ДИНАМИКА ГРАВИТАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ СПУТНИК-СТАБИЛИЗАТОР НА КРУГОВОЙ И ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТАХ

В. А. Сарычев[1], А. М. Сеабра[2], Л. Ф. Сантуш[3]

[1]*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва*
[2]*Высшая техническая школа г. Визеу, Португалия*
[3]*Университет г. Ковильян, Португалия*

Исследована динамика спутника с пассивной гравитационной системой ориентации в плоскости круговой и эллиптической орбит. Вначале рассмотрены малые колебания системы спутник-стабилизатор в плоскости круговой орбиты в окрестности наиболее простого положения равновесия. Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия, аналитически определены параметры, обеспечивающие максимальную скорость затухания собственных колебаний системы спутник-стабилизатор. Исследованы также эксцентриситетные колебания системы в плоскости эллиптической орбиты. Определены параметры, соответствующие минимальной величине амплитуды эксцентриситетных колебаний спутника.

1. Рассмотрим движение системы, состоящей из тела 1 (спутник) с центром масс O_1 и связанной с ним системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и тела 2 (стабилизатор) с центром масс O_2 и связанной с ним системы координат $O_2x_2y_2z_2$, в плоскости эллиптической орбиты. Здесь O_ix_i, O_iy_i, O_iz_i - главные центральные оси инерции тел (i=1,2). Оба тела соединены шарниром в точке P. В шарнире введено линейное трение.

Движение спутника и стабилизатора будем рассматривать в орбитальной системе координат $OXYZ$, где O - центр масс системы тел, движущейся по эллиптической орбите с эксцентриситетом e, ось OZ направлена вдоль радиус-вектора орбиты, ось OX лежит в плоскости орбиты и перпендикулярна OZ, ось OY перпендикулярна плоскости орбиты. Для написания уравнений движения тел системы введем углы α_1, α_2 между осями O_1x_1 и OX и O_2x_2 и OX соответственно; эти углы определяют ориентацию обоих тел в плоскости OXZ.

Рассмотрим простейшую схему системы, когда положения центров масс O_1 и O_2 обоих тел, центра масс O системы и шарнира P совпадают. Тогда выражения для кинетической энергии, силовой функции и диссипативной функции могут быть записаны в следующем виде [1]:

$$T = \frac{1}{2}B_1\left(\alpha_1' + \omega\right)^2 + \frac{1}{2}B_2\left(\alpha_2' + \omega\right)^2, \qquad (1)$$

$$U = -\frac{3}{2}\frac{G}{\rho^3}\left(A_1 - C_1\right)\sin^2\alpha_1 - \frac{3}{2}\frac{G}{\rho^3}\left(A_2 - C_2\right)\sin^2\alpha_2, \qquad (2)$$

$$\Phi = -\frac{1}{2}\bar{k}_1\left(\alpha_1' - \alpha_2'\right)^2. \qquad (3)$$

В приведенных выражениях величины A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 суть главные центральные моменты инерции тел системы, G - гравитационный параметр планеты, ω - угловая скорость движения центра масс системы по орбите, ρ - модуль радиус-вектора орбиты,

$\bar{k}_1$ - постоянный коэффициент демпфирования. Штрихом обозначено дифференцирование по времени t.

Нелинейные уравнения движения системы двух связанных тел проще всего записать в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$B_1\,\alpha_1'' + 3\frac{G}{\rho^3}\left(A_1 - C_1\right)\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + \bar{k}_1\left(\alpha_1' - \alpha_2'\right) + B_1\omega' = 0,$$
$$B_2\,\alpha_2'' + 3\frac{G}{\rho^3}\left(A_2 - C_2\right)\sin\alpha_2\cos\alpha_2 - \bar{k}_1\left(\alpha_1' - \alpha_2'\right) + B_2\omega' = 0. \qquad (4)$$

Переменные коэффициенты ω и $\dfrac{G}{\rho^3}$ определяются из решения задачи двух тел и имеют вид

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0\eta^2, \quad \frac{G}{\rho^3} = \omega_0{}^2\eta^3, \quad \eta = 1 + e\cos\theta, \qquad (5)$$

где θ – истинная аномалия, ω_0 – постоянная величина. После перехода к новой независимой переменной θ и введения безразмерных параметров

$$k_1 = \frac{\bar{k}_1}{\omega_0 B_1}, \; p_1 = \frac{A_1 - C_1}{B_1}, \; p_2 = \frac{A_2 - C_2}{B_2}, \; \mu = \frac{B_2}{B_1} \qquad (6)$$

система (4) может быть представлена в виде

$$\eta^2\ddot{\alpha}_1 + 3\eta\, p_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + k_1\left(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2\right) = 2e\eta\left(\dot{\alpha}_1 + 1\right)\sin\theta,$$
$$\mu\eta^2\ddot{\alpha}_2 + 3\eta\,\mu\, p_2\sin\alpha_2\cos\alpha_2 - k_1\left(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2\right) = 2e\eta\,\mu\left(\dot{\alpha}_2 + 1\right)\sin\theta, \qquad (7)$$

где точкой обозначено дифференцирование по θ.

2. На круговой орбите $e = 0$ и система (7) несколько упрощается:

$$\ddot{\alpha}_1 + 3p_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + k_1\left(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2\right) = 0,$$
$$\ddot{\alpha}_2 + 3p_2\sin\alpha_2\cos\alpha_2 - \frac{k_1}{\mu}\left(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2\right) = 0. \qquad (8)$$

Система (8) обладает положениями равновесия $\alpha_{10} = const, \; \alpha_{20} = const$, удовлетворяющими уравнениям

$$p_1\sin\alpha_{10}\cos\alpha_{10} = 0, \; p_2\sin\alpha_{20}\cos\alpha_{20} = 0. \qquad (9)$$

В статье будет исследовано поведение системы в окрестности простейшего положения равновесия, когда

$$\alpha_{10} = 0, \; \alpha_{20} = 0. \qquad (10)$$

Получим линеаризованную в окрестности решения (10) систему уравнений движения

$$\ddot{x} + k_1 \dot{x} + 3p_1 x - k_1 \dot{y} = 0,$$
$$-k_1 \dot{x} + \mu \ddot{y} + k_1 \dot{y} + 3\mu p_2 y = 0$$

и соответствующее этой системе характеристическое уравнение

$$\mu\lambda^4 + k_1(1+\mu)\lambda^3 + 3\mu(p_1 + p_2)\lambda^2 + 3k_1(p_1 + \mu p_2)\lambda + 9\mu p_1 p_2 = 0.$$

В линеаризованной системе величины x и y представляют собой малые отклонения от положений равновесия (10). Используя критерий Льенара и Шипара, приходим к необходимым и достаточным условиям асимптотической устойчивости решения (10)

$$k_1 > 0\ ,\ p_1 > 0\ ,\ p_2 > 0\ ,\ p_1 \neq p_2\ . \qquad (12)$$

3. При определении параметров, обеспечивающих минимальную длительность переходного процесса системы, используем понятие степени устойчивости [2], представляющей собой расстояние самого правого корня характеристического уравнения от мнимой оси. Максимальная степень устойчивости соответствует минимальной длительности переходного процесса системы. Используя результаты работ [2-6], можно заключить, что величина степени устойчивости δ достигает максимума, когда корни характеристического уравнения (11) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -\delta$. Случай четырех равных действительных корней возможен, если система уравнений

$$k_1 = 4\delta \frac{\mu}{1+\mu},\ \ p_1 + p_2 = 2\delta^2,\ \ 3\,(p_1 + \mu\ p_2) = (1+\mu)\,\delta^2,\ \ 9p_1 p_2 = \delta^4 \qquad (13)$$

имеет решение.

Из второго и третьего уравнений системы (13) получаем

$$p_1 = \frac{1-5\mu}{3(1-\mu)}\delta^2,\quad p_2 = \frac{5-\mu}{3(1-\mu)}\delta^2. \qquad (14)$$

Подставляя выражения (14) в последнее уравнение (13), приходим к квадратному уравнению

$$\mu^2 - 6\mu + 1 = 0 \qquad (15)$$

с корнями $\mu = 3 - 2\sqrt{2}$, $\mu = 3 + 2\sqrt{2}$. Для первого корня из (14) получаем

$$p_1 = \frac{3-2\sqrt{2}}{3}\delta^2,\ \ p_2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{3}\delta^2. \qquad (16)$$

Принимая во внимание (12) и условия физической реализуемости $-1 \le p_1 \le 1$ и $-1 \le p_2 \le 1$ для обоих тел системы, приходим к неравенству

$$\delta \le \sqrt{3}\left(\sqrt{2} - 1\right). \qquad (17)$$

Для второго корня $\mu = 3 + 2\sqrt{2}$ квадратного уравнения (15)

$$p_1 = \frac{3+2\sqrt{2}}{3}\delta^2, \quad p_2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{3}\delta^2,$$

а величина степени устойчивости δ и в этом случае удовлетворяет неравенству (17).

Таким образом, из неравенства (17) следует, что максимальное значение степени устойчивости

$$\delta_m = \sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right). \tag{18}$$

Задача оптимизации переходного процесса исследуемой системы имеет следующие два решения:

Решение 1.

$\delta_m = \sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 0.7174$, $\mu = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716$, $k_1 = \sqrt{6}\left(3-2\sqrt{2}\right) \approx 0.4203$,

$p_1 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 \approx 0.0294$, $p_2 = 1$.

Решение 2.

$\delta_m = \sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 0.7174$, $\mu = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5.8284$, $k_1 = \sqrt{6} \approx 2.4495$,

$p_1 = 1$, $p_2 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 \approx 0.0294$.

Можно показать, что решения 1 и 2 переходят одно в другое, если тело 1 (спутник) переходит в тело 2 (стабилизатор) и тело 2 (стабилизатор) – в тело 1 (спутник).

4. Вернемся теперь к неоднородной системе уравнений (7), которая определяет колебания системы спутник-стабилизатор на эллиптической орбите. При $e \neq 0$ система (7) не имеет стационарных решений. Представляет интерес исследовать вынужденное решение системы (7), обусловленное неравномерностью движения центра масс системы спутник-стабилизатор по орбите. Очень часто это вынужденное решение называют эксцентриситетными колебаниями. Будем искать вынужденное решение системы (7) методом малого параметра в виде рядов по степени e

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{10} + \alpha_{11}e + \alpha_{12}e^2 + \cdots \\ \alpha_2 &= \alpha_{20} + \alpha_{21}e + \alpha_{22}e^2 + \cdots \end{aligned} \tag{19}$$

Полагая эксцентриситет орбиты малым, ограничимся определением лишь первых членов разложения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{10} + \alpha_{11}e, \\ \alpha_2 &= \alpha_{20} + \alpha_{21}e, \end{aligned} \tag{20}$$

где, в соответствии с (10), $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{20} = 0$. Подставляя (20) в (7), получаем систему

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_{11} + k_1\dot{\alpha}_{11} + 3p_1\alpha_{11} - k_1\dot{\alpha}_{21} - 2\sin\theta &= 0, \\ -k_1\dot{\alpha}_{11} + \mu\ddot{\alpha}_{21} + k_1\dot{\alpha}_{21} + 3\mu p_2\alpha_{21} - 2\mu\sin\theta &= 0, \end{aligned} \tag{21}$$

вынужденное решение которой определяет эксцентриситетные колебания спутника и стабилизатора. Подставив общие формулы для вынужденного решения системы (21)

$$\alpha_{11} = \bar{a}_1 \sin\theta + \bar{b}_1 \cos\theta, \qquad (22)$$
$$\alpha_{21} = \bar{a}_2 \sin\theta + \bar{b}_2 \cos\theta$$

и приравняв нулю коэффициенты при $sin\theta$ и $cos\theta$, получим линейную систему

$$
\begin{aligned}
&P_1 \bar{a}_1 - k_1\bar{b}_1 + k_1\bar{b}_2 = 2 \quad ,\\
&k_1\bar{a}_1 + P_1 \bar{b}_1 - k_1\bar{a}_2 = 0 \quad ,\\
&k_1\bar{b}_1 + P_2 \mu \bar{a}_2 - k_1\bar{b}_2 = 2\mu ,\\
-&k_1\bar{a}_1 + k_1\bar{a}_2 + P_2 \mu \bar{b}_2 = 0 ,
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

для определения параметров $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_2$. В системе (23) введены обозначения $P_1 = 3p_1 - 1$, $P_2 = 3p_2 - 1$. Из уравнений (23) получаем

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= \frac{2k_1^2(1+\mu)(P_1+\mu P_2) + 2\mu^2 P_1 P_2^2}{k_1^2(P_1+\mu P_2)^2 + \mu^2 P_1^2 P_2^2},\\
\bar{b}_1 &= \frac{2k_1 \mu^2 P_2 (P_1 - P_2)}{k_1^2(P_1+\mu P_2)^2 + \mu^2 P_1^2 P_2^2},\\
\bar{a}_2 &= \frac{2k_1^2(1+\mu)(P_1+\mu P_2) + 2\mu^2 P_1^2 P_2}{k_1^2(P_1+\mu P_2)^2 + \mu^2 P_1^2 P_2^2},\\
\bar{b}_2 &= \frac{-2k_1 \mu P_1 (P_1 - P_2)}{k_1^2(P_1+\mu P_2)^2 + \mu^2 P_1^2 P_2^2}
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

и выражения для амплитуд эксцентриситетных колебаний спутника (R_1) и стабилизатора (R_2)

$$
\begin{aligned}
R_1 / e = \bar{R}_1 &= \sqrt{\left(\bar{a}_1^2 + \bar{b}_1^2\right)} = 2 \sqrt{\frac{k_1^2(1+\mu)^2 + \mu^2 P_2^2}{k_1^2(P_1+\mu P_2)^2 + \mu^2 P_1^2 P_2^2}} ,\\
R_2 / e = \bar{R}_2 &= \sqrt{\left(\bar{a}_2^2 + \bar{b}_2^2\right)} = 2 \sqrt{\frac{k_1^2(1+\mu)^2 + \mu^2 P_1^2}{k_1^2(P_1+\mu P_2)^2 + \mu^2 P_1^2 P_2^2}} .
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

Параметры P_1 и P_2 должны удовлетворять условиям
$-1 < P_1 \le 2$, $-1 < P_2 \le 2$, $P_1 \ne P_2$. (26)

С практической точки зрения наибольший интерес представляет минимизация амплитуды эксцентриситетных колебаний спутника R_1, а точнее величины $\bar{R}_1$, зависящей от параметров системы k_1, μ, P_1, P_2. Рассмотрим частные производные функции $\bar{R}_1$ по переменным k_1 и μ при фиксированных значениях P_1, и P_2. Тогда необходимые условия экстремума функции $\bar{R}_1$ внутри области

$$0 < k_1 < \infty\,,\ 0 < \mu < \infty \tag{27}$$

примут вид

$$\begin{aligned}
&(P_1 - P_2)\mu^3 P_2^2[(2+\mu)P_1 + \mu P_2] = 0,\\
&(P_1 - P_2)k_1^2[(k_1^2 - P_1P_2)\mu^2 P_2 + k_1^2(P_1 + P_2)\mu + k_1^2 P_1] = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Следует отметить, что экстремум функции $\overline{R}_1$ может реализоваться не только при выполнении условий (28), но и на границе области (27) определения функции $\overline{R}_1$.

Опуская анализ всех решений системы (28) и поведения функции $\overline{R}_1$ на границе ее области определения, приведем лишь наиболее общие случаи минимума амплитуды эксцентриситетных колебаний спутника.

1) $P_1 - P_2 = 0$. Тогда $\overline{R}_1^2 = 4/P_1^2$ и минимум функции $\overline{R}_1$=1 достигается при $P_1 = P_2 = 2$ и любых значениях k_1 и μ.

2) μ=0. В этом случае система спутник-стабилизатор сводится к одному твердому телу (спутник), $\overline{R}_1^2 = 4/P_1^2$, минимум $\overline{R}_1$=1 достигается при $P_1 = 2$.

3) k_1=0. Система уравнений (7) разделяется на два независимых уравнения, минимум $\overline{R}_1$=1 достигается при $P_1 = 2$ и любых значениях μ.

Все другие, не приведенные здесь, решения или сводятся к этим трем случаям, или не являются точками минимума, или существуют при физически нереальных параметрах исследуемой системы.

Таким образом, минимум амплитуды эксцентриситетных колебаний спутника $R_1 = e$ достигается на границе области асимптотической устойчивости или на границе физической реализуемости параметров системы.

5. Исследована динамика простейшей гравитационной системы спутник-стабилизатор, когда положения шарнира, соединяющего оба тела, и их центров масс совпадают, а упругие силы в шарнире отсутствуют. В связи с этими упрощающими предположениями система уравнений движения (7) представляет собой частный случай соответствующих уравнений движения работы [1], записанных с использованием других безразмерных параметров. Аналогичная ситуация возникает при исследовании необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости (12). При определении оптимальных по быстродействию параметров системы результат (18) $(\delta_m = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1) \approx 0.7174)$ отличается от результата работ [1, 4-6], где для схемы системы с моментом упругих сил в шарнире $\delta_m = \sqrt{3}/\sqrt[4]{5} \approx 1.1583.$ Задача минимизации амплитуды эксцентриситетных колебаний спутника была, по-видимому, впервые рассмотрена в [1]. Используя геометрический подход, удалось получить некоторые общие оценки для амплитуды R_1. В настоящей статье для более простой схемы системы спутник-стабилизатор параметры, обеспечивающие минимум амплитуды эксцентриситетных колебаний спутника R_1, определены аналитически. Следует также отметить работу [7], в которой показана возможность компенсации эксцентриситетных колебаний спутника ($\overline{a}_1 = \overline{a}_2 = 0$) при некотором усложнении выражения для момента упругих сил в подвесе *P*.

Работа поддержана Проектом Stabisat Португальского фонда науки и техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сарычев В.А.* Исследование динамики системы гравитационной стабилизации // Искусственные спутники Земли. М.: Изд. АН СССР, 1963. №16. С.10-33.
2. *Цыпкин Я.З., Бромберг П.В.* О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. Отделение технич. наук. 1945. №12. С.1163-1168.
3. *Borelli R.L., Leliakov I.P.* An optimization technique for the transient response of passively stable satellites // J. of Optimization Theory and Applications. 1972. V.10. №6. P.344-361.
4. *Сарычев В.А., Сазонов В.В.* Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников // Космич. исслед. 1976. Т.14. №2. С.198-208.
5. *Сарычев В.А., Мирер С.А.* Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор // Космич. исслед. 1976. Т.14. №2. С.209-219.
6. *Sarychev V.A., Mirer S.A., Sazonov V.V.* Plane oscillations of a gravitational system satellite-stabilizer with maximal speed of response // Acta Astronautica. 1976. V.3. №9-10. P.651-669.
7. *Пеньков В.И.* Компенсация эксцентриситетных колебаний спутника с гравитационной системой стабилизации // Космич. исслед. 1977. Т.15. №3. С.376-383.

DYNAMICS OF GRAVITATIONAL SYSTEM SATELLITE-STABILIZER ON CIRCULAR AND ELLIPTIC ORBITS

V. A. Sarychev[1], A. M. Seabra[2], and L. F. Santos[3]

[1]Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Miusskaya pl. 4, Moscow, 125047 Russia
[2]Escola Superior de Tecnologia de Viseu, Viseu, Portugal
[3]Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal

Abstract–This paper studies the dynamics of a satellite with passive gravitational attitude control system in the plane of circular and elliptic orbits. At first it discusses small oscillations of the satellite-stabilizer system in the plane of a circular orbit in a vicinity of the more simple equilibrium position. The necessary and sufficient conditions for asymptotic stability of that equilibrium are obtained and the values of the parameters, where the maximal speed of response of the system is achieved, are analytically determined. The paper also studies the eccentricity oscillations in elliptic orbit. The forced solution of the system is determined and the minimal value for magnitude of the eccentricity oscillations amplitude of the satellite is determined.