждение леммы верно.

Если же $t \neq p$, то $|C| \geq 1$, и, поскольку A соединено с C , а C соединено с D , все вершины в $A \cup C \cup D$ имеют ненулевую степень. Нетрудно видеть, что

$$|A \cup C \cup D| = |A| + |C| + |D| = p + (t - p) + (n - t) = n,$$

т. е. утверждение леммы верно. Таким образом, случай 1 разобран полностью.

Заметим, что параметры t и p могут быть выбраны так, чтобы было выполнено неравенство $t < p$. Это приводит к тому, что выписанное в случае 1 выражение для $|C|$ становится отрицательным. Однако, это всего лишь означает, что при $t < p$ случай 1 не может иметь места.

С л у ч а й 2: $n - p - t + x = 0$, т. е. клика D пуста. Имеем:

$$\begin{aligned} |B| &= p - x = p - (p + t - n) = n - t \geq 1, \\ |A| &= x = p + t - n, \\ |C| &= t - x = t - (p + t - n) = n - p \geq 1, \\ |D| &= 0. \end{aligned}$$

Как и в случае 1, разберём два подслучая в зависимости от значения $|A|$. Если $x = 0$, то $|A| = 0$, и тогда симметрическая разность $X \Delta Y$ состоит из одной клики A , $|A| = n - t$, т. е. утверждение леммы верно.

Если $x > 0$, то три множества B , A , C непусты, а поскольку они соединены (B — с A , а A — с C), как и в случае 1, симметрическая разность содержит

$$|B \cup A \cup C| = |B| + |A| + |C| = (n - t) + (p + t - n) + (n - p) = n$$

вершин ненулевой степени, т. е. утверждение леммы верно. Таким образом, случай 2 полностью разобран.

С л у ч а й 3: $p - x \neq 0$, $n - p - t + x \neq 0$, т. е. обе клики, B и D , непусты. Рассмотрим три подслучая.

П о д с л у ч а й 3.1: $x = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} |B| &= p - x = p \geq 1, \\ |A| &= x = 0, \\ |C| &= t - x = t \geq 1, \\ |D| &= n - p - t + x = n - p - t \geq 1, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из условия $n - p - t + x \neq 0$. Симметрическая разность состоит из соединённых между собой t -антиклики C и

$(n - p - t)$ -клики D , а также разъединённой с ними p -клики B . Из неравенств $|C| \geq 1$ и $|D| \geq 1$ и из того, что C соединено с D , следует, что вершины множества $C \cup D$ имеют ненулевую степень. Вершины множества B имеют ненулевую степень, за исключением случая $|B| = 1$.

Поскольку $|B \cup C \cup D| = n$, в подслучае 3.1 утверждение леммы верно.

Подслучай 3.2: $t - x = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} |B| &= p - x = p - t \geq 1, \\ |A| &= x = t \geq 1, \\ |C| &= t - x = 0, \\ |D| &= n - p - t + x = n - p \geq 1, \end{aligned}$$

где первое неравенство следует из условия $p - x \neq 0$. Симметрическая разность состоит из соединённых между собой $(p - t)$ -клики B и t -антиклики A , а также разъединённой с ними $(n - p)$ -клики D . Из неравенств $|A| \geq 1$ и $|B| \geq 1$ и из того, что A соединено с B , следует, что вершины множества $A \cup B$ имеют ненулевую степень. Вершины множества D имеют ненулевую степень, за исключением случая $|D| = 1$.

Поскольку $|A \cup B \cup D| = n$, в подслучае 3.2 утверждение леммы верно.

Подслучай 3.3: $x \neq 0$, $t - x \neq 0$. Все четыре множества B , A , C , D непусты и соединены: B — с A , A — с C , а C — с D . Все n вершин имеют ненулевую степень. В этом подслучае лемма также верна.

Равенства $x = 0$ и $t - x = 0$ не могут выполняться одновременно, так как из них следует равенство $t = 0$, что невозможно по условию леммы. Таким образом, рассмотренные подслучаи в совокупности исчерпывают случай 3, и он оказывается полностью разобранным.

Выше были рассмотрены случаи, когда пуста клика B (случай 1), когда пуста клика D (случай 2) и когда обе клики непусты (случай 3).

Нетрудно видеть, что случай, когда обе клики, B и D , пусты, — невозможен. Действительно, из равенств $p - x = 0$ и $n - p - t + x = 0$ следует равенство $n - t = 0$, что невозможно, так как $t \leq n - 1$. Лемма доказана.

В утверждении леммы 5 имеются два специальных случая. При $t = p$ симметрическая разность графов X и Y , $X \in \mathcal{Q}_t^n$, $Y \in \mathcal{K}_{p, n-p}$, может оказаться $(n - p)$ -кликой. Легко видеть, что эта возможность действительно реализуется: достаточно взять любой граф X , $X \in \mathcal{Q}_t^n$, и выбрать граф Y , $Y \in \mathcal{K}_{p, n-p}$, так, чтобы одна из его клик совпадала с кликой в графе X . Аналогичная ситуация имеет место при $t = n - p$.

Пусть $\mathcal{G}_n$ — регулярное семейство графов на множестве вершин V_n . Будем говорить, что в семействе $\mathcal{G}_n$ имеется коллизия, если $\mathcal{Q}_t^n \subset \mathcal{G}_n$ и $\mathcal{K}_{t, n-t} \subset \mathcal{G}_n$ или $\text{co-}\mathcal{Q}_t^n \subset \mathcal{G}_n$ и $\text{co-}\mathcal{K}_{t, n-t} \subset \mathcal{G}_n$ при некотором t , $2 \leq t \leq n - 2$; в этом случае, число $n - t$ будем называть параметром коллизии.

Если в регулярном семействе $\mathcal{G}_n$ имеется коллизия с параметром r , то, как нетрудно видеть, множество симметрических разностей пар графов из $\mathcal{G}_n$ содержит $\mathcal{Q}_r^n$ в качестве подмножества.

§ 4. Семейства без коллизий

Теорема 3. Пусть $\mathcal{G}_n$ — регулярное семейство графов на множестве вершин V_n , состоящее из графов с не более, чем двумя классами подобия вершин. Пусть в $\mathcal{G}_n$ нет коллизий и не содержится пустой граф. Положим r равным наименьшему среди чисел 2, 3, ..., $n - 2$, такому, что в семействе $\mathcal{G}_n$ содержится $\mathcal{Q}_r^n$ или $\text{co-}\mathcal{Q}_r^n$, или равным $n - 2$, если в $\mathcal{G}_n$ нет подсемейств указанного вида. Тогда граф $R(r, n)$ является различающим для семейства $\mathcal{G}_n$.

Доказательство. Обозначим

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}_2^n \cup \mathcal{Q}_3^n \cup \dots \cup \mathcal{Q}_{n-2}^n \cup co\text{-}\mathcal{Q}_2^n \cup co\text{-}\mathcal{Q}_3^n \cup \dots \cup co\text{-}\mathcal{Q}_{n-2}^n.$$

Разобьём регулярное семейство $\mathcal{G}_n$ на два регулярных подсемейства: $\mathcal{A}_n^* = \mathcal{G}_n \cap \mathcal{Q}^*$ и $\mathcal{B}_n = \mathcal{G}_n \setminus \mathcal{Q}^*$. По утверждению 2 и с учётом соотношений $\mathcal{Q}_0^n = \mathcal{Q}_1^n = \{\bar{K}_n\}$, $\mathcal{Q}_{n-1}^n = \mathcal{K}_{1,n-1}$, $\mathcal{Q}_n^n = \{K_n\}$, имеем: $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{K}_0^n \cup co\text{-}\mathcal{K}_0^n \setminus \{\bar{K}_n\}$.

По лемме 3 граф $R(r, n)$ является различающим для семейства $\mathcal{A}_n^*$. В графе $R(r, n)$ имеются по крайней мере две вершины полной степени (полные звёзды), поэтому, согласно теореме 2, граф $R(r, n)$ является различающим для семейства $\mathcal{B}_n$.

Покажем теперь, что граф $R(r, n)$ различает любые два графа G_1 и G_2 , где $G_1 \in \mathcal{A}_n^*$, $G_2 \in \mathcal{B}_n$, откуда и будет следовать утверждение теоремы. Для этого рассмотрим всевозможные симметрические разности $G_1 \Delta G_2$, где $G_1 \in \mathcal{A}_n^*$, $G_2 \in \mathcal{B}_n$. В общем случае, граф G_1 может принадлежать либо одному из семейств $\mathcal{Q}_t^n$ ($2 \leq t \leq n-2$), либо одному из семейств $co\text{-}\mathcal{Q}_t^n$. Но во втором случае мы можем перейти от графов G_1, G_2 к их дополнениям, что не изменит симметрической разности: $G_1 \Delta G_2 = \overline{G_1} \Delta \overline{G_2}$. Таким образом, мы можем без ограничения общности предполагать, что граф G_1 содержится в семействе $\mathcal{Q}_t^n$ при некотором t , $2 \leq t \leq n-2$.

Для графа G_2 имеются следующие три возможности.

1. Если G_2 принадлежит семейству $\mathcal{K}_{p,n-p}$ при некотором p , $1 \leq p \leq n-1$, то, поскольку по условию в $\mathcal{G}_n$ коллизии отсутствуют, из леммы 5 следует, что в симметрической разности $G_1 \Delta G_2$ имеется не более одной изолированной вершины. В графе $R(r, n)$ имеются по крайней мере две вершины полной степени, и следовательно, он различает G_1 и G_2 .

2. Если G_2 принадлежит семейству $co\text{-}\mathcal{K}_{p,n-p}$ при некотором p , $1 \leq p \leq n-1$, то согласно лемме 4 в симметрической разности $G_1 \Delta G_2$ имеется не более одной изолированной вершины, и, как в предыдущем случае, граф $R(r, n)$ различает G_1 и G_2 .

3. Если $G_2 = K_n$, то $G_1 \Delta G_2 \in co\text{-}\mathcal{Q}_t^n$; графы из семейства $co\text{-}\mathcal{Q}_t^n$ не имеют изолированных вершин, следовательно, граф $R(r, n)$ различает G_1 и G_2 .

Итак, мы доказали, что граф $R(r, n)$ является различающим для семейств $\mathcal{A}_n^*$ и $\mathcal{B}_n$, и, кроме того, различает любые два графа G_1 и G_2 , где $G_1 \in \mathcal{A}_n^*$, $G_2 \in \mathcal{B}_n$. Теорема доказана.

Отметим, что по условию теоремы 3 в семействе $\mathcal{G}_n$ не содержится пустой граф. Положив $\mathcal{G}'_n = \mathcal{Q}_1^n \cup \{\bar{K}_n\}$, нетрудно убедиться, что граф $R(t, n)$ не является различающим для $\mathcal{G}'_n$, так как он не может различить пустой граф и клику на вершинах с номерами 1, 2, ..., t (соответствующие рёбра как раз отсутствуют в $R(t, n)$). Однако добавление любого из отсутствующих рёбер к графу $R(t, n)$ (для определённости, возьмём ребро, соединяющее вершины с номерами 1 и 2) приводит к графу $R'(t, n)$, который является различающим для семейства $\mathcal{G}'_n$.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{G}_n$ — регулярное семейство графов на множестве вершин V_n , состоящее из графов с не более, чем двумя классами подобия вершин. Пусть в $\mathcal{G}_n$ нет коллизий. Положим r равным наименьшему среди чисел 2, 3, ..., $n-2$, такому что в семействе $\mathcal{G}_n$ содержится $\mathcal{Q}_r^n$ или $co\text{-}\mathcal{Q}_r^n$, или равным $n-2$, если в $\mathcal{G}_n$ нет подсемейств указанного вида. Тогда граф $R'(r, n)$ является различающим для семейства $\mathcal{G}_n$.

Доказательство. По теореме 3 граф $R'(r, n)$ будет различающим для семейства $\mathcal{G}_n \setminus \{\bar{K}_n\}$, и он, очевидно, отличает пустой граф от графов семейства $\mathcal{G}_n \setminus \{\bar{K}_n\}$. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{G}_n$ — регулярное семейство графов на множестве вершин V_n , состоящее из графов с не более, чем двумя классами подобия вершин, не имеющее коллизий. Пусть в $\mathcal{G}_n$ содержится хотя бы одно из семейств $\mathcal{Q}_t^n$ или $\text{co-}\mathcal{Q}_t^n$, а r равно наименьшему из соответствующих значений t . Тогда для величины $L(\mathcal{G}_n)$ выполнено следующее двойное неравенство:

$$\frac{n(n-r)}{4} \leq L(\mathcal{G}_n) \leq \binom{n}{2} - \binom{r}{2} + 1.$$

Доказательство. Нижняя оценка следует из утверждения 6, а верхняя — из теоремы 4. Теорема доказана.

Сравним верхнюю и нижнюю оценки теоремы 5. Для этого рассмотрим их отношение и преобразуем его следующим образом:

$$\frac{\binom{n}{2} - \binom{r}{2} + 1}{n(n-r)/4} = 2 \left(1 + \frac{t-1+1/(n-t)}{n} \right).$$

Значение полученного выражения при $2 \leq t \leq n-2$ не превосходит 4. Таким образом, во всех случаях верхняя и нижняя оценки теоремы 5 различаются не более, чем в 4 раза.

§ 5. Семейства с коллизиями

Рассмотрим теперь регулярное семейство $\mathcal{G}_n$, состоящее из графов с не более, чем двумя классами подобия вершин, в котором есть коллизии. Ясно, что используемая выше конструкция различающего графа в этом случае не подходит, так как графы, порождающие коллизию, могут различаться небольшой кликой, число вершин в которой есть параметр коллизии.

Чтобы построить различающий граф для семейства $\mathcal{G}_n$, содержащего коллизии, воспользуемся графом, имеющим наименьшее число рёбер при том, что его дополнение не содержит s -клик, где s — наименьший из параметров коллизий в семействе $\mathcal{G}_n$. По известной теореме Турана (см., например, [7, раздел 13.4]) такой граф определяется однозначно с точностью до изоморфизма и число рёбер в нём равно

$$T(n, s) = \frac{1}{2}q(q+1) + \frac{1}{2}q(q-1)(s-1-r),$$

где q и r есть соответственно неполное частное и остаток от деления n на $s-1$, т. е. $n = (s-1)q + r$, $0 \leq r < s-1$. При каждом n и s зафиксируем один такой граф и обозначим его через $T_{n,s}$.

Теперь мы можем указать различающий граф для семейства с коллизиями. Отметим, что в регулярном семействе графов, имеющем коллизии, по определению содержится хотя бы одно из семейств $\mathcal{Q}_t^n$ или $\text{co-}\mathcal{Q}_t^n$, $t = 2, 3, \dots, n-2$.

Теорема 6. Пусть $\mathcal{G}_n$ — регулярное семейство графов на множестве вершин V_n , состоящее из графов с не более, чем двумя классами подобия вершин, причём в $\mathcal{G}_n$ есть коллизии и s — наименьший из их параметров. Положим r равным наименьшему из чисел $2, 3, \dots, n-2$, такому, что в семействе $\mathcal{G}_n$ содержится $\mathcal{Q}_r^n$ или $\text{co-}\mathcal{Q}_r^n$.*) Тогда граф $R'(r, n) \cup T_{n,s}$ является различающим для семейства $\mathcal{G}_n$.

Доказательство. Обозначим граф $R'(r, n) \cup T_{n,s}$ через R . По теореме 4 граф R различает любые два различных графа G_1 и G_2 из семейства $\mathcal{G}_n$, не образующие коллизии. Если два различных графа G_1 и G_2 из

*) Хотя бы одно из семейств $\mathcal{Q}_r^n$ или $\text{co-}\mathcal{Q}_r^n$ в $\mathcal{G}_n$ содержится, так как в последнем семействе по условию есть коллизии.

семейства $\mathcal{G}_n$ образуют коллизию с параметром s' , $s' \geq s$, то, по определению коллизии, их симметрическая разность является s' -кликкой. Дополнение графа R не содержит s -клик и, следовательно, клик большего размера. Отсюда следует, что граф R различает графы G_1 и G_2 . Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть $\mathcal{G}_n$ — регулярное семейство графов на множестве вершин V_n , состоящее из графов с не более, чем двумя классами подобия вершин, причём в $\mathcal{G}_n$ есть коллизии и s — наименьший из их параметров. Положим r равным наименьшему из чисел $2, 3, \dots, n-2$, такому, что в семействе $\mathcal{G}_n$ содержится $\mathcal{Q}_i^n$ или $co\text{-}\mathcal{Q}_i^n$. Тогда выполнено следующее двойное неравенство:

$$\max\left(\frac{n(n-r)}{4}, T(n, s)\right) \leq L(\mathcal{G}_n) \leq \binom{n}{2} - \binom{r}{2} + T(n, s) + 1.$$

Доказательство. Всякий различающий граф для семейства $\mathcal{G}_n$ имеет не менее $n(n-r)/4$ рёбер, так как в $\mathcal{G}_n$ содержится по крайней мере одно из семейств $\mathcal{Q}_r^n$, $co\text{-}\mathcal{Q}_r^n$ (утверждение 6). По условию, в семействе $\mathcal{G}_n$ имеется коллизия с параметром s , следовательно, всякий коразличающий граф для $\mathcal{G}_n$ не содержит s -клик. Поэтому, согласно теореме Турана, различающий граф содержит не менее $T(n, s)$ рёбер. Нижняя оценка доказана. Верхняя оценка следует из теоремы 6. Теорема доказана.

Покажем, что верхняя и нижняя оценки в теореме 7 различаются не более, чем в 8 раз. Для сокращения записи введём обозначения: $L(n, r) = n(n-r)/4$, $U(n, r) = \binom{n}{2} - \binom{r}{2} + 1$. Для семейства $\mathcal{G}_n$, отвечающего условиям теоремы 7, выполнено двойное неравенство:

$$\max(L(n, r), T(n, s)) \leq L(\mathcal{G}_n) \leq U(n, r) + T(n, s).$$

Но $\max(L(n, r), T(n, s)) \geq (L(n, r) + T(n, s))/2$, откуда имеем:

$$\frac{L(n, r) + T(n, s)}{2} \leq L(\mathcal{G}_n) \leq U(n, r) + T(n, s).$$

С учётом того, что, как уже было показано, $U(n, r)/L(n, r) \leq 4$, заключаем, что верхняя и нижняя оценки в теореме 7 во всех случаях различаются не более, чем в 8 раз.

§ 6. Заключение

Результаты, представленные в этой статье, вместе с результатами, изложенными в [3, 4], позволяют составить представление об общей картине и дать единую классификацию всех регулярных семейств по объёму минимального рёберного теста.

При всяком $n \geq 2$ выполнены соотношения: $L(\emptyset) = L(\{K_n\}) = L(\{\bar{K}_n\}) = 0$, $L(\{K_n, \bar{K}_n\}) = 1$. Эти семейства, очевидно регулярные, составляют тривиальный этаж классификации, который из-за постоянного, не зависящего от n значения функции $L(\cdot)$ можно назвать «константным».

Для регулярных семейств $\mathcal{G}_n$, удовлетворяющих условиям $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{K}_0^n \cup co\text{-}\mathcal{K}_0^n$, $\mathcal{G}_n \not\subseteq \{K_n, \bar{K}_n\}$, верхняя оценка даётся в теореме 2, а нижняя — в утверждении 3. Регулярные семейства этого типа образуют следующий этаж классификации. В силу того, что и верхняя, и нижняя оценки линейны по n , этот этаж можно назвать «линейным».

Для регулярных семейств $\mathcal{G}_n$, содержащих графы с тремя и более классами подобия вершин, утверждение 1 даёт квадратичную по n нижнюю оценку величины $L(\mathcal{G}_n)$. Верхняя квадратичная по n оценка тривиальна:

$L(\mathcal{G}_n) \leq \binom{n}{2}$. Такие семейства образуют верхний «квадратичный» этаж классификации.

Регулярные семейства графов с не более, чем двумя классами подобия вершин, содержащие семейства $\mathcal{Q}_i^n$ или $co\text{-}\mathcal{Q}_i^n$, заполняют интервал между «линейным» и «квадратичным» этажами. Верхняя и нижняя оценки величины $L(\mathcal{Q}_i^n)$ даны в утверждении 6, причем показано [4], что они различаются не более чем в 4 раза. Для регулярных семейств графов с не более, чем двумя классами подобия вершин, свободных от коллизий и содержащих в качестве подсемейств $\mathcal{Q}_i^n$ или $co\text{-}\mathcal{Q}_i^n$, аналогичного вида оценки даны в теореме 5 и также показано, что верхняя оценка превосходит нижнюю не более чем в 4 раза. Для регулярных семейств графов с не более, чем двумя классами подобия вершин, которые содержат коллизии, оценки величины $L(\cdot)$ даны в теореме 7. Показано, что эти оценки (верхняя и нижняя) различаются не более, чем в 8 раз.

Итак, в настоящей статье подведён итог изучению регулярных семейств, состоящих из графов с не более, чем двумя классами подобия вершин. Для каждого такого семейства $\mathcal{G}_n$ установлены верные и нижние оценки величины $L(\mathcal{G}_n)$, различающиеся не более, чем в 8 раз. Для семейств, не содержащих коллизий, полученные оценки различаются не более, чем в 4 раза. Для некоторых семейств получены точные значения величины $L(\mathcal{G}_n)$.

Регулярные семейства, содержащие графы с тремя и более классами подобия вершин изучены в [4]. Для всех таких семейств установлена общая квадратичная нижняя оценка величины $L(\mathcal{G}_n)$, которая асимптотически (при растущем n) отличается от тривиальной верхней оценки мультипликативным коэффициентом $1 - \sqrt{2/3}$.

Таким образом, задача о безусловных рёберных тестах исследована для всех регулярных семейств графов на n нумерованных вершинах. Для всех таких семейств получены точные по порядку роста при $n \rightarrow \infty$ верхние и нижние оценки минимальной длины безусловного рёберного теста.

Автор хотел бы выразить благодарность О. М. Касим-Заде за постоянную поддержку, внимание и ценные обсуждения и В. В. Кочергину за полезные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альсведе Р., Вегенер И. Задачи поиска. — М.: Мир, 1982.
2. Дебрев Е. В. Об одной задаче комбинаторного поиска // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14, вып. 3. — С. 8–17.
3. Дебрев Е. В. О различении графов из некоторых семейств посредством безусловных рёберных тестов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: Наука, 2002. — С. 177–192.
4. Дебрев Е. В. О безусловных реберных тестах для некоторых семейств графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2003. — Т. 10, № 4. — С. 8–30.
5. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
6. Мошков М. Ю. Деревья решений. Теория и приложения. — Издательство Нижегородского университета, Нижний Новгород, 1994.
7. Оре. О. Теория графов. — М.: Наука, 1980.
8. Соловьёв Н. А. Тесты (теория, построение, применение). — Новосибирск: Наука, 1978.
9. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля электрических схем // Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
10. Aigner M. Combinatorial Search. — Stuttgart: Teubner; Chichester et al.: Wiley, 1988.
11. Grebinski V., Kucherov G. Optimal Query Bounds for Reconstructing a Hamiltonian Cycle in Complete Graphs // Proceedings of 5-th Israeli Symposium on Theory of Computing and Systems. — IEEE Press. — 1997. — P. 166–173.
12. Grebinski V. Recherche Combinatoire: Problèmes de Pesage, Reconstruction de Graphes et Applications. — Diplôme de Doctorat de l'Université Henri Poincaré, 1998.