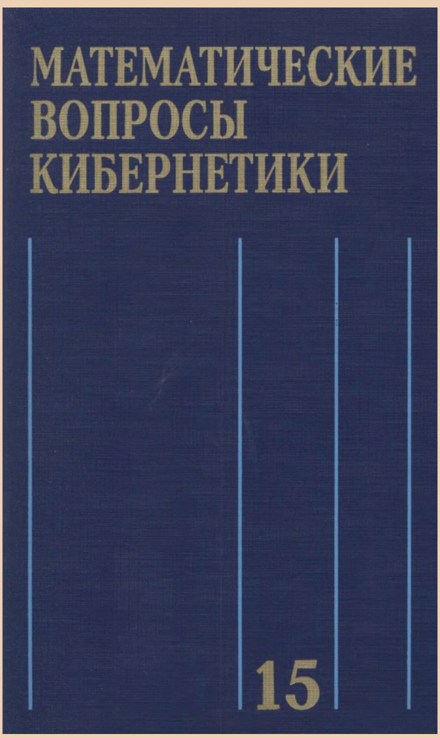

Н. А. Карпова

О сложности класса схем из информационно бедных многополюсных элементов

О СЛОЖНОСТИ КЛАССА СХЕМ ИЗ ИНФОРМАЦИОННО БЕДНЫХ МНОГОПОЛЮСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ *)

Н. А. КАРПОВА

(МОСКВА)

При изучении различных классов вычислений особый интерес представляет такая их характеристика как сложность. Наиболее естественным и широко распространенным подходом при этом представляется состоящий в том, что изучаемый класс задается множеством Б исходных элементов, каждому из которых сопоставлена некоторая функция (базисом), и набором П операций над элементами базиса, замыкание относительно которого и порождает данный класс. Множество $\Sigma^{\text{П}}$ порожденных таким образом элементов оказывается разбитым на классы эквивалентности $\Sigma^{\text{П}}_f$, т. е. каждый из классов $\Sigma^{\text{П}}_f$ однозначно соответствует некоторой функции f, которую реализует, или вычисляет, всякий элемент класса $\Sigma^{\text{П}}_f$, и всякий класс вычислений $\Sigma^{\text{П}}$, таким образом, находится во взаимно однозначном соответствии с классом F реализуемых им функций. На множестве элементов класса вычислений $\Sigma^{\text{П}}$ задана мера сложности. При этом в качестве сложности класса эквивалентности $\Sigma^{\text{П}}_f$ принимается нижняя грань сложностей его элементов. Под сложностью класса вычислений $\Sigma^{\text{П}}$ понимается верхняя грань сложностей всех классов эквивалентности $\Sigma^{\text{П}}_f$. Задача состоит в изучении поведения, в частности, асимптотического, этой характеристики для различных классов вычислений. Такой подход был применен К. Э. Шенноном при изучении сложности реализации булевых функций в классе контактных схем [8], и эту характеристику принято называть функцией Шеннона. Многие модельные классы управляющих систем [1–7] исследованы с этой точки зрения.

Будем рассматривать класс схем из функциональных (m_1, m_2)-элементов, а именно, схем в базисе $\text{Б}_{m_1, m_2}$ [4] из элементов с m_1 входами и m_2 выходами, на которых реализуются всевозможные системы m_2 функций алгебры логики от m_1 переменных (при этом имеется в виду реализация схемой в этом базисе одной булевой функции от n переменных, т. е. рассматриваются схемы с n входами и одним выходом).

Итак, пусть $L_{m_1, m_2}(S)$ — сложность схемы S в базисе $\text{Б}_{m_1, m_2}$,

$$L_{m_1, m_2}(f) = \min_{S \in \Sigma_f} L_{m_1, m_2}(S), \quad L_{m_1, m_2}(n) = \max_{f \in P_2^n} L_{m_1, m_2}(f).$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00994), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5400.2006.1) и Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

В [4] изучалось асимптотическое поведение функции Шеннона $L_{m_1, m_2}(n)$ в предположении $m_1(n)$, $m_2(n) \to \infty$, $n \to \infty$, и более подробно изложен случай, позволяющий рассмотреть и все остальные*), $m_1 = m_2 = m$. Было установлено, в частности, что если $n - \log n - m \to \infty$, то

$$L_{m, m}(n) \sim \frac{2^n}{m(n + 2^m)},$$

более точно, величина $L_{m,m}(n)$ при $m \to \infty$, $m - \log n \to -\infty$, ведет себя асимптотически как $2^n/(mn)$, а при $m - \log n \to \infty$, $m - n + \log n \to -\infty$ — как $2^{n-m}/m$.

Для m, близких к n, точнее, при $m \geqslant n - \log n + 1$, показано, что

$$L_{m, m}(n) = 2,$$

а при $m = n - \log n - \varphi(n)$, $\varphi(n) \geqslant 1$, $\varphi(n) < \log \log n$, установлен порядок роста:

$$L_{m, m}(n) \asymp 2^{\varphi(n)}.$$

Эти результаты были получены на основе изучения мощностной нижней оценки, а именно, влияния на сложность ее «функциональной», т. е. связанной с информационным содержанием базисных элементов, и «топологической» — отражающей строение схемы — составляющих**). В зависимости от того, какая из них мажорирует другую, весь интервал изменения m_1 как функции n, где эта оценка имеет смысл, разбивается на три интервала в соответствии с ролью этих составляющих. Это позволило предложить методы синтеза, дающие асимптотически совпадающую с нижней верхнюю оценку величины $L_{m,m}(n)$. Заметим, что из нижней оценки также следует независимость от m_2 для асимптотически наилучших методов.

С точки зрения информационного содержания базис $Б_{m_1, m_2}$ имеет максимальную насыщенность. Однако удается показать, что применение названных соображений позволяет получать асимптотику функции Шеннона и для других базисов. В частности, для базисов, состоящих из элементов с ограниченным информационным содержанием, можно также использовать этот подход.

При этом сохраняется качественная картина, меняются лишь пределы изменения m_1 как функции n для применимости уже полученных методов. Более того, сохраняются результаты [4], причем, при синтезе используется лишь часть базиса, а именно, элементы, реализующие функции, принимающие произвольные значения не более чем на t подряд расположенных наборах. а на всех остальных наборах — нулевые.

Перейдем к более точной постановке задачи.

Пусть $B^R_{m_1, m_2}$ — множество всех тех функциональных (m_1, m_2)-элементов, которые могут быть представлены в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ схемами сложности, не превосходящей R (веса $\&, \vee, \neg$ считаются равными единице, и сложность схемы — сумма весов элементов схемы).

---

*) В том смысле, что иные случаи не отличаются от него принципиально, а лишь технически, т. е. результаты легко переносятся на общий случай — базис $Б_{m_1, m_2}$, $m_1 \neq m_2$.

**) Комбинирование эффектов, имеющих различную природу и влияющих на поведение сложности изучаемого класса, позволило [1, 2] получить необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять числовая функция, асимптотически равная функции Шеннона при реализации функций алгебры логики схемами из функциональных элементов и формулами в произвольном (вообще говоря, бесконечном) базисе. В [3] показано также, что эти же результаты могут быть сформулированы в терминах, так сказать, аксиоматически заданных функционалов.

Дальнейшие построения будут рассматриваться в базисе $Б^R_{m_1, m_2}$, образованном всеми элементами множества $B^R_{m_1, m_2}$, веса всех базисных элементов равны единице.

Можно показать, что произвольная функция может быть реализована в этом базисе со сложностью, асимптотически совпадающей с полученной для этого класса нижней оценкой. Далее будет показано, что она достигается даже при использовании части базиса.

Для доказательства этого установим нижнюю оценку сложности; с этой целью полезно уточнить основные понятия.

Пусть $L^R_{m_1, m_2}(S)$ — сложность схемы S в базисе $Б^R_{m_1, m_2}$; S_f — множество всех схем в этом базисе, реализующих функцию f. Пусть на множестве булевых функций определен функционал

$$L^R_{m_1, m_2}(f) = \min_{S \in S_f} L^R_{m_1, m_2}(S),$$

тогда задача состоит в изучении асимптотического поведения величины

$$L^R_{m_1, m_2}(n) = \max_{f \in P_2^n} L^R_{m_1, m_2}(f)$$

при $m_1(n), m_2(n) \to \infty, \quad n \to \infty$.

Лемма 1. *Пусть* $m_1, m_2 \to \infty, \quad n \to \infty, \quad m_1 < n - \log n - c, \quad \frac{m_1}{R} \to 0$. *Тогда*

$$L^R_{m_1, m_2}(n) \gtrsim \frac{2^n}{R \log R + m_1 n}.$$

Доказательство. Выход (m_1, m_2)-элемента называется активным в схеме S, если он является выходом схемы или присоединен к входу хотя бы одного из элементов схемы. Пусть все элементы схемы занумерованы. Пусть $m_{2,i}$ — число активных выходов i-го элемента (выходной элемент схемы, очевидно, имеет только один активный выход). Пусть M — число активных выходов в схеме S, т. е.*)

$$\sum_{i=1}^{L(S)} m_{2,i} = M.$$

Очевидно, что для всякой схемы с n входами должно выполняться соотношение

$$M \leqslant L m_1 - n. \tag{1}$$

Очевидно, что для любого i верно неравенство $m_{2,i} \leqslant m_2$. Поэтому

$$M \leqslant m_2 L. \tag{2}$$

С другой стороны, из (1) следует, что

$$M \leqslant m_1 L. \tag{3}$$

Пусть $m = \min(m_1, m_2)$. Из (2) и (3) следует

$$M \leqslant mL.$$

*) Для простоты будем далее внутри этого доказательства вместо $L^R_{m_1, m_2}(S)$ будем употреблять обозначения $L(S)$ или L.

Пусть $N(n, m_1, m_2, M, R, L)$ — число функций от n переменных, реализуемых в базисе $\text{Б}^R_{m_1, m_2}$ схемами сложности не более L, имеющими не более M активных элементов. Поставим в соответствие такой схеме граф с $n+L$ вершинами. Число ребер в нем Lm_1, число ребер в остовном дереве равно $n+L-1$, число не включенных в дерево ребер $Lm_1 - n - L + 1$, число способов их присоединения равно $n+M$, число схем сложности R в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ (которыми может быть реализован i-й (m_1, m_2)-элемент) не превосходит $(c_1(R+m_1))^{R+m_{2,i}}$.

Тогда

$$N\left(n, m_1, m_2, M, R, L\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\prod_{i=1}^{L} \left(c_1\left(R+m_1\right)\right)^{R+m_{2,i}}\right)(n+M)^{L(m_1-i)-(n-1)} c_2^{n+L-1} =$$
$$= \left(c_3\left(R+m_1\right)\right)^{LR+\sum_{i=1}^{L} m_{2,i}} (n+M)^{L(m_1-1)-(n-1)} c_2^{n+L-1} \leqslant$$
$$\leqslant \left(c_3\left(R+m_1\right)\right)^{L(R+m)} (n+M)^{L(m_1-1)-(n-1)} c_2^{n+L-1},$$

отсюда

$$\log N\left(n, m_1, m_2, M, R, L\right) \leqslant$$
$$\leqslant L\,(R+m)\left(\log\left(R+m_1\right)+\log c_3\right) + L\,\left(m_1-1\right)\log(n+M) -$$
$$- \left(n-1\right)\left(\log(n+M)-c_5\right) + c_4 L \leqslant$$
$$\leqslant L((R+m)(\log(R+m_1)+c_6) + m_1\log(n+M)) \leqslant$$
$$\leqslant L((R+m)(\log(R+m_1)+c_6) + m_1\log Lm_1) <$$
$$< L((1+o(1))R\log R + m_1\log Lm_1).$$

Пусть

$$L^R_{m_1, m_2}(n) < \frac{2^n}{R\log R + m_1 n}\left(1-\varepsilon\right), \qquad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Тогда *)

$$\log N\left(n, m_1, m_2, M, R, L\right) <$$
$$< \frac{2^n(1-\varepsilon)}{R\log R + m_1 n}\left(\left(1+o\left(1\right)\right)R\log R + m_1\log Lm_1\right) <$$
$$< \frac{2^n(1-\varepsilon)}{R\log R + m_1 n}\left(1+o\left(1\right)\right)\left(R\log R + m_1 n\right) <$$
$$< 2^n\left(1-\varepsilon_1\right).$$

---

*) В силу (4) имеет место неравенство

$$\log Lm_1 < \log\frac{2^n m_1}{R\log R + m_1 n}.$$

Легко убедиться, что

$$\frac{2^n m_1}{R\log R + m_1 n} < c_7 2^n,$$

или, что то же,

$$2^n\left(\frac{m_1}{R\log R + m_1 n} - c_7\right) < 0.$$

Очевидно, что первое слагаемое внутри скобок при $n \to \infty$ стремится к нулю, поэтому при достаточно больших n левая часть становится отрицательной. Поэтому

$$\log Lm_1 < n.$$

Отсюда следует, что

$$L^R_{m_1, m_2}(n) > \frac{2^n}{R\log R + m_1 n}\left(1-\varepsilon\right), \qquad \varepsilon > 0.$$

Лемма доказана.

Из нижней оценки следует, что топологические и функциональные соображения равносильны в некоторой окрестности точки $m_1^*(n)$, для которой выполняется соотношение

$$R\log R = m_1 n.$$

Вне этой окрестности, справа и слева от нее, существенными оказываются функциональные и топологические соображения соответственно.

Далее будет подробнее, чем остальные случаи, однако со ссылкой на уже описанную [4] конструкцию, изложен метод получения верхней оценки для базиса Б^R_m, т. е. $m_1 = m_2 = m$, для тех значений m_1, где определяющими являются функциональные соображения, т. е. $R\log R >> mn$.

Очевидно, всякую систему m функций алгебры логики от m переменных можно представить в виде таблицы с 2^m строками и m столбцами. На языке функциональных (m, m)-элементов каждый выход элемента соответствует одному столбцу таблицы и реализует заданную им функцию.

Пусть элементы произвольной таблицы T из нулей и единиц, имеющей 2^m строк и m столбцов ($2^m \times m$-таблицы), занумерованы по столбцам, начиная с первого, т. е. нижний элемент i-го столбца имеет номер $i2^m$, и номер верхнего элемента $(i+1)$-го столбца есть $i2^m+1$.

Далее будем рассматривать только $2^m \times m$-таблицы с таким образом занумерованными элементами.

Естественно, базису Б_m соответствует множество всех таких таблиц, т. е. таблиц с любым числом единиц, расположенных произвольным образом.

При ограничении возможностей базиса, а именно, при уменьшении информационного содержания базисных (m, m)-элементов, приходится иметь дело с таблицами специального вида, например, с $2^m \times m$-таблицами (на которых задана введенная выше нумерация), имеющими t подряд расположенных произвольных элементов, и все остальные элементы — нулевые. Назовем функциональные элементы, описываемые таблицами такого типа, *(m, m, t)-элементами.*

Пусть R_t — функция Шеннона для класса всех (m, m, t)-элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

Пусть $\text{Б}_{m,t}$ — базис, образованный всеми (m, m, t)-элементами, $\text{Б}_{m,t} \subset \subset \text{Б}_m$; веса базисных элементов равны единице.

Для построения асимптотически наилучшей схемы в $\text{Б}_{m,t}$, реализующей произвольную функцию, можно воспользоваться методами, примененными для синтеза схем в базисе Б_m. Поэтому задача может быть сведена к моделированию Б_m в $\text{Б}_{m,t}$, т. е. к построению в базисе $\text{Б}_{m,t}$ схемы для произвольного (m, m)-элемента.

Пусть P^t_m — сложность (m, m)-элемента в базисе $\text{Б}_{m,t}$, верхние оценки ее для различных интервалов изменения t даются в лемме 2.

Лемма 2. *При $t < 2^m$*

$$P^t_m \leqslant \frac{2^m m}{t}\left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right),$$

при $t = 2^m$

$$P^t_m \leqslant m,$$

при $t > 2^m$, $t = o\left(2^m m\right)$

$$P_m^t \leqslant \frac{2^m m}{t} + 3.$$

Для доказательства удобно ввести следующие понятия.

Пусть A — множество, элементы которого занумерованы. Разбиение D^t множества A на (непересекающиеся) подмножества t соседних (подряд расположенных в заданной нумерации) элементов назовем *каноническим t-разбиением*, $D^t(A) = \{A_i^t\}$. Очевидно, если A содержит a элементов, $D^t(A)$ содержит $]a/t[$ элементов (при этом $A^t_{]a/t[}$ может содержать менее t элементов из A).

Пусть задано каноническое t-разбиение $2^m \times m$-таблицы T:

$$D^t(T) = \{T_i^t;\ 1 \leqslant i \leqslant]\frac{2^m m}{t}[\}.$$

Пусть $T(j)$ — множество элементов j-го столбца таблицы T. Обозначим $T_i^t(j)$ множество элементов j-го столбца таблицы T, принадлежащих T_i^t, т. е. $T_i^t(j) = T(j) \cap T_i^t$. Очевидно, $T(j) = \bigcup\limits_i T_i^t(j)$.

Очевидно, всякому элементу T_i^t разбиения D^t можно поставить в соответствие $2^m \times m$-таблицу, имеющую нули вне T_i^t, будем обозначать ее также T_i^t. Всякой такой таблице можно сопоставить (m, m, t)-элемент, назовем его *каноническим* и обозначим T_i^t, на его j-м выходе будет реализована функция, таблица которой есть столбец длины 2^m, имеющий нули вне $T_i^t(j)$.

Для синтеза кроме канонических (m, m, t)-элементов понадобятся соединительные (собирающие) (m, m, t)-элементы, реализующие любые дизъюнкции своих входов.

Всякая таблица T может быть реализована посредством канонических и соединительных элементов, причем соединительные применяются лишь в том случае, если для некоторого столбца j имеет место $T(j) = \bigcup\limits_{k=1}^{s} T_{i+k}^t(j)$, $s \geqslant 2$, т. е. соединительные элементы нужны лишь для построения тех столбцов таблицы T, которые соответствуют более чем одному элементу канонического t-разбиения.

Так, для реализации $T(j)$ надо реализовать дизъюнкцию j-х выходов канонических элементов $T_{i+1}^t, \ldots, T_{i+s}^t$, при этом если $s \leqslant m$, для осуществления этого достаточно одного соединительного элемента, его j-й выход будет выходом реализуемого (m, m)-элемента, в противном случае достаточно не более $]s/(m-1)[$ соединительных элементов.

Доказательство леммы 2. Если t кратно 2^m, то все элементы канонического t-разбиения содержат столбцы таблицы T целиком, т. е. $T(j) = T^t(j)$.

Тогда собирающих (m, m, t)-элементов для построения схемы не нужно, ее выходами объявляются выходы канонических (m, m, t)-элементов, соответствующих элементам канонического t-разбиения, $T_i^t(j)$, $j = 1, \ldots, m$, и при $t = 2^m$ имеем

$$P_m^t \leqslant m.$$

При $t > 2^m$ для некоторых j имеет место $T(j) = T_i^t(j)$ (и для их реализации собирающих элементов не потребуется), но для всякого столбца j', такого что $T(j') \neq T_i^t(j')$, выполняется

$$T(j') = T_i^t(j') \cup T_{i+1}^t(j')$$

(или $T(j') = T^t_{i-1}(j') \cup T^t_i(j')$), т. е. столбец j' не может принадлежать более чем двум элементам разбиения D^t.

В силу того, что таких столбцов может быть не более чем m, для реализации (m, m)-элемента потребуется не более двух собирающих (для одного столбца — два входа) и $]\frac{2^m m}{t}[$ канонических (m, m, t)-элементов.

Тогда при $t > 2^m$, $t = o(2^m m)$, имеет место оценка

$$P^t_m \leqslant \frac{2^m m}{t} + 3.$$

Если же $t < 2^m$, каноническому t-разбиению

$$D^t(T) = \{T^t_i;\ 1 \leqslant i \leqslant]\frac{2^m m}{t}[\}$$

соответствует $]\frac{2^m m}{t}[$ канонических (m, m, t)-элементов, среди которых могут присутствовать элементы T^t_i двух типов:

1) $T^t_i(j) \neq \varnothing$, $T^t_i(j+1) = \varnothing$,
2) $T^t_i(j) \neq \varnothing$, $T^t_i(j+1) \neq \varnothing$.

Элементов второго типа не более чем $m - 1$, и они имеют по два рабочих выхода (т. е. таких, что будут использоваться при построении (m, m)-элемента), а элементы первого типа — по одному. Таким образом, мы получаем систему $]\frac{2^m m}{t}[$ канонических (m, m, t)-элементов, имеющих не более $]\frac{2^m m}{t} + m - 1[$ рабочих выходов (и они образуют подсхему искомой схемы). Для построения из нее (m, m)-элемента нужно добавить некоторую подсхему из соединительных элементов. Для этого введем следующие определения.

Пусть $T^{m,t}_1 = \{T^t_2, \ldots, T^t_m\}$. Применим к $D^t(T) \setminus T^{m,t}_1$ каноническое разбиение

$$D^{m,t}(T) = \{T^{m,t}_1, D^{m-2}(D^t(T) \setminus T^{m,t}_1)\} = \{T^{m,t}_i;\ i = 1, \ldots,]\frac{]\frac{2^m m}{t}[-m}{m-2}[+1\}.$$

Каждому элементу разбиения $D^{m,t}$ сопоставим соединительный (m, m, t)-элемент $T^{m,t}_i$. Из элементов $T^{m,t}_i$ (которые также могут быть двух типов:

1) $T^{m,t}_i(j) \neq \varnothing$, $T^{m,t}_i(j+1) = \varnothing$,
2) $T^{m,t}_i(j) \neq \varnothing$, $T^{m,t}_i(j+1) \neq \varnothing$)

строим схему, представляющую собою цепочку элементов такую, что всякий элемент $T^{m,t}_i$ соединен с первым входом элемента $T^{m,t}_{i+1}$ своим выходом с номером j, если элемент $T^{m,t}_i$ первого типа, и выходом с номером $j+1$, если $T^{m,t}_i$ второго типа, в этом случае выход j элемента $T^{m,t}_i$ объявляется j-м выходом схемы.

Эта схема имеет m выходов и $m+(m-1)]\frac{]\frac{2^m m}{t}[-m}{m-2}[$ входов.

К входам построенной таким образом схемы присоединяются последовательно рабочие выходы канонических (m, m, t)-элементов $T^{m,t}_i$: сначала $\{T^{m,t}_i(1)\}$, затем $\{T^{m,t}_i(2)\}$ и т. д.*). В результате получаем схему, реализующую (m, m)-элемент T. Сложность ее не превосходит

$$]\frac{2^m m}{t}[+]\frac{]\frac{2^m m}{t}[-m}{m-2}[+1 \leqslant \frac{2^m m}{t}(1 + O(\tfrac{1}{m})).$$

---

*) Нетрудно убедиться, что число выходов подсхемы из канонических элементов не превосходит числа входов схемы из соединительных элементов, т. е.

$$]\frac{2^m m}{t}[+m-1 \leqslant m + (m-1)]\frac{]\frac{2^m m}{t}[-m}{m-2}[.$$

Таким образом, при $t < 2^m$

$$P_m^t \leqslant \frac{2^m m}{t}(1 + O(\frac{1}{m})).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $t = o(2^m m)$, $m = \log n + \log\log n + \varphi(n)$, $\varphi > c_8$, *тогда*

$$L_m^t(n) \leqslant \frac{2^n}{t}(1 + O(\frac{\log m}{m}) + O(\frac{n-m}{2^{n-m}})).$$

Доказательство. Для базиса $Б_m$ было доказано [4, теорема 2], что при $m = \log n + \log\log n + \varphi(n)$, $\varphi > c$, имеет место оценка

$$L_m(n) \leqslant \frac{2^{n-m}}{m}(1 + O(\frac{\log m}{m}) + O(\frac{n-m}{2^{n-m}}))P_m.$$

Положим $P_m = P_m^t$, тогда, применив лемму 2, получаем утверждение леммы 3.

Приведенные рассуждения справедливы всегда при $t > 2^m$, $t = o\left(2^m m\right)$, потому что при синтезе (m, m)-элементов в базисе $Б_{m,t}$ теряется (если это имеет место) небольшая часть информации, заключенной в канонических (m, m, t)-элементах.

Если же условие $t = o\left(2^m m\right)$ не выполняется, то при реализации одного (m, m)-элемента в $Б_{m,t}$ методами леммы 2 теряется значительная часть информации, и тогда асимптотически оптимальной схемы из таких (m, m, t)-элементов построить прежними методами не удастся. Поэтому в данном случае можно рассуждать так.

Пусть $t = 2^m \varphi(m)$, $\varphi(m) \to \infty$, $\varphi(m) < m$, тогда можно воспользоваться асимптотически наилучшей конструкцией в базисе $Б_{m_1, m_2}$ (аналог конструкции из теоремы 2 [4]), интерпретируя всякий $\left(m_1, m_2\right)$-элемент как некоторый канонический $\left(m_1, m_2, t^*\right)$-элемент, где $t^* = 2^m [\varphi(m)]$, и $m_1 = m$, $m_2 = [\varphi(m)]$. При этом

$$t^* \sim t, \qquad P^t_{m_1, m_2} \sim P^{t^*}_{m_1, m_2}.$$

Отличие конструкции в $Б_{m_1, m_2}$ от конструкции в $Б_m$ [4] состоит лишь в организации главной части схемы, а именно, каждый ее элемент имеет $m_1 - л$ рабочих входов и $л$ управляющих, причем среди рабочих m_2 входов — «главные», они являются входами подсхемы лишь у первого ее элемента, у всех других они соединены с m_2 выходами предыдущего элемента, а $m_1 - m_2 - л$ — «обыкновенные», они являются входами подсхемы для каждого элемента ее, и на одноименные входы всех элементов подаются одни и те же значения (т. е. рабочих входов подсхема имеет $m_1 - m_2 - л$, столько же, сколько первый элемент); все m_2 выходов каждого элемента — рабочие, т. е. они либо являются выходами главной подсхемы, либо соединены с m_2 главными входами следующего элемента этой подсхемы.

В зависимости от поданного на управляющие входы такого элемента набора (т. е. от того, является он нулевым или нет) элемент функционирует в одном из двух режимов.

При нулевом управляющем наборе существенная зависимость от обыкновенных входов пропадает, а на его m_2 выходах реализуются значения, поданные на m_2 его главных входов; при ненулевом наборе на управляющих входах элемент реализует на выходах некоторую $\left(m_1 - л, m_2\right)$-функцию.

Основным параметром прежней конструкции (в базисе $Б_m$) была величина $A = 2^{m-\lambda}(m-\lambda)$, в конструкции из (m_1, m_2)-элементов ее аналогом является $A^* = 2^{m_1-\lambda}m_2$. Все прочие блоки схемы в конструкции для $Б_{m_1,m_2}$ соответствуют прежним, однако в них определяющим является не m, а m_2. Пусть $\lambda = [\log m_2]$. Тогда

$$L_{m_1,m_2}(n) \leqslant \frac{2^n}{2^{m_1}m_2}\left(1 + O\left(\frac{\log m_2}{m_2}\right) + O\left(\frac{n-m_2}{2^{n-m_2}}\right)\right) P_{m_1,m_2}.$$

Таким образом, использование этой конструкции позволяет утверждать, что

$$L_m^{t^*}(n) \leqslant \frac{2^n}{2^m[\varphi(m)]}\left(1 + O\left(\frac{\log\varphi(m)}{\varphi(m)}\right) + O\left(\frac{n-m}{2^{n-m}}\right)\right),$$

и, следовательно, справедлива

Лемма 4. *Пусть* $t = 2^m\varphi(m)$, $\varphi(m) \to \infty$, $\varphi(m) < m$, $\frac{\varphi(m)}{m} \to 1$, $m > \log n + \log\log n + \psi(n)$, $\psi(n) \to \infty$, $\psi(n) > c_9$, $m < n - \log n - 1$, *тогда*

$$L_m^t(n) \leqslant \frac{2^n}{t}\left(1 + O\left(\frac{\log\varphi(m)}{\varphi(m)}\right) + O\left(\frac{n-m}{2^{n-m}}\right)\right).$$

Итак, пусть базис $Б_m^R$ таков, что в качестве R выбрана величина R_t.

Как известно, реализация системы функций, принимающих в совокупности значение 1 не более чем на t наборах значений переменных, имеет в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ сложность, асимптотически равную $\frac{t}{\log t}$. Таким образом,

$$R = R_t \sim \frac{t}{\log t}.$$

Поэтому величина t асимптотически равна $R\log R$. Тогда если t выбрано именно таким, то при всех m, $m \leqslant n - \log n - 1$, $\frac{m}{R} \to 0$, $m > \log n + \log\log n + \psi(n)$, $\psi(n) \to \infty$, $\psi(n) > c_9$, верхняя оценка сложности имеет вид $\frac{2^n}{R\log R}$ и асимптотически совпадает с нижней.

Таким образом, получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Пусть* $m \leqslant n - \log n - 1$, $\frac{m}{R} \to 0$, $m > \log n + \log\log n + \psi(n)$, $\psi(n) \to \infty$, $\psi(n) > c_9$, $\frac{R\log R}{2^m} \to 0$. *Тогда*

$$L_m^R(n) \sim \frac{2^n}{R\log R}.$$

Легко убедиться, что и для остальных интервалов изменения m результаты [4] сохраняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпова Н. А. О некоторых свойствах функций Шеннона // Математич. заметки. — 1970. — Т. 8, № 5. — С. 663–674.
2. Карпова Н. А. О возможном асимптотическом поведении функций Шеннона при реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 26. — М.: Наука, 1973. — С. 35–51.
3. Карпова Н. А. Некоторые замечания об асимптотическом поведения функции Шенннона // Проблемы кибернетики. Вып. 30. — М.: Наука, 1975. — С. 313–318.

4. Карпова Н. А. О сложности класса схем из многополюсных функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 67–84.
5. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия вузов. Сер. Радиофизика. — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 120–140.
6. Лупанов О. Б. Об одном классе схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 7. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 61–114.
7. Maruoka A. Complexity based on partitioning of Boolean circuits and their relation to multivalued curcuits // IEEE Trans. on computers. — 1986. — V. C–35, № 2. — P. 115–123.
8. Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // BSTJ, 1949. V. 28, № 1. — P. 59–96. [Русский перевод: Шеннон К. Синтез двухполюсных переключательных схем // Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ. 1963. С. 59–105.]

Поступило в редакцию 12 I 2006