

1. Введение

Одним из наиболее простых и часто используемых способов обеспечения заданного углового движения спутника заключается в том, что аппарат, закрученный вокруг оси с наибольшим моментом инерции, сохраняет достаточно долго неизменную ориентацию оси закрутки в инерциальном пространстве [1]. Для ориентации оси вращения и регулирования скорости собственного вращения применяется магнитная система, использующая токовые катушки для создания магнитного дипольного момента спутника. Магнитная система обладает тем преимуществом, что она не требует расхода рабочего тела, что особенно важно для малогабаритных недорогих спутников, связанных множеством ограничений. Кроме того, отсутствие подвижных частей значительно повышает надежность, а, следовательно, и продолжительность активного функционирования такого аппарата. Метеорологические спутники серии "TIROS" [2, 3] в 60-х и 70-х годах ориентировались именно таким образом, чтобы получить наилучшие условия наблюдения за метеорологической обстановкой. У первых восьми аппаратов ось собственного вращения лежала в плоскости орбиты. Последующие два спутника ориентировались по нормали к плоскости орбиты [4]. Благодаря выбору солнечной-синхронной орбиты, боковая грань спутника была постоянно обращена на Солнце. Спутник представлял собой 18-гранную призму высотой 50 см, диаметром около 1 м и массой около 130 кг. Скорость собственного вращения – 9-12 об/мин. Аналогичный способ ориентации используется по настоящее время на Европейских метеорологических спутниках серии "Meteosat".

Применение стабилизации собственным вращением (или просто – вращением), использованного на "TIROS", предполагает наличие инерционной конфигурации спутника, близкой к маховику, то есть ось вращения является осью динамической симметрии и осью максимального момента инерции. После отделения спутника от носителя он вращается с некоторой угловой скоростью. При помощи управляющих моментов, создаваемых магнитной системой, ось вращения спутника прецессирует до тех пор, пока не станет перпендикулярной к плоскости орбиты и спутник не будет закручен с заданной скоростью вокруг оси симметрии. С этого момента спутник будет казаться катящимся по орбите вокруг Земли. Отсюда и появилось название "спутник-колесо". Если ориентация оси симметрии осуществляется на Солнце, направление на которое составляет некий угол с нормалью к плоскости орбиты (на солнечной-синхронной орбите этот угол практически не меняется), то спутник будет катиться "боком".

Для поворота оси симметрии спутника используется токовая катушка, установленная параллельно этой оси. Для управления скоростью вращения спутника вокруг оси симметрии используются токовые катушки, лежащие в

плоскости, ей перпендикулярной. Преимущество режима “колеса” для спутника, несущего телевизионные камеры, которые передают снимки поверхности Земли, заключается в том, что на каждом обороте спутника оптические оси камер, расположенные перпендикулярно к оси вращения, направлены на Землю. Всякий раз, когда ось инфракрасного датчика пересекает линию горизонта, датчик вырабатывает импульсный сигнал, приводящий в определенный момент времени в действие затвор камеры.

Рассматривается еще один возможный режим ориентации спутника собственным вращением, когда ось направлена на Солнце. В отличие от первого режима, когда ось вращения параллельна нормали к плоскости орбиты и гравитационный момент играет стабилизирующую роль, здесь гравитационный момент, вообще говоря, возмущает движение. Причем, чем ниже скорость собственного вращения, тем больше его влияние на точность ориентации. Для выбора одного из этих двух возможных режимов в качестве рабочего в данной работе предлагается оценить минимально-необходимый дипольный момент спутника, требуемый для поддержания выбранной ориентации.

Другая проблема, подлежащая решению, - это приведение и удержание оси вращения спутника в инерциальном пространстве при недостаточной точности определения текущего фазового состояния (ориентации и угловой скорости). Вопрос о точности становится критическим, когда спутник подходит к расчетному режиму движения и точность измерений становится сравнимой с требуемой точностью ориентации. Представляется, что существует, по крайней мере, два пути ее решения. Первый путь – это использование более точных датчиков ориентации (магнитометра и солнечного датчика) и повышение точности обработки их показаний. Второй путь – использование на заключительном этапе приведения пассивный нутационный демпфер, рассеивающий энергию нутационных колебаний. Его принцип действия основан на рассеивании энергии относительного движения установленного на спутнике элемента под действием переносных сил инерции, возникающих при нутационном движении аппарата относительно вектора кинетического момента.

Ранее на практике использовались различные способы управления. Так, в [5] рассматривается способ управления, основанный на методе осреднения, в котором создаваемый механический момент осредняется на периоде управления, а закон управления не зависит от направления оси вращения. В этом случае закон управления изменяется так, чтобы управляющий магнитный момент обеспечивал заданную ориентацию. В этой работе исследовались пять законов управления, причем для околополярных орбит выбиралось релейное управление с переключением через каждую четверть орбиты. В [6,7] разработан закон управления для круговой орбиты. В [7] предложен критерий максимума величины магнитного момента и ошибки углового момента. В работе [8] использован фильтр Калмана для минимизации угловой ошибки и создан метод

управления с минимальными энергетическими затратами. Способ управления, предложенный в работах [9, 10], основан на анализе величины рассогласования между номинальным (расчетным) и текущим кинетическим моментом спутника. Данный подход используется также и в нашей работе.

2. Уравнения движения спутника

Для анализа алгоритмов управления вращательным движением спутника разработана модель движения и соответствующее программное обеспечение, позволяющие имитировать его движение с различными алгоритмами управления.

Траектория движения центра масс спутника в гравитационном поле определяется шестью *оскулирующими элементами*: долготой восходящего узла Ω_l , наклоном орбиты i , параметром p , угловым расстоянием перицентра от восходящего узла ω_l , эксцентриситетом e и эпохой τ . Если эти параметры постоянны, траектория движения центра масс есть эллипс. Положение радиус-вектора центра масс в зависимости от времени находится как решение уравнения Кеплера.

Для описания вращательного движения спутника используются связанная с Землей *инерциальная система координат* (ИСК) $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ и *связанная со спутником система координат* (ССК) $O x_1 x_2 x_3$. Определим ИСК так. Ее начало O_a совпадает с центром масс Земли. Ось $O_a Y_3$ направлена в Северный Полюс Мира. Оси $O_a Y_1$ и $O_a Y_2$ лежат в экваториальной плоскости Земли, причем ось $O_a Y_1$ направлена в точку Весеннего равноденствия. Начало O ССК помещено в центр масс спутника, а оси совпадают с его главными осями инерции. Для определенности будем считать, что требуется обеспечить ориентацию оси $O x_3$. Обозначим $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ - орты соответствующих осей связанной системы координат, причем, орт \mathbf{a}_3 направлен вдоль оси симметрии спутника, \mathbf{A} - матрица перехода из ССК в ИСК, то есть $\mathbf{x}_a = \mathbf{A} \mathbf{x}_s$. Матрицу перехода можно представить в виде $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Выберем векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ в качестве позиционных переменными; тогда для вектора \mathbf{a}_3 можно записать $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$.

Вращательное движение спутника описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}), \\ \dot{\mathbf{a}}_i &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где \mathbf{J} - тензор инерции спутника, $\boldsymbol{\omega}$ - вектор абсолютной угловой скорости спутника в проекциях на оси ССК, \mathbf{M} - вращательный момент в проекциях на оси ССК. Точкой обозначено дифференцирование по времени t . Поскольку векторы \mathbf{a}_i задаются своими проекциями на оси ИСК, то и вектор $\boldsymbol{\omega}$, заданный в первом уравнении в ССК, во втором уравнении

должен быть преобразован в ИСК. Это можно сделать, умножив его на матрицу \mathbf{A} . Вращательный момент \mathbf{M} есть сумма моментов сил разной природы. Учитываются гравитационный момент в виде

$$\mathbf{M}_g = \frac{3\mu}{R^3} (\mathbf{n} \times \mathbf{Jn}), \quad (2.2)$$

где \mathbf{n} - орт местной вертикали в проекциях на оси ССК, R - расстояние между центрами масс спутника и Земли, μ - гравитационный параметр Земли; и магнитный момент от взаимодействия дипольного магнитного момента спутника с геомагнитным полем

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (2.3)$$

где \mathbf{m} - магнитный дипольный момент спутника, \mathbf{B} - индукция геомагнитного поля в точке расположения центра масс спутника. Магнитный момент рассматривается далее как управляющий момент.

Будем рассматривать два способа управления спутником.

3. Алгоритм управления магнитными катушками, минимизирующий рассогласование между текущим и номинальным кинетическими моментами спутника

Согласно основному уравнению динамики твердого тела изменение его кинетического момента \mathbf{L} равно главному моменту сил, приложенных к телу. Пусть на тело действует только управляющий магнитный момент, тогда можно записать

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Предположим, что на спутнике установлены три взаимно перпендикулярные магнитные (токовые) катушки. Током через каждую из них можно управлять независимо. Будем считать, что катушка с дипольным моментом $\mathbf{m}_3 = m_3 \mathbf{a}_3$, создающая момент вдоль оси симметрии спутника с ортом \mathbf{a}_3 , управляет положением этой оси в пространстве. Катушки с дипольными моментами $\mathbf{m}_1 = m_1 \mathbf{a}_1$, $\mathbf{m}_2 = m_2 \mathbf{a}_2$ используются для управления скоростью вращения спутника, несмотря на то, что механический магнитный момент, создаваемый этими катушками, будет также влиять и на положение в пространстве оси симметрии спутника. Это влияние будем рассматривать как возмущение положения оси симметрии спутника наряду с эффектом от действия гравитационного момента.

Величина дипольного момента каждой катушки может принимать лишь три фиксированных значения: $-m_{\max}$, 0 , $+m_{\max}$. Тем не менее, чтобы избежать эффекта перерегулирования на этапе окончательного приведения спутника к номинальному движению, может потребоваться уменьшение дипольного момента катушек. Обычно дипольный момент катушки формируется подачей следующих друг за другом прямоугольных импульсов напряжения равной продолжительности. Тогда, пропуская нужное количество импульсов в единицу времени, можно обеспечить требуемое

уменьшение среднего за период формирования момента до нужной величины. Это, так называемая, широтно-импульсная модуляция.

Управление магнитным дипольным моментом производится в соответствии с законами управления, приведенными в [9, 10].

3.1. Управление ориентацией оси вращения спутника

Введем рассогласование $\Delta\mathbf{L}$ между требуемым (номинальным) кинетическим моментом \mathbf{L}_f и фактическим на текущий момент времени кинетическим моментом \mathbf{L} следующим образом:

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_f - \mathbf{L}. \quad (3.2)$$

Управление величиной дипольного момента m_3 будем выполнять так, чтобы минимизировать величину рассогласования по кинетическому моменту $\Delta\mathbf{L}$

$$m_3 = \arg \min(\Delta\mathbf{L})^2.$$

Квадрат рассогласования выбирается вместо модуля в силу дифференцируемости этой функции при любом значении $\Delta\mathbf{L}$.

Полагая \mathbf{L}_f неизменным в инерциальном пространстве, запишем производную квадрата $\Delta\mathbf{L}$ по времени в силу уравнения (3.1)

$$\frac{d(\Delta\mathbf{L})^2}{dt} = 2\Delta\mathbf{L} \frac{d\Delta\mathbf{L}}{dt} = -2\Delta\mathbf{L}(m_3 \mathbf{a}_3 \times \mathbf{B}).$$

Отсюда, требуя для производной $\frac{d(\Delta\mathbf{L})^2}{dt}$ отрицательного значения,

получаем выражения для искомого дипольного момента m_3 ,

$$m_3 = m_{\max} \text{sign}(\Delta\mathbf{L}, \mathbf{a}_3, \mathbf{B}), \quad (3.3)$$

где m_{\max} - максимальный магнитный момент, создаваемый катушками ($m_{\max} > 0$), $(\Delta\mathbf{L}, \mathbf{a}_3, \mathbf{B})$ - смешанное произведение векторов: $(\Delta\mathbf{L}, [\mathbf{a}_3 \times \mathbf{B}])$. Получим закон управления скоростью осевого вращения спутника.

3.2. Управление скоростью вращения спутника

Аналогично предыдущему случаю рассмотрим величину рассогласования кинетического момента $\Delta\mathbf{L}$,

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_f - \mathbf{L}.$$

В качестве номинального магнитного момента зададим момент, который имел бы спутник, если бы он вращался вокруг оси симметрии с требуемой угловой скоростью, а ось симметрии ориентировалась так, как она ориентирована в текущий момент времени

$$\mathbf{L}_f = \Omega_3 C \mathbf{a}_3.$$

Здесь Ω_3 - требуемая скорость вращения, C - момент инерции спутника вдоль оси симметрии. Такой выбор позволяет рассмотреть только отличие текущей закрутки спутника от номинальной. Рассмотрим, как и в предыдущем случае, производную квадрата $\Delta\mathbf{L}$ по времени

$$\frac{d(\Delta\mathbf{L})^2}{dt} = 2\Delta\mathbf{L} \frac{d\Delta\mathbf{L}}{dt} = 2\Omega_f C \Delta\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_3) - 2\Delta\mathbf{L}(m_1 \mathbf{a}_1 \times \mathbf{B}) - 2\Delta\mathbf{L}(m_2 \mathbf{a}_2 \times \mathbf{B}). \quad (3.4)$$

Требую, чтобы производная квадрата величины рассогласования кинетического момента спутника $\Delta\mathbf{L}$ была минимальна, получаем, что дипольные магнитные моменты, необходимые для управления скоростью вращения, должны удовлетворять выражениям

$$m_1 = m_{\max} \text{sign}(\Delta\mathbf{L}, \mathbf{a}_1, \mathbf{B}), \quad m_2 = m_{\max} \text{sign}(\Delta\mathbf{L}, \mathbf{a}_2, \mathbf{B}). \quad (3.5)$$

Теперь рассмотрим второй способ управления угловым движением спутника.

4. Алгоритм управления магнитной катушкой, для ориентации спутника-гироскопа

Как и в предыдущем случае, будем рассматривать действие на спутник только управляющего магнитного момента. Пусть на спутнике имеется катушка с дипольным моментом $\mathbf{m}_3 = m_3 \mathbf{a}_3$, направленным вдоль оси симметрии спутника с ортом \mathbf{a}_3 . Как и в предыдущем случае, эта катушка управляет положением продольной оси в пространстве.

Предлагаемый в этом разделе алгоритм для своего функционирования не требует информации о векторе угловой скорости спутника. Однако этот алгоритм может быть применен только для быстро вращающегося вокруг оси симметрии спутника – спутника-гироскопа.

Кинетический момент \mathbf{L} осесимметричного спутника представим в виде

$$\mathbf{L} = \omega_1 A \mathbf{a}_1 + \omega_2 A \mathbf{a}_2 + \omega_3 C \mathbf{a}_3,$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - проекции вектора угловой скорости спутника на связанные оси, A, C - главные моменты инерции спутника. Предположим, что спутник быстро вращается вокруг оси симметрии с моментом инерции C , то есть $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$. Тогда текущий кинетический момент спутника \mathbf{L} можно приближенно представить в виде

$$\mathbf{L} = \omega_3 C \mathbf{a}_3, \quad (4.1)$$

Пусть требуемый кинетический момент спутника \mathbf{K}_f записывается как

$$\mathbf{L}_f = \omega_3 C \mathbf{a}_{03}, \quad (4.2)$$

где \mathbf{a}_{03} - требуемое направление оси симметрии спутника. Тогда, подставляя выражения (4.1) и (4.2) в закон управления (3.3) получим

$$m_3 = m_{\max} \text{sign}(\omega_3 \Delta \mathbf{a}, \mathbf{a}_3, \mathbf{B}), \quad (4.3)$$

где $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}_{03} - \mathbf{a}_3$. Этот закон управления можно переписать и в следующем виде:

$$m_3 = m_{\max} \text{sign}(\omega_3) \text{sign}(\mathbf{a}_{03}, \mathbf{a}_3, \mathbf{B}). \quad (4.4)$$

Эффективность такого управления будет наибольшая, если создаваемый механический магнитный момент лежит в плоскости, содержащей векторы \mathbf{a}_3 и \mathbf{a}_{03} . Если же создаваемый момент перпендикулярен плоскости, содержащей векторы \mathbf{a}_3 и \mathbf{a}_{03} , то эффективность управления будет нулевой. Численные эксперименты показали, что в этом случае также происходит увеличение нутационных колебаний спутника. Поэтому имеет смысл в процессе работы алгоритма ориентации вычислять проекцию создаваемого механического магнитного момента на плоскость, содержащую векторы \mathbf{a}_3 и \mathbf{a}_{03} , и если данная проекция становится мала, то на некоторое время отключать управляющий момент. Этот период времени авторы настоящей работы назвали *большой паузой*. Численные эксперименты показали, что длительность большой паузы следует задавать около 200 с.

Нормаль к интересующей нас плоскости вычисляется по формуле

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_{03}}{|\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_{03}|}. \quad (4.5)$$

Вектор, имеющий направление создаваемого механического магнитного момента, запишется так:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{B}}{|\mathbf{a}_3 \times \mathbf{B}|}. \quad (4.6)$$

Проекция вектора \mathbf{g} на плоскость, содержащую векторы \mathbf{a}_3 и \mathbf{a}_{03} , вычисляется по формуле

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (4.7)$$

Большая пауза, в течении которой управляющий магнитный момент следует выключать, должна начаться, если

$$|\bar{\mathbf{g}}| \leq \lambda |\mathbf{g}|, \quad (4.8)$$

где λ - некоторый параметр, величина которого выбирается опытным путем. Численные эксперименты показывают, что этот параметр следует полагать приблизительно равным 0.2-0.3.

Перейдем к исследованию описанного выше способа (алгоритма) управления угловым движением спутника.

5. Исследование алгоритма управления спутником-гироскопом на полярной орбите

В настоящем разделе приведено исследование алгоритма управления спутником-гироскопом на полярной орбите.

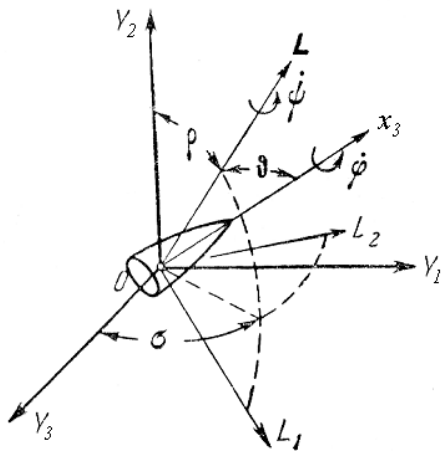


Рис.5.1. Углы, задающие направление кинетического момента относительно инерциальной системы координат

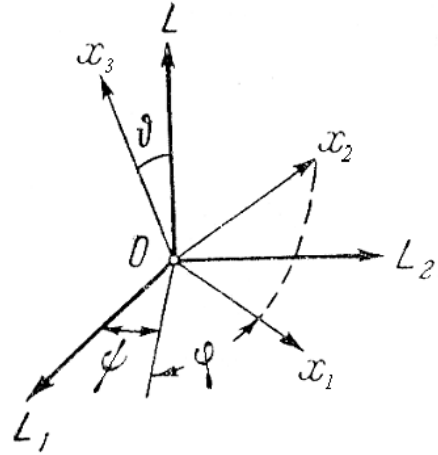


Рис.5.2. Углы, задающие ориентацию тела относительно системы координат, связанной с направлением кинетического момента

Будем считать, что спутник быстро вращается вокруг оси симметрии, тогда кинетический момент спутника приближенно представим в виде (4.1). Для описания динамики спутника воспользуемся уравнениями возмущенного движения, полученными В.В.Белецким [11, 12]. Эти уравнения записываются для следующих переменных: величины кинетического момента L , углов ρ и σ , задающих направление вектора кинетического момента относительно системы координат $OY_1Y_2Y_3$, начало которой помещено в центр масс спутника, а оси параллельны осям ИСК (рис.5.1), и углов Эйлера φ , ψ и θ , задающих ориентацию спутника (рис.5.2) относительно системы координат, связанной с направлением кинетического момента OL_1L_2L . Начало системы координат OL_1L_2L помещено в центр масс спутника; направление оси OL совпадает с направлением вектора кинетического момента спутника, ось OL_1 перпендикулярна оси OL и лежит в плоскости OY_2L (см. рис.5.2), ось OL_2 дополняет систему координат до правой ортогональной. Запишем уравнения возмущенного движения спутника в виде

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \bar{M}_3, & \dot{\rho} &= \frac{1}{L} \bar{M}_1, & \dot{\sigma} &= \frac{1}{L \sin \rho} \bar{M}_2, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{L} (\bar{M}_2 \cos \psi - \bar{M}_1 \sin \psi), \\ \dot{\varphi} &= L \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{(\bar{M}_1 \cos \psi + \bar{M}_2 \sin \psi)}{L \sin \theta}, \\ \dot{\psi} &= \frac{L}{A} - \frac{\bar{M}_1}{L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{\bar{M}_2}{L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= M_1 \sin \sigma \cos \rho - M_2 \sin \rho + M_3 \cos \sigma \cos \rho, \\ \bar{M}_2 &= M_1 \cos \sigma - M_3 \sin \sigma, \\ \bar{M}_3 &= M_1 \sin \sigma \sin \rho + M_2 \cos \rho + M_3 \cos \sigma \sin \rho. \end{aligned}$$

Приближение, записанное формулой (4.1), соответствует тому, что угол θ между направлением оси симметрии и кинетическим моментом равен нулю. В дальнейшем из системы уравнений (5.1) нам понадобятся только уравнения для кинетического момента L и углов ρ и σ . Уравнения для углов φ , ψ и θ не понадобятся, так как по нашему предположению ось симметрии спутника отслеживает направление кинетического момента. Такое предположение, вообще говоря, требует своего обоснования, которое является предметом дальнейших исследований.

Направление оси симметрии спутника \mathbf{a}_3 , а, следовательно, и направление вектора кинетического момента \mathbf{L} запишется через углы ρ и σ следующим образом: $\mathbf{a}_3 = (\sin \rho \sin \sigma, \cos \rho, \sin \rho \cos \sigma)^T$. Знак “Т” означает транспонирование. Управляющий магнитный момент направлен вдоль орта \mathbf{a}_3 в соответствии с законом управления (4.4). Используя осредненную модель магнитного поля [13], вектор индукции \mathbf{B} на полярной орбите можно записать в виде $\mathbf{B} = (B \sin \chi, 0, B \cos \chi)^T$, где $\chi = \chi_0 + 2\omega_0 t$ - угол между ортом OY_3 и вектором индукции магнитного поля, ω_0 - угловая скорость обращения центра масс спутника по орбите. Пусть для простоты требуемое направление ориентации совпадает с ортом OY_2 . Такое направление соответствует нормали к плоскости полярной орбиты. В этом случае угол ρ есть угол отклонения оси симметрии спутника от требуемого направления.

Подстановка механического магнитного момента (2.3), создаваемого в соответствии с законом управления (4.4), в первые три уравнения системы (5.1) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{L} &= 0, \\ \dot{\rho} &= -\frac{Bm}{L} |\sin(\chi - \sigma)|, \\ \dot{\sigma} &= \frac{Bm}{L} \operatorname{ctg} \rho \operatorname{sign}(\sin(\chi - \sigma)) \cos(\chi - \sigma),\end{aligned}\tag{5.2}$$

Здесь m - величина управляющего магнитного момента.

Решение уравнений (5.2) описывает два режима движения. При первом режиме происходит уменьшение угла ρ (угла отклонения оси симметрии спутника от требуемого направления), в отличие от второго режима, где такого уменьшения не происходит. Второй режим можно назвать режимом перерегулирования. Для того, чтобы исключить выход на этот режим, следует при уменьшении угла ρ уменьшать магнитный момент m в соответствии с формулой

$$m = m_0 \operatorname{tg} \rho,\tag{5.3}$$

где m_0 - параметр величины магнитного момента, который выбирается так,

чтобы величина $\frac{Bm_0}{2L\omega_0}$ была малой. Далее это отношение используется как

малый безразмерный параметр. Подстановка выражения (5.3) в уравнения (5.2) приводит к формулам

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -\frac{Bm_0}{L} \operatorname{tg} \rho |\sin(\chi - \sigma)|, \\ \dot{\sigma} &= \frac{Bm_0}{L} \operatorname{sign}(\sin(\chi - \sigma)) \cos(\chi - \sigma).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Введем безразмерное время $\tau = 2\omega_0 t$, параметр $\varepsilon_0 = \frac{Bm_0}{2L\omega_0}$ и

перепишем уравнения (5.4) в безразмерном виде, добавляя к исходным уравнениям (5.4) уравнение для величины χ - угла между ортом OY_3 и вектором индукции магнитного поля,

$$\begin{aligned}\rho' &= -\varepsilon_0 \operatorname{tg} \rho |\sin(\chi - \sigma)|, \\ \sigma' &= \varepsilon_0 \operatorname{sign}(\sin(\chi - \sigma)) \cos(\chi - \sigma), \\ \chi' &= 1.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Пусть безразмерный параметр ε_0 является малым и положительным. При управлении спутником этот параметр можно сделать малым, например, путем увеличения величины L и подходящего выбора параметра магнитного момента m_0 . Тогда переменные ρ и σ являются медленными переменными, а переменная χ быстрой. Произведем осреднение [14] первого уравнения (5.5) по быстрой переменной χ и получим следующее уравнение для переменной ρ :

$$\rho' = -\frac{2\varepsilon}{\pi} \operatorname{tg} \rho. \quad (5.6)$$

Для уравнения (5.6) легко выписать его решение

$$\rho = \arcsin\left(\sin \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{2\varepsilon_0 \tau}{\pi}\right)\right), \quad (5.7)$$

соответствующее первому режиму движения. Оно показывает, что с течением времени угол ρ уменьшается до нуля и, следовательно, спутник выходит на требуемый режим ориентации вдоль нормали к плоскости орбиты.

Если же не производить уменьшение управляющего магнитного момента в соответствии с формулой (5.3), то существует другое решение системы (5.2). Перепишем уравнения (5.2) в безразмерном виде, считая, что модуль величины магнитного момента постоянен и равен m ,

$$\begin{aligned} \rho' &= -\varepsilon |\sin(\chi - \sigma)|, \\ \sigma' &= \varepsilon \operatorname{ctg} \rho \operatorname{sign}(\sin(\chi - \sigma)) \cos(\chi - \sigma). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь введен другой безразмерный параметр $\varepsilon = \frac{Bm}{2L\omega_0}$. Из первого

уравнения системы (5.8) видно, что угол ρ с течением времени уменьшается, поскольку $\rho' < 0$, если $\sigma \neq \chi + \pi k$. Последнее условие выполняется, если переменная σ равна величине χ . Это имеет место, если скорость изменения величины σ меньше, чем скорость изменения величины χ , то есть $\sigma' < 1$. Это условие выполняется, если выполнено неравенство $\varepsilon \operatorname{ctg} \rho < 1$. Когда же угол ρ уменьшится настолько, что $\varepsilon \operatorname{ctg} \rho > 1 + \mu > 1$, где $\mu > 0$ - некоторая постоянная величина, тогда второе уравнение системы (5.8) будет иметь устойчивое решение $\sigma = \chi$. Устойчивость этого решение легко видеть, если представить что $\chi - \sigma = \alpha$, где α - малая величина. Если $\alpha > 0$ то $\alpha' = (\chi - \sigma)' \cong 1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \rho < -\mu < 0$, если же $\alpha < 0$ то $\alpha' = (\chi - \sigma)' = 1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \rho > 2 + \mu > 0$.

При равенстве $\sigma = \chi$ уменьшение угла ρ прекратится, поскольку в этом случае $\rho' = 0$. Это решение соответствует второму режиму, то есть режиму перерегулирования.

Было проведено численное моделирования движения спутника, которое описывается системой уравнений (5.1) при наличии магнитного управления положением оси симметрии в соответствии с законом управления (3.3) и при отсутствии гравитационного момента. Моделирование было проведено при следующих параметрах: угловая скорость движения центра масс спутника по орбите $\omega_0 = 0.001$ рад/с, главные моменты инерции спутника $A = B = 0.0938$ кг м², $C = 0.1875$ кг м², номинальная угловая скорость вращения спутника вокруг оси симметрии $\omega_3 = 0.1$ рад/с; Параметры моделируемого спутника соответствуют малому спутнику ТНС-1

(разработка ФГУП РНИИ КП). Для описания магнитного поля Земли использовалась осредненная модель $\mathbf{V} = B(\cos(2\omega_0 t), 0, \sin(2\omega_0 t))^T$, где модуль вектора индукции магнитного поля равен $B = 4 \cdot 10^{-5}$ Тл, максимальный дипольный магнитный момент, который может создать спутник, составлял $m_{\max} = 1$ А м². Уравнения движения интегрировались методом Рунге-Кутты четвертого порядка. На рис.5.3 сплошной линией представлен график зависимости от времени угла ρ между направлением оси симметрии спутника и нормалью к плоскости орбиты при уменьшении величины магнитного дипольного момента в соответствии с выражением (5.3). На этом же рисунке пунктирной линией изображено приближенное решение для угла ρ , записываемое формулой (5.7). Для моделируемого случая безразмерный параметр был равен $\varepsilon_0 = 1/2$. Из рисунка видно, что приближенное решение хорошо соответствует точному решению. На рис.5.4 представлен график зависимости от времени угла ρ , когда уменьшение величины магнитного дипольного момента не производилось. На графике виден выход на режим перерегулирования, когда уменьшение угла ρ прекращается.

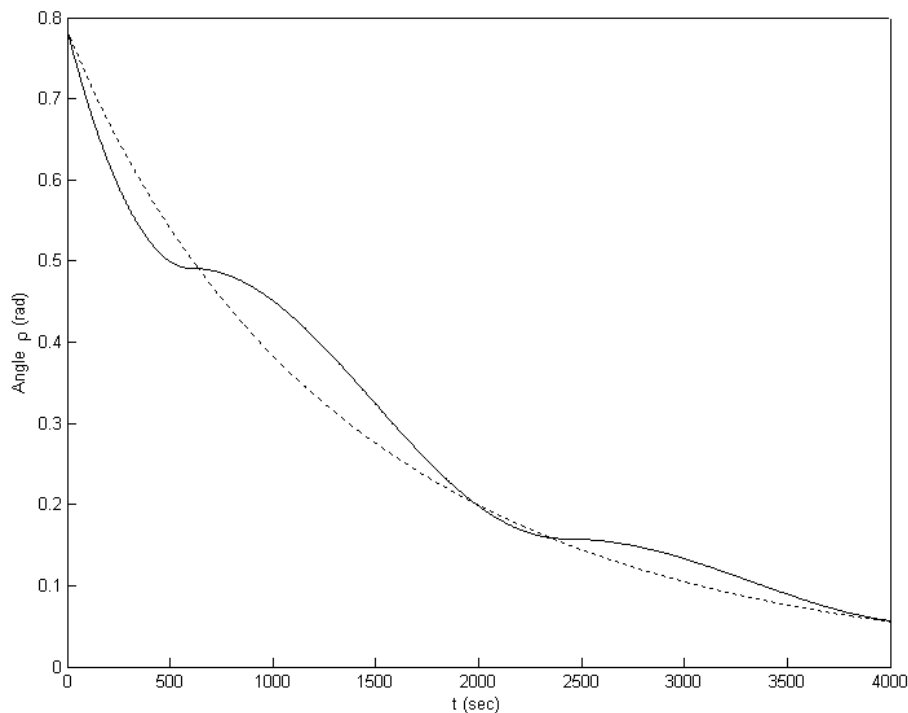


Рис. 5.3. График зависимости от времени угла ρ между направлением оси симметрии спутника и нормалью к плоскости орбиты при уменьшении магнитного дипольного момента по мере уменьшения угла ρ для того, чтобы исключить режим перерегулирования

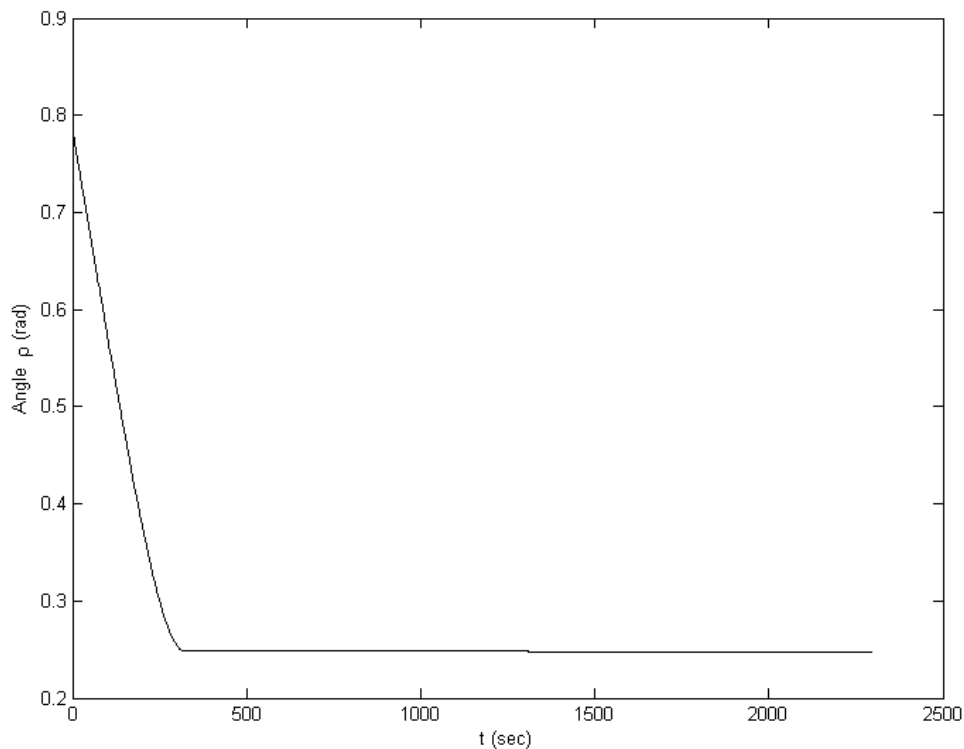


Рис 5.4. График зависимости от времени угла ρ , когда уменьшение величины магнитного дипольного момента не производилось

6. Использование пассивного нутационного демпфера для гашения нутационных колебаний оси симметрии спутника

Невысокая точность определения направления номинальной (расчетной) ориентации относительно инерциального пространства в связанных со спутником осях порождает проблему гашения остаточных нутационных движений спутника, которые не удастся удовлетворительно демпфировать с помощью активного управления токовыми катушками. Для устранения этого недостатка возможно использование пассивного нутационного демпфера. По конструктивному исполнению демпферов их можно разделить на два класса по признаку, являющемуся существенным для малогабаритного спутника, - это наличие постоянного магнита, наводящего токи Фуко или перемагничивающего магнитомягкие элементы с целью рассеяния энергии движения спутника относительно центра масс. Для малогабаритной конструкции спутника по всей видимости целесообразно использовать демпфер без магнитных элементов, например, в виде груза на пружине в полый трубке с вязкой жидкостью, тороидальной полости, заполненной ртутью [15] или маховика с трением в оси вращения. В первом случае требуется обеспечить стабильность характеристик при изменении температуры окружающей среды, что является при негерметичном исполнении корпуса непростой задачей. Поэтому используем второй подход и рассмотрим демпфер в виде маховика, ось

которого направлена вдоль одной из главных осей инерции спутника, ортогональной оси собственного вращения.

Пусть для определенности ось симметрии маховика направлена вдоль оси Ox_1 . Введем обозначения: осевой момент инерции маховика – J_f , его относительная угловая скорость – ω_f , коэффициент вязкого трения оси маховика о корпус спутника – \bar{k} . Тогда кинетический момент спутника с маховиком имеет вид

$$\mathbf{K} = (A\omega_1 + J_f\omega_f)\mathbf{a}_1 + A\omega_2\mathbf{a}_2 + C\omega_3\mathbf{a}_3.$$

Здесь учтено, что спутник осесимметричный и, по-прежнему, ось Ox_3 – ось симметрии. Динамические уравнения Эйлера в скалярном виде принимают форму

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + J_f\dot{\omega}_f + (C - A)\omega_2\omega_3 &= \bar{k}\omega_f + M_1, \\ A\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 + J_f\omega_f\omega_3 &= M_2, \\ C\dot{\omega}_3 - J_f\omega_f\omega_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь M_1, M_2, M_3 – проекции внешнего момента на связанные оси. Относительное движение маховика описывается уравнением

$$J_f(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_f) = -\bar{k}\omega_f. \quad (6.2)$$

Введем безразмерные коэффициенты

$$\lambda = C/A, \quad J = J_f/A, \quad k = \bar{k}/(A\omega_0),$$

и переменные

$$u = \omega_0(t - t_0), \quad \omega_j = \omega_0\bar{\omega}_j, (j = 1, 2, 3, f).$$

Перепишем уравнения (6.1), (6.2) в безразмерном виде без учета действия внешнего момента

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'_1 + J\bar{\omega}'_f + (\lambda - 1)\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 &= k\bar{\omega}_f, \\ \bar{\omega}'_2 - (\lambda - 1)\bar{\omega}_1\bar{\omega}_3 + J\bar{\omega}_f\bar{\omega}_3 &= 0, \\ \lambda\bar{\omega}'_3 - J\bar{\omega}_f\bar{\omega}_2 &= 0, \\ J(\bar{\omega}'_1 + \bar{\omega}'_f) &= -\bar{k}\bar{\omega}_f. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Будем считать, что спутник быстро закручен вокруг оси симметрии и гироскопический момент является определяющим в движении спутника, тогда вторым слагаемым в третьем уравнении (6.3) можно пренебречь и, следовательно, $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega} = const$. Оставшиеся в (6.3) уравнения обращаются в линейные по компонентам скоростей уравнения

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'_1 + J\bar{\omega}'_f + (\lambda - 1)\bar{\omega}_2\bar{\omega} &= k\bar{\omega}_f, \\ \bar{\omega}'_2 - (\lambda - 1)\bar{\omega}_1\bar{\omega} + J\bar{\omega}_f\bar{\omega} &= 0, \\ J(\bar{\omega}'_1 + \bar{\omega}'_f) &= -\bar{k}\bar{\omega}_f. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Характер и длительность переходных процессов в системе спутник-маховик определяются действительными частями собственных чисел s соответствующего системе (7.4) характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} s & (\lambda - 1)\bar{\omega} & Js - k \\ -(\lambda - 1)\bar{\omega} & s & J\bar{\omega} \\ J\bar{\omega} & 0 & Js + k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и приводя подобные члены, получаем характеристическое уравнение, которое запишем в виде, удобном для дальнейшего исследования,

$$(s^2 + (\lambda - 1)^2 \bar{\omega}^2)(k + sJ) = sJ(Js^2 - ks - (\lambda - 1)\bar{\omega}^2 J). \quad (6.5)$$

В общем, виде точное решение этого уравнения третьего порядка имеет весьма громоздкий вид. Для наших оценок достаточно получить приближенное решение. Решать уравнение будем методом последовательных приближений. Безразмерный параметр J мал, поэтому, приравнявая правую часть нулю, получаем корни уравнения

$$s_{1,2} = \pm i(\lambda - 1)\bar{\omega}, \quad s_3 = -\frac{k}{J}.$$

Эти корни отвечают независимым друг от друга движениям: спутника с замороженным маховиком и маховика относительно неподвижного спутника. Из них первые два имеют нулевую действительную часть, поэтому найдем поправку (обозначим ее через Δ) к этим двум корням, так как именно она будет определять быстродействие системы. Подставим в левую часть равенства (7.5) выражение $s = s_1 + \Delta = i(\lambda - 1)\bar{\omega} + \Delta$, в правую часть - $s = s_1 = i(\lambda - 1)\bar{\omega}$ и сохраним в левой части только линейные по Δ слагаемые. Разрешая полученное равенство относительно Δ , получим

$$\Delta = \frac{J(\lambda - 1)\bar{\omega}(-k + iJ\bar{\omega}\lambda)}{2[J(\lambda - 1)\bar{\omega} - ik]}.$$

Выделим действительную часть из этого выражения:

$$\text{Re } \Delta = -\frac{J^2(\lambda - 1)(2\lambda - 1)\bar{\omega}^2 k}{2[J^2(\lambda - 1)^2 \bar{\omega}^2 + k^2]}.$$

Именно эта величина определяет быстродействие системы, так как корень s_3 велик по абсолютной величине по сравнению с $\text{Re } \Delta$. Действительно, s_3 обратно пропорционален малой величине J , в то время как $\text{Re } \Delta$ ей прямо пропорционален. Мнимая часть $\text{Im } \Delta$ слегка изменит собственную частоту системы.

Определим оптимальное, доставляющее максимальное быстродействие системе значение коэффициента демпфирования k_{opt} . Вычисляя частную производную функции $\text{Re } \Delta$ по k и приравнявая ее нулю, получаем $k_{opt} = (\lambda - 1)\bar{\omega}J$. Окончательно, максимальное по абсолютной величине значение функции $\text{Re } \Delta$ при $k = k_{opt}$ определяется выражением

$$\operatorname{Re} \Delta_{opt} = -\frac{J(2\lambda - 1)\bar{\omega}}{4}.$$

В качестве примера рассмотрим спутник, который по аналогии со спутником “TIROS” является однородным тонким диском. Пусть масса спутника равна 10 кг, а диаметр - 0.5 м. Для такого спутника получаем $\lambda = 2$, $A = 0.31 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Для скорости собственного вращения 1 об/мин имеем $\bar{\omega} = 100$. Пусть маховик – это свинцовый диск диаметром 10 см и толщиной 0.5 см с массой 0.44 кг и моментом инерции $5.5 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, тогда $J = J_f / A = 1.8 \cdot 10^{-3}$. Для этих вычисленных значений параметров спутника и маховика получаем $\operatorname{Re} \Delta_{opt} = -0.14$, что соответствует уменьшению проекций угловой скорости спутника на экваториальные оси в e раз за 1.1 оборота спутника по орбите или приблизительно в 10 раз за 2.5 оборота по орбите. При этом $\bar{k}_{opt} = (\lambda - 1)\bar{\omega} J A \omega_0 = 5.6 \cdot 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{сек}$. В общем виде проекция угловой скорости спутника на экваториальные оси выглядит так:

$$\omega_{eq} = \omega_{eq}(u_0) \exp\left(-\frac{J(2\lambda - 1)\bar{\omega}}{4}(u - u_0)\right).$$

При регулярной прецессии оси симметрии спутника вокруг вектора кинетического момента угол нутации θ изменяется по закону

$$\cos \theta = \frac{\lambda \bar{\omega}}{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2 + \lambda^2 \bar{\omega}^2}}.$$

При малых углах нутации справедливо приближенное выражение $\theta = \frac{\bar{\omega}_{eq}}{\lambda \omega}$. Тем самым, уменьшение угла нутации “в малом” происходит по тому же закону, что и уменьшение проекции угловой скорости спутника на экваториальную ось.

7. Асимптотическое решение для быстровращающегося спутника в гравитационном и магнитном полях

Рассмотрим результаты, которые прояснят влияние гравитационного и магнитного момента на режим ориентации, отличный от цилиндрической прецессии, когда ось вращения спутника направлена под углом к нормали плоскости орбиты. На основании приводимого ниже аналитического расчета можно сделать заключение о том, какой минимальный дипольный момент необходим для поддержания заданной ориентации оси вращения спутника. Зная дипольный момент, можно рассчитать минимальную энергию, которую необходимо затрачивать на функционирование системы ориентации спутника. Сопоставляя расход энергии системы ориентации и энергетический выигрыш при ориентации спутника на Солнце можно сделать вывод о предпочтительности того или иного способа ориентации.

В настоящем разделе помимо ранее определенных инерциальной ($O_a Y_1 Y_2 Y_3$) и связанной ($O x_1 x_2 x_3$) систем координат будем использовать

полусвязанную $(O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3)$ систему координат, которая не участвует в осевом вращении спутника. Воспользуемся динамическими и кинематическими уравнениями Эйлера для описания движения спутника и введем классические углы Эйлера (ψ - угол прецессии вокруг оси OY_3 , θ - угол нутации и φ - угол собственного вращения вокруг оси Ox_3), описывающие ориентацию спутника относительно инерциальной системы координат

$$\begin{aligned}
 A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 &= 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} + M_1, \\
 B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 &= 3\omega_0^2(A - C)a_{31}a_{33} + M_2, \\
 C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 &= 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} + M_3, \\
 \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi), \\
 \dot{\theta} &= \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi, \\
 \dot{\varphi} &= \omega_3 - \dot{\psi} \cos\theta.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь a_{31}, a_{32}, a_{33} - проекции орта местной вертикали \mathbf{E}_3 на связанные оси, а M_1, M_2, M_3 суть проекции механического магнитного момента $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ на связанные оси, где \mathbf{m} - магнитный момент спутника, \mathbf{B} - индукция магнитного поля Земли.

Будем рассматривать осесимметричный спутник ($A = B \neq C$). Также будем считать, что магнитный момент спутника направлен по оси симметрии $\mathbf{m} = (0, 0, m)^T$. Это обеспечит равенство нулю проекции механического магнитного момента M_3 на ось симметрии. Уравнения (8.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_1 + \frac{C - A}{A}\omega_2\omega_3 &= 3\omega_0^2 \frac{C - A}{A}a_{32}a_{33} + \frac{M_1}{A}, \\
 \dot{\omega}_2 + \frac{A - C}{A}\omega_1\omega_3 &= 3\omega_0^2 \frac{A - C}{A}a_{31}a_{33} + \frac{M_2}{A}, \\
 \dot{\omega}_3 &= 0, \\
 \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi), \\
 \dot{\theta} &= \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi, \\
 \dot{\varphi} &= \omega_3 - \dot{\psi} \cos\theta.
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Перепишем первые три уравнения системы в безразмерных переменных, поделив их на величину квадрата угловой скорости вращения спутника по орбите ω_0^2 ,

$$\begin{aligned}\bar{\omega}'_1 &= (1 - \lambda)\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 - 3(1 - \lambda)a_{32}a_{33} + \frac{M_1}{A\omega_0^2}, \\ \bar{\omega}'_2 &= -(1 - \lambda)\bar{\omega}_1\bar{\omega}_3 + 3(1 - \lambda)a_{31}a_{33} + \frac{M_2}{A\omega_0^2}, \\ \bar{\omega}'_3 &= 0.\end{aligned}\tag{7.3}$$

где $\lambda = \frac{C}{A}$ - безразмерный параметр. Заметим, что из последнего уравнения следует, что $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_{30} = const$.

Перейдем к полусвязанной системе координат $O \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3$, которая не участвуют в собственном вращении спутника. Введем проекции угловой скорости на полусвязанные оси следующим образом:

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \bar{\omega}_1 \sin \varphi + \bar{\omega}_2 \cos \varphi, \\ \Omega_1 &= \bar{\omega}_1 \cos \varphi - \bar{\omega}_2 \sin \varphi.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Дифференцируя эти выражения, получим

$$\begin{aligned}\Omega'_1 &= \bar{\omega}'_1 \cos \varphi - \bar{\omega}'_2 \sin \varphi - \Omega_2 \varphi', \\ \Omega'_2 &= \bar{\omega}'_1 \sin \varphi + \bar{\omega}'_2 \cos \varphi + \Omega_1 \varphi'.\end{aligned}\tag{7.5}$$

Подставляя уравнения (7.3) в (7.5), имеем

$$\begin{aligned}\Omega'_1 &= (1 - \lambda)\bar{\omega}_3\Omega_2 + 3(1 - \lambda)a_{33}(a_{31} \sin \varphi + a_{32} \cos \varphi) - \Omega_2(\varpi_3 - \psi' \cos \theta) + \frac{\tilde{M}_1}{A\omega_0^2}, \\ \Omega'_2 &= -(1 - \lambda)\bar{\omega}_3\Omega_1 + 3(1 - \lambda)a_{33}(a_{31} \cos \varphi - a_{32} \sin \varphi) + \Omega_1(\varpi_3 - \psi' \cos \theta) + \frac{\tilde{M}_2}{A\omega_0^2},\end{aligned}\tag{7.6}$$

где \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 суть проекции механического магнитного момента на полусвязанные оси. Найдем эти проекции. Согласно модели прямого диполя индукция магнитного поля Земли записывается в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{3(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 - \boldsymbol{\mu}}{4\pi R^3}.\tag{7.7}$$

Здесь $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, -\mu)^T$ - магнитный момент Земли; $\mathbf{E}_3 = (r_1, r_2, r_3)$ - вектор местной вертикали в проекциях на инерциальные оси и используется система СИ. Эти проекции имеют вид

$$\begin{aligned}r_1 &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ r_2 &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ r_3 &= \sin u \sin i,\end{aligned}\tag{7.8}$$

где u - аргумент широты, а Ω - долгота восходящего узла, i - наклонение орбиты. Вычисляя выражение (7.7), получим вектор индукции \mathbf{B} в проекциях B_1, B_2, B_3 на оси инерциальной системы координат

$$\mathbf{B} = B_0 A \omega_0^2 \begin{pmatrix} -3r_1 r_3 \\ -3r_2 r_3 \\ 1 - 3r_3^2 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Здесь $B_0 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R^3 A \omega_0^2}$. Для отыскания выражения механического

магнитного момента $\tilde{\mathbf{M}}$ в проекциях $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3$ на полусвязанные оси необходимо выразить только проекции \tilde{B}_1, \tilde{B}_2 , поскольку в этой системе координат механический магнитный момент выражается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{m}} \times \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -m\tilde{B}_2 \\ m\tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Эти проекции легко выражаются через углы ψ, θ и проекции вектора индукции геомагнитного поля на инерциальные оси B_1, B_2, B_3 по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= B_1 \cos \psi + B_2 \sin \psi, \\ \tilde{B}_2 &= (-B_1 \sin \psi + B_2 \cos \psi) \cos \theta + B_3 \sin \theta. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Подставляя (8.9) в (8.11) и учитывая (8.10), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= A \omega_0^2 m B_0 [(-3r_1 r_3 \sin \psi + 3r_2 r_3 \cos \psi) \cos \theta + (3r_3^2 - 1) \sin \theta], \\ \tilde{M}_2 &= A \omega_0^2 m B_0 (-3r_1 r_3 \cos \psi - 3r_2 r_3 \sin \psi). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Для того чтобы получить окончательные уравнения динамики спутника в полусвязанной системе координат остается найти выражения для $a_{33}, a_{31} \sin \varphi + a_{32} \cos \varphi, a_{31} \cos \varphi - a_{32} \sin \varphi$ и подставить их в уравнения (7.6). Для этого выпишем элементы матрицы перехода от связанной системы координат к инерциальной

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi, & b_{13} &= \sin \psi \sin \theta, \\ b_{21} &= \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \theta \sin \varphi, & b_{23} &= -\cos \psi \sin \theta, \\ b_{31} &= \sin \theta \sin \varphi, & b_{33} &= \cos \theta, \\ b_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi, \\ b_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi, \\ b_{32} &= \sin \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Проекции орта \mathbf{E}_3 местной вертикали на связанные оси a_{31}, a_{32}, a_{33} можно выразить через проекции того же вектора на оси инерциальной системы координат r_1, r_2, r_3 и углы φ, ψ, θ следующим образом:

$$a_{3j} = \sum_{k=1}^3 r_k b_{kj}, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7.14)$$

Подставляя (13) в (14), получаем соотношения

$$\begin{aligned} a_{33} &= r_1 \sin \psi \sin \theta - r_2 \cos \psi \sin \theta + r_3 \cos \theta, \\ a_{31} \sin \varphi + a_{32} \cos \varphi &= -r_1 \sin \psi \cos \theta + r_2 \cos \psi \cos \theta + r_3 \sin \theta, \\ a_{31} \cos \varphi - a_{32} \sin \varphi &= r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi. \end{aligned} \quad (7.15)$$

В итоге получаем следующую систему уравнений динамики спутника в полусвязанной системе координат:

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= (1 - \lambda) \bar{\omega}_3 \Omega_2 + 3(1 - \lambda)(r_1 \sin \psi \sin \theta - r_2 \cos \psi \sin \theta + r_3 \cos \theta) \\ &\quad (-r_1 \sin \psi \cos \theta + r_2 \cos \psi \cos \theta + r_3 \sin \theta) - \Omega_2 (\varpi_3 - \Omega_2 \operatorname{ctg} \theta) + \\ &\quad + B_0 m [(-3r_1 r_3 \sin \psi + 3r_2 r_3 \cos \psi) \cos \theta + (3r_3^2 - 1) \sin \theta], \\ \Omega'_2 &= -(1 - \lambda) \bar{\omega}_3 \Omega_1 + 3(1 - \lambda)(r_1 \sin \psi \sin \theta - r_2 \cos \psi \sin \theta + r_3 \cos \theta) \\ &\quad (r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi) + \Omega_1 (\varpi_3 - \Omega_2 \operatorname{ctg} \theta) - \\ &\quad - B_0 m (3r_1 r_3 \cos \psi + 3r_2 r_3 \sin \psi), \\ \bar{\omega}'_3 &= 0, \quad \psi' = \frac{1}{\sin \theta} \Omega_2, \quad \theta' = \Omega_1. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Заметим, что система уравнений (7.16) не зависит от угла φ . В данной задаче этот угол является циклической переменной и для того, чтобы исключить его из уравнений, был осуществлен переход к полусвязанной системе координат.

Будем считать, что спутник закручен с высокой скоростью, то есть $\bar{\omega}_3 = \frac{1}{\varepsilon}$, где $\varepsilon \ll 1$. Такое предположение позволяет найти частное решение системы уравнений (7.16) в виде формального ряда по степеням малого параметра ε

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_3 &= \frac{1}{\varepsilon} = \text{const}, \\ \Omega_1 &= \varepsilon \bar{\Omega}_1 + \dots, \quad \Omega_2 = \varepsilon \bar{\Omega}_2 + \dots, \\ \psi &= \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots \end{aligned} \quad (7.17)$$

Подставляя выражения (7.17) в систему уравнений (7.16), получаем следующие соотношения:

$$\psi_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \psi'_1 = \frac{1}{\sin \theta_0} \bar{\Omega}_2, \quad \theta'_1 = \bar{\Omega}_1, \quad (7.18)$$

$$\bar{\Omega}_2 = \frac{1}{\lambda} [3(1-\lambda)(r_1 \sin \psi_0 \sin \theta_0 - r_2 \cos \psi_0 \sin \theta_0 + r_3 \cos \theta_0)$$

$$(-r_1 \sin \psi_0 \cos \theta_0 + r_2 \cos \psi_0 \cos \theta_0 + r_3 \sin \theta_0) +$$

$$+ B_0 m ((-3r_1 r_3 \sin \psi_0 + 3r_2 r_3 \cos \psi_0) \cos \theta_0 + (3r_3^2 - 1) \sin \theta_0)],$$

$$\bar{\Omega}_1 = -\frac{1}{\lambda} [3(1-\lambda)(r_1 \sin \psi_0 \sin \theta_0 - r_2 \cos \psi_0 \sin \theta_0 + r_3 \cos \theta_0)(r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0) -$$

$$- B_0 m (3r_1 r_3 \cos \psi_0 + 3r_2 r_3 \sin \psi_0)]$$

Из первых двух уравнений системы (7.18) получаем, что в нулевом приближении спутник сохраняет свою ориентацию: $\psi_0 = const$, $\theta_0 = const$. Направление ψ_0, θ_0 может быть выбрано как направление на Солнце. Для расчета поведения спутника в первом приближении получаем уравнения

$$\theta'_1 = -\frac{1}{\lambda} [3(1-\lambda)(r_1 \sin \psi_0 \sin \theta_0 - r_2 \cos \psi_0 \sin \theta_0 + r_3 \cos \theta_0)$$

$$(r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0) - B_0 m (3r_1 r_3 \cos \psi_0 + 3r_2 r_3 \sin \psi_0)],$$

$$\psi'_1 = \frac{1}{\lambda \sin \theta_0} [3(1-\lambda)(r_1 \sin \psi_0 \sin \theta_0 - r_2 \cos \psi_0 \sin \theta_0 + r_3 \cos \theta_0) \quad (7.19)$$

$$(-r_1 \sin \psi_0 \cos \theta_0 + r_2 \cos \psi_0 \cos \theta_0 + r_3 \sin \theta_0) +$$

$$+ B_0 m ((-3r_1 r_3 \sin \psi_0 + 3r_2 r_3 \cos \psi_0) \cos \theta_0 + (3r_3^2 - 1) \sin \theta_0)].$$

Правые части этих уравнений зависят только от параметров орбиты и безразмерного времени u , поэтому их решения можно найти в виде квадратуры. Решения этой системы $\psi(u), \theta(u)$ содержит как периодические, так и вековые составляющие. Наличие вековых членов означает, что гравитационный момент, действующий на спутник, приводит к возмущениям, которые надо систематически компенсировать, если ось ориентации направлена не под прямым углом к плоскости орбиты. Далее нас будет интересовать только вековые составляющие первого приближения, которые можно найти как интеграл величин θ'_1 и ψ'_1 по периоду обращения спутника по орбите

$$\Delta \theta = \varepsilon \int_0^{2\pi} \theta'_1 du, \quad \Delta \psi = \varepsilon \int_0^{2\pi} \psi'_1 du. \quad (7.20)$$

Возьмем разложение магнитного управляющего момента $m(u)$ в ряд Фурье

$$m(u) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k u + s_k \sin k u), \quad (7.21)$$

и подставляя в уравнения (19), получаем выражения для вековых составляющих

$$\Delta\theta = \frac{3\pi \sin i}{2\lambda\bar{\omega}_3} (-(\lambda-1)(2\cos i \cos\theta_0 \sin(\Omega-\psi_0) + \sin i \sin\theta_0 \sin 2(\Omega-\psi_0))) \quad (7.22)$$

$$B_0((c_2 - 2c_0)\cos i \sin(\Omega-\psi_0) + s_2 \cos(\Omega-\psi_0)),$$

$$\Delta\psi = \frac{\pi}{8\lambda\bar{\omega}_3 \sin\theta_0} (3(\lambda-1)(-4\cos 2\theta_0 \cos(\Omega-\psi_0) \sin 2i +$$

$$\sin 2\theta_0 (\cos 2i(3 + \cos 2(\Omega-\psi_0)) + 2\sin^2(\Omega-\psi_0)) +$$

$$2B_0(3(c_2 - 2c_0)(-\cos\theta_0 \cos(\Omega-\psi_0) \sin 2i + \cos 2i \sin\theta_0) -$$

$$-(2c_0 + 3c_2)\sin\theta_0 + 6s_2 \cos\theta_0 \sin i \sin(\Omega-\psi_0)))$$

Заметим, что в выражениях (7.22) фигурируют только коэффициенты c_0 , c_2 , s_2 разложения (7.21). Это означает, что в первом приближении только эти величины оказывают влияние на вековые члены $\Delta\psi$, $\Delta\theta$.

Рассмотрим частный случай, когда направление спутника в нулевом приближении, задаваемое углами ψ_0 , θ_0 , совпадает с нормалью к плоскости орбиты $\psi_0 = \Omega$, $\theta_0 = i$. В этом случае при отсутствии магнитного момента $m(u)=0$ вековые члены также равны нулю $\Delta\psi = \Delta\theta = 0$. Это соответствует стационарному положению спутника при наличии гравитационного момента - так называемая цилиндрическая прецессия.

Рассмотрим другой частный случай. Пусть направление на Солнце, задаваемое углами нулевого приближения ψ_0 , θ_0 , лежит в плоскости эклиптики $\theta_0 = \pi/2$. Долготу восходящего узла, не теряя общности, можно положить равной нулю ($\Omega = 0$). Постоянную составляющую магнитного момента также положим равной нулю ($c_0 = 0$). В этом случае получим для вековых составляющих выражения

$$\Delta\theta = \frac{3\pi}{2\lambda\bar{\omega}_3} \sin i ((\lambda-1)\sin i \sin 2\psi_0 + B_0(s_2 \cos\psi_0 - c_2 \cos i \sin\psi_0)), \quad (7.23)$$

$$\Delta\varphi = -\frac{3\pi}{2\lambda\bar{\omega}_3} \sin i (-2(\lambda-1)\cos i \cos\psi_0 + B_0 c_2 \sin i).$$

Из выражений (7.23) следует, что в отсутствии магнитного момента существует вековой уход от направления на Солнце. Рассмотрим для примера полярную орбиту $i = \pi/2$. В данном случае угол ψ_0 является углом отклонения от нормали к плоскости орбиты в экваториальной плоскости. При значении угла $\psi_0 = 45$ градусов вековой уход составляет примерно 1.5 градус за виток. Данная оценка полностью подтверждается численным интегрированием нелинейных уравнений вращательного движения спутника. На рис.7.1 представлен результат моделирования движения спутника при параметрах: скорость обращения спутника по

орбите $\omega_0 = 0.0011$ рад/с, скорость вращения спутника $\omega_3 = 0.1$ рад/с, параметр $\lambda = 2$, начальное положение спутника на орбите $u(0) = 0$, начальная ориентация – направление на Солнце задается углами ψ_0, θ_0 . На рисунке изображен вековой уход оси вращения спутника от требуемого положения при разных отклонениях направления на Солнце от нормали к плоскости орбиты.

Из выражений (7.23) видно, что величины c_2, s_2 можно использовать для устранения векового ухода от требуемого направления. Заметим, что то же самое верно и для общего случая записанного выражениями (7.22). Из уравнений (7.23) получаем, что для того, чтобы компенсировать возмущения гравитационного момента с помощью магнитных катушек, следует положить величины c_2 и s_2 следующим образом:

$$c_2 = \frac{2(\lambda - 1) \cos \psi_0 \cos i}{B_0 \sin i}, \quad s_2 = \frac{2(\lambda - 1) \sin \psi_0 \cos 2i}{B_0 \sin i}. \quad (7.24)$$

Выражения (7.24) можно использовать для оценки минимального магнитного момента необходимого для поддержания ориентации оси симметрии спутника на Солнце.

Для примера рассмотрим случай полярной орбиты $i = \pi/2$ и угла $\psi_0 = \pi/4$, который в данном случае является углом отклонения от нормали к плоскости орбиты в экваториальной плоскости. Для устранения векового ухода следует положить $c_2 = 0, s_2 = -\sqrt{2}(\lambda - 1)/B_0$. На рис.7.2 представлен результат моделирования движения спутника в этом случае, при значении параметров: скорость вращения спутника $\omega_3 = 0.1$ рад/с, высота орбиты 650 км, моменты инерции спутника $A = 0.0938$ кг м², $C = 0.1875$ кг м², параметр $\lambda = 2$, скорость обращения спутника по орбите $\omega_0 = 0.0011$ рад/с, параметр $B_0 = 216.1865$ (Ам²)⁻¹, начальное положение спутника на орбите $u(0) = 0$, начальная ориентация – направление на Солнце задается углами ψ_0, θ_0 . На рисунке видно, что вековой уход отсутствует.

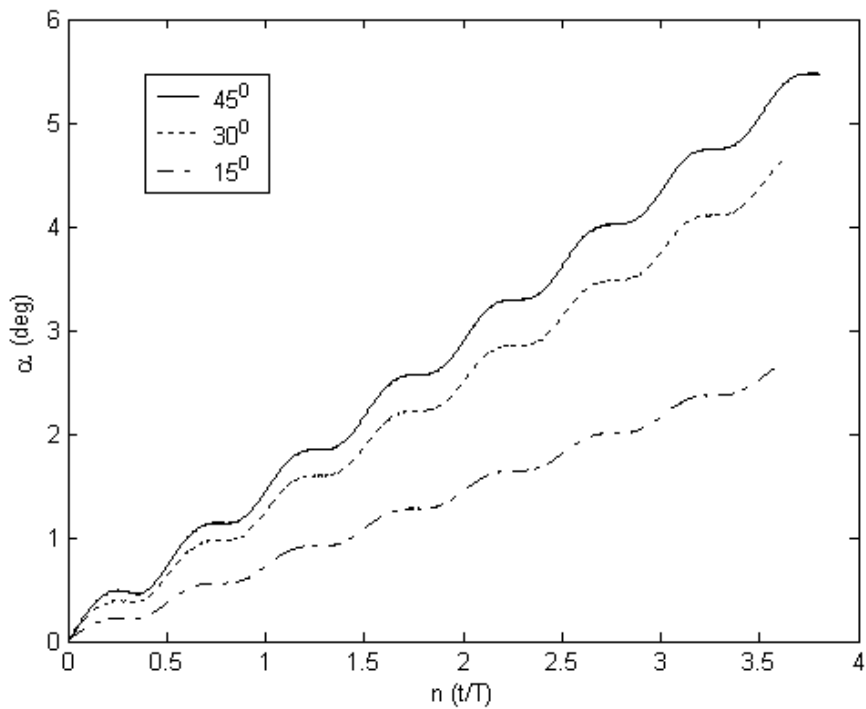


Рис.7.1. Зависимость отклонения α от требуемого направления с течением времени (n - витки). Графики приведены для разных требуемых направлений оси вращения спутника, отклоненных от нормали к плоскости орбиты на углы 15, 30 и 45 градусов соответственно

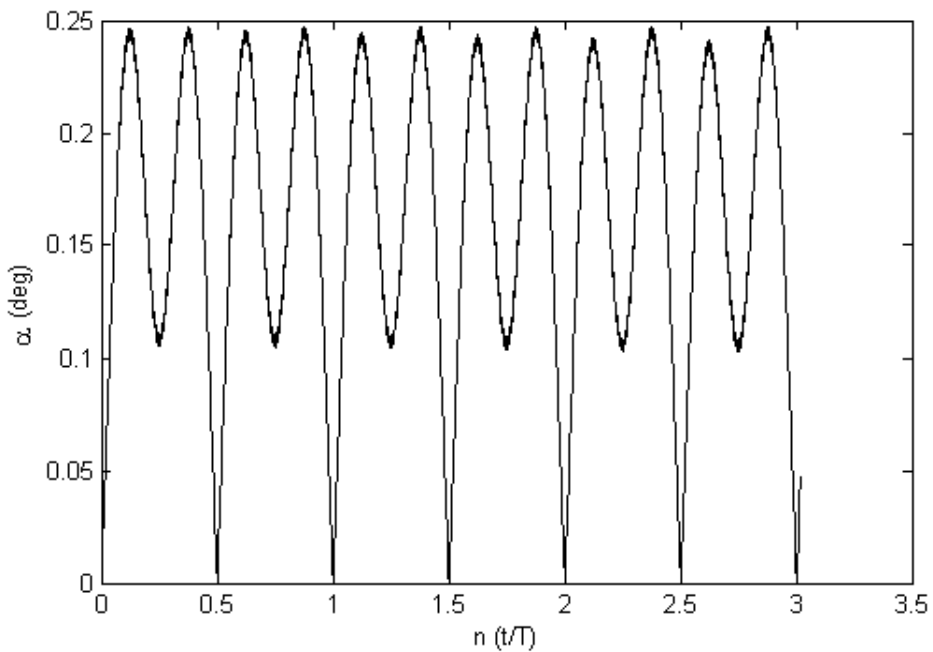


Рис.7.2. Зависимость отклонения α от требуемого направления с течением времени (n - витки) при управлении магнитным моментом так, чтобы устранить вековой уход в первом приближении

8. Заключение

Проведено исследование и определены характеристики переходных и установившихся движений спутника, стабилизированного собственным вращением, с использованием токовых катушек. Показано, что стабилизация по нормали к плоскости орбиты имеет несомненное преимущество с точки зрения энергозатрат.

9. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00652), Государственного контракта с Федеральным Агентством по науке и инновациям (№ 02.700.12.050), контракта с РНИИ КП и Программы Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант № НШ-2003.2003.1).

Литература

1. Фишелл Р.Э., Стабилизация вращения спутников, Автоматическое управления космическими летательными аппаратами (Труды I Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства) М.: «Наука», 1968.
2. Мангер В. П., Управления пространственным положением метеорологических спутников "Тирос". Автоматическое управления космическими летательными аппаратами (Труды I Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства) М. «Наука» 1968.
3. Гехт Е., Менджер У.П., Магнитная система управления угловым положением спутников серии "Тайрос". Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. М. «Наука» 1966.
4. Кейглер Дж. Е., Точная система ориентации для усовершенствованного варианта ИСЗ "Тирос". Управления космическими аппаратами и кораблями (Труды II Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства) М. Наука 1971.
5. Renard M.L., Command Laws for Magnetic Attitude Control of Spin-Stabilized Earth Satellites, // J. of Spacecraft and Rockets, Feb. 1967, v.4, N2, pp. 156-163.
6. Wheeler P.C. Spinning Spacecraft Attitude Control via the Environmental Magnetic Field. // J. of Spacecraft and Rockets, Dec. 1967, v.4, N12, pp 1631-1637.

7. Ergin E.I., Wheeler P.C., Magnetic Attitude Control of a Spinning Satellite // J. of Spacecraft and Rockets, 1965, v.2, N 6, pp.846-850.
8. Sorensen J.A., A Magnetic Three-Degree of Freedom Attitude Control System for an Axisymmetric Spinning Spacecraft // J. of Spacecraft and Rockets, 1971 v.8, N5, pp 441-448.
9. Шегехара М., Выбор законов управления угловым положением вращающихся спутников, Управление в пространстве, (Труды V Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в пространстве), т.1, М.: «Наука», 1975.
10. Shigehara M, Geomagnetic Attitude Control of an Axisymmetric Spinning Satellite, J. of Spacecraft and Rocket, June 1972, v.9, N6, pp 391-398.
11. Белецкий В.В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: «Наука», 1965.
12. Белецкий В.В., Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Издательство московского университета, 1975.
13. Сарычев В.А., Овчинников. М.Ю., Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли, Итоги науки и техники, серия: Исследование космического пространства, том 23, М.: 1985.
14. Гребенников Е.А., Метод усреднения в прикладных задачах. М.: «Наука», 1986.
15. Пивоваров М.Л., Жидкостное демпфирование колебаний спутника с большим магнитным моментом // Космич. исслед. 1990, т 28, N 6, С. 865-873.