

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша

М.П. Галанин, Е.Б. Савенков, Ю.М. Темис

**Метод конечных суперэлементов Федоренко для
задач теории упругости**

Москва, 2004

Аннотация

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) Р.П. Федоренко применен для решения линейной трехмерной задачи теории упругости. Показано, что уравнения МКСЭ следуют из аппроксимации методом Бубнова-Галеркина специальной слабой постановки для следов решения на границах подобластей-суперэлементов. Метод использован для расчета напряженно-деформированного состояния и определения приведенных упругих параметров композиционных материалов. Представлены результаты численных расчетов.

M.P. Galanin, E.B. Savenkov, J.M. Temis

Finite superelements method for elasticity problems.

Abstract

A Fedorenko Finite Superelements Method (FSEM) for linear 3D elasticity problems was considered. It was shown that FSEM equations follows from the Bubnov-Galerkin approximations of a special weak formulation for traces of a solution at superelements boundaries. We present special weak formulation with natural Bubnov-Galerkin approximation leads to the FSEM. Some applications of the FSEM for the problems of the mechanics of composites are considered.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	6
3	Слабая постановка задачи	8
3.1	Формула Грина	8
3.2	Слабая постановка	8
4	Специальная слабая постановка	9
4.1	Операторы Грина и Пуанкаре-Стеклова	9
4.2	Специальная слабая постановка	10
5	Построение конечномерной задачи	13
5.1	Построение конечномерной задачи	13
5.2	Построение базисных функций	15
6	Результаты численного моделирования	17
6.1	Определение упругих параметров для композита с регулярной структурой . .	20
6.2	Определение упругих параметров для композита с нерегулярной структурой	26
7	Заключение	36

1 Введение

Работа посвящена применению метода конечных суперэлементов для численного решения трехмерной статической задачи теории упругости. Рассмотрена простейшая модель физически и геометрически линейной неоднородной изотропной сплошной среды.

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) предложен в работах ([1]-[4]) как средство численного решения задач, решения которых имеют локальные особенности, сосредоточенные в областях, размер которых существенно меньше размер исходной области, в которой решается задача.

Данная работа является развитием и обобщением подхода, примененного авторами ранее в работах [5]-[8], для задач теории упругости. В ней используется тот же формальный подход к построению расчетной схемы МКСЭ, который ранее использовался для других задач.

В качестве примера приложения метода конечных суперэлементов рассмотрена задача механики композиционных материалов, а именно, задача расчета эффективных упругих параметров композита (в том числе и с нерегулярной структурой) и определения напряженно-деформированного состояния композита на микроуровне.

Отметим, что расчеты напряженно-деформированного состояния композитного тела с помощью МКСЭ проводились и раньше. Их результаты описаны в работе Р.П. Федоренко и Л.Г. Страховской [3]. Однако эти расчеты носили методический характер, а анализ полученных результатов был качественным. В данной работе проведено качественное и количественное сравнение результатов расчетов с использованием МКСЭ с известными экспериментальными характеристиками и теоретическими результатами механики композиционных материалов.

Для полноты отметим, что термин «суперэлемент» известен в теории метода конечных элементов и не в связи с методом конечных суперэлементов Р.П. Федоренко. Обычно он употребляется для обозначения

группы конечных элементов, рассматриваемых совместно. Поясним это на примере.

Рассмотрим некоторую расчетную область, в которой решается задача. Пусть в этой области задана некоторая триангуляция и используются простейшие кусочно-линейные финитные базисные функции на треугольной сетке. Задача определения амплитуд конечных элементов сводится к решению некоторой системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Au = f, \quad (1)$$

где A – матрица жесткости задачи, u – вектор узловых значений (амплитуд) конечных элементов, f – некоторый вектор правой части.

Выделим в этой области некоторую группу соседних конечных элементов, занимающих подобласть S расчетной области. Пусть u_s – вектор амплитуд конечных элементов, соответствующий внутренним узлам области S , u_b – вектор амплитуд конечных элементов, соответствующий граничным узлам области S , u_0 – вектор амплитуд, соответствующий оставшимся узлам расчетной области.

Тогда вектор-столбец u амплитуд конечных элементов может быть записан в следующем, блочном, виде:

$$u = [u_b \ u_s \ u_0]^T,$$

а система (1) в виде

$$\begin{bmatrix} A_{bb} & A_{bs} & A_{b0} \\ A_{bs} & A_{ss} & 0 \\ A_{b0} & 0 & A_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ u_s \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b \\ f_s \\ f_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Эта система уравнений совпадает с системой (1) с точностью до перестановки строк. Нулевые блоки в матрице этой системы появляются вследствие финитности базисных функций. Рассмотрим вторую строку этой системы уравнений:

$$A_{bs}u_b + A_{ss}u_s = f_s.$$

Считая, что матрица A_{ss} невырожденная, выразим вектор амплитуд внутренних узлов через вектор амплитуд граничных узлов области S , то есть разрешим это уравнение относительно u_s . Получим

$$u_s = A_{ss}^{-1} f_s - A_{ss}^{-1} A_{bs} u_b.$$

Подставляя это выражение обратно в систему (13), получим следующую систему уравнений

$$\begin{bmatrix} A_{bb} - A_{bs} A_{ss}^{-1} A_{bs} & A_{b0} \\ A_{b0} & A_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b - A_{bs} A_{ss}^{-1} f_s \\ f_0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Эта система уравнений получается из системы (2) исключением части неизвестных, соответствующих внутренним узлам области S .

Таким образом, можно понизить порядок системы уравнений для определения амплитуд конечных элементов, заранее исключив из нее неизвестные, соответствующие части узлов. Такой подход, когда группа конечных элементов рассматривается как одно целое, называется методом суперэлементов, а указанная группа конечных элементов называется суперэлементом и может рассматриваться как самостоятельный объект при построении аппроксимаций задачи.

В рассмотренном выше примере был всего один суперэлемент S . В общем случае их может быть несколько, и они могут покрывать всю расчетную область. В этом случае система (3) будет связывать только неизвестные, соответствующие узлам на границах суперэлементов.

Рассмотренный выше подход также иногда называют методом разделения (декомпозиции) области для конечномерных задач. Известны его модификации, когда системы базисных функций для узлов на границах суперэлементов выбираются специальным образом, отличным от способа выбора базисных функций для внутренних узлов суперэлементов ([9]).

Подчеркнем отличия метода суперэлементов (МС) от МКСЭ Федоренко. В МКСЭ разбиение области на суперэлементы происходит на этапе постановки дифференциальной задачи. Аппроксимирующие базисные

функции задаются на границах СЭ. Расчет суперэлементов может производиться независимо в каждой области и разными способами, как аналитически, так и численно. При использовании численных методов для расчета суперэлементных базисных функций в разных суперэлементах могут использоваться разные численные методы, расчетные сетки в каждом суперэлементе строятся независимо друг от друга и могут быть несогласованы на границах. С точки зрения МКСЭ расчет базисных функций внутри суперэлементов является вспомогательной задачей и может осуществляться так, как это удобно. Способ построения суперэлементных базисных функций никак не связан с определением амплитуд решения в узлах суперэлементной сетки.

В МС используется глобальная во всей области расчетная сетка. Декомпозиция области производится для конечномерной задачи. При этом, фактически, осуществляется перенумерация узлов сетки таким образом, что матрица системы приобретает блочную структуру (2). Это позволяет свести решение полной СЛАУ (1) к решению нескольких СЛАУ меньшей размерности.

Авторы благодарны проф. Г.Н. Кувыркину за советы и полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00461).

2 Постановка задачи

Требуется определить поле перемещений $u = \{u_i\}$, $i = \overline{1, 3}$ сплошной среды в ограниченной трехмерной области Ω , на границе $\partial\Omega$ которой заданы кинематические и динамические граничные условия.

Будем считать, что в области Ω задана ортогональная декартова система координат $Ox_1x_2x_3$. В дальнейшем будем использовать правило суммирования по повторяющимся индексам. Производную некоторой ве-

личины A по переменной x_i будем обозначать через $A_{,i}$,

$$\partial A / \partial x_i \equiv A_{,i}.$$

Система соотношений, описывающих напряженно-деформированное состояние упругого тела, состоит из уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad (4)$$

материальных соотношений, выражающих обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad (5)$$

и кинематических соотношений

$$\epsilon_{ij}(u) = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (6)$$

В дальнейшем будет использоваться безындексная форма уравнения равновесия,

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0.$$

Здесь σ – тензор упругих напряжений, ϵ – тензор деформаций, σ_{ij} , ϵ_{ij} – их компоненты в выбранной системе координат, f – объемная плотность внешних сил, $\lambda = \lambda(x_i)$, $\mu = \mu(x_i)$ – коэффициенты Ламе, в общем случае являющиеся заданными функциями точки пространства, δ_{ij} – компоненты единичного тензора.

Будем считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из двух частей, $\partial\Omega = \Gamma_g \cup \Gamma_n$. На части Γ_g границы заданы кинематические граничные условия

$$u|_{\Gamma_g} = u_g, \quad u_i|_{\Gamma_g} = u_{g,i},$$

на части Γ_n границы заданы естественные граничные условия

$$\gamma_\nu \sigma|_{\Gamma_n} = f_g, \quad \sigma_{ij}\nu_j|_{\Gamma_n} = f_{g,i},$$

где

$$\gamma_\nu \sigma = \sigma \nu = \sigma_{ij}\nu_j,$$

$\nu = \{\nu_j\}$ – внешняя нормаль к границе области.

3 Слабая постановка задачи

3.1 Формула Грина

В дальнейшем будем использовать следующую формулу Грина ([10]):

$$(\sigma, \epsilon(u)) + (\operatorname{div} \sigma, u) = \langle \gamma_\nu \sigma, \gamma_0 u \rangle, \quad (7)$$

где

$$(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \xi \eta \, d\Omega,$$

$\xi \eta$ – скалярное произведение элементов ξ и η некоторого евклидова пространства X . В нашем случае либо $X = \mathbb{R}^3$ и тогда

$$\xi \eta = \xi_i \eta_i,$$

либо $X = E_3$ – пространство симметричных тензоров порядка 3, и тогда

$$\xi \eta = \xi_{ij} \eta_{ij},$$

$\gamma_\nu \sigma = \sigma \nu|_{\partial\Omega}$ – нормальные напряжения на границе области Ω , $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ – значение поля перемещений u на границе,

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\partial\Omega} \xi \eta \, d\Gamma.$$

Формула (7) верна для достаточно гладких полей u , линейной зависимости $\epsilon(u)$ вида (6) и произвольной зависимости $\sigma(\epsilon)$.

С использованием индексных обозначений соотношение (7) будет иметь вид:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(u) \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \nu_j u_i \, d\Gamma.$$

3.2 Слабая постановка

Пусть V – пространство достаточно гладких векторных полей в области Ω , а пространство $V_{0,g}$ состоит из элементов пространства V , компоненты которых обращаются в нуль на части Γ_g границы $\partial\Omega$ области Ω .

Для получения слабой постановки задачи (4)-(6) умножим уравнение равновесия (4) на произвольную функцию $v \in V_{0,g}$ и проинтегрируем результат по области Ω . Тогда, используя формулу Грина, получим:

$$(\sigma(u), \epsilon(v)) = (f, v) + \langle \gamma_\nu \sigma, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma_n}.$$

Отсюда слабая постановка задачи имеет вид: требуется определить векторное поле $u \in V$, такое, что

$$(\sigma(u), \epsilon(v)) = (f, v) + \langle f_g, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma_n}, \quad \forall v \in V_{0,g}, \quad (8)$$

$$\epsilon_{ij}(u) = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (9)$$

$$u|_{\Gamma_g} = u_g. \quad (10)$$

Зависимость σ от ϵ при этом может быть любой, но мы будем рассматривать только зависимость вида (5).

4 Специальная слабая постановка

4.1 Операторы Грина и Пуанкаре-Стеклова

При решении задачи с помощью МКСЭ расчетная область разбивается на некоторое количество подобластей-суперэлементов. При этом внутренние части суперэлементов исключаются из рассмотрения, а рассматриваются значения искомых полей перемещений, напряжений и деформаций только на их границах. Для того, чтобы рассматривать суперэлемент как одно целое, необходимо уметь описывать реакцию его границы на заданные воздействия. В этом случае удобно использовать операторы Грина и Пуанкаре-Стеклова.

Оператор Грина сопоставляет произвольному полю φ , заданному на границе области, поле $G\varphi$, определенное в Ω , которое является решением задачи (8)-(10) с функцией φ в качестве граничного условия и нулевой правой частью,

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad f = 0.$$

Оператор Пуанкаре-Стеклова (П.-С.) определяется следующим образом:

$$P\varphi = \gamma_\nu \sigma(G\varphi)|_{\partial\Omega}.$$

Таким образом, оператор Пуанкаре-Стеклова сопоставляет некоторой функции, заданной на границе, другую функцию, заданную на той же границе. Значение оператора Пуанкаре-Стеклова – нормальное напряжение на границе области, вызванное заданным граничным перемещением φ . Оператор Пуанкаре-Стеклова сопоставляет граничным условиям первого рода (кинематическим) эквивалентные им граничные условия второго рода (нормальные напряжения, заданные на границе).

Из определения оператора Пуанкаре-Стеклова и формулы Грина следует соотношение:

$$(\sigma(G\varphi), \epsilon(v)) = \langle P\varphi, \gamma_0 v \rangle, \quad (11)$$

которое верно для произвольного достаточно гладкого поля v . Это выражение удобно использовать для вычисления коэффициентов матриц жесткости суперэлементов.

4.2 Специальная слабая постановка

Построим теперь слабую постановку задачи, аппроксимация которой тем или иным проекционно-сеточным методом приводит к МКСЭ.

Для простоты будем рассматривать однородную задачу, то есть случай

$$f = 0.$$

Обобщение метода на случай неоднородной задачи является формальным и не представляет труда.

Разобьем область Ω на некоторое количество подобластей Ω_k так, что

$$\Omega = \cup \Omega_k.$$

Области Ω_k будем называть суперэлементами. Пусть $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ – граница суперэлемента Ω_k , $\Gamma = \partial\Omega$ – граница расчетной области.

Далее $P_k, G_k, \gamma_{0,k}, \dots$ – операторы $P, G, \gamma_0, \dots$ для области Ω_k . Для некоторой функции v , заданной в Ω , v_k обозначает ограничение этой функции на Ω_k , $v_k = v|_{\Omega_k}$.

Рассмотрим произвольное достаточно гладкое поле $w \in V$, заданное в Ω . Пусть $\varphi_k = w|_{\Gamma_k}$ – ограничение этого поля на границу суперэлемента Ω_k . Рассмотрим поле $\tilde{w}$, которое в суперэлементе Ω_k имеет вид

$$\tilde{w}|_{\Omega_k} = G_k \varphi_k.$$

Будем считать, что поле $\tilde{w}$ также принадлежит пространству V , то есть обладает требуемой гладкостью. Компоненты поля $\tilde{w}$ будут являться непрерывными функциями на границе между двумя суперэлементами в силу построения граничного поля φ .

Отметим, что $\tilde{w}$ является точным решением рассматриваемого уравнения в каждом суперэлементе Ω_k по отдельности, но не является решением задачи во всей области. Для того, чтобы $\tilde{w}$ являлось решением задачи во всей области, оно должно удовлетворять некоторым дополнительным условиям на границах суперэлементов. Получим их.

Поле $\tilde{w}$ будет являться решением задачи, если оно будет удовлетворять уравнению (8). Подставим $\tilde{w}$ в (8) и сделаем ряд преобразований, учитывая, что $\tilde{w}|_k = G_k \varphi_k$:

$$\begin{aligned} (\sigma(\tilde{w}), \epsilon(v)) &= \sum_k (\sigma(\tilde{w}_k), \epsilon(v_k))_k = \\ &= \sum_k \langle \gamma_{\nu,k} \sigma(\tilde{w}_k), \gamma_{0,k} v_k \rangle_k - \sum_k (\operatorname{div} \sigma(\tilde{w}_k), v_k)_k = \\ &= \sum_k \langle P_k \varphi_k, \gamma_{0,k} v_k \rangle_k - \sum_k (\operatorname{div} \sigma(G_k \varphi_k), v_k)_k = \\ &= \sum_k \langle P_k \varphi_k, \gamma_{0,k} v_k \rangle_k = \langle f_g, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma_n}, \quad \forall v \in V_{0,g}. \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы поле $\tilde{w}$ являлось решением задачи во

всей области, оно должно удовлетворять уравнению

$$\sum_k \langle P_k \varphi_k, \gamma_{0,k} v_k \rangle_k = \langle f_g, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma_n} \quad \forall v \in V_{0,g}.$$

Заметим, что в этом соотношении стоят значения функций только на границе суперэлементов. Поэтому задачу можно переписать в виде: определить $\varphi \in V_\Gamma$,

$$\sum_k \langle P_k \varphi_k, \psi_k \rangle_k = \langle f_g, \psi \rangle_{\Gamma_n} \quad \forall \psi \in V_{\Gamma,0}, \quad (12)$$

$$\varphi|_{\Gamma_g} = u_g, \quad (13)$$

где

$$V_\Gamma = \{\varphi = \{\varphi_k\} : \varphi_k = w|_{\Gamma_k}, \text{ для некоторого } w \in V\},$$

$$V_{\Gamma,0} = \{\varphi = \{\varphi_k\} : \varphi_k = w|_{\Gamma_k}, \text{ для некоторого } w \in V_{0,g}\}.$$

Элемент пространства $\varphi \in V_\Gamma$ – набор функций φ_k , каждая из которых определена на границе Γ_k суперэлемента Ω_k . Если $V_{\Gamma,k}$ – пространство функций, заданных на границе Γ_k суперэлемента Ω_k и являющихся следами функций из V_k , то $\varphi \in \prod V_k$, $V_\Gamma \subset \prod V_k$. Помимо этого в силу определения функции φ_k согласованы на границах суперэлементов, то есть

$$\varphi_k|_{\Gamma_{kl}} = \varphi_l|_{\Gamma_{kl}}, \quad \Gamma_{kl} = \Gamma_k \cap \Gamma_l.$$

Соотношение (12) представляет собой слабую форму условия статического равновесия отдельных суперэлементов.

Задачу (12)-(13) можно переписать в виде

$$u \in V_\Gamma : \quad b(\varphi, \psi) = F(\psi), \quad \forall \psi \in V_{\Gamma,0}, \quad (14)$$

$$\varphi|_{\Gamma_g} = u_g, \quad (15)$$

где формы $b(\cdot, \cdot)$ и $F(\cdot)$ имеют вид

$$b(\varphi, \psi) = \sum_k \langle P_k \varphi_k, \psi_k \rangle_k, \quad F(\psi) = \langle f_g, \psi \rangle_{\Gamma_n},$$

и определены для любых $\varphi, \psi \in V_\Gamma$.

Таким образом, мы свели исходную задачу (8)-(10) определения поля перемещений в области Ω к задаче (14)-(15) определения поля перемещений на границах суперэлементов. Непосредственная аппроксимация этой задачи тем или иным проекционно-сеточным методом приводит к МКСЭ. Задача (14)-(15) имеет вид вариационного уравнения. Теория таких уравнений и их аппроксимаций хорошо разработана в связи с теорией метода конечных элементов и других проекционно-сеточных методов. Эта теория может быть использована для исследования метода и построения оценок ошибок и в данном случае. Однако в данной работе эти вопросы не рассматриваются.

5 Построение конечномерной задачи

5.1 Построение конечномерной задачи

Метод конечных суперэлементов является проекционно-сеточным методом решения задачи (14)–(15). Мы будем рассматривать только метод Бубнова-Галеркина, когда системы базисных и пробных функций совпадают. Более общий случай метода Галеркина-Петрова может быть рассмотрен аналогично.

Для построения конечномерной задачи зададим некоторое конечномерное пространство $V_{\Gamma,h}$ пространства V_Γ . Пусть $\{\varphi_{h,i}\}$ – набор соответствующих базисных функций, пространство $V_{\Gamma,h}$ – линейная оболочка этой системы функций,

$$V_{\Gamma,h} = \text{span } \varphi_{h,i}.$$

Приближенное решение задачи ищем в виде линейной комбинации базисных функций,

$$\varphi_h = \sum_i a_i \varphi_{h,i}.$$

Амплитуды a_i определяются из следующей конечномерной задачи:

$$\begin{aligned} u_h \in V_{\Gamma,h} : \quad & b(\varphi_h, \psi_h) = 0, \quad \forall \psi_h \in V_{\Gamma,0,h}, \\ & \varphi_h|_{\Gamma,g} = u_g. \end{aligned}$$

Для построения этой задачи необходимо в каждом суперэлементе Ω_k рассчитать значение оператора Пуанкаре-Стеклова для всех функций $\varphi_{h,i}$. Для этого в Ω_k нужно решить задачу (8)-(10) с граничным условием, определяемым функцией $\varphi_{h,i}$. На практике эта задача может решаться численно с использованием подходящего конечно-разностного или конечно-элементного метода. Далее, для вычисления коэффициентов матрицы жесткости можно воспользоваться либо определением оператора Пуанкаре-Стеклова, либо соотношением (11). Второй способ более предпочтителен, т.к. в нем не возникает необходимость численно дифференцировать полученное приближенное значение оператора Грина.

Полное решение задачи во всей области Ω будет иметь вид

$$u_h = \sum_i a_i G \varphi_{h,i}.$$

Отметим, что функции $G \varphi_{h,i}$ не нужно вычислять, они уже были рассчитаны при вычислении операторов Пуанкаре-Стеклова в процессе формирования матрицы жесткости конечномерной задачи.

Рассмотрим подробнее схему реализации метода.

1. Задается разбиение расчетной области на суперэлементы. Для хранения суперэлементной сетки используются описатели сетки, аналогичные используемым в обычном методе конечных элементов. В каждом суперэлементе задается обычная конечно-элементная сетка, на которой рассчитываются суперэлементные базисные функции.
2. Далее для каждого суперэлемента рассчитываются суперэлементные базисные функции и вычисляются матрицы жесткости суперэлемен-

тов. Если расчетная область заполнена суперэлементами, из которых часть имеет одинаковую форму и внутреннюю структуру, то базисные функции и матрицы жесткости можно рассчитывать только для суперэлементов разных типов. Так, в описанных ниже расчетах использовались суперэлементы трех типов, а количество суперэлементов в расчетной области доходило до нескольких тысяч. Рассчитанные базисные функции и матрицы жесткости необходимо запомнить для дальнейшего использования.

3. Производится сборка матрицы жесткости и решение получившейся системы линейных алгебраических уравнений для определения амплитуд решения в узлах суперэлементов. Далее, по уже рассчитанным базисным функциям суперэлементов, восстанавливается решение во всей области.

В общем, алгоритм метода аналогичен алгоритму метода конечных элементов. Отличие состоит в том, что в МКСЭ добавляется расчет суперэлементных базисных функций (В МКЭ они не рассчитываются, а задаются) и используется иная процедура вычисления коэффициентов локальных матриц жесткостей суперэлементов (необходимо интегрировать функции, заданные на внутренней сетке в суперэлементе).

5.2 Построение базисных функций

В этом разделе описаны некоторые особенности построения аппроксимирующих базисных функций, используемых в МКСЭ для данной задачи. Для простоты будем считать, что суперэлементы являются многогранниками с гранями произвольной формы.

В рассмотренном выше алгоритме используются базисные функции, аппроксимирующие поле перемещений на двумерных границах трехмерных подобластей-суперэлементов. Каждая компонента поля перемещений при этом аппроксимируется независимо. Поэтому необходи-

мо уметь аппроксимировать скалярные функции, заданные на границах суперэлементов- многогранников. Эта задача сводится к задаче построения интерполанта произвольной функции, заданной в двумерной области.

Для построения базисной функции введем на границе суперэлемента двумерную сетку, ячейки которой являются треугольниками или прямоугольниками. Базисные функции будем относить к узлам этой сетки. Будем считать, что сетка согласована с границей многогранника, то есть его вершины являются узлами сетки, а его ребра образованы ребрами сетки. Базисная функция, соответствующая некоторому узлу P сетки, строится следующим образом. В узле P она равняется единице, в остальных узлах она равняется нулю. Внутри ячеек сетки она продолжается линейно (если ячейка треугольная), либо как билинейная функция (если ячейка прямоугольная).

В простейшем случае на одну грань многогранника может приходиться одна ячейка сетки. Например, если суперэлемент имеет форму куба, то узлы и ячейки граничной сетки могут быть образованы узлами и гранями самого суперэлемента. Именно этот способ использовался в описанных ниже расчетах. Возможен другой вариант. Можно разделить каждую квадратную грань суперэлемента диагональю, а в пределах каждого получившегося треугольника использовать кусочно-линейную интерполяцию на треугольной сетке.

Такой подход позволяет аппроксимировать функции на границе многогранника, грани которого являются произвольными многоугольниками. Возможно использование и более сложных аппроксимаций более высокого порядка.

6 Результаты численного моделирования

В данном разделе метод конечных суперэлементов применен для исследования напряженно-деформированного состояния и свойств композиционных материалов. В рассматриваемом случае некоторый материал – матрица армирован включениями в виде коротких волокон. Поведение материала будем считать упругим.

В общем случае представляет интерес информация о приведенных (усредненных) свойствах композита в зависимости от упругих и геометрических параметров матрицы и включения. Такими параметрами являются, например, упругие коэффициенты матрицы и включения, объемная доля включений в материале, их геометрия и ориентация и т.д. Также представляет интерес исследование особенностей напряженно-деформированного состояния тела в масштабе элементарной ячейки композита. Последнее особенно важно при рассмотрении процесса пластического деформирования и разрушения композитов.

Отметим, что в настоящее время уже существуют несколько различных подходов для описания и анализа свойств композитов. Такими подходами являются, например, метод асимптотического осреднения ([11]), различные микромеханические ([12],[13],[14]-[16]) и смесевые модели ([17]-[20]), широко применяемые в инженерной практике. Эти модели позволяют определять приведенные упругие свойства композита в зависимости от свойств его структурных элементов.

Рассмотрим подробнее эти подходы. В методе асимптотического осреднения ([11]) считается, что область состоит из большого количества одинаковых ячеек. Таким образом, параметры среды являются периодическими функциями точки пространства. Если зафиксировать размер L области, а размер l одной ячейки считать малым, то величину $\epsilon = l/L$ можно считать малым параметром, который стремится к нулю, когда количество ячеек неограниченно возрастает. В этом случае удастся по-

строить разложение решения исходной задачи в ряд по степеням ϵ :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots$$

При этом функция u_0 будет являться решением некоторого осредненного уравнения, коэффициенты которого являются эффективными коэффициентами материала. При малых ϵ функция u_0 является хорошим приближением к u , и рассматриваемую среду можно хорошо описывать эффективными коэффициентами.

При использовании микромеханических моделей ([12],[13],[14]-[16]) приведенные коэффициенты определяются из анализа точных аналитических решений тех или иных модельных задач. Например, в модели концентрических сфер рассматривается сфера из вещества включения, окруженная сферой из вещества матрицы с тем же соотношением объемов, что и в композите в среднем. Эта двухфазная сфера помещена в среду, обладающую пока что неизвестными приведенными характеристиками. При наложении любого напряжения на бесконечности отклик среды со сферой должен совпадать с откликом среды без сферы. Из этого условия определяются приведенные характеристики композита. Известны и другие модели, например, полидисперсная модель или степенная оценка Коэна. Этот (микромеханический) подход, в отличие от предыдущего, является полуэмпирическим. Оценки близости решения исходной задачи и задачи с приведенными параметрами, в отличие от предыдущего случая, здесь обычно неизвестны.

В смесевых моделях ([17]-[20]) предполагается, что материал матрицы и включения идеально «перемешан», то есть в любой точке пространства одновременно присутствует как материал матрицы, так и материал включения. В этом случае для значений приведенных упругих параметров могут быть получены двусторонние оценки. Для этого могут быть использованы двойственные вариационные формулировки задач теории упругости, которые содержат функционалы с совпадающими стационар-

ными значениями, но достигающими в своих стационарных точках альтернативных экстремумов. В дальнейшем мы будем использовать полученные именно таким образом двусторонние оценки значений упругих параметров композита для сравнения с расчетными значениями этих же параметров. В частности, мы будем использовать широко известные оценки Фойгта-Рейсснера и Хашина-Штрикмана, а также другие, более точные оценки ([17]-[20]).

Для исследования особенностей поведения композитов на микроуровне используются подходы, основанные на точном или приближенном решении некоторых модельных задач в одной ячейке композита (см., например, [21]).

Метод конечных суперэлементов позволяет проводить прямое численное моделирование напряженно-деформированного состояния композиционного материала с непосредственным учетом большого количества включений. При этом, с одной стороны, по результатам такого моделирования могут быть получены приведенные характеристики изучаемого материала, а с другой – детально изучено поведение материала в масштабах ячейки композита. Отметим, что решение такой задачи обычными конечно-разностными или конечно-элементными методами представляет большую трудность, связанную с большой размерностью конечномерной задачи. Так, даже в области с одним включением необходимо использовать очень подробные сетки, позволяющие хорошо разрешить решение в окрестности контакта матрицы и включения. Число узлов в такой сетке может доходить до $\sim 10^5$ и больше. Понятно, что решить задачу в области с несколькими включениями на сетке с таким же шагом очень сложно.

В соответствии с МКСЭ мы будем считать, что расчетная область составлена из некоторого количества подобластей – суперэлементов (СЭ). Каждый такой СЭ соответствует одной ячейке композита. Внутри каждого СЭ находится включение. В общем случае все СЭ могут быть разными.

ми, каждый СЭ и соответствующее ему включение могут иметь разную форму и значения упругих параметров. В дальнейших расчетах все СЭ имеют форму кубов, включения могут иметь разную форму, значения упругих коэффициентов матрицы и включения не меняются от суперэлемента к суперэлементу.

Отметим, что включение содержится целиком внутри одного СЭ. Это означает, что на границах СЭ упругие свойства среды не меняются, и, значит, на границе СЭ решение является относительно гладким. Это позволяет использовать для аппроксимации перемещений на границах СЭ простейшие билинейные базисные граничные функции. Для расчета решения внутри СЭ используется сетка, достаточно мелкая для того, чтобы описать особенности решения.

Ниже непосредственно представлены некоторые результаты моделирования напряженно-деформированного состояния композиционных материалов.

6.1 Определение упругих параметров для композита с регулярной структурой

В этом разделе представлен алгоритм определения упругих свойств композитов. Полученные результаты сравнены с доступными экспериментальными данными и различными аналитическим двусторонними оценками, полученными в рамках смесевых и микромеханических моделей.

Расчетная область состоит из некоторого количества одинаковых ячеек-суперэлементов. Одна такая ячейка имеет форму куба, включение имеет вид сферы или куба. Центры включения и ячейки совпадают. Таким образом, все включения имеют одинаковую геометрию и упругие свойства. Единственным варьируемым параметром в данном случае является диаметр включения.

Рассмотрим сначала некоторую модельную задачу. Она необходима

для постановки граничных условий на границе расчетной области и анализа полученных численных результатов.

Рассмотрим цилиндрическую область произвольного поперечного сечения с образующей, параллельной оси Ox_3 . Будем считать, что торцы области перпендикулярны оси Ox_3 . На торцах области заданы постоянные нормальные напряжения

$$\gamma_\nu \sigma = p\nu.$$

Здесь $\nu = (0, 0, 1)$ или $\nu = (0, 0, -1)$ – внешняя нормаль к границе области, p – интенсивность нормальных напряжений. На боковой поверхности области

$$\gamma_\nu \sigma = 0.$$

Будем считать, что среда является однородной и изотропной и имеет модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ .

Решение этой задачи определено с точностью до перемещения среды как твердого тела и имеет вид ([22])

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\frac{\mu}{E}p, \quad \epsilon_{33} = \frac{1}{E}p, \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = 0, \\ u_1 = u_{1,0} - \frac{\mu p}{E}x_1, \quad u_2 = u_{2,0} - \frac{\mu p}{E}x_2, \quad u_3 = u_{3,0} + \frac{p}{E}x_3, \end{aligned} \quad (16)$$

где $u_{i,0}$ – смещение точки стержня, совпадающей с началом координат. В дальнейшем будем считать, что $u_{i,0} = 0$.

Такое напряженно-деформированное состояние называется одноосным.

Представим теперь, что для некоторого тела, находящегося в таком напряженно-деформированном состоянии, нам известны нагрузка p (как граничное условие) и перемещение какой-нибудь произвольной точки тела с отличными от нуля координатами.

Тогда упругие параметры могут быть определены из соотноше-

ния (16),

$$E = \frac{x_3}{u_3} p, \quad \mu = -\frac{u_1}{x_1} \frac{x_3}{u_3} = -\frac{u_2}{x_2} \frac{x_3}{u_3}. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь область в форме параллелипипеда, составленную из описанных выше ячеек. Граничные условия возьмем из рассмотренного модельного решения. Подчеркнем, что эти условия задаются на границе области, составленной из большого количества суперэлементов. Они не призваны заменить какие-либо граничные условия на границе одной элементарной ячейки, «вырезанной» из тела.

Решив численно эту задачу с помощью МКСЭ, вычислим в каждом узле суперэлементной сетки параметры E и μ по формулам (17). Среднее арифметическое значение этих параметров по всем узлам будем считать приведенными упругими параметрами композита. Таким образом, численное решение задачи в области с неоднородными упругими свойствами сравнивается с аналитическим решением задачи в однородной области с неизвестными приведенными упругими свойствами, подлежащими определению.

Перейдем теперь непосредственно к результатам моделирования. Сначала зафиксируем форму и объемную долю включений. Будем менять лишь количество суперэлементов, из которых составлена рассматриваемая область. Результаты расчетов приведены в таблице 1. В ней указаны минимальные, максимальные и средние (по узлам суперэлементов) значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона для различных вариантов расчетов.

Здесь и далее упругие параметры обезразмерены таким образом, что модуль Юнга матрицы равняется единице, $E_m = 1$. В данном расчете коэффициент Пуассона матрицы $\mu_m = 0.33$, модуль Юнга и коэффициент Пуассона включения $E_f = 6.5$, $\mu_f = 0.25$. Объемная доля включения $\rho = 0.12$. Эти параметры соответствуют реальному композиту с алюминиевой матрицей и включениями из *SiC* ([21]).

	E_{min}	E_{max}	E	μ_{min}	μ_{max}	μ
$1 \times 1 \times 1$	1.075	1.078	1.077	0.3177	0.3200	0.3189
$2 \times 2 \times 2$	1.075	1.077	1.077	0.3158	0.3192	0.3180
$2 \times 2 \times 4$	1.076	1.078	1.077	0.3145	0.3201	0.3179
$2 \times 3 \times 2$	1.075	1.077	1.077	0.3160	0.3191	0.3180
$2 \times 3 \times 4$	1.076	1.078	1.077	0.3143	0.3202	0.3178
$2 \times 5 \times 2$	1.075	1.077	1.077	0.3164	0.3190	0.3180
$2 \times 5 \times 4$	1.075	1.078	1.077	0.3140	0.3206	0.3179
$3 \times 3 \times 2$	1.075	1.077	1.077	0.3152	0.3192	0.3180
$3 \times 3 \times 4$	1.076	1.077	1.077	0.3126	0.3192	0.3174
$15 \times 15 \times 15$	1.073	1.081	1.078	0.2574	0.3191	0.3110

Таблица 1. Значения приведенных параметров в зависимости от «объема» области

Видно, что расчетные значения упругих параметров практически не зависят от узла, в котором они вычисляются, и количества суперэлементов, из которого составлена область. Этот результат объясняется прежде всего симметрией задачи. Область составлена из одинаковых ячеек. При наложении граничных условий, соответствующих одноосному напряженно-деформированному состоянию, в силу симметрии области и отдельных ячеек в каждом суперэлементе реализуется (теоретически) одинаковое напряженно-деформированное состояние. Помимо этого, включения расположены в центрах суперэлементов и грани суперэлементов равноудалены от включений. Поэтому плоскости, образованные гранями суперэлементов, остаются плоскими при деформировании. Вследствие этого результат будет мало зависеть как от узла суперэлементной сетки, в котором вычисляются упругие параметры, так и от количества суперэлементов, из которых составлена область.

По существу, упругие параметры определяются из условия того, что граница неоднородного композитного тела деформируется так же, как граница однородного тела с приведенными упругими параметрами. Можно сказать и по-другому. Как отмечалось выше, операторы

Пуанкаре-Стеклова, соответствующие этой задаче, сопоставляют заданным на границе тела перемещениям соответствующие им поверхностные усилия. Эти операторы не несут явно информации о внутренней структуре области, они описывают реакцию всего тела на приложенное к нему воздействие. Приведенные значения параметров выбираются из условия, что операторы Пуанкаре-Стеклова задачи для однородного тела в некотором смысле аппроксимируют операторы Пуанкаре-Стеклова исходной задачи для неоднородной среды в той же области.

Подчеркнем, что внутри отдельных суперэлементов напряженно-деформированное состояние не является одноосным, а имеет некоторую сложную структуру. Границы же суперэлементов, как показывают расчеты (таблица 1), деформируются так же, как и границы суперэлементов аналогичной задачи для однородного тела, в котором при тех же граничных условиях реализуется одноосное напряженно-деформированное состояние.

Рассмотрим теперь зависимости приведенных значений упругих параметров от удельного объема включения.

На Рис. 1 показаны экспериментальные и расчетные значения модуля упругости для сплава карбида вольфрама и кобальта в зависимости от объемной доли карбида вольфрама. Экспериментальные данные обозначены маркерами в виде ромба. Маркеры в виде кружков соответствуют расчетным данным. Экспериментальные данные были взяты из [23]. Включения имели форму кубов. Упругие параметры в данном случае имеют следующие значения:

$$E_m = 1, \mu_m = 0.29, E_f = 3.41, \mu_f = 0.22.$$

Видно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных.

На Рис. 2 показана та же зависимость вместе с двусторонними аналитическими оценками для модуля упругости. Рассмотрены три типа оценок: Фойгта-Рейсснера (самая грубая), «вилка» Хашина-Штрикмана и

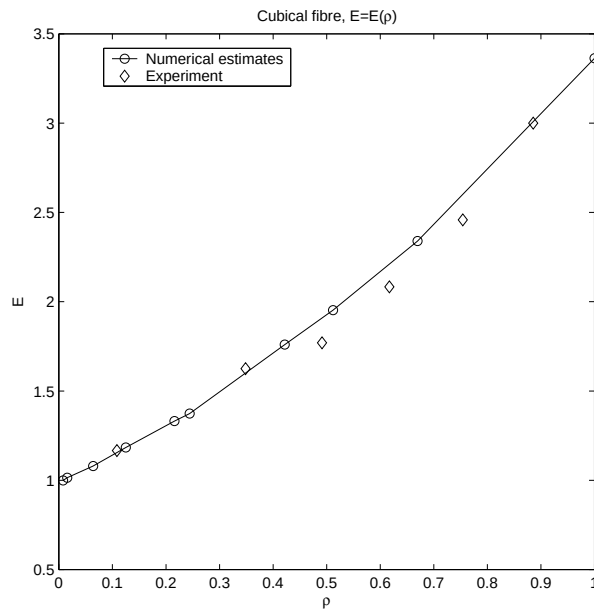


Рис. 1. Экспериментальные и расчетные значения модуля Юнга (сплав карбида вольфрама и кобальта)

оценки, полученные в работах ([17]-[20]). Использованы те же обозначения, что и в предыдущем случае.

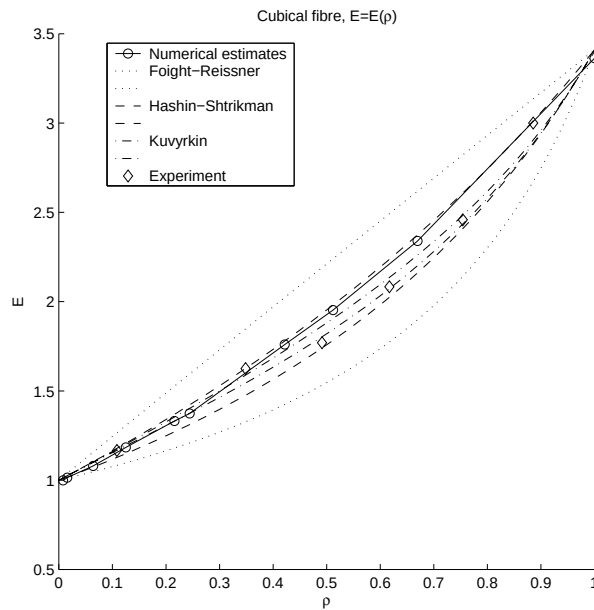


Рис. 2. Экспериментальные и расчетные значения модуля Юнга (сплав карбида вольфрама и кобальта)

Далее приведены результаты расчетов для случая композита с алюминиевой матрицей и включениями из SiC . Значения упругих параметров

в этом случае такие:

$$E_m = 1, \mu_m = 0.33, E_f = 6.5, \mu_f = 0.33.$$

На Рис. 3 показана зависимость приведенного модуля упругости от объемной доли включений для случая, когда включение имеет сферическую форму. На графике представлены те же аналитические оценки, что и на Рис. 2.

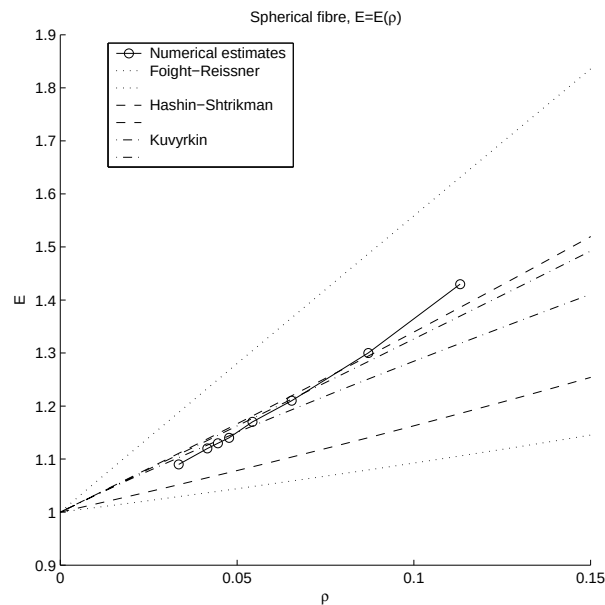


Рис. 3. Расчетные значения модуля Юнга, сферические включения ($Al - SiC$)

На Рис. 4 показан график зависимости приведенного модуля упругости от объемной доли включений для случая, когда включение имеет кубическую форму.

Сравнение с экспериментальными данными в данном случае не проводилось.

6.2 Определение упругих параметров для композита с нерегулярной структурой

В разделе представлены результаты определения упругих параметров композита в случае, когда его волокна имеют различную ориентацию в пространстве.

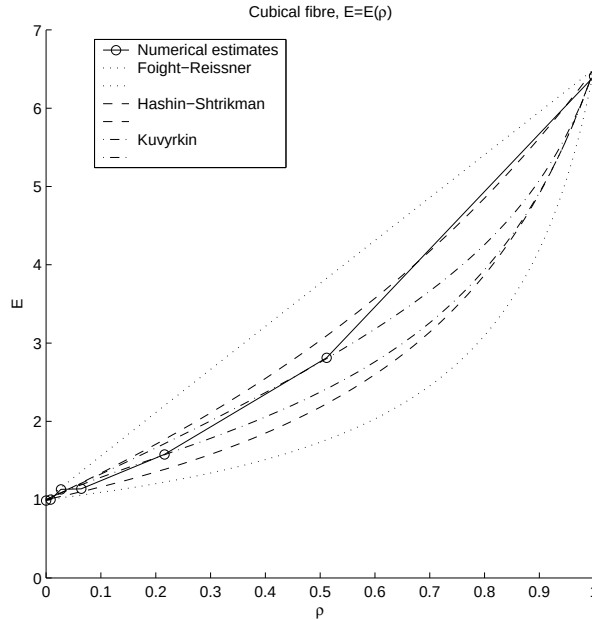


Рис. 4. Расчетные значения модуля Юнга, кубические включения ($Al - SiC$)

Будем считать, что включение имеет форму пластинки в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами h_1, h_2, h_3 , параллельными осям координат. При этом $h_1/h_2 = 1, h_1/h_3 = 3$. Центр включения и ячейки композита совпадают. Плоскость пластинки может быть параллельна одной из трех координатных плоскостей. Таким образом, в данном случае есть три типа суперэлементов, соответствующих трем вариантам ориентации пластинки в пространстве. Расчетная область случайным образом заполняется суперэлементами этих трех типов. Объемная доля включений во всех расчетах в этом разделе одинакова и равна $\rho = 0.243$. Упругие параметры имеют следующие значения: $E_m = 1, \mu_m = 0.33, E_f = 6.5, \mu_f = 0.25$.

В предыдущих расчетах предельные и средние значения упругих параметров практически не зависят от количества суперэлементов, из которых составлена область. Очевидно, что в данном случае это не так. Отличие связано с тем, что теперь тело локально уже не является изотропным. Поэтому возникает вопрос об определении представительного объема композита. Другими словами, неизвестно, какое количество суперэлементов необходимо взять для того, чтобы тело, анизотропное на

микроуровне, вело себя как изотропное на макроуровне. В данной серии расчетов исследована зависимость расчетных упругих параметров от количества суперэлементов, из которых составлена область.

Рассмотрена область в виде куба, состоящего из $N \times N \times N$ суперэлементов. Количество суперэлементов во всем теле равно N^3 . Расчет производился для $N = 2, \dots, 22$. В каждом случае область случайным образом заполнялась суперэлементами трех типов. Далее производился расчет и, как и раньше, вычислялись значения упругих параметров для каждого узла суперэлементной сетки. Приведенным значением упругих параметров считалось их среднее арифметическое по всем узлам.

Результаты расчетов приведены на Рис. 5. По оси абсцисс отложено количество суперэлементов, составляющих расчетную область. По оси ординат отложены значения модуля Юнга. На рисунке показаны его минимальные, максимальные и средние значения. Штрих-пунктирной линией показано для сравнения модуля Юнга в случае, когда включения имеют форму куба, и тот же удельный объем что и включения в виде пластинок.

Видно, что среднее значение модуля Юнга быстро стабилизируется при увеличении количества суперэлементов. Быстрая скорость стабилизации объясняется тем, что в пределах граней суперэлемента перемещения аппроксимируются билинейной функцией. Также видно, что, в отличие от предыдущего случая, предельные значения модуля Юнга существенно отличаются от среднего. Это связано с тем, что в данной модели среда является анизотропной в масштабах одной ячейки. На Рис. 6 показаны аналогичные кривые для коэффициента Пуассона. Интересно сравнить полученные расчетные значения с рассмотренными в предыдущем разделе теоретическими оценками. В таблице 2 приведены двусторонние оценки Фойгта-Рейсснера, Хашина-Штрикмана и оценки из работ ([17]-[20]).

Расчетные значения упругих параметров для случая включений-

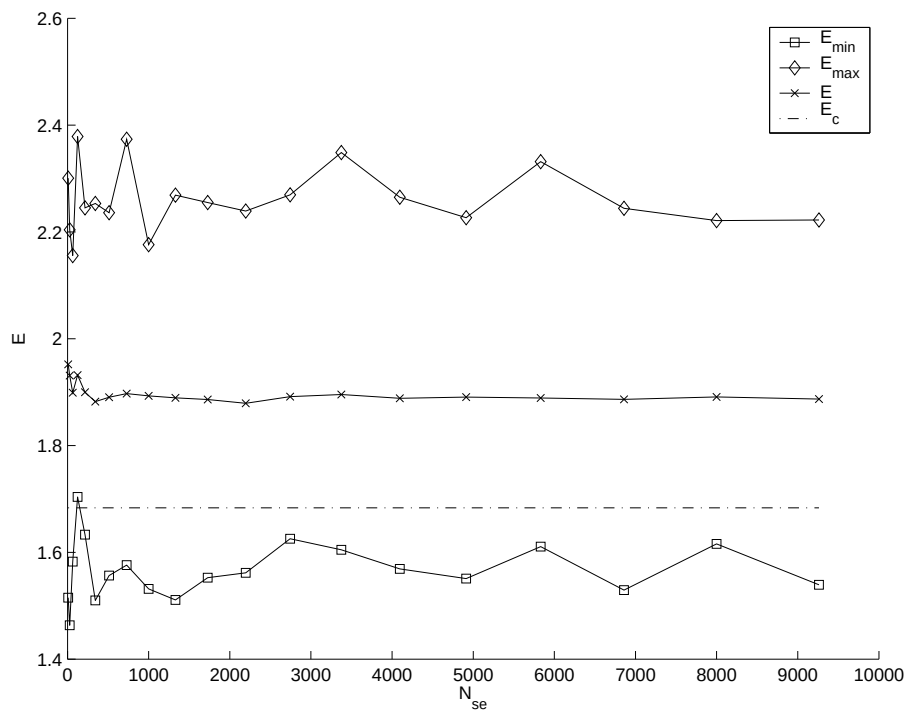


Рис. 5. Расчетные значения модуля Юнга

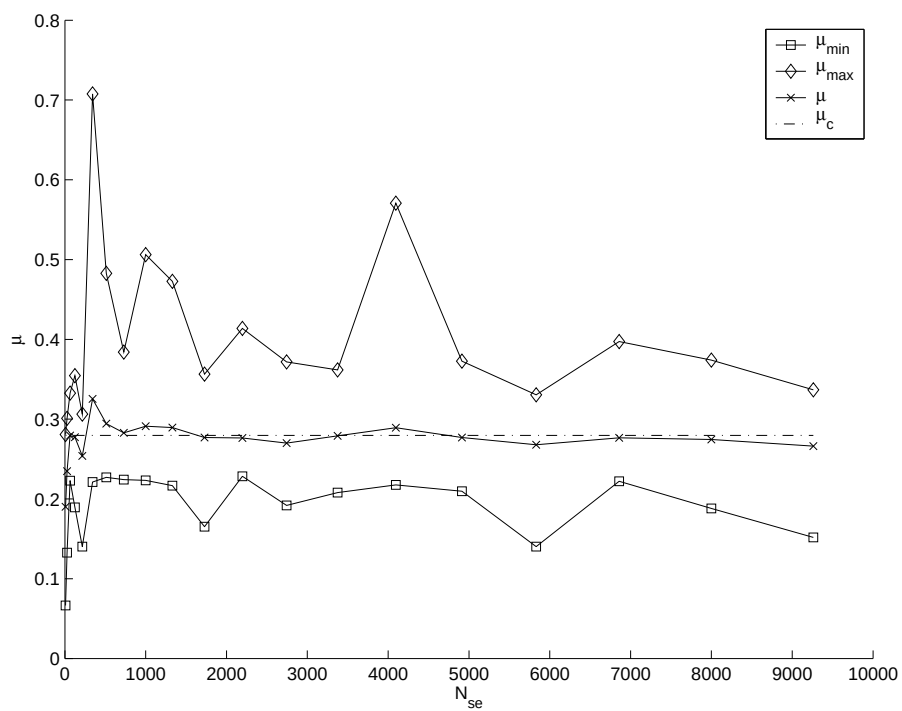


Рис. 6. Расчетные значения коэффициента Пуассона

пластинок таковы:

$$E = 1.8870, \quad \mu = 0.2662,$$

	Ф.-Р.	Х.-Ш.	К.
E_{min}	1.2588	1.4447	1.6393
E_{max}	2.3494	1.8751	1.8074
μ_{min}	0.2819	0.2915	0.2994
μ_{max}	0.3262	0.3120	0.3108

Таблица 2. Двусторонние теоретические оценки, $\rho = 0.243$

для случая включений-кубиков

$$E_c = 1.6832, \quad \mu_c = 0.2796.$$

Видно, что в последнем случае расчетные значения хорошо согласуются с теоретическими оценками. В этом случае условия расчета наиболее близки к ограничениям, которые заложены в используемые в данной работе смесевые модели, а именно, с локальной однородностью и изотропностью среды.

Разность этих значений показывает влияние эксцентриситета и ориентации включений на упругие свойства композита при неизменном удельном объеме включений.

Значения модулей Юнга в случае, когда все пластинки ориентированы одинаковым образом, такие: $E = 1.5408$, $\mu = 0.2424$ (пластинки параллельны плоскости Oxy), $E = 2.0693$, $\mu = 0.2934$ (пластинки параллельны плоскости Oxz или Oyz).

В описанных выше расчетах область фиксированного размера заполнялась случайным образом суперэлементами трех типов. При этом использовался один случайный вариант такого заполнения из многих. Приведенные ниже результаты показывают, насколько значения приведенных упругих параметров зависят от способа размещения суперэлементов внутри области. Рассмотрены области $5 \times 5 \times 5$, $10 \times 10 \times 10$, $15 \times 15 \times 15$ суперэлементов. Для каждой такой области генерировалось 10 случайных вариантов ее заполнения суперэлементами. Результаты расчетов приведены в таблице 3. В ней показаны средние (по вариантам заполнения)

значения упругих параметров и наибольшие по модулю отклонения то среднего.

	E	ΔE	μ	$\Delta \mu$
$5 \times 5 \times 5$	1.8946	0.031583	0.272	0.02852
$10 \times 10 \times 10$	1.8899	0.0093559	0.27736	0.018883
$15 \times 15 \times 15$	1.8883	0.0064842	0.27262	0.0099899

Таблица 3. Средние значения упругих параметров

Видно, что с ростом количества суперэлементов отклонение расчетных величин от их средних заметно убывает.

В заключение приведем графически типичные решения задачи. На Рис. 7 и Рис. 8 показаны линии уровня компонент u_y , u_z поля перемещений в сечении, проходящем через центр суперэлемента перпендикулярно оси Ox . Компонента u_x в этом сечении тождественно равна нулю.

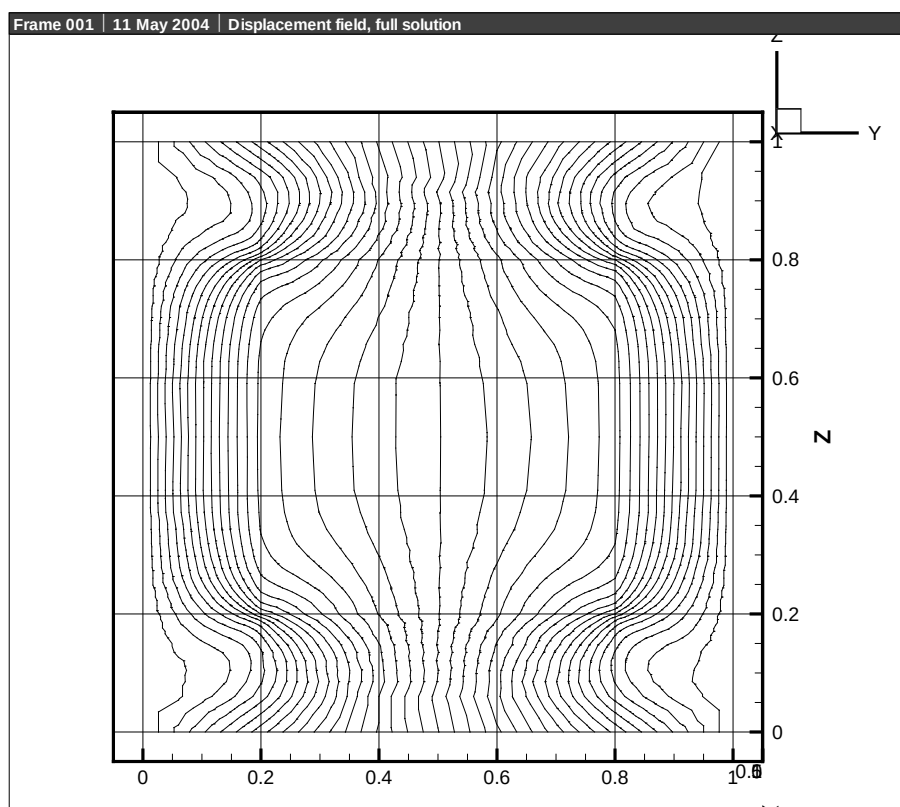


Рис. 7. Линии уровня компоненты поля перемещений u_y

На Рис. 9 и Рис. 10 показаны распределения полей интенсивностей напряжений и деформаций.

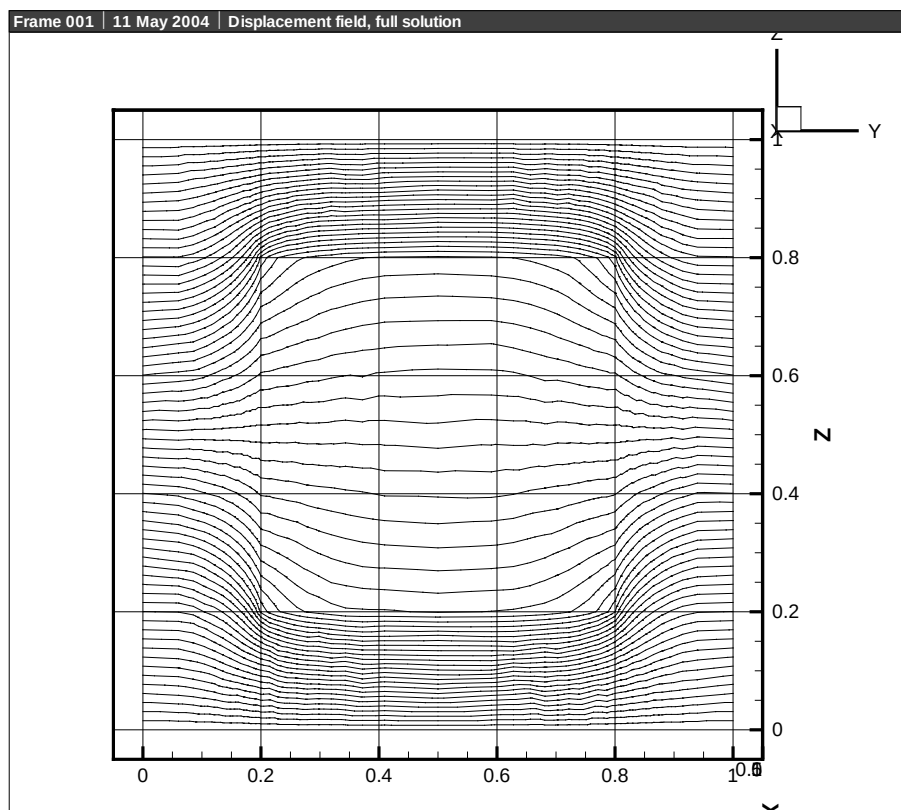


Рис. 8. Линии уровня компоненты поля перемещений u_z

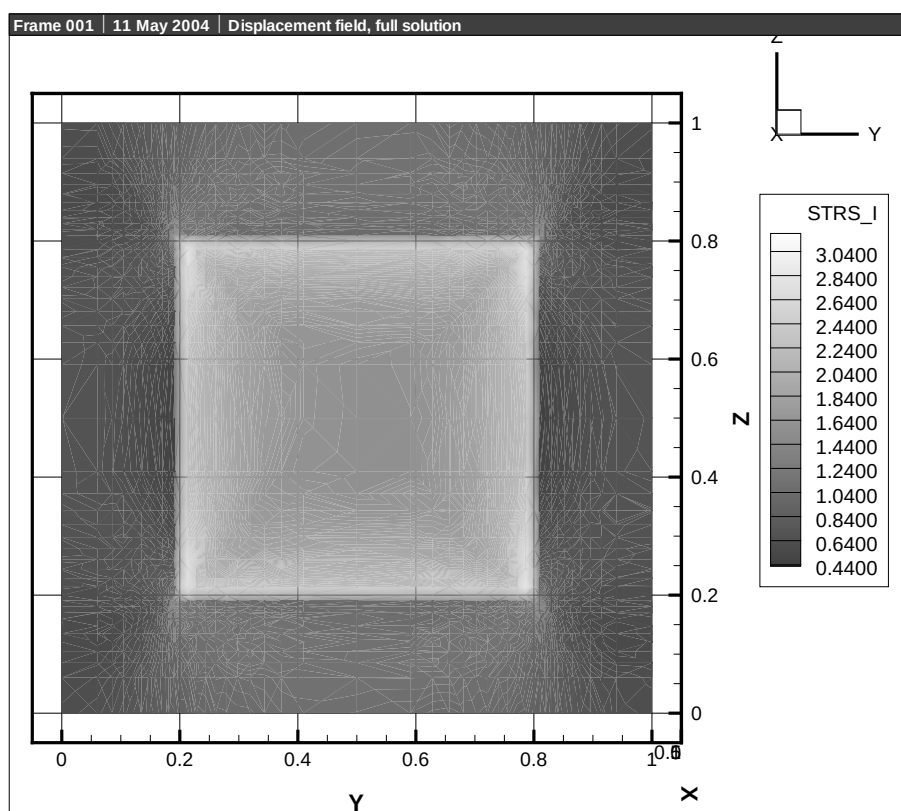


Рис. 9. Распределение интенсивности напряжений

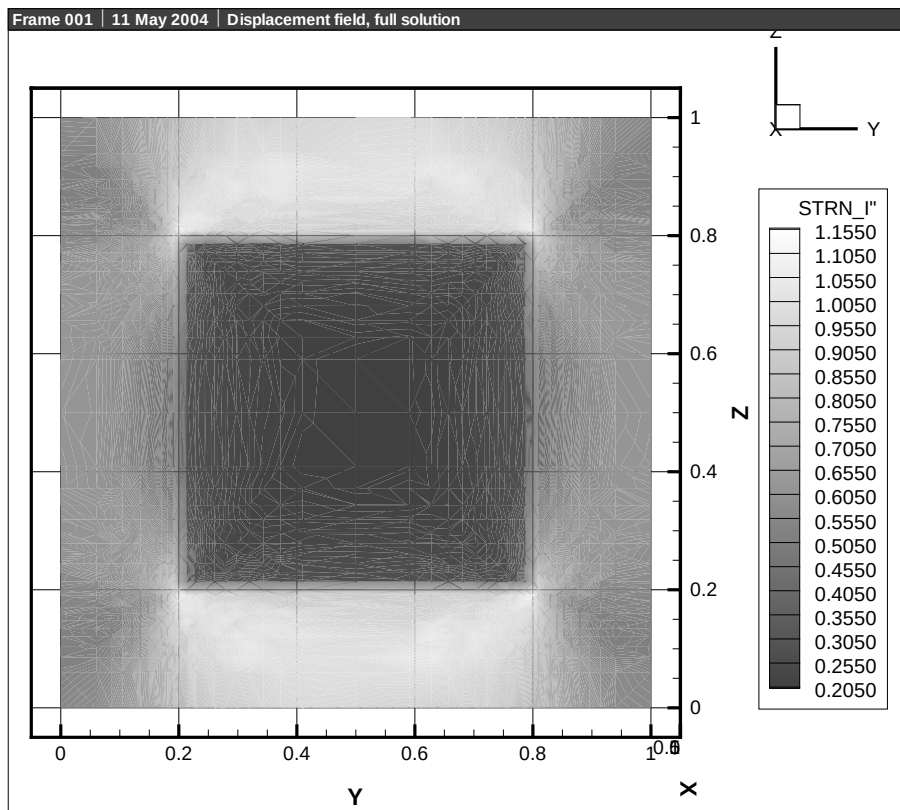


Рис. 10. Распределение интенсивности деформаций

Все Рис. 7-10 соответствуют одному суперэлементу. Включение имеет форму куба с ребром длиной $l = 0.6$.

Далее приведены аналогичные рисунки для случая тела $2 \times 2 \times 2$. Включения имеют форму кубов разных размеров. На Рис. 11 и Рис. 12 показаны линии уровня компонент u_y и u_z поля перемещений.

На Рис. 13 и Рис. 14 показаны распределения интенсивностей напряжений и деформаций.

Расчет суперэлементных базисных функций производился обычным методом конечных элементов. Использовались простейшие конечные элементы в виде тетраэдров с кусочно-линейными базисными функциями. Для аккуратного разрешения особенностей решения в окрестности границы раздела матрицы и включения использовались адаптивные сгущающиеся сетки. Число узлов в расчетной конечноэлементной сетке доходило до $1.5 \cdot 10^5$.

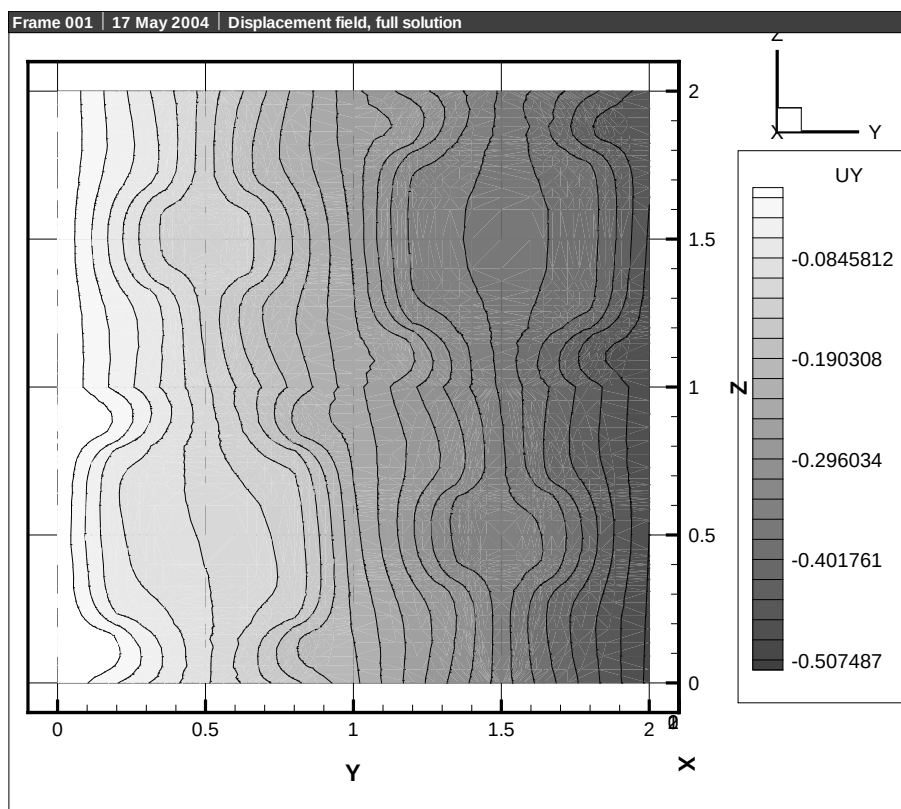


Рис. 11. Линии уровня компоненты поля перемещений u_y

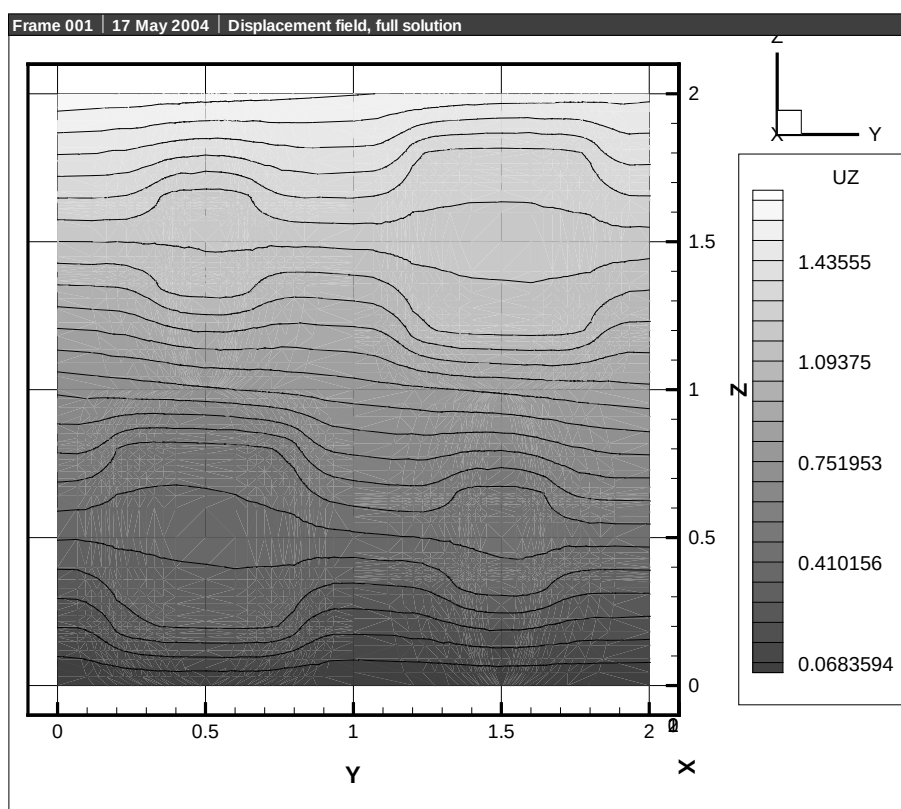


Рис. 12. Линии уровня компоненты поля перемещений u_z

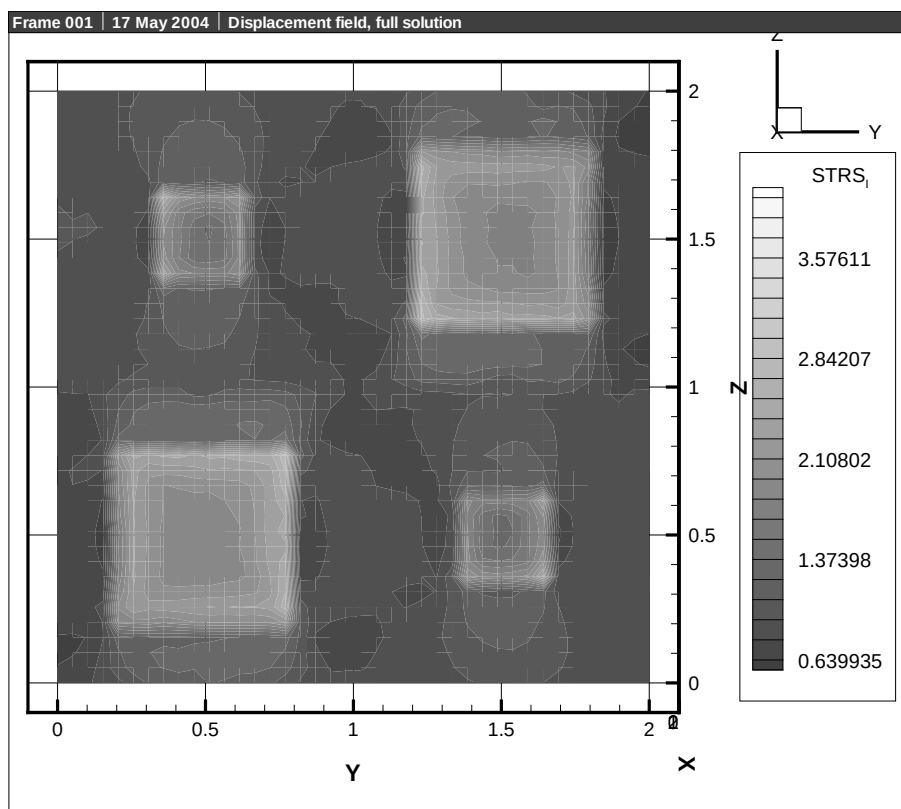


Рис. 13. Распределение интенсивности напряжений

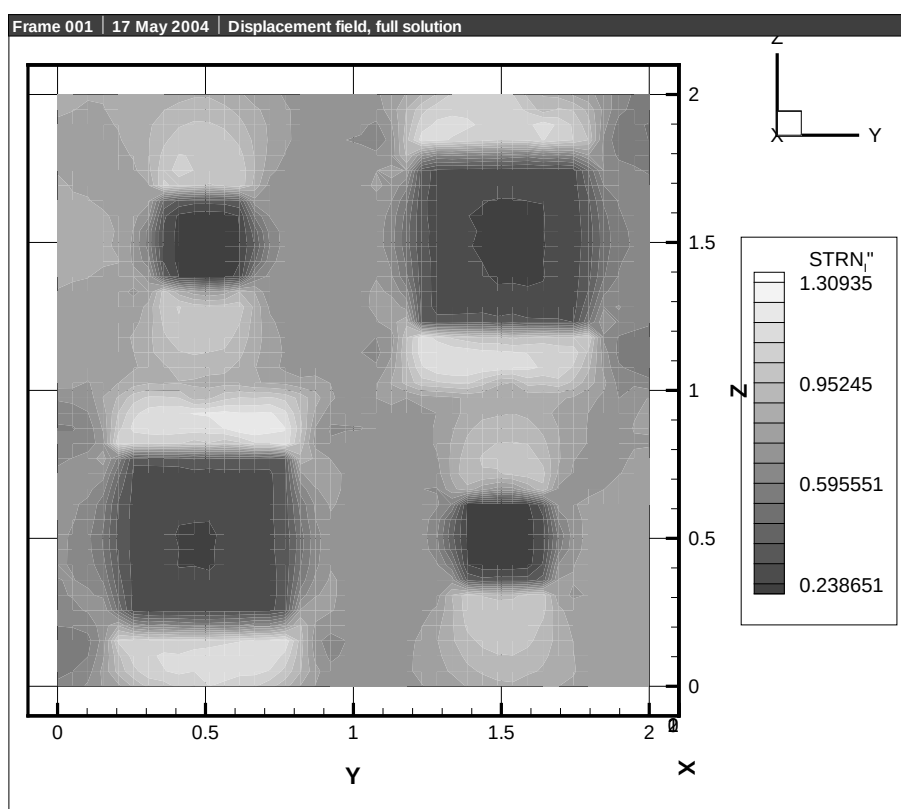


Рис. 14. Распределение интенсивности деформаций

7 Заключение

В работе рассмотрен МКСЭ для задач трехмерной линейной теории упругости. Расчетная схема МКСЭ получена с использованием разработанного ранее формального подхода. МКСЭ применен для численного решения некоторых задач теории упругости композиционных материалов регулярной и нерегулярной структуры. Для данных задач метод показал свою эффективность. Получено хорошее качественное и количественное совпадение результатов расчетов с доступными теоретическим и экспериментальными результатами.

Список литературы

- [1] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Об одном варианте метода конечных элементов // ЖВМиМФ. 1979. Т.19, №4. с. 950-960.
- [2] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Расчет диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов // Препринт ИПМ АН СССР, 1987, №171.
- [3] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Расчет напряжений в композитном теле методом конечных суперэлементов // Препринт ИПМ АН СССР, 1994, №97.
- [4] *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Издательство МФТИ, 1994. 528 с.
- [5] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* О связи метода конечных суперэлементов Федоренко и проекционно-сеточных методов // Препринт ИПМ РАН, 2001, № 67.
- [6] *Galanin M., Savenkov E.* Fedorenko finite superelement method as special Galerkin approximation// Mathematical Modelling and Analysis, 2002, V.7, №1, pp. 41-50

- [7] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* К обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко // ЖВМиМФ, 2003, т.63, №5, с. 711-727.
- [8] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Метод конечных суперэлементов для задачи о скоростном скин-слое, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 11, 2004 г.
- [9] *В.И. Агошков,* Методы разделения области: некоторые результаты теории и приложения // М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1990, 40 с.
- [10] *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.:Наука, 1991, 288 с.
- [11] *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 352 с.
- [12] *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.:Мир, 1982, 334 с.
- [13] *Скворцов В.Р.* Основы механики композитов. СПб.: Изд. центр СПбГМТУ, 1995, 111 с.
- [14] *Aboudi J.* Micromechanical analysis of composites by the metho of cells// Appl. Mech. Rev., V. 42, № 7, pp. 193-221, 1989
- [15] *Aboudi J.* A continium theory for fiber-reinforced elastic-viscoplastic composites//Int. J. Engng. Sci., V. 20, № 5, pp. 605-621, 1982
- [16] *Fleming W.J., Dowson A.L.* Prediction of the Fatigue Life of an Aluminium Metal Matrix Composite Using the Theory of Cells//Science and Engineerring of Composite Materials, V. 8, № 4, pp. 181-189, 1999
- [17] *Ефименко А.В., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* О двусторонних оценках термомеханических и теплофизических свойств неоднородных

- материалов//Динамика, прочность и износостойкость машин, № 2, май 1996, Международный журнал на электронных носителях, с. 3-7
- [18] *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Прогнозирование теплофизических и термомоупругих характеристик композитов//Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение, № 2, 1994, с. 78-83
- [19] *Efimenko A.V., Kuvyrkin G.N.* New estimates of the effective elastic moduli of two-component composites//Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela, V. 29, № 1, pp. 18-26, 1994
- [20] *Бураго Н.Г., Галанин М.П., Кувыркин Г.Н.* Основные вариационные принципы механики сплошной среды. В печати.
- [21] *Fleming W.J., Temis J.M.* Numerical simulation of cyclic plasticity and damage of an aluminium metal matrix composite with particulate *SiC* inclusions// Int. Journal of Fatigue, V. 24, pp. 1079-1088, 2002
- [22] *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов. М.:Наука, 1986, 560 с.
- [23] *Зарубин В.С.* Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.:Наука, 1977, 400 с.