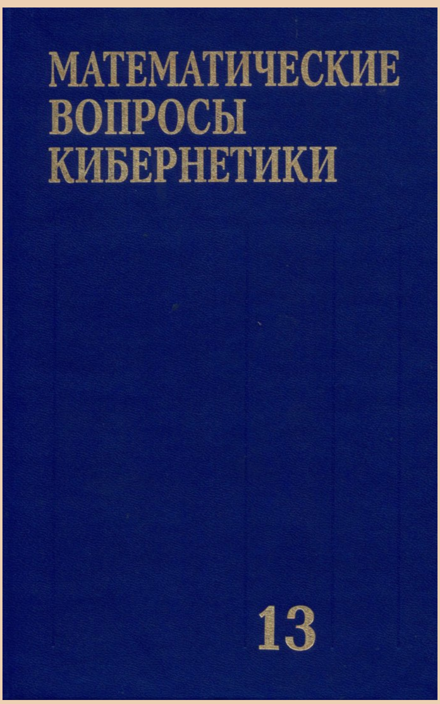

Р. Ф. Сафин

О соотношении между глубиной и сложностью формул для предполных классов k-значной логики

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ГЛУБИНОЙ И СЛОЖНОСТЬЮ ФОРМУЛ В ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССАХ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

Р. Ф. САФИН

(МОСКВА)

§ 1. Введение

В работе рассматривается задача о соотношении глубины и сложности формул, реализующих функции из предполных классов k-значной логики.

Конечную систему функций k-значной логики $\mathfrak{A}$ будем называть равномерной, если существуют такие константы c и d, зависящие только от системы $\mathfrak{A}$, что для всех функций f из $[\mathfrak{A}]$ выполнено неравенство

$$D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c \log_2 L_{\mathfrak{A}}(f) + d, \tag{1}$$

где $L_{\mathfrak{A}}(f)$ — минимальная сложность, а $D_{\mathfrak{A}}(f)$ — минимальная глубина функции f в классе формул над системой $\mathfrak{A}$. Все необходимые определения приведены в § 2.

В. М. Храпченко показал [16], что любая полная в P_2 конечная система функций равномерна. Аналогичный результат был получен Ф. Спирой [27], (см. также [13, 14, 19–21, 23]). Отметим, что методы преобразования формул, приведенные в работах [16, 27] легко переносятся на случай полных систем функций k-значной логики при $k \geqslant 3$. Однако они существенно используют полноту системы. Для конечных полных монотонных систем булевых функций равномерность была доказана И. Вегенером [29] (см. также [30]). Равномерность произвольных конечных систем булевых функций была доказана А. Б. Угольниковым [10, 11] (см. также [9, 24]). Им также приведены примеры неравномерных систем функций из P_k при $k \geqslant 3$. Л. И. Ахметовой [1] был анонсирован результат о том, что любая конечная система функций в P_3, порождающая предполный класс, является равномерной. В работе автора [7] доказано, что любая конечная система функций, порождающая предполный в P_k класс функций, монотонных относительно некоторого отношения частичного порядка $\preceq$, является равномерной для всех $k \leqslant 7$, а также в тех случаях, когда частично упорядоченное множество $(E_k, \preceq)$ является решеткой. О сложности реализации булевых функций формулами см. [4, 5].

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00985), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1807.2003.1), программы «Университеты России» (проект УР.04.03.007/03), программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Оптимальный синтез управляющих систем»).

Пусть $k \geqslant 2$. Через E_k будем обозначать множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Через A_ρ будем обозначать класс функций, сохраняющих отношение ρ (определения см. в § 2). Все семейства предполных классов описаны в работах И. Розенберга [25, 26]. Будем пользоваться обозначениями из работы [17], согласно которым в P_k имеются следующие семейства предполных классов:

1) классы самодвойственных функций — классы типа $\mathbb{P}$;

2) классы линейных функций — классы типа $\mathbb{L}$;

3) классы функций, сохраняющих разбиения множества E_k, — классы типа $\mathbb{E}$;

4) классы функций, сохраняющих сильно гомоморфные прообразы h-адических элементарных отношений, — классы типа $\mathbb{B}$;

5) классы монотонных функций — классы типа $\mathbb{O}$;

6) классы функций, сохраняющих центральные отношения, — классы типа $\mathbb{C}$.

Если ρ — отношение частичного порядка на E_k, такое, что для любых двух элементов a и b из E_k существуют $\sup(a, b)$ и $\inf(a, b)$ относительно частичного порядка ρ, то будем говорить, что A_ρ — класс *типа* $\mathbb{O}^*$. Если τ — бинарное центральное отношение, то будем называть A_τ классом *типа* $\mathbb{C}_2$. Если σ — унарное центральное отношение (т. е. унарное отношение, отличное от E_k и $\varnothing$), то будем называть A_σ классом *типа* $\mathbb{C}_1$. Положим $\rho^* = E_4^3 \setminus \{(1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 2), (1, 3, 2)\}$.

В настоящей работе получены следующие основные результаты (см. также [6, 8]).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, $k \geqslant 3$, такая, что $[\mathfrak{A}]$ является предполным классом одного из следующих типов: $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{O}^*$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$. Тогда система $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Следствие 1. (*см. также* [1]). *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_3, такая, что $[\mathfrak{A}]$ — предполный класс в P_3. Тогда система $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_4, такая, что $[\mathfrak{A}]$ — предполный класс в P_4 не являющийся двойственным классу A_{ρ^*}. Тогда система $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Теорема 2. *Пусть A является предполным классом типа $\mathbb{C}$. Тогда существует такая равномерная система $\mathfrak{A}$, что $A = [\mathfrak{A}]$.*

Теорема 3. *Пусть A_ρ — произвольный предполный класс в P_k, $2 \leqslant k \leqslant 7$. Тогда существует такая равномерная система $\mathfrak{A}$, что $A_\rho = [\mathfrak{A}]$.*

При преобразовании формул над одной системой функций в эквивалентные формулы над другой системой функций глубина формул изменяется линейно. Для сложности это вообще говоря не так (это следует, например, из результатов работы [12]). Однако, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ две конечные равномерные системы функций из P_k и $[\mathfrak{A}] = [\mathfrak{B}]$, то они полиномиально эквивалентны, т. е., любая формула над $\mathfrak{A}$ может быть преобразована в эквивалентную формулу над $\mathfrak{B}$ с не более чем полиномиальным увеличением сложности и наоборот. Поскольку в P_2 любая конечная система равномерна, любые конечные системы, порождающие один и тот же класс булевых функций, полиномиально эквивалентны (см. [9, 11]). Из результатов данной работы для ряда предполных классов вытекают соотношения между сложностью формул в различных конечных порождающих системах; в частности, для некоторых семейств предполных классов доказана полиномиальная эквивалентность порождающих систем (подробнее см. § 10).

§ 2. Основные определения и вспомогательные утверждения

2.1. Определения и обозначения. Пусть $k \geqslant 1$. Через E_k будем обозначать множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Через A^n будем обозначать n-ую декартову степень произвольного множества A. Через $|A|$ будем обозначать количество элементов произвольного конечного множества A. Пусть $k \geqslant 2$. Функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, аргументы которых определены на E_k, такие, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k$, при $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_k$, будем называть *функциями k-значной логики.* Множество всех функций k-значной логики обозначим через P_k. Аналогично будем обозначать через P_1 множество функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, аргументы которых определены на E_1, таких, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_1$, при $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_1$. Функции от n переменных будем называть *n-местными функциями.* Константы мы будем считать одноместными функциями. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное множество функций из P_k, $n \geqslant 1$. Через $\mathfrak{A}^{(n)}$ будем обозначать множество всех функций из множества $\mathfrak{A}$, которые зависят от n или меньшего числа переменных. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное конечное множество функций из P_k. Через $m(\mathfrak{A})$ будем обозначать максимальное количество переменных у функций из $\mathfrak{A}$. Пусть Q — непустое подмножество E_k. Множество всех функций из P_k, принимающих значения только из множества Q, будем обозначать через $P_{k,Q}$. Функции k-значной логики $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ будем называть *равными* и писать $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, если они получаются друг из друга при помощи добавления и удаления несущественных переменных (подробнее см. [18]). Через $\widetilde{x}$ мы будем обозначать набор переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное множество функций из P_k. *Формулой над* $\mathfrak{A}$ будем называть

1) любой символ переменой,

2) любую последовательность символов вида $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, где f — символ n-местной функции, принадлежащей множеству $\mathfrak{A}$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$. *Тривиальными формулами* будем называть формулы состоящие из символов переменных. *Нетривиальными формулами* будем называть все остальные формулы. Заметим, что в отличие от [18] мы считаем символы переменных формулами. Формулам в определении [18] у нас соответствуют нетривиальные формулы. *Подформулой* тривиальной формулы является она сама. *Подформулами* нетривиальной формулы $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, где f — символ n-местной функции, принадлежащей множеству $\mathfrak{A}$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$, являются она сама, формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ и все подформулы этих формул.

Каждой формуле естественным образом сопоставляется функция, которую она реализует (подробнее см. [18]). Будем называть формулы Φ и Ψ *эквивалентными* и писать $\Phi \sim \Psi$, если они реализуют равные функции. Будем называть формулы Φ и Ψ *равными* и писать $\Phi = \Psi$, если они совпадают, как последовательности символов.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная система функций из P_k. Через $[\mathfrak{A}]$ обозначим замыкание системы $\mathfrak{A}$ относительно операции суперпозиции, т. е. множество всех функций равных функциям, которые реализуются нетривиальными формулами над $\mathfrak{A}$. Множество функций $A \subseteq P_k$ называется *замкнутым классом,* если $[A] = A$. Замкнутый класс функций A называется *предполным классом* в P_k, если $A \neq P_k$, и для любой функции $f \in P_k \setminus A$ выполняется равенство $[A \cup \{f\}] = P_k$. *Бесповторными суперпозициями* функций из системы $\mathfrak{A}$ будем называть функции, реализуемые такими формулами над $\mathfrak{A}$, в которые каждая переменная входит не более одного раза.

Пусть Φ — некоторая формула, в которую входят символы переменных $x_1, \ldots, x_n$ и только они. Тогда формулу Φ будем обозначать также через $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, при этом каждая переменная может входить в формулу несколько раз. Пусть Ψ — некоторая формула, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда через $\Phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \Psi, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ будем обозначать формулу, получающуюся в результатае подстановки формулы Ψ вместо каждого вхождения переменной x_i в формулу Φ. В некоторых случаях для удобства обозначений мы будем считать, что в формулу $\Phi(\widetilde{x})$ могут не входить какие-то из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Например, если $A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})$, $B(y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ — произвольные формулы над $\mathfrak{A}$, $\{j_1, \ldots, j_r\} \cup \{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, n\}$, а формула Φ имеет вид $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = B(A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}), x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, то будем использовать для формул A и B обозначения $A(\widetilde{x})$ и $B(y, \widetilde{x})$ соответственно. Через $\Phi(\widetilde{\alpha})$, где $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, будем обозначать значение функции, реализуемой формулой Φ, на наборе $\widetilde{\alpha}$. Будем говорить, что формула $\Phi(\widetilde{x})$ *не принимает* некоторого *значения* $\beta \in E_k$, если для всех $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ верно неравенство $\Phi(\widetilde{\alpha}) \neq \beta$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, Φ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$. Обозначим через $L(\Phi)$ число символов переменных, входящих в Φ. Будем называть $L(\Phi)$ *сложностью* формулы Φ. *Глубину* $D(\Phi)$ формулы Φ определим рекуррентно: $D(\Phi) = 0$, если Φ является тривиальной формулой, т. е. состоит из одного символа переменной; $D(\Phi) = 1 + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} D(\Phi_i)$, если Φ имеет вид $\varphi(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, — формулы над $\mathfrak{A}$, $\varphi \in \mathfrak{A}$. Отметим, что глубина и сложность формул состоящих из констант равны 1, поскольку константы мы считаем одноместными функциями. Пусть f — функция из $[\mathfrak{A}]$. Положим $L_{\mathfrak{A}}(f) = \min L(\Phi)$, $D_{\mathfrak{A}}(f) = \min D(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам Φ над $\mathfrak{A}$, которые реализуют функцию f. Величину $L_{\mathfrak{A}}(f)$ будем называть сложностью функции f в системе $\mathfrak{A}$, а величину $D_{\mathfrak{A}}(f)$ — глубиной функции f в системе $\mathfrak{A}$. Таким образом, $L_{\mathfrak{A}}(f)$ — минимальная сложность с которой можно реализовать функцию f формулами над системой $\mathfrak{A}$, а $D_{\mathfrak{A}}(f)$ — минимальная глубина.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k. Систему $\mathfrak{A}$ будем называть *равномерной*, если существуют такие константы c и d (зависящие только от системы $\mathfrak{A}$), что для всех функций f из $[\mathfrak{A}]$ выполнено неравенство

$$D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c \log_2 L_{\mathfrak{A}}(f) + d.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные конечные системы функций из P_k, такие, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Будем говорить, что *система* $\mathfrak{B}$ *равномерна в* $\mathfrak{A}$, если существуют такие константы c и d (зависящие только от систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$), что для любой функции f из $[\mathfrak{B}]$ глубина $D_{\mathfrak{A}}(f)$ функции f в системе $\mathfrak{A}$ и сложность $L_{\mathfrak{B}}(f)$ функции f в системе $\mathfrak{B}$ связаны следующим соотношением

$$D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c \log_2 L_{\mathfrak{B}}(f) + d.$$

Положим $\log x = \log_2 x$,

$$\overline{\log}\, x = \begin{cases} \log x, & \text{если } x > 1; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функцию $\varphi(x, y)$ из $P_k^{(2)}$ будем называть *ассоциативной*, если для любых $a, b, c \in E_k$ верно равенство $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$.

Пусть $\preceq$ — произвольное отношение частичного порядка на E_k, $f(\widetilde{x})$, $g(\widetilde{x})$ — произвольные функции из P_k. Будем писать $f \preceq g$, если для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ верно неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \preceq g(\widetilde{\alpha})$. Пусть Φ и Ψ — некоторые формулы, реализующие функции $f(\widetilde{x})$ и $g(\widetilde{x})$ соответственно. Будем писать $\Phi \preceq \Psi$, если $f \preceq g$.

Подстановкой на множестве E_k называется взаимно однозначное отображение множества E_k на себя. Пусть $s(x)$ — произвольная подстановка на E_k. Введем следующее обозначение. Положим $s(\widetilde{x}) = (s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n))$. Функция $f^s(\widetilde{x}) = s^{-1}(f(s(\widetilde{x})))$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ относительно подстановки s. Функция $f(\widetilde{x})$ из P_k называется *самодвойственной относительно подстановки* s, если $f^s(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$. Последнее равенство очевидно эквивалентно равенству $f(s(\widetilde{x})) = s(f(\widetilde{x}))$. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное множество функций из P_k. Через $\mathfrak{A}^s$ будем обозначать множество всех функций двойственных к функциям из $\mathfrak{A}$ относительно подстановки s. Легко видеть, что если система $\mathfrak{A}$ является равномерной, то система $\mathfrak{A}^s$ также является равномерной. Пусть $s(x)$ — произвольная подстановка на E_k, $n \geqslant 1$. Определим подстановку $s^n(x)$ на E_k следующим образом. Положим $s^n(x) = \underbrace{s(s(\ldots s}_{n}(x)\ldots))$.

Пусть R — некоторое непустое подмножество E_k. Говорят, что функция $f(\widetilde{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k *сохраняет множество* R, если для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ верно соотношение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R$. Пусть $f(\widetilde{x})$ — функция из P_k, сохраняющая множество E_q, $2 \leqslant q \leqslant k$. Рассмотрим такую функцию $g(\widetilde{x})$ из P_q, что для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_q^n$ верно равенство $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Будем называть функцию g ограничением функции f на E_q и обозначать через $f\big|_{E_q}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная система функций из P_k, сохраняющих E_q. Положим $\mathfrak{A}\big|_{E_q} = \{f\big|_{E_q} \mid f \in \mathfrak{A}\}$.

Пусть $h \geqslant 1$. Любое подмножество E_k^h будем называть *h-арным отношением*. Говорят, что *функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет h-арное отношение* ρ, если для любых n наборов $(a_1^1, \ldots, a_h^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_h^n)$ из отношения ρ набор $(f(a_1^1, \ldots, a_1^n), \ldots, f(a_h^1, \ldots, a_h^n))$ также принадлежит отношению ρ. Через A_ρ будем обозначать класс функций, сохраняющих отношение ρ. Легко видеть, что $[A_\rho] = A_\rho$. Пусть $s(x)$ — подстановка на множестве E_k. Рассмотрим отношение $s(\rho) \subseteq E_k^h$, такое, что набор $(a_1, \ldots, a_h) \in E_k^h$ принадлежит отношению $s(\rho)$ тогда и только тогда, когда набор $(s(a_1), \ldots, s(a_h))$ принадлежит отношению ρ. Отношение $s(\rho)$ будем называть *двойственным* отношению ρ относительно подстановки s. Нетрудно показать, что $A_{s(\rho)} = A_\rho^s$.

Через ι_k^h, $h \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, будем обозначать множество всех наборов из E_k^h, имеющих хотя бы два одинаковых элемента. Положим $\iota_k^1 = \varnothing$.

Пусть $k \geqslant 2$, $h \geqslant 1$. Элемент $a \in E_k$ называется *центральным элементом* отношения $\rho \subseteq E_k^h$, если любой набор из E_k^h, содержащий a, принадлежит отношению ρ. Множество всех центральных элементов отношения называют его *центром*. Напомним, что через ι_k^h, $h \geqslant 2$, мы обозначаем множество всех наборов из E_k^h, каждый из которых имеет хотя бы два одинаковых элемента, а $\iota_k^1 = \varnothing$.

Отношение $\rho \subseteq E_k^h$, $1 \leqslant h < k$, называется *центральным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\iota_k^h \subseteq \rho \neq E_k^h$;

2) для любой подстановки s на E_h если набор $(a_0, a_1, \ldots, a_{h-1})$ принадлежит отношению ρ, то и набор $(a_{s(0)}, a_{s(1)}, \ldots, a_{s(h-1)})$ тоже принадлежит отношению ρ;

3) центр Z отношения ρ не пуст и отличен от E_k. Через $\mathbb{C}_h$ обозначим множество всех h-арных центральных отношений. Классы функций, сохраняющих отношения из $\mathbb{C}_h$, будем называть классами *типа* $\mathbb{C}_h$. Положим $\mathbb{C} = \bigcup\limits_{h=1}^{k-1} \mathbb{C}_h$. Классы функций, сохраняющих отношения из $\mathbb{C}$, будем назы-

вать классами *типа* $\mathbb{C}$. Классы типа $\mathbb{C}$ являются предполными в P_k (см., например, [17]).

Дадим обобщения понятий функций и формул. Пусть $s \geqslant 1$. Через $\vec{x}_i$ будем обозначать набор переменных $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^s)$. Такой набор переменных будем называть *s-переменной*. Через $\widetilde{\vec{x}}$ будем обозначать набор переменных

$$(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s, x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^s, \ldots, x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^s).$$

Наборы вида $(f_1(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, f_s(\widetilde{\vec{x}}))$, где $f_1, \ldots, f_s$ — произвольные функции из P_k от ns переменных, $n \geqslant 1$, будем называть *s-функциями*, зависящими от n s-переменных. Множество всех s-функций будем обозначать через V_k^s. Также s-функцию $(f_1(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, f_s(\widetilde{\vec{x}}))$ будем обозначать через $\vec{f}(\widetilde{\vec{x}})$. Будем называть $f_1, \ldots, f_s$ *компонентами* s-функции $\vec{f}$ и писать $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_s)$. Заметим, что при $s = 1$ s-функции являются обычными функциями k-значной логики, т. е. $V_k^1 = P_k$. Пусть $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — некоторые s-функции, $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_s)$, $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_s)$. Будем называть s-функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$ *равными*, если для всех $i = 1, \ldots, s$ равны функции f_i и g_i.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое подмножество V_k^s. Будем рассматривать формулы составленные из s-функций. А именно, будем называть *s-формулами над* $\mathfrak{A}$ выражения вида:

1) $\vec{x}_i$, где $\vec{x}_i$ — произвольная s-переменная;

2) $\vec{f}(\vec{\Phi}_1, \ldots, \vec{\Phi}_n)$, где $\vec{f}$ — символ произвольной s-функции из множества $\mathfrak{A}$, зависящей от n s-переменных, а $\vec{\Phi}_1$, ..., $\vec{\Phi}_n$ — s-формулы над $\mathfrak{A}$.

Тривиальными будем называть s-формулы состоящие только из символов s-переменных. При $s = 1$ s-формулы являются обычными формулами над $\mathfrak{A} \subseteq V_k^1 = P_k$. Значение s-формулы $\vec{\Phi}$ на наборе $\widetilde{\vec{\alpha}} \in E_k^{ns}$ определяется следующим образом. Если $\vec{\Phi}$ является тривиальной и имеет вид $\vec{x}_i$, то ее значением будет набор $\vec{\alpha}_i \in E_k^s$. Если $\vec{\Phi}$ имеет вид $\vec{f}(\vec{\Phi}_1, \ldots, \vec{\Phi}_n)$, где $\vec{f}$ — символ произвольной s-функции из $\mathfrak{A}$, зависящей от n s-переменных, $\vec{\Phi}_1$, ..., $\vec{\Phi}_n$ — s-формулы над $\mathfrak{A}$, и значением s-формулы $\vec{\Phi}_i$ на наборе $\widetilde{\vec{\alpha}} \in E_k^{ns}$ является набор $\vec{\beta}_i \in E_k^s$, $i = 1, \ldots, n$, то значением формулы $\vec{\Phi}$ будет являться набор $\vec{f}(\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n) \in E_k^s$. Таким образом, каждая s-формула реализует некоторую s-функцию. Две s-формулы $\vec{\Phi}$ и $\vec{\Psi}$ будем называть *эквивалентными* и писать $\vec{\Phi} \sim \vec{\Psi}$, если они реализуют равные s-функции.

Пусть $s \geqslant 1$, $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k и каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{A}$ поставлена в соответствие некоторая s-функция $\vec{f}(\vec{x}_1, \ldots \ldots, \vec{x}_n)$ из конечной системы s-функций $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subseteq V_q^s$. Тогда каждой формуле Φ над $\mathfrak{A}$ естественным образом ставится в соответствие s-формула $\vec{\Phi}$ над $\mathfrak{B}$. А именно, если формула Φ тривиальна и имеет вид x_i, то ей соответствует s-формула $\vec{x}_i$; если формула Φ имеет вид $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$, где $f \in \mathfrak{A}$, $\Phi_1, \ldots \ldots, \Phi_r$ — формулы над $\mathfrak{A}$, то формула $\vec{\Phi}$ будет иметь вид $\vec{f}(\vec{\Phi}_1, \ldots, \vec{\Phi}_r)$, где $\vec{\Phi}_1, \ldots, \vec{\Phi}_r$ — s-формулы над $\mathfrak{B}$, соответствующие формулам $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$.

2.2. Свойства систем функций. Очевидно, что при преобразовании формул над одной системой функций в эквивалентные формулы над другой системой функций их глубина увеличивается не более чем линейно. Сформулируем это в виде следующего утверждения.

Утверждение 2.1. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — конечные системы функций из P_k, $\mathfrak{A} \subseteq [\mathfrak{B}]$, $c = \max\limits_{f \in [\mathfrak{A}]} D_{\mathfrak{B}}(f)$. Тогда для любой функции f из $[\mathfrak{A}]$ верно неравенство $D_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant c D_{\mathfrak{A}}(f)$.*

Следующее утверждение является очевидным свойством ассоциативных функций.

Утверждение 2.2. *Пусть функция $\varphi(x, y)$ из P_k ассоциативна, Тогда для всякой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $[\{\varphi\}]$ верно неравенство*

$$D_{\{\varphi\}}(f) \leqslant \log n + 1.$$

Следующая лемма является аналогом хорошо известного представления функций k-значной логики (см. [18]).

Лемма 2.1. *Пусть Q — непустое подмножество E_k. Тогда $[P^{(2)}_{k,Q}] = P_{k,Q}$.*

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечные системы функций из P_k, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ равномерна в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}^{(1)}$. Пусть для любой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{B}$, $n \geqslant 1$, и любой функции $f(x)$ из $[\mathfrak{D}]^{(1)}$ существуют такие функции $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, из $[\mathfrak{D}]^{(1)}$, и функция $h(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{B}$, что*

$$f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = h(g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)).$$

Тогда система $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{D}$ равномерна в $\mathfrak{A}$.

Для доказательства леммы достаточно заметить, что произвольную формулу Φ над системой $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{D}$, в которую входит хотя бы одна функция из $\mathfrak{B}$, можно преобразовать в эквивалентную формулу Φ' над $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{D}$ той же сложности, которая имеет вид $\Phi' = \Psi(A_1, \ldots, A_r)$, где Ψ — формула над $\mathfrak{B}$, а $A_1, \ldots, A_r$ — формулы над $\mathfrak{D}$.

2.3. Метод преобразования формул. В данном разделе доказывается лемма 2.5, являющаяся обобщением метода использованного в [16, 27] для доказательства равномерности полных систем булевых функций. Эта лемма дает возможность при выполнении некоторых условий, преобразовывать произвольную формулу в эквивалентную таким образом, что глубина получающейся формулы не превосходит логарифма сложности исходной формулы умноженного на некоторую константу (зависящую только от базиса). Сначала мы докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, $k \geqslant 2$, $m = m(\mathfrak{A})$, $\Phi(\widetilde{x})$ — произвольная формула над $\mathfrak{A}$, $N = L(\Phi)$. Пусть $N > m+1$. Тогда формулу $\Phi(\widetilde{x})$ можно представить в виде $B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$, где $A(\widetilde{x})$ и $B(y, \widetilde{x})$ — формулы над $\mathfrak{A}$, такие, что переменная y имеет только одно вхождение в формулу B и выполняются неравенства $L(A), L(B) \leqslant \frac{m}{m+1}(N+1) < N$.*

Доказательство. Поскольку $m \geqslant 1$ и $N > m+1$, верны неравенства

$$m < \frac{m}{m+1}(N+1) < N. \tag{2}$$

Легко видеть, что в формуле Φ можно найти такую подформулу Ψ, которая имеет вид $f(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$, где f — некоторая n-местная функция из $\mathfrak{A}$, $n \geqslant 1$, $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$, и при этом выполнены условия

$$L(\Psi) > \frac{m}{m+1}(N+1), \qquad L(\Psi_i) \leqslant \frac{m}{m+1}(N+1), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Поскольку число переменных у функций из $\mathfrak{A}$ не превосходит m, а $f \in \mathfrak{A}$, верно неравенство $n \leqslant m$, а значит найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что выполняются соотношения

$$\frac{1}{m+1}(N+1) \leqslant L(\Psi_j) \leqslant \frac{m}{m+1}(N+1).$$

Представим Φ в виде $B(\Psi_j(\widetilde{x}), \widetilde{x})$. Покажем, что это представление формулы Φ является искомым. Используя неравенства (2), получим соотношения

$$L(\Psi_j) \leqslant \frac{m}{m+1}(N+1) < N,$$

$$L(B(y, \widetilde{x})) \leqslant N - L(\Psi_j) + 1 \leqslant N - \frac{N+1}{m+1} + 1 = \frac{m}{m+1}(N+1) < N.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть m и N — произвольные целые числа, такие, что $m \geqslant 1$, $N > m+1$. Тогда верно равенство*

$$1 + \frac{1}{\log \frac{m+1}{m}} \overline{\log} \left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right) = \frac{1}{\log \frac{m+1}{m}} \overline{\log}(N-m)$$

Доказательство. Заметим, что выполнены следующие соотношения

$$\frac{m}{m+1}(N+1) - m = \frac{m(N-m)}{m+1} \geqslant \frac{2m}{m+1} \geqslant 1.$$

Поэтому верно равенство

$$\overline{\log} \left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right) = \log \left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right).$$

Отсюда следует, что верна следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{\log \frac{m+1}{m}} \overline{\log} \left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right) &= \\
= 1 + \frac{1}{\log \frac{m+1}{m}} \log \left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right) &= \\
= \frac{1}{\log \frac{m+1}{m}} \left(\log \frac{m+1}{m} + \log \left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right)\right) &= \\
= \frac{1}{\log \frac{m+1}{m}} \log \left(\frac{m+1}{m} \left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right)\right) &= \\
= \frac{1}{\log \frac{m+1}{m}} \log(N-m) = \frac{1}{\log \frac{m+1}{m}} \overline{\log}(N-m).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — произвольные конечные системы функций из P_k, $k \geqslant 2$, R — некоторое множество формул над $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что множество R является $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-*регулярным*, если существует такое конечное множество формул $\mathfrak{F}$ над $\mathfrak{B}$, что для любых формул $A(\widetilde{x})$, $B(y, \widetilde{x})$ над $\mathfrak{A}$, таких, что переменная y имеет только одно вхождение в формулу B и формула $B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$ принадлежит множеству R, найдутся формула $F(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_r)$ из $\mathfrak{F}$, и формулы $A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})$ из R, такие что $L(A_i) \leqslant L(A)$, $i = 1, \ldots, s$, $L(B_j) \leqslant L(B)$, $j = 1, \ldots, r$, и верно соотношение

$$B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \sim F(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})).$$

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — произвольные конечные системы функций из P_k, $k \geqslant 2$, R — $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-регулярное множество формул над $\mathfrak{A}$. Тогда существуют такие константы c и d, зависящие только от $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и R, что для любой формулы Φ из R существует такая формула Φ' над $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, что $\Phi' \sim \Phi$ и выполняется неравенство $D(\Phi') \leqslant c\, \overline{\log}(L(\Phi) - m(\mathfrak{A})) + d$.*

Доказательство. Положим

$$m = m(\mathfrak{A}), \quad d_{\mathfrak{F}} = \max_{F \in \mathfrak{F}} D(F), \quad c = \frac{d_{\mathfrak{F}}}{\log \frac{m+1}{m}},$$
$$d_{\mathfrak{A}} = \max_{f \in [\mathfrak{A}],\ L_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant m+1} D_{\mathfrak{A}}(f), \quad d = \max(d_{\mathfrak{F}}, d_{\mathfrak{A}}).$$

Пусть Φ — некоторая формула из R. Положим $M = L(\Phi)$. Будем доказывать утверждение леммы с указанными константами c и d индукцией по M.

База. Из определения констант $d_{\mathfrak{A}}$ и d ясно, что для $M \leqslant m+1$ утверждение выполняется.

Шаг индукции. Пусть утверждение теоремы верно для всех M меньших некоторого N, где $N > m+1$. Докажем, что оно верно и для $M = N$. По лемме 2.3 формулу $\Phi(\widetilde{x})$ можно представить в виде $\Phi(\widetilde{x}) = B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$, где $A(\widetilde{x})$ и $B(y, \widetilde{x})$ — такие формулы над $\mathfrak{A}$, что переменная y имеет только одно вхождение в формулу B и верны неравенства

$$L(A) \leqslant \frac{m}{m+1}(N+1) < N, \quad L(B) \leqslant \frac{m}{m+1}(N+1) < N.$$

Поскольку формула $B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$ принадлежит множеству R, по условию найдутся такая формула $F \in \mathfrak{F}$ и такие формулы $A_1, \ldots, A_s$, $B_1, \ldots, B_r$ из R, что $L(A_i) \leqslant L(A)$, $i = 1, \ldots, s$, $L(B_j) \leqslant L(B)$, $j = 1, \ldots, r$, и верно соотношение

$$B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \sim F(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})).$$

Поскольку сложность формул $A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_r$ меньше N, к ним можно применить предположение индукции, в силу которого существуют такие формулы A'_i, $i = 1, \ldots, s$, B'_j, $j = 1, \ldots, r$ над $\mathfrak{A}$, что $A'_i \sim A_i$, $i = 1, \ldots, s$, $B'_j \sim B_j$, $j = 1, \ldots, r$, и верны неравенства

$$D(A'_i) \leqslant c\,\overline{\log}\left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right) + d, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{3}$$
$$D(B'_j) \leqslant c\,\overline{\log}\left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right) + d, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{4}$$

Положим $\Phi'(\widetilde{x}) = F(A'_1(\widetilde{x}), \ldots, A'_s(\widetilde{x}), B'_1(\widetilde{x}), \ldots, B'_r(\widetilde{x}))$. Формула Φ' является формулой над $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$. Легко видеть, что верны соотношения

$$\Phi(\widetilde{x}) = B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \sim F(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})) \sim$$
$$\sim F(A'_1(\widetilde{x}), \ldots, A'_s(\widetilde{x}), B'_1(\widetilde{x}), \ldots, B'_r(\widetilde{x})) = \Phi'(\widetilde{x}).$$

Также верно следующее неравенство

$$D(\Phi') \leqslant D(F) + \max(\max_{1 \leqslant i \leqslant s} D(A'_i), \max_{1 \leqslant j \leqslant r} D(B'_j)).$$

Отсюда, учитывая неравенства (3), (4) и неравенство $D(F) \leqslant d_{\mathfrak{F}}$, получаем, что верно соотношение

$$D(\Phi') \leqslant d_{\mathfrak{F}} + \frac{d_{\mathfrak{F}}}{\log \frac{m+1}{m}}\,\overline{\log}\left(\frac{m}{m+1}(N+1) - m\right) + d.$$

Из последнего соотношения, применяя лемму 2.4, получаем неравенство

$$D(\Phi') \leqslant c\,\overline{\log}(N - m) + d.$$

Таким образом, мы показали, что утверждение леммы справедливо для формул Φ имеющих произвольную сложность. Лемма доказана.

2.4. Основные следствия. Приведем ряд следствий из леммы 2.5, которые будут использоваться для доказательства равномерности некоторых систем функций.

Лемма 2.6. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k, $k \geqslant 2$, $0, \ldots, k-1 \in [\mathfrak{A}]$, $\mathfrak{F}$ — конечная система функций из P_k, $\mathfrak{F} \subseteq [\mathfrak{A}]$. Пусть для любой функции $f(y, \widetilde{x})$ из $[\mathfrak{A}]$ существует такая функция $\varphi(y, z_0, \ldots \ldots, z_{k-1})$ из $\mathfrak{F}$, что верно равенство*

$$f(y, \widetilde{x}) = \varphi(y, f(0, \widetilde{x}), f(1, \widetilde{x}), \ldots, f(k-1, \widetilde{x})).$$

Тогда система $\mathfrak{A}$ равномерна.

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся леммой 2.5. Положим $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup \{0, \ldots, k-1\}$. Из условия вытекает, что для всяких формул $A(\widetilde{x})$, $B(y, \widetilde{x})$ над $\mathfrak{A}'$ формула $B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$ эквивалентна формуле $\varphi(A(\widetilde{x}), B(0, \widetilde{x}), B(1, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, \widetilde{x}))$ для некоторой функции $\varphi \in \mathfrak{F}$. Формулы $B(0, \widetilde{x}), B(1, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, \widetilde{x})$ являются формулами над $\mathfrak{A}'$. При этом выполнены неравенства

$$L(B(0, \widetilde{x})) \leqslant L(B(y, \widetilde{x})), \quad \ldots, \quad L(B(k-1, \widetilde{x})) \leqslant L(B(y, \widetilde{x})).$$

Напомним, что константы мы считаем одноместными функциями. Через R обозначим множество всех формул над системой $\mathfrak{A}'$. Легко видеть, что множество R является $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}')$-регулярным. Следовательно, по лемме 2.5 существуют такие константы c_1 и d_1, что для любой формулы Φ над $\mathfrak{A}'$ существует такая эквивалентная формула Φ' над $\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{F}$, что выполняется неравенство $D(\Phi') \leqslant c_1 \overline{\log}(L(\Phi) - m(\mathfrak{A})) + d_1$. Тогда выполняется и неравенство $D(\Phi') \leqslant c_1 \log L(\Phi) + d_1$. Отсюда, применяя утверждение 2.1 и пользуясь тем, что $\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{F} \subseteq [\mathfrak{A}]$, получаем, что существует такая константа c_2, что для любой формулы Φ над $\mathfrak{A}$ существует такая эквивалентная формула Φ' над $\mathfrak{A}$, что выполняется неравенство $D(\Phi') \leqslant c_2(c_1 \log L(\Phi) + d_1)$.

Для произвольной функции f из $[\mathfrak{A}]$ рассмотрим реализующую ее формулу Ψ над $\mathfrak{A}$, для которой верно равенство $L(\Psi) = L_{\mathfrak{A}}(f)$. Мы показали, что для нее существует такая эквивалентная формула Ψ' над $\mathfrak{A}$, что $D(\Psi') \leqslant c_1 c_2 \log L(\Psi) + d_1 c_2 = c_1 c_2 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_1 c_2$. Следовательно, $D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c_1 c_2 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_1 c_2$, а это значит, что система $\mathfrak{A}$ равномерна. Лемма доказана.

Следующая лемма является очевидным следствием леммы 2.6 для случая, когда множество $\mathfrak{F}$ состоит из одной функции.

Лемма 2.7. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k, $k \geqslant 2$, $0, \ldots, k-1 \in [\mathfrak{A}]$ и существует такая функция $\varphi(y, z_0, \ldots, z_{k-1})$ из $[\mathfrak{A}]$, что для любой функции $f(y, \widetilde{x})$ из $[\mathfrak{A}]$ верно равенство*

$$f(y, \widetilde{x}) = \varphi(y, f(0, \widetilde{x}), f(1, \widetilde{x}), \ldots, f(k-1, \widetilde{x})).$$

Тогда система $\mathfrak{A}$ равномерна.

Следующее утверждение для случая $k = 2$ было доказано в [16] (см. также [27]). Для $k \geqslant 3$ утверждение можно доказать аналогичным образом. Мы воспользуемся леммой 2.7.

Утверждение 2.3. *Всякая полная в P_k, $k \geqslant 2$, конечная система функций является равномерной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная полная конечная система функций из P_k. Тогда, поскольку $[\mathfrak{A}] = P_k$, функция

$$\varphi(y, x_0, \ldots, y_{k-1}) = x_y$$

принадлежит $[\mathfrak{A}]$. Легко видеть, что что для любой функции $f(y, \widetilde{x})$ из $[\mathfrak{A}] = P_k$ верно равенство

$$f(y, \widetilde{x}) = \varphi(y, f(0, \widetilde{x}), f(1, \widetilde{x}), \ldots, f(k-1, \widetilde{x})),$$

кроме того, $0, \ldots, k-1 \in [\mathfrak{A}]$, Следовательно, по лемме 2.7 система $\mathfrak{A}$ является равномерной.

Утверждение 2.4. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k, Q — непустое подмножество E_k, $P_{k,Q} \subseteq [\mathfrak{A}]$. Тогда существуют такие константы c и d, что для всякой формулы Φ над $\mathfrak{A}$, реализующей функцию из $P_{k,Q}$, существует такая эквивалентная ей формула Ψ над $P^{(2)}_{k,Q} \cup \{0, \ldots, k-1\}$, что $D(\Psi) \leqslant c \log L(\Phi) + d$.*

Доказательство. При $|Q| = 1$ утверждение очевидно. Пусть $|Q| \geqslant 2$. Без ограничения общности будем считать, что $0, 1 \in Q$. Определим функции $\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1})$, $\lambda(x)$, $j_\alpha(x)$, $\alpha = 0, \ldots, k-1$ следующим образом. Положим

$$\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}) = \begin{cases} y_i, & \text{если } z_i = 1,\ z_j = 0 \text{ при } j \neq i,\ y_i \in Q; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in Q; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$j_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \alpha; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad \alpha = 0, \ldots, k-1.$$

Положим $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup \{0, \ldots, k-1, j_0, \ldots, j_{k-1}, \lambda\}$. Через R обозначим множество всех формул над $\mathfrak{A}'$, которые реализуют функции из $P_{k,Q}$. Поскольку функции $\varphi, \lambda, j_0, \ldots, j_{k-1}$ принимают значения только из Q, по утверждению 2.1 имеем $\{\varphi, \lambda, j_0, \ldots, j_{k-1}\} \subseteq [P^{(2)}_{k,Q}]$. Пусть $\Phi(\widetilde{x})$ — произвольная формула из R и $\Phi(\widetilde{x}) = B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$. Тогда верно соотношение

$$\Phi(\widetilde{x}) \sim \varphi(j_0(A(\widetilde{x})), \ldots, j_{k-1}(A(\widetilde{x})), \lambda(B(0, \widetilde{x})), \ldots, \lambda(B(k-1, \widetilde{x}))).$$

Каждая из формул $j_0(A(\widetilde{x})), \ldots, j_{k-1}(A(\widetilde{x})), \lambda(B(0, \widetilde{x})), \ldots, \lambda(B(k-1, \widetilde{x}))$ принадлежит множеству R. Кроме того, верны равенства $L(j_\alpha(A(\widetilde{x}))) = L(A(\widetilde{x}))$, $L(\lambda(B(\alpha, \widetilde{x}))) = L(B(z, \widetilde{x}))$, $\alpha = 0, \ldots, k-1$. Следовательно, множество R является $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}')$-регулярным. Таким образом, по лемме 2.5 мы можем получить формулу $\Phi_1(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{A}' \cup \{\varphi\}$, которая эквивалентна формуле $\Phi(\widetilde{x})$, и при этом выполняется неравенство $D(\Phi_1) \leqslant c_1 \log L(\Phi) + d_1$, где константы c_1 и d_1 зависят только от системы $\mathfrak{A}$ и не зависят от формулы Φ. Применяя утверждение 2.1 и пользуясь тем, что $\mathfrak{A}' \cup \{\varphi\} \subseteq [\mathfrak{A}]$, получаем, что существует такая константа c_2, что для любой формулы Φ из R существует такая эквивалентная ей формула Φ' над $\mathfrak{A}$, что выполняется неравенство $D(\Phi') \leqslant c_2(c_1 \log L(\Phi) + d_1)$. Отсюда вытекает нужное нам утверждение.

Лемма 2.8. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k, Q — непустое подмножество E_k, $P_{k,Q} \subseteq [\mathfrak{A}]$, $0, \ldots, k-1 \in \mathfrak{A}$. Тогда, если система $\mathfrak{A} \setminus P_{k,Q}$ равномерна в $\mathfrak{A}$, то система $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Доказательство. Пусть $\Phi(\widetilde{x})$ — формула над $\mathfrak{A}$. Если $\Phi(\widetilde{x})$ реализует функцию из $P_{k,Q}$, то воспользуемся утверждением 2.4. В противном случае представим ее в виде $\Phi(\widetilde{x}) = B(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_m(\widetilde{x}), \widetilde{x})$, где $B(y_1, \ldots, y_m, \widetilde{x})$ — формула над $\mathfrak{A} \setminus P_{k,Q}$, а $A_i(\widetilde{x})$ — формулы над $\mathfrak{A}$, реализующие функции из $P_{k,Q}$. К формулам A_i применим утверждение 2.4, а формулу B преобразуем, воспользовавшись тем, что система $\mathfrak{A} \setminus P_{k,Q}$ равномерна в $\mathfrak{A}$.

2.5. Преобразование s-формул. Пусть $\mathfrak{D}$ — конечная система функций из P_q, $q \geqslant 2$, $s \geqslant 1$. Систему $\mathfrak{D}$ будем называть *s-регулярной*, если существует такое конечное множество $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$ и такая константа d_0, зависящая только от s и $\mathfrak{D}$, что для любых формул $A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), B(y_1, \ldots, y_s, \widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, найдется функция $\varphi(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_r)$ из $\mathfrak{F}$ и формулы

$B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, такие, что $D(B_i) \leqslant D(B) + d_0$, $i = 1, \ldots, r$, и верно соотношение

$$B(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \sim \varphi(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})).$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная система s-функций, $\mathfrak{B} \subseteq V_q^s$, $q \geqslant 2$, $s \geqslant 1$. Каждая s-функция $\vec{f}$ из $\mathfrak{B}$ имеет компоненты $f_1, \ldots, f_s$, являющиеся обычными функциями из P_q. Множество компонент всех функций из $\mathfrak{B}$ обозначим через $K(\mathfrak{B})$. Таким образом, $K(\mathfrak{B}) = \{f_i \mid \vec{f} = (f_1, \ldots, f_s) \in \mathfrak{B},\ i = 1, \ldots, s\} \subseteq P_q$.

Следующая лемма является еще одним обобщением метода использованного в [16, 27], которое понадобится нам для доказательства равномерности порождающих систем в классах типа $\mathbb{C}$.

Лемма 2.9. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, $k \geqslant 2$, и каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{A}$ поставлена в соответствие некоторая s-функция $\vec{f}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ из конечной системы s-функций $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subseteq V_q^s$, $q \geqslant 2$, $s \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{D}$ — конечная s-регулярная система функций из P_q такая, что $K(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{D}$. Тогда существуют такие константы c и d, что для любой формулы Φ над $\mathfrak{A}$ и соответствующей ей s-формулы $\vec{\Phi}$ над $\mathfrak{B}$, реализующей некоторую s-функцию $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_s)$, существуют такие формулы Φ'_i, реализующие функции f_i, $i = 1, \ldots, s$, над $\mathfrak{D}$, что выполняются неравенства $D(\Phi'_i) \leqslant c\, \overline{\log}(L(\Phi) - m(\mathfrak{A})) + d$, $i = 1, \ldots, s$.*

Доказательство. Поскольку система $\mathfrak{D}$ s-регулярна, существует такое конечное множество $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$ и такая константа $d_0 \geqslant 0$, что для любых формул $A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x})$, $B(y_1, \ldots, y_s, \widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, найдется функция $\varphi(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_r)$ из $\mathfrak{F}$ и формулы $B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, такие что $D(B_i) \leqslant D(B) + d_0$, $i = 1, \ldots, r$, и верно соотношение

$$B(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \sim \varphi(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})).$$

Положим $m = m(\mathfrak{A})$. Обозначим через R множество всех формул над $\mathfrak{A}$, сложность которых не превосходит $m + 1$. Пусть R_1 — множество всех s-формул над $\mathfrak{B}$, соответствующих формулам из R, а R_2 — множество всех s-функций, реализуемых s-формулами из R_1. Положим

$$c = \frac{1 + d_0}{\log \frac{m+1}{m}}, \quad d_{\mathfrak{D}} = \max_{f \in K(R_2)} D_{\mathfrak{D}}(f), \quad d = \max(1 + d_0, d_{\mathfrak{D}}).$$

Пусть Φ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$. Положим $M = L(\Phi)$. Будем доказывать утверждение теоремы индукцией по M.

База. Из определения констант $d_{\mathfrak{D}}$ и d ясно, что для $M \leqslant m + 1$ утверждение выполняется.

Шаг индукции. Пусть утверждение теоремы верно для всех $M < N$, $N > m+1$. Докажем, что оно верно и для $M = N$. По лемме 2.3 формулу $\Phi(\widetilde{x})$ можно представить в виде $\Phi(\widetilde{x}) = B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$, где $A(\widetilde{x})$ и $B(y, \widetilde{x})$ — такие формулы над $\mathfrak{A}$, что верны неравенства

$$L(A) \leqslant \frac{m}{m+1}(N+1) < N, \quad L(B) \leqslant \frac{m}{m+1}(N+1) < N.$$

Рассмотрим s-формулы $\vec{A}$ и $\vec{B}$, соответствующие формулам A и B. Пусть они реализуют s-функции $\vec{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_s)$ и $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_s)$ соответственно. Пусть s-формула $\vec{\Phi}$ реализует s-функцию $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_s)$. По предположению индукции существуют такие формулы $A_1', \ldots, A_s'$, $B_1', \ldots, B_s'$, реализующие функции $\psi_1, \ldots, \psi_s$, $g_1, \ldots, g_s$ над $\mathfrak{D}$, что верны неравенства

$$D(A_i') \leqslant c\,\overline{\log}\left(\frac{m}{m+1}(N+1)-m\right)+d, \quad i=1,\ldots,s, \tag{5}$$

$$D(B_i') \leqslant c\,\overline{\log}\left(\frac{m}{m+1}(N+1)-m\right)+d, \quad i=1,\ldots,s. \tag{6}$$

Положим $\Psi_i'(\widetilde{\vec{x}})=B_i'(A_1'(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, A_s'(\widetilde{\vec{x}}), \widetilde{\vec{x}})$, $i=1,\ldots,s$. Легко видеть, что для каждого i, $i=1,\ldots,s$, формула $\Psi_i'(\widetilde{\vec{x}})$ реализует функцию $f_i(\widetilde{\vec{x}})$.

Выберем произвольное i, такое, что $1 \leqslant i \leqslant s$. По условию найдется функция $\varphi_i(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_r)$ из $\mathfrak{F}$ и формулы $B_{1i}(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, B_{ri}(\widetilde{\vec{x}})$ над $\mathfrak{D}$, такие что $D(B_{ji}) \leqslant D(B_i')+d_0$, $j=1,\ldots,r$, и верно соотношение

$$f_i(\widetilde{\vec{x}}) \sim \varphi_i(A_1'(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, A_s'(\widetilde{\vec{x}}), B_{1i}(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, B_{ri}(\widetilde{\vec{x}})).$$

Рассмотрим формулу

$$\Phi_i'(\widetilde{\vec{x}}) = \varphi_i(A_1'(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, A_s'(\widetilde{\vec{x}}), B_1(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, B_r(\widetilde{\vec{x}})).$$

над $\mathfrak{D}$. Она реализует функцию f_i. Кроме того, для нее верны следующие неравенства

$$D(\Phi_i') \leqslant 1+\max(D(A_i'), \max_{1\leqslant j\leqslant r} D(B_{ji})) \leqslant 1+\max(D(A_i'), D(B_i')+d_0).$$

Учитывая неравенства (5), (6), получаем

$$D(\vec{\Phi}_i') \leqslant 1+d_0+\frac{1+d_0}{\log\frac{m+1}{m}}\,\overline{\log}\left(\frac{m}{m+1}(N+1)-m\right)+d.$$

Откуда по лемме 2.4

$$D(\vec{\Phi}_i') \leqslant c\,\overline{\log}(N-m)+d.$$

Поскольку мы выбирали произвольное i, такое, что $1\leqslant i\leqslant s$, мы построили требуемые формулы Φ_i' для всех i.

§ 3. Классы линейных функций

В данном параграфе доказывается равномерность порождающих систем в классах линейных функций.

Пусть $G=(E_k, +)$ — абелева группа (определение см., например, в [3]), определенная на E_k, $k\geqslant 2$, с операцией сложения «+» и нулем θ. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k называется линейной относительно группы G, если для любых наборов $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)\in E_k^n$ верно равенство

$$f(a_1, \ldots, a_n)+f(b_1, \ldots, b_n)=f(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)+f(\theta, \ldots, \theta).$$

Нетрудно показать, что класс функций, линейных относительно группы G, является замкнутым. Обозначим его через L_G.

Известно (см., например, [17]), что класс L_G является предполным в P_k тогда и только тогда, когда $k=p^m$, где p — простое, $m\geqslant 1$, а группа G изоморфна аддитивной группе поля Галуа из k элементов (определения см., например, в [3]). Предполные классы линейных функций называют классами *типа* $\mathbb{L}$.

Утверждение 3.1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольная конечная система функций из* P_k, $k \geqslant 2$, $A = [\mathfrak{A}]$, *функция* $\varphi(x, y)$ *принадлежит* A *и ассоциативна,* $0, \ldots, k-1 \in A$. *Пусть любая функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *из* A *представляется в виде* $g_0(h(g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)))$, *где* $h \in [\{\varphi\}]$, $g_i \in A^{(1)}$, $i = 0, \ldots, n$. *Тогда система* $\mathfrak{A}$ *равномерна.*

Доказательство. Рассмотрим систему функций $\mathfrak{B} = \{\varphi\} \cup A^{(1)}$. Из утверждения 2.2 следует, что для любой функции $h(x_1, \ldots, x_n)$ из $[\{\varphi\}]$ верно неравенство $D_{\mathfrak{B}}(h) \leqslant \log n + 1$. Следовательно, для всякой функции $f \in A$ существенно зависящей от n переменных, $n \geqslant 1$, верно неравенство

$$D_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant \log n + 3.$$

Поскольку $\mathfrak{B} \subseteq A = [\mathfrak{A}]$, по утверждению 2.1 получаем, что существует такая константа c, что для всякой функции $f \in A$, существенно зависящей от n переменных, $n \geqslant 1$, верны неравенства

$$D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c D_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant c \log n + 3c.$$

Поскольку f существенно зависит от n переменных, верно неравенство $L_{\mathfrak{A}}(f) \geqslant n$. Отсюда получаем соотношение

$$D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c \log L_{\mathfrak{A}}(f) + 3c.$$

Если же функция f не зависит существенно ни от одной переменной, т. е. является константой, то ее глубина в системе $\mathfrak{A}$ ограничена некоторой константой c_1. Следовательно, система $\mathfrak{A}$ равномерна.

Утверждение 3.2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *— функция из* L_G. *Тогда* f *можно представить в виде* $g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n) + a$, *где* $g_i \in L_G^{(1)}$, $i = 1, \ldots \ldots n$, $a \in E_k$.

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по n. Для $n = 1$ очевидно $f(x_1) = f(x_1) + \theta$. Пусть утверждение верно для всех n меньших некоторого N. Покажем, что оно верно и для $n = N$. Из линейности функции f получаем

$$f(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) = f(x_1, \ldots, x_{N-1}, \theta) + f(\theta, \ldots, \theta, x_N) - f(\theta, \ldots, \theta).$$

По предположению индукции

$$f(x_1, \ldots, x_{N-1}, \theta) = g_1(x_1) + \ldots + g_{N-1}(x_{N-1}) + a,$$

где $g_i \in L_G^{(1)}$, $i = 1, \ldots N-1$, $a \in E_k$. Положим $a' = a - f(\theta, \ldots, \theta)$, $g_N(x) = f(\theta, \ldots, \theta, x)$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) = g_1(x_1) + \ldots + g_{N-1}(x_{N-1}) + g_N(x_N) + a'.$$

Получили, что утверждение верно и для $n = N$.

Теорема 3.1. *Пусть* G *— абелева группа, определенная на* E_k, $k \geqslant 2$, $\mathfrak{A}$ *— такая конечная система функций из* P_k, *что* $[\mathfrak{A}] = L_G$. *Тогда система* $\mathfrak{A}$ *равномерна.*

Доказательство. Функция $x + y$ ассоциативна и принадлежит L_G. Функция $x + a$, где $a \in E_k$ принадлежит $L_G^{(1)}$. Поэтому, из утверждения 3.2 получаем, что любая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из L_G представляется в виде $g_0(h(g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)))$, где $h \in [\{x + y\}]$, $g_i \in L_G^{(1)}$, $i = 0, \ldots, n$. Применяя утверждение 3.1 получаем, что система $\mathfrak{A}$ равномерна.

Следствие 3.1. *Пусть* A *— предполный класс линейных функций в* P_k, $k \geqslant 2$, $\mathfrak{A}$ *— такая конечная система функций из* P_k, *что* $[\mathfrak{A}] = A$. *Тогда система* $\mathfrak{A}$ *равномерна.*

§ 4. Классы самодвойственных функций

Для классов самодвойственных функций доказательство равномерности порождающих систем аналогично доказательству для класса S в P_2 (см. [11]).

Функции из P_k, самодвойственные относительно s, образуют замкнутый класс $Z_k(s)$, который является предполным тогда и только тогда, когда s имеет только циклы одинаковой простой длины (см., например, [17]). Предполные классы самодвойственных функций называют классами *типа* $\mathbb{P}$.

Пусть s — произвольная подстановка на E_k. Пусть количество циклов подстановки s равно r. Множество элементов входящих в i-й цикл подстановки s будем обозначать через A_i, $i=1, \ldots, r$.

Утверждение 4.1. *Пусть $f(\widetilde{x})$ и $g(y, \widetilde{x})$ самодвойственные относительно подстановки s функции, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\alpha \in A_i$ и $g(\alpha, \widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$. Тогда для всякого $\beta \in A_i$ верно равенство $g(\beta, \widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$.*

Доказательство. Из того, что $\alpha, \beta \in A_i$ следует, что существует такое число m, что $s^m(\beta) = \alpha$. По условию $g(\alpha, \widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$, следовательно $g(\alpha, s^m(\widetilde{x})) = f(s^m(\widetilde{x}))$. Из самодвойственности g и f относительно s следует, что $s^m(g(\beta, \widetilde{x})) = g(s^m(\beta), s^m(\widetilde{x})) = g(\alpha, s^m(\widetilde{x})) = f(s^m(\widetilde{x})) = s^m(f(\widetilde{x}))$. Откуда получаем, что $g(\beta, \widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$.

Определим функцию $\varphi(y, x_1, \ldots, x_r) \in P_k$ следующим образом. Положим $\varphi(y, x_1, \ldots, x_r)$ равным x_i, если $y \in A_i$, $i=1, \ldots, r$. Таким образом, мы полностью определили функцию φ, поскольку $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} A_i = E_k$. Определение корректно, поскольку при $i \neq j$ множества A_i и A_j не пересекаются.

Утверждение 4.2. $\varphi \in Z_k(s)$.

Доказательство. Покажем, что для всякого набора $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ из E_k^{r+1} верно равенство

$$\varphi(s(\alpha), s(\beta_1), \ldots, s(\beta_r)) = s(\varphi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)).$$

Пусть $\alpha \in A_i$. Тогда верно равенство $\varphi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r) = \beta_i$. Заметим, что $s(\alpha)$ тоже принадлежит A_i, и, следовательно, $\varphi(s(\alpha), s(\beta_1), \ldots, s(\beta_r)) = s(\beta_i)$, откуда и следует нужное равенство.

Утверждение 4.3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k такая, что $[\mathfrak{A}] = Z_k(s)$. Пусть для каждого i, $i=1, \ldots, r$, существует такое $a_i \in A_i$, что система $\mathfrak{A} \cup \{a_i\}$ равномерна. Тогда система $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Доказательство. Поскольку по условию для каждого i, $i=1, \ldots$ $\ldots, r$, система $\mathfrak{A} \cup \{a_i\}$ равномерна, получаем, что для любого a_i, $i=1, \ldots, r$, существуют такие константы c_i и d_i, что для всякой функции $f \in [\mathfrak{A}]$ верно неравенство

$$D_{\mathfrak{A} \cup \{a_i\}}(f) \leqslant c_i \log L_{\mathfrak{A} \cup \{a_i\}}(f) + d_i.$$

Положим $c = \max\limits_{i=1, \ldots, r}(c_i)$, $d = \max\limits_{i=1, \ldots, r}(d_i)$. Очевидно, что $L_{\mathfrak{A} \cup \{a_i\}}(f) \leqslant L_{\mathfrak{A}}(f)$. Отсюда следует, что для любой функции $f \in [\mathfrak{A}]$ верно неравенство

$$D_{\mathfrak{A} \cup \{a_i\}}(f) \leqslant c \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d. \tag{7}$$

Для каждого i, $i=1, \ldots, r$, рассмотрим формулу Φ_i, которая реализует функцию $f(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{A} \cup \{a_i\}$, такую, что $D(\Phi_i) = D_{\mathfrak{A} \cup \{a_i\}}(f)$. Заменим в формуле Φ_i все вхождения константы a_i на переменную y. Получим формулу Ψ_i, которая реализует самодвойственную относительно s функцию $g_i(y, \widetilde{x})$, такую, что $g_i(a_i, \widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$.

Рассмотрим формулу $\Theta(y, \widetilde{x}) = \varphi(y, \Psi_1(y, \widetilde{x}), \ldots, \Psi_r(y, \widetilde{x}))$. Она реализует функцию $\varphi(y, g_1(y, \widetilde{x}), \ldots, g_r(y, \widetilde{x}))$. Из утверждения 4.1 и определения функции φ следует, что $\varphi(y, g_1(y, \widetilde{x}), \ldots, g_r(y, \widetilde{x})) = f(\widetilde{x})$. Из вида формулы Θ получаем равенство $D(\Theta) = 1 + \max\limits_{i=1,\ldots,r}(D_{\mathfrak{A}\cup\{a_i\}}(f))$, из которого, учитывая неравенство (7), получаем, что для любой функции $f \in [\mathfrak{A}]$ верно неравенство

$$D_{\mathfrak{A}\cup\{\varphi\}}(f) \leqslant c \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d + 1. \tag{8}$$

Из утверждения 4.2 следует, что $\varphi \in [\mathfrak{A}]$, а значит по утверждению 2.1 существует такая константа c_1, что для любой функции $f \in [\mathfrak{A}]$ верно неравенство $D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c_1 D_{\mathfrak{A}\cup\{\varphi\}}(f)$. Отсюда, учитывая неравенство (8), получаем неравенство

$$D_{\mathfrak{A}\cup\{\varphi\}}(f) \leqslant c_1(c \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d + 1).$$

Следовательно, система $\mathfrak{A}$ равномерна.

Теорема 4.1. *Пусть $s(x)$ — такая подстановка на E_k, что класс $Z_k(s)$ является предполным в P_k, $k \geqslant 2$. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k и $[\mathfrak{A}] = Z_k(s)$. Тогда система $\mathfrak{A}$ является равномерной.*

Доказательство. В каждом из множеств A_i выберем по одному элементу a_i. Поскольку класс $Z_k(s)$ является предполным, система $\mathfrak{A}\cup\{a_i\}$ является полной в P_k, и следовательно, по утверждению 2.3, равномерной для каждого i, $i = 1, \ldots, r$. Таким образом, утверждение теоремы следует из утверждения 4.3.

§ 5. Классы функций сохраняющих разбиения

Пусть D — какое-нибудь разбиение множества E_k на непересекающиеся подмножества $D_1, \ldots, D_s$, т. е. все множества D_i не пусты и каждый элемент множества E_k принадлежит одному и только одному из множеств D_i. Разбиение D будем называть *тривиальным*, если $s = 1$ или $s = k$. Очевидно, что при $k = 2$ все разбиения E_k тривиальны. Элементы α и β из E_k называются *эквивалентными относительно разбиения* D (будем писать $\alpha \sim \beta \pmod D$), если они принадлежат одному и тому же множеству D_i. Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из E_k^n называются *эквивалентными относительно разбиения* D (будем писать $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta} \pmod D$), если для всех $i = 1, \ldots, n$ верно $\alpha_i \sim \beta_i \pmod D$.

Будем говорить, что функция $f(\widetilde{x})$ из P_k *сохраняет разбиение* D, если для всех наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in E_k^n$, для которых $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta} \pmod D$, верно $f(\widetilde{\alpha}) \sim f(\widetilde{\beta}) \pmod D$. Множество всех функций, сохраняющих разбиение D, обозначим через $U(D)$. Нетрудно показать, что $U(D)$ является замкнутым классом. Очевидно, что константы $0, 1, \ldots, k-1$ принадлежат классу $U(D)$. Легко видеть, что если D — тривиальное разбиение E_k, то $U(D) = P_k$. В случае, если D — нетривиальное разбиение E_k, класс $U(D)$ отличен от P_k и является предполным (см. [15]). Следуя [17], будем называть такие классы *классами типа* $\mathbb{E}$.

Пусть D — нетривиальное разбиение E_k, $k \geqslant 3$, $r_i = |D_i|$, $i = 1, \ldots, s$. Пусть D удовлетворяет следующим условиям:

(1) каждое множество D_i, $i = 1, \ldots, s$, имеет вид $D_i = \{\delta_1^i, \ldots, \delta_{r_i}^i\}$,

(2) $\delta_{j+1}^i = \delta_1^i + j$ для всех $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r_i - 1$,

(3) $\delta_1^1 < \delta_1^2 < \ldots < \delta_1^s$,

(4) $r_s \geqslant r_i$ для всех $i = 1, \ldots, s$.

Так как разбиение D нетривиально, верно неравенство $r_s \geqslant 2$, следовательно, $0 < \delta_1^s < k - 1$.

Введем следующее обозначение. Положим $\mathrm{nmax}(y_1, \ldots, y_n)$ равным минимальному числу b, для которого $y_b = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$, $1 \leqslant b \leqslant n$. Определим функции $\chi_n(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \chi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $n = 1, \ldots, k$, следующим образом:

$$\chi_n(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \begin{cases} x_{\mathrm{nmax}(\widetilde{y})}, & \text{если все } y_i \in D_s, \text{ и существует такое } h, \text{ что все } x_j \in D_h; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно показать, что функции χ_n принадлежат классу $U(D)$ для всех n. Кроме того, верны равенства $\chi_n(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = 0$.

Замечание. Функции χ от меньшего числа переменных выражаются через функции χ от большего числа переменных. Это следует из равенства

$$\chi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \chi_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n, y_n).$$

Определим функции $\lambda_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x = i; \\ \delta_1^s, & \text{если } x \neq i \text{ и } x \sim i \pmod{D}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пример. Пусть $D = (\{0\}, \{1,2\}, \{3,4,5\})$, $k = 6$. Тогда $\lambda_i(x)$ определяются табл. 1.

Таблица 1

x	0	1	2	3	4	5
λ_0	5	0	0	0	0	0
λ_1	0	5	3	0	0	0
λ_2	0	3	5	0	0	0
λ_3	0	0	0	5	3	3
λ_4	0	0	0	3	5	3
λ_5	0	0	0	3	3	5

Очевидно, что функции $\max(x, y)$ и λ_i, $i = 1, \ldots, k$, принадлежат классу $U(D)$. Заметим, что $\lambda_{\delta_j^i}(\delta_q^p) = 0$ при $i \neq p$. Определим функции $\mu_i(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$, $i = 1, \ldots, s$, следующим образом. Положим

$$\mu_i(x_0, \ldots, x_{k-1}, y) = \\ = \chi_{r_i}(x_{\delta_1^i}, \ldots, x_{\delta_{r_i}^i}, \lambda_{\delta_1^i}(y), \ldots, \lambda_{\delta_{r_i}^i}(y)).$$

Положим

$$\varphi(y, x_0, \ldots, x_{k-1}) = \max(\mu_1(x_0, \ldots, x_{k-1}, y), \ldots, \mu_s(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)).$$

Функция φ принадлежит классу $U(D)$, как суперпозиция функций из $U(D)$.

Пример. Пусть $k = 6$, $D = (\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\})$. Тогда

$$\varphi(y, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\ = \max(\chi_1(x_0, \lambda_0(y)), \chi_2(x_1, x_2, \lambda_1(y), \lambda_2(y)), \chi_3(x_3, x_4, x_5, \lambda_3(y), \lambda_4(y), \lambda_5(y))).$$

Утверждение 5.1. *Для любой функции $f(\widetilde{x})$ из $U(D)$ верно равенство*

$$f(\widetilde{x}) = \varphi(x_1, f(0, x_2, \ldots, x_n), f(1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f(k-1, x_2, \ldots, x_n)),$$

Доказательство. Покажем, что равенство верно для произвольного набора $\widetilde{\alpha}$. Пусть $\alpha_1 = \delta_q^p \in D_p$. Положим $v_i = f(i, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $i = 0, \ldots, k-1$. Пользуясь свойствами функций λ_i и χ_n, нетрудно показать, что для всех $i \neq p$ верно равенство $\mu_i(v_0, \ldots, v_{k-1}, \alpha_1) = 0$. Таким образом, получаем, что

$$\varphi(\alpha_1, v_0, \ldots, v_{k-1}) = \mu_p(v_0, \ldots, v_{k-1}, \alpha_1) = \\ = \chi_{r_p}(v_{\delta_1^p}, \ldots, v_{\delta_q^p}, \ldots, v_{\delta_{r_p}^p}, \underbrace{\delta_1^s, \ldots, \delta_1^s}_{q-1}, k-1, \delta_1^s, \ldots, \delta_1^s).$$

Поскольку $f \in U(D)$, существует такое h, что $v_{\delta_1^p}, \ldots, v_{\delta_{r_p}^p} \in D_h$. Отсюда получаем

$$\chi_{r_p}(v_{\delta_1^p}, \ldots, v_{\delta_q^p}, \ldots, v_{\delta_{r_p}^p}, \underbrace{\delta_1^s, \ldots, \delta_1^s}_{q-1}, k-1, \delta_1^s, \ldots, \delta_1^s) = v_{\delta_q^p} = v_{\alpha_1} = f(\widetilde{\alpha}).$$

Таким образом, утверждение доказано.

Утверждение 5.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k такая, что $[\mathfrak{A}] = U(D)$. Тогда система $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Доказательство. Функция φ и константы $0, \ldots, k-1$ принадлежат классу $U(D)$. Применяя лемму 2.7 и утверждение 5.1, получаем, что система $\mathfrak{A}$ равномерна.

Используя принцип двойственности, получаем что верна следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, $k \geqslant 3$, такая, что $[\mathfrak{A}]$ — класс типа $\mathbb{E}$. Тогда $\mathfrak{A}$ — равномерная система.*

Доказательство. Очевидно, что существует такое разбиение D множества E_k, что класс $U(D)$ является двойственным классу $[\mathfrak{A}]$ относительно некоторой подстановки s, и при этом D удовлетворяет условиям (1)−(4). По утверждению 5.2 система $\mathfrak{A}^s$ равномерна, и, следовательно, равномерна и система $\mathfrak{A}$.

Замечание. Из утверждения 5.1 вытекают соотношения:

$$U(D) = [\{0, \ldots, k-1, \lambda_0(x), \ldots, \lambda_{k-1}(x), \chi_k(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k),$$
$$\max(x, y)\}] = [\{0, \ldots, k-1, \varphi(y, x_0, \ldots, x_{k-1})\}].$$

Таким образом, мы нашли конечные порождающие системы для класса $U(D)$. Пользуясь соображениями двойственности, отсюда можно получить порождающие системы для всех классов типа $\mathbb{E}$.

§ 6. Классы типа $\mathbb{B}$

В данном параграфе мы докажем равномерность произвольных конечных порождающих систем для классов типа $\mathbb{B}$ при любых $k \geqslant 3$.

Пусть $h \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, $a \in E_{h^m}$. Будем обозначать через $a^{(i)}$ i-ю цифру числа a, записанного в системе счисления по основанию h. Тогда мы можем представить a в виде

$$a = a^{(m-1)} \cdot h^{m-1} + a^{(m-2)} \cdot h^{m-2} + \ldots + a^{(1)} \cdot h + a^{(0)},$$

где $a^{(m-1)}, a^{(m-2)}, \ldots, a^{(0)} \in E_h$.

Отношение $\xi_m \subseteq E_{h^m}^h$, содержащее те и только те наборы $(a_0, a_1, \ldots \ldots, a_{h-1})$, для которых $(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots, a_{h-1}^{(i)}) \in \iota_h^h$ при всех i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, будем называть *$h$-адическим элементарным отношением*.

Отношение $\rho \subseteq E_k^h$ называется *сильно гомоморфным прообразом отношения* $\sigma \subseteq E_l^h$, если существует такое отображение q (сильный гомоморфизм) множества E_k на множество E_l, что ρ содержит те и только те наборы $(a_0, a_1, \ldots, a_{h-1})$, для которых $(q(a_0), q(a_1), \ldots, q(a_{h-1})) \in \sigma$.

Пусть $h \geqslant 3$, $m \geqslant 1$, $k \geqslant h^m$. Если h-арное отношение $\rho \subseteq E_k^h$ является сильно гомоморфным прообразом h-адического элементарного отношения $\xi_m \in E_{h^m}^h$, то класс функций, сохраняющих ρ, A_ρ называется *классом типа* $\mathbb{B}$, а ρ — *отношением типа* $\mathbb{B}$. Классы типа $\mathbb{B}$ являются предполными в P_k, $k \geqslant 3$, (см., например, [17]).

Пусть $\rho \subseteq E_k^h$ — h-арное отношение типа $\mathbb{B}$. Тогда существует такое m, $m \geqslant 1$, $k \geqslant h^m$, что ρ является сильно гомоморфным прообразом отношения ξ_m при некотором отображении q: $E_k \to E_{h^m}$. Положим $A_i = \{x \in E_k \mid q(x) = i\}$, $i \in E_{h^m}$, т. е. A_i является полным прообразом i при отображении q. В каждом из множеств A_i выберем по одному элементу a_i. Определим отображение r: $E_{h^m} \to E_k$, положив $r(i) = a_i$, $i \in E_{h^m}$. Пусть $B = \{a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}\}$.

Определим функции $\lambda(x_1, x_2)$ и $H(x_1, \ldots, x_m)$ из P_k следующим образом. Положим

$$\lambda(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2, & \text{если существует такое } i \in E_{h^m}, \text{ что } x_1 = a_i \text{ и } x_2 \in A_i; \\ x_1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$H(x_1, \ldots, x_m) = r(q(x_1)^{(0)} \cdot h^{m-1} + q(x_2)^{(0)} \cdot h^{m-2} + \cdots + q(x_{m-1})^{(0)} \cdot h + q(x_m)^{(0)}).$$

Утверждение 6.1. *Функции $\lambda(x_1, x_2)$ и $H(x_1, \ldots, x_m)$ принадлежат классу A_ρ.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что $\lambda \in A_\rho$ надо показать, что для любых двух наборов $(b_0, \ldots, b_{h-1}), (c_0, \ldots, c_{h-1})$ из отношения ρ набор $(\lambda(b_0, c_0), \ldots, \lambda(b_{h-1}, c_{h-1}))$ тоже принадлежит отношению ρ. Пусть $(b_0, \ldots, b_{h-1}), (c_0, \ldots, c_{h-1}) \in \rho$. По определению, из того, что $(b_0, \ldots, b_{h-1}) \in \rho$ следует, что $(q(b_0), \ldots, q(b_{h-1})) \in \xi_m$. Заметим, что верно равенство $q(\lambda(x_1, x_2)) = q(x_1)$. Таким образом, получаем, что $(q(\lambda(b_0, c_0)), \ldots, q(\lambda(b_{h-1}, c_{h-1}))) = (q(b_0), \ldots, q(b_{h-1})) \in \xi_m$, и, следовательно, $(\lambda(b_0, c_0), \ldots, \lambda(b_{h-1}, c_{h-1})) \in \rho$.

Покажем теперь, что $H \in A_\rho$. Пусть $(b_0^i, \ldots, b_{h-1}^i) \in \rho$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $(q(b_0^i), \ldots, q(b_{h-1}^i)) \in \xi_m$, $i = 1, \ldots, m$, и, следовательно, $(q(b_0^i)^{(0)}, \ldots, q(b_{h-1}^i)^{(0)}) \in \iota_h^h$, $i = 1, \ldots, m$. Положим

$$c_j = \sum_{i=1}^{m} q(b_j^i)^{(0)} \cdot h^{m-i}, \quad j = 0, \ldots, h-1.$$

Заметим, что $(c_0^{(m-i)}, \ldots, c_{h-1}^{(m-i)}) = (q(b_0^i)^{(0)}, \ldots, q(b_{h-1}^i)^{(0)}) \in \iota_h^h$, $i = 1, \ldots, m$. Отсюда получаем, что $(c_0, \ldots, c_{h-1}) \in \xi_m$, и, следовательно

$$(H(b_0^1, \ldots, b_0^m), \ldots, H(b_{h-1}^1, \ldots, b_{h-1}^m)) = (r(c_0), \ldots, r(c_{h-1})) \in \rho.$$

Таким образом, утверждение доказано. Пусть $f(\widetilde{x})$ — некоторая функция из P_k. Следуя [22], положим

$$f_i'(\widetilde{x}) = q(f(\widetilde{x}))^{(i)}, \qquad i = 0, \ldots, m-1,$$

$$f_i''(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } f(\widetilde{x}) \in A_i; \\ a_i & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad i = 0, \ldots, h^m - 1.$$

Утверждение 6.2. *Любую функцию $f(\widetilde{x})$ из P_k можно представить в следующем виде.*

$$f(\widetilde{x}) = \lambda(\ldots\lambda(\lambda(H(r(f_{m-1}'(\widetilde{x})), \ldots, r(f_0'(\widetilde{x}))), f_0''(\widetilde{x})), f_1''(\widetilde{x})), \ldots, f_{h^m-1}''(\widetilde{x})). \quad (9)$$

Доказательство. Заметим, что $H(r(f_{m-1}'(\widetilde{x})), \ldots, r(f_0'(\widetilde{x}))) = r(q(f(\widetilde{x})))$. Таким образом, для доказательства утверждения достаточно показать, что верно равенство

$$\lambda(\ldots\lambda(\lambda(r(q(f(\widetilde{x}))), f_0''(\widetilde{x})), f_1''(\widetilde{x})), \ldots, f_{h^m-1}''(\widetilde{x})) = f(\widetilde{x}). \qquad (10)$$

По определению верны соотношения $f_i''(\widetilde{x}) \in A_i$, $i = 0, 1, \ldots, h^m - 1$. Если $f(\widetilde{x}) \notin A_i$, то $r(q(f(\widetilde{x}))) \neq a_i$ и $\lambda(r(q(f(\widetilde{x}))), f_i''(\widetilde{x})) = r(q(f(\widetilde{x})))$.

Если $f(\widetilde{x}) \in A_i$, то $r(q(f(\widetilde{x}))) = a_i$ и $\lambda(r(q(f(\widetilde{x}))), f_i''(\widetilde{x})) = f_i''(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$. Если $f(\widetilde{x}) \notin A_i$, то $f(\widetilde{x}) \neq a_i$ и $\lambda(f(\widetilde{x}), f_i''(\widetilde{x})) = f(\widetilde{x})$. Отсюда получаем (10).

Лемма 6.1 [22, п. 4.1]. *Функция $f \in P_k$ принадлежит классу A_ρ тогда и только тогда, когда в представлении* (9) *каждая функция f_i' либо принимает не более $h-1$ значения либо существуют перестановка s на E_h, $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $t \in E_m$, такие что $f_i'(\widetilde{x}) = s((q(x_j))^{(t)})$.*

При помощи представления (9) покажем, что в классе A_ρ возможно разложение по переменной. Сначала, используя представление (9) докажем ряд простых свойств класса A_ρ.

Следствие 6.1.

1) *Любая функция, принимающая значения только из одного множества A_i, принадлежит классу A_ρ.*

2) *Любая функция, которая принимает не более $h-1$ значения принадлежит классу A_ρ.*

3) *Константы* $0, \ldots, k-1$ *принадлежат классу A_ρ.*

Доказательство.

1) Если функция $f(\widetilde{x})$ принимает значения только из одного множества A_i, то $q(f(\widetilde{x})) = i$, и, следовательно, все функции $f_i'(\widetilde{x})$ являются константами. Из леммы следует, что в этом случае $f(\widetilde{x})$ принадлежит классу A_ρ.

2) Если функция $f(\widetilde{x})$ принимает не более $h-1$ значения, то каждая из функций $f_i'(\widetilde{x}) = (q(f(\widetilde{x})))^{(i)}$ тоже принимает не более $h-1$ значения. Из леммы 6.1 следует что в этом случае $f(\widetilde{x})$ принадлежит классу A_ρ.

3) Следует из 2).

Определим функции $\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{h^m-1}$ следующим образом.

$$\eta_i(x) = r((q(x))^{(i)}), \qquad i = 0, \ldots, m-1,$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A_i; \\ a_i & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad i = 0, \ldots, h^m - 1.$$

Следствие 6.2. $\mu_i \in A_\rho$, $i = 0, \ldots, h^m - 1$.

Доказательство. Функции $\mu_i(x)$ принимают значения только из A_i, а значит по следствию 6.1 принадлежат A_ρ.

Утверждение 6.3. $\eta_i \in A_\rho$, $i = 0, \ldots, m-1$.

Доказательство. Пусть $(b_0, \ldots, b_{h-1}) \in \rho$. Покажем, что $\eta_i(b_0), \ldots, \eta_i(b_{h-1})) \in \rho$, $i = 0, \ldots, m-1$. По определению, из того, что $(b_0, \ldots, b_{h-1}) \in \rho$ следует, что $(q(b_0), \ldots, q(b_{h-1})) \in \xi_m$. Отсюда $(q(b_0)^{(i)}, \ldots$ $\ldots, q(b_{h-1})^{(i)}) \in \iota_h^h$. Очевидно также, что $(q(b_0)^{(i)}, \ldots, q(b_{h-1})^{(i)}) \in \xi_m$, и, следовательно, $(r(q(b_0)^{(i)}), \ldots, r(q(b_{h-1})^{(i)})) = (\eta_i(b_0), \ldots, \eta_i(b_{h-1})) \in \rho$. Таким образом, утверждение доказано.

Пусть $f \in A_\rho$. Из определения функций f_i' и f_i'' очевидна справедливость следующего утверждения.

Утверждение 6.4.

1) $r(f_i'(\widetilde{x})) = \eta_i(f(\widetilde{x}))$, $i = 0, \ldots, m-1$.

2) $f_i''(\widetilde{x}) = \mu_i(f(\widetilde{x}))$, $i = 0, \ldots, h^m - 1$.

Положим

$$u_i(x, y_0, \ldots, y_{k-1}) = \begin{cases} y_x, & \text{если все } y_j \text{ принадлежат } A_i; \\ a_i & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad i = 0, \ldots, h^m - 1.$$

$$w_j(x, y_0, \ldots, y_{k-1}) = \begin{cases} y_x, & \text{если все } y_l \in B \text{ и не равны } a_j; \\ a_0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m-1,$$

$$w_0(x, y_0, \ldots, y_{k-1}) = \begin{cases} y_x, & \text{если все } y_l \in B \text{ и не равны } a_0; \\ a_1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

Утверждение 6.5. $u_i \in A_\rho$, $i=0,\ldots,h^m-1$, $w_j \in A_\rho$, $j=0,\ldots,m-1$.

Доказательство. Функции u_i принадлежат классу A_ρ, так как они принимают только значения из A_i. Функции w_j принимают не более $h-1$ значения, а значит тоже принадлежат классу A_ρ.

Положим $g_t(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(t, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $t \in E_k$.

Утверждение 6.6. *Для $i=0,\ldots,h^m-1$ верны равенства*

$$f_i''(\widetilde{x}) = u_i(x_1, \mu_i(g_0(x_2, \ldots, x_n)), \ldots, \mu_i(g_{k-1}(x_2, \ldots, x_n))). \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть $0 \leqslant i \leqslant h^m-1$. По утверждению 6.4 верно равенство $f_i''(\widetilde{x})) = \mu_i(f(\widetilde{x}))$. Для любого $t \in E_k$ функция $\mu_i(g_t(x_2, \ldots, x_n))$ принимает значения только из A_i. Следовательно, верны равенства

$$u_i(x_1, \mu_i(g_0(x_2, \ldots, x_n)), \ldots, \mu_i(g_{k-1}(x_2, \ldots, x_n))) = \\ = \mu_i(g_{x_1}(x_2, \ldots, x_n)) = \mu_i(f(\widetilde{x})) = f_i''(\widetilde{x}).$$

Утверждение 6.7. *Если $f_i'(\widetilde{x})$ не принимает значения j, $j \in E_h$, то для $i=0,\ldots,m-1$ верны равенства*

$$r(f_i'(\widetilde{x})) = w_j(x_1, \eta_i(g_0(x_2, \ldots, x_n)), \ldots, \eta_i(g_{k-1}(x_2, \ldots, x_n))).$$

Доказательство. По утверждению 6.4 верно равенство $r(f_i'(\widetilde{x})) = = \eta_i(f(\widetilde{x}))$. Так как $f_i'(\widetilde{x})$ не принимает значения j, $r(f_i'(\widetilde{x})) \neq a_j$. Тогда для любого $t \in E_k$ $\eta_i(g_t(x_2, \ldots x_n)) = r((q(g_t(x_2, \ldots x_n)))^{(i)}) \neq a_j$, тогда

$$w_j(x_1, \eta_i(g_0(x_2, \ldots, x_n)), \ldots, \eta_i(g_{k-1}(x_2, \ldots, x_n))) = \\ = \eta_i(g_{x_1}(x_2, \ldots, x_n)) = \eta_i(f(\widetilde{x})) = r(f_i'(\widetilde{x})).$$

Утверждение 6.8. *Если $f_i'(\widetilde{x}) = s((q(x_j))^{(t)}$, где s — перестановка на E_h, $t \in E_m$ и $j \neq 1$, то $r(f_i'(\widetilde{x})) = \eta_i(g_0(x_2, \ldots, x_n))$.*

Доказательство. По условию, функция $r(f_i'(\widetilde{x}))$ зависит только от переменной x_j, $j \neq 1$. Следовательно

$$r(f_i'(x_1,x_2,\ldots,x_n)) = r(f_i'(0,x_2,\ldots,x_n)) = \eta_i(f(0,x_2,\ldots,x_n)) = \eta_i(g_0(x_2,\ldots,x_n)).$$

Утверждение 6.9. *Существует такое конечное множество функций $\mathfrak{D} \subseteq A_\rho$, не зависящее от f, что для каждого i, $i=0,\ldots,m-1$, существует такая функция $\psi(x, y_0, \ldots, y_{k-1})$ из $\mathfrak{D}$, что*

$$r(f_i'(\widetilde{x})) = \psi(x_1, g_0(x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_{k-1}(x_2, \ldots, x_n)). \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}_1$ — множество всех функций вида $r(s((q(x))^{(t)})$, где s — перестановка на E_h, $t \in E_m$. Число таких функций конечно. Пусть $\mathfrak{D}_2 = \{w_i(x, \eta_i(y_0), \ldots, \eta_i(y_{k-1})) \mid i=0,\ldots,h^m-1\}$, $\mathfrak{D}_3 = \{\eta_i(y_0) \mid i=0,\ldots,h^m-1\}$. Положим $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2 \cup \mathfrak{D}_3$.

Из леммы 6.1 и того, что $f \in A_\rho$, вытекает, что для любого i, $i=1,\ldots,m-1$, функция f_i' либо принимает не более $h-1$ значений либо существуют перестановка s на E_h, $j \in \{1,\ldots,n\}$ и $t \in E_m$, такие что $f_i'(\widetilde{x}) = s((q(x_j))^{(t)})$. В первом случае воспользуемся разложением из утверждения 6.7, замечая, что f_i' принимает только значения из E_h. Функция ψ в этом случае будет принадлежать множеству $\mathfrak{D}_2$. Во втором случае при $j \neq 1$ воспользуемся разложением из утверждения 6.8, при этом $\psi \in \mathfrak{D}_3$, а при $j=1$ функция $r(f_i'(\widetilde{x}))$ принадлежит $\mathfrak{D}_1$.

Теорема 6.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, $k \geqslant 3$, такая, что $[\mathfrak{A}]$ — класс типа $\mathbb{B}$. Тогда система $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Доказательство. Подставим в разложение (9) из утверждения 6.2 вместо функций $f_i''(\widetilde{x})$ разложения (11) из утверждения 6.6, а вместо функций $r(f_i'(\widetilde{x}))$, разложения (12) из утверждения 6.9. Получим выражение для функции f, через функции $g_0(x_2, \ldots, x_n)$, ..., $g_{k-1}(x_2, \ldots, x_n)$, и переменную x_1. Все использованные функции принадлежат A_ρ.

Таким образом, учитывая утверждение 6.9, получаем, что существует конечное множество функций $\mathfrak{F} \subseteq A_\rho$, такое, что для любой функции $f(\widetilde{x})$ из A_ρ найдется такая функция $\varphi(y, x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{F}$, что $f(\widetilde{x}) = \varphi(x_1, f(0, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n), \ldots, f(k-1, x_2, \ldots, x_n))$. Отсюда по лемме 2.6 получаем, что система $\mathfrak{A}$ равномерна.

§ 7. Классы типа $\mathbb{C}_1$

Пусть R — некоторое непустое подмножество E_k. Класс функций из P_k, сохраняющих множество R, обозначим через A_R. Легко видеть, что при $h = 1$ каждый класс типа $\mathbb{C}_h$ — это класс функций сохраняющих некоторое подмножество E_k, отличное от E_k и пустого множества.

Пусть $R = E_r$, $0 < r < k$. В таком случае $k-1 \notin R$. Очевидны, следующие свойства класса A_R.

Утверждение 7.1.

1) *Константа $k-1$ не принадлежит классу A_R.*

2) *Любая функция, принимающая только значения из множества R, принадлежит классу A_R.*

3) *Функции $\max(x, y)$ и $\min(x, y)$ принадлежат классу A_R.*

4) $[A_R \cup \{k-1\}] = P_k$.

Определим функции $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ и $q_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, следующим образом. Положим

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1, \ldots, x_n \in R, \\ k-1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$q_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} r-1, & \text{если } x_1, \ldots, x_n \in R, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что все такие функции принадлежат классу A_R. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k, такая, что $[\mathfrak{A}] = A_R$.

Утверждение 7.2. *Существуют константы c_1 и d_1, зависящие только от системы $\mathfrak{A}$, такие, что $D_\mathfrak{A}(g_n) \leqslant c_1 \log n + d_1$, $D_\mathfrak{A}(q_n) \leqslant c_1 \log n + d_1$.*

Доказательство. Функции g_2 и q_2 ассоциативны, $g_n \in [\{g_2\}]$, $q_n \in [\{q_2\}]$. Поэтому по утверждению 2.2 получаем, что $D_{\{g_2\}}(g_n) \leqslant \log n + 1$, $D_{\{q_2\}}(q_n) \leqslant \log n + 1$. Поскольку $g_2, q_2 \in [\mathfrak{A}]$ остается применить утверждение 2.1.

Утверждение 7.3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, такая, что $[\mathfrak{A}] = A_R$, где $R = E_r$, $0 < r < k$. Тогда система $\mathfrak{A}$ является равномерной.*

Доказательство. Рассмотрим систему функций $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cup \{k-1\}$. Поскольку A_R является предполным классом в P_k, система $\mathfrak{B}$ является полной в P_k. Следовательно, по утверждению 2.3 существуют такие константы c_2 и d_2, что для всякой функции $f(\widetilde{x})$ из A_R верно неравенство

$D_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant c_2 \log L_{\mathfrak{B}}(f) + d_2$. Так как $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, верно неравенство $L_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant L_{\mathfrak{A}}(f)$. Таким образом, верно неравенство $D_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant c_2 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_2$.

Пусть формула Φ реализует функцию f, существенно зависящую от n переменных, над системой $\mathfrak{B}$ и $D(\Phi) = D_{\mathfrak{B}}(f)$. Очевидно, что $L(\Phi) \geqslant n$. По утверждению 7.2 существует формула Φ_g, реализующая функцию g_n над $\mathfrak{A}$, для которой верны неравенства $D(\Phi_g) \leqslant c_1 \log n + d_1 \leqslant c_1 \log L(\Phi) + d_1$, а константы c_1 и d_1 зависят только от системы $\mathfrak{A}$. В формуле Φ заменим все вхождения константы $k-1$ на формулу Φ_g. Получаем некоторую формулу Ψ над $\mathfrak{A}$, для которой верна следующая цепочка неравенств

$$D(\Psi) \leqslant D(\Phi) + D(\Phi_g) \leqslant c_2 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_2 + c_1 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_1.$$

Формула Ψ реализует функцию, которая совпадает с функцией f на наборах из $E_k^n \backslash R^n$. Положим $\Psi_1 = \min(\Psi, \Phi_g)$. Формула Ψ_1 реализует функцию, которая совпадает с функцией f на наборах из $E_k^n \backslash R^n$, а на всех остальных наборах равна нулю.

Пусть Φ_0 — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая f, и $L(\Phi_0) = L_{\mathfrak{A}}(f)$. Пусть Φ_1 — формула над $\mathfrak{A}\big|_R$, которая получается из формулы Φ_0 путем замены каждой входящей в нее функций g из системы $\mathfrak{A}$ на функцию $g\big|_R$ из системы $\mathfrak{A}\big|_R$. Система $\mathfrak{A}\big|_R$ является полной в P_r, так как $\mathfrak{A}$ является полной в A_R. Поскольку $\mathfrak{A}\big|_R$ — полная система в P_r, по утверждению 2.3 она является равномерной. Следовательно, существуют константы c_3 и d_3, зависящие только от системы $\mathfrak{A}\big|_R$, такие, что для всякой функции $h \in P_r$ верно неравенство $D_{\mathfrak{A}|_R}(h) \leqslant c_3 \log L_{\mathfrak{A}|_R}(h) + d_3$. Тогда существует такая формула Φ_2 над $\mathfrak{A}\big|_R$, что $\Phi_2 \sim \Phi_1$, и верно неравенство $D(\Phi_2) \leqslant c_3 \log L(\Phi_1) + d_3$.

Рассмотрим формулу Φ_3 над системой $\mathfrak{A}$, которая получается из формулы Φ_2 путем замены каждой функции $f\big|_R$ из системы $\mathfrak{A}\big|_R$ на функцию f из системы $\mathfrak{A}$. Для формулы Φ_3 верны следующие соотношения.

$$D(\Phi_3) = D(\Phi_2) \leqslant c_3 \log L(\Phi_1) + d_3 = c_3 \log L(\Phi_0) + d_3 = c_3 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_3.$$

Формула Φ_3 реализует функцию, которая совпадает с функцией f на всех наборах из R^n. По утверждению 7.2 существует формула Φ_q, реализующая функцию q_n над $\mathfrak{A}$, для которой верны неравенства $D(\Phi_q) \leqslant c_1 \log n + d_1 \leqslant \leqslant c_1 \log L(\Phi) + d_1$, где константы c_1 и d_1 зависят только от системы $\mathfrak{A}$.

Положим $\Phi_4 = \min(\Phi_q, \Phi_3)$. Формула Φ_4 реализует функцию, которая совпадает с f на наборах из R^n, а на всех остальных наборах равна нулю. Положим

$$\Theta = \max(\Psi_1, \Phi_4) = \max(\min(\Psi, \Phi_g), \min(\Phi_q, \Phi_3)).$$

Формула Θ является формулой над системой $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cup \{\max, \min\}$. Нетрудно заметить, что $\Phi \sim \Theta$, и верно неравенство

$$D(\Theta) \leqslant 2 + \max(D(\Psi), D(\Phi_g), D(\Phi_q), D(\Phi_3)) \leqslant$$
$$\leqslant 2 + c_2 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_2 + c_1 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_1 + c_3 \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d_3.$$

Из того, что Θ является формулой над системой $\mathfrak{A}^* \subseteq [\mathfrak{A}]$, система $\mathfrak{A}_3$ однозначно определяется системой $\mathfrak{A}$ и из неравенства $n \leqslant L_{\mathfrak{A}}(f)$ получаем, что существуют такие константы c и d, зависящие только от $\mathfrak{A}$, что $D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c \log L_{\mathfrak{A}}(f) + d$.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k, и $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{C}_1$. Тогда система $\mathfrak{A}$ является равномерной.*

Доказательство. Пусть $[\mathfrak{A}]=A_R$, $r=|R|$. Очевидно, что существует такая подстановка s на E_k, что класс A_R является двойственным классу A_{E_r} относительно подстановки s. По утверждению 7.3 система $\mathfrak{A}^s$ равномерна, поскольку $[\mathfrak{A}^s]=A_{E_r}$, и, следовательно, равномерна и система $\mathfrak{A}$.

§ 8. Классы типа $\mathbb{C}_2$

В этом параграфе рассматриваются классы типа $\mathbb{C}_2$, т. е. классы функций, сохраняющих бинарные центральные отношения. Доказывается равномерность любых конечных порождающих систем для этих классов.

8.1. Классы типа $\mathbb{C}_2^*$ и $\mathbb{C}_2^{**}$. T-максимальные функции. Через $\mathbb{C}_2^*$ обозначим множество всех отношений из $\mathbb{C}_2$, у которых центр состоит из $k-2$ элементов. Через $\mathbb{C}_2^{**}$ обозначим множество всех отношений из $\mathbb{C}_2$, у которых центр состоит из $k-3$ элементов таких, что если Z — центр отношения и $\{a, b, c\}=E_k\setminus Z$, то одна и только одна пара из $(a, b), (a, c), (b, c)$ принадлежит отношению.

Если нужно выделить значность логики, в которой рассматриваются отношения, будем также использовать обозначения $\mathbb{C}_{k,2}^*$ и $\mathbb{C}_{k,2}^{**}$ для $\mathbb{C}_2^*$ и $\mathbb{C}_2^{**}$ соответственно, где k — значность логики.

Основной целью данного раздела является нахождение функций, позволяющих преобразовывать формулы над системами функций сохраняющих отношение из $\mathbb{C}_2^*$ или из $\mathbb{C}_2^{**}$. А именно, мы докажем утверждение 8.16.

Пусть $\rho\in\mathbb{C}_2^*\cup\mathbb{C}_2^{**}$, Z — центр отношения ρ и $Z=\{a_1, \ldots a_r\}$, $E_k\setminus Z=\{b_1, \ldots, b_t\}$, причем если $t=3$ (т. е. $\rho\in\mathbb{C}_2^{**}$), то будем считать, что $(b_2, b_3)\in\rho$, $(b_1, b_2)\notin\rho$, $(b_1, b_3)\notin\rho$ (этого всегда можно добиться перенумерацией).

Пусть $\alpha, \beta\in E_k$. Будем писать $\alpha\bowtie\beta$, если $(\alpha, \beta)\in\rho$. Пусть $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\in E_k^n$. Будем писать $\widetilde{\alpha}\bowtie\widetilde{\beta}$, если $\alpha_i\bowtie\beta_i$ для всех $i=1, \ldots, n$. Отметим, что если $\widetilde{\alpha}\bowtie\widetilde{\beta}$, то $\widetilde{\beta}\bowtie\widetilde{\alpha}$.

Переформулируя определение функции сохраняющей отношение ρ, получаем следующее

Утверждение 8.1. *Функция $f(\widetilde{x})$ принадлежит классу A_ρ тогда и только тогда, когда для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\in E_k^n$ таких, что $\widetilde{\alpha}\bowtie\widetilde{\beta}$, верно $f(\widetilde{\alpha})\bowtie f(\widetilde{\beta})$.*

Утверждение 8.2. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из A_ρ, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}^1, \widetilde{\beta}^2\in E_k^n$, $f(\widetilde{\beta}^1)=b_1$, $f(\widetilde{\beta}^2)=b_2$, $\widetilde{\alpha}\bowtie\widetilde{\beta}^1$ и $\widetilde{\alpha}\bowtie\widetilde{\beta}^2$. Тогда $f(\widetilde{\alpha})\in Z$.*

Доказательство. Из утверждения 8.1 следует, что $f(\widetilde{\alpha})\bowtie b_1$ и $f(\widetilde{\alpha})\bowtie b_2$, а тогда из определения отношения ρ получаем, что $f(\widetilde{\alpha})\in Z$

Утверждение 8.3. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из A_ρ, $\widetilde{\alpha}\in E_k^n$. Пусть функция $g(\widetilde{x})$ определена следующим образом:*

$$g(\widetilde{x})=\begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x}\neq\widetilde{\alpha};\\ a_1, & \text{если } \widetilde{x}=\widetilde{\alpha}.\end{cases}$$

Тогда $g\in A_\rho$.

Доказательство. Необходимо показать, что если $\widetilde{\beta}\bowtie\widetilde{\alpha}$, то $g(\widetilde{\beta})\bowtie g(\widetilde{\alpha})$. Заметим, что $g(\widetilde{\alpha})=a_1\in Z$, и, следовательно, $b\bowtie g(\widetilde{\alpha})$ для всякого $b\in E_k$.

Утверждение 8.4. *Пусть $t=3$, $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из A_ρ, $\widetilde{\alpha}\in E_k^n$, $f(\widetilde{\alpha})=b_3$. Пусть функция $g(\widetilde{x})$ определена следующим образом*

$$g(\widetilde{x})=\begin{cases} f(\widetilde{\alpha}), & \text{если } \widetilde{x}\neq\widetilde{\alpha};\\ b_2, & \text{если } \widetilde{x}=\widetilde{\alpha}.\end{cases}$$

Тогда $g\in A_\rho$.

Доказательство. Необходимо показать, что если $\widetilde{\beta} \bowtie \widetilde{\alpha}$, то $g(\widetilde{\beta}) \bowtie g(\widetilde{\alpha})$. Достаточно заметить, что для любого $b \in E_k$ из $b \bowtie b_3$, следует, что $b \bowtie b_2$.

Пусть $x, y \in E_k$. Будем писать $x \prec y$, если $x \in Z \setminus \{a_1\}$ и $y \in \{a_1, b_1, \ldots, b_t\}$ или если $x = a_1$ и $y \in \{b_1, \ldots, b_t\}$ или (при $t = 3$) если $x = b_3$ и $y = b_2$. Будем писать $x \preceq y$, если $x \prec y$ или $x = y$. Таким образом, мы задали на E_k отношение частичного порядка T, соответствующее диаграммам на рис. 1 (для $t = 2$ и $t = 3$, соответственно).

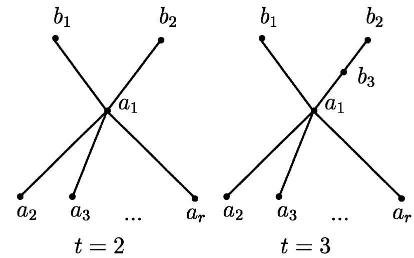

Рис. 1

Пусть $f(\widetilde{x}), g(\widetilde{x})$ — произвольные функции из A_ρ. Будем писать $f \preceq g$, если для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ верно соотношение $f(\widetilde{\alpha}) \preceq g(\widetilde{\alpha})$. Если при этом $f \neq g$, то будем писать $f \prec g$. Пусть Φ и Ψ — некоторые формулы над A_ρ, реализующие функции $f(\widetilde{x})$ и $g(\widetilde{x})$ соответственно. Тогда будем писать $\Phi \preceq \Psi$, если $f \preceq g$. Назовем функцию $f(\widetilde{x})$ из A_ρ *T-максимальной*, если не существует такой функции $g(\widetilde{x})$ из A_ρ, что $f \prec g$. Отметим, что константы b_1 и b_2 являются T-максимальными функциями.

Утверждение 8.5. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — T-максимальная функция. Тогда $f(\widetilde{x})$ принимает только значения из множества $\{a_1, b_1, b_2\}$.*

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — T-максимальная функция и $f(\widetilde{\alpha}) = a_p$, $p \neq 1$. Тогда определим функцию g следующим образом:

$$g(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \neq \widetilde{\alpha}; \\ a_1, & \text{если } \widetilde{x} = \widetilde{\alpha}. \end{cases}$$

По утверждению 8.3 она принадлежит классу A_ρ и $f \prec g$, но f является T-максимальной. Противоречие.

Аналогично рассматривается случай $f(\widetilde{\alpha}) = b_3$ (если $t = 3$), используя 8.4.

Утверждение 8.6. *Пусть функция f принадлежит классу A_ρ и принимает значения только из множества $\{b_1, b_2\}$. Тогда она является константой b_1 или b_2, т. е. является T-максимальной функцией.*

Доказательство. Пусть f не является константой. Пусть $f(a_1, a_1, \ldots, a_1) = b_1$ и существует такой набор $\widetilde{\beta} \in E_k^n$, что $f(\widetilde{\beta}) = b_2$. Но $(a_1, a_1, \ldots, a_1) \bowtie \widetilde{\beta}$, и при этом $(f(a_1, a_1, \ldots, a_1), f(\widetilde{\beta})) \notin \rho$. Противоречие. Аналогичным образом приходим к противоречию в случае, если $f(a_1, a_1, \ldots, a_1) = b_2$.

Утверждение 8.7 (Критерий T-максимальности). *Пусть функция $f(\widetilde{x})$ из A_ρ принимает только значения из множества $\{a_1, b_1, b_2\}$. Тогда f является T-максимальной тогда и только тогда, когда для любого набора $\widetilde{\alpha}$ такого, что $f(\widetilde{\alpha}) = a_1$, существуют наборы $\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\beta}^2$, такие, что $f(\widetilde{\beta}^1) = b_1$, $f(\widetilde{\beta}^2) = b_2$, и $\widetilde{\alpha} \bowtie \widetilde{\beta}^1$, $\widetilde{\alpha} \bowtie \widetilde{\beta}^2$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция f является T-максимальной. Предположим, что существует набор $\widetilde{\alpha}$, такой, что $f(\widetilde{\alpha}) = a_1$, и существует такое $p \in \{1, 2\}$, что $f(\widetilde{\beta}) \in \{b_p, a_1\}$ для всех наборов $\widetilde{\beta}$, таких, что выполняется соотношение $\widetilde{\alpha} \bowtie \widetilde{\beta}$. Положим

$$g(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \neq \widetilde{\alpha}; \\ b_p, & \text{если } \widetilde{x} = \widetilde{\alpha}. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция g принадлежит A_ρ и $f \prec g$, а это противоречит тому, что f является T-максимальной.

Достаточность. Пусть f не является T-максимальной. Тогда существует функция g, такая, что $f \prec g$, значит существует такой набор $\widetilde{\alpha}$, что $f(\widetilde{\alpha}) = a_1$, $g(\widetilde{\alpha}) \notin Z$. Пусть существуют два набора $\widetilde{\beta}^1$, $\widetilde{\beta}^2$, такие, что $f(\widetilde{\beta}^1) = b_1$, $f(\widetilde{\beta}^2) = b_2$, и $\widetilde{\alpha} \bowtie \widetilde{\beta}^1$, $\widetilde{\alpha} \bowtie \widetilde{\beta}^2$. Так как $f \prec g$, должны быть верны равенства $g(\widetilde{\beta}^1) = b_1$, $g(\widetilde{\beta}^2) = b_2$. Но тогда по утверждению 8.2 получаем, что $g(\widetilde{\alpha}) \in Z$, что не так.

Следствие 8.1. *Любая T-максимальная функция либо является константой b_1 или b_2, либо принимает все три значения: a_1, b_1, b_2.*

Доказательство. Пусть f — T-максимальная функция. По утверждению 8.5 f принимает значения только из множества $\{a_1, b_1, b_2\}$. Если f принимает значение a_1, то по критерию T-максимальности она должна принимать значения b_1 и b_2. В случае, если f принимает только значения b_1, b_2, то по утверждению 8.6 она является константой.

Следствие 8.2. *Пусть $f(\widetilde{x}, y)$ — T-максимальная функция, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, $c \in Z$, $f(\widetilde{\alpha}, c) \notin Z$. Тогда для любого $d \in E_k$ верно равенство $f(\widetilde{\alpha}, d) = f(\widetilde{\alpha}, c)$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $f(\widetilde{\alpha}, d) \notin Z$. Если это не так, то в силу утверждения 8.5 $f(\widetilde{\alpha}, d) = a_1$. Следовательно, по критерию T-максимальности существуют наборы $(\widetilde{\beta}^1, d^1)$, $(\widetilde{\beta}^2, d^2)$, такие, что $(\widetilde{\beta}^1, d^1) \bowtie$ $\bowtie (\widetilde{\alpha}, d)$, $(\widetilde{\beta}^2, d^2) \bowtie (\widetilde{\alpha}, d)$, $f(\widetilde{\beta}^1, d^1) = b_1$, $f(\widetilde{\beta}^2, d^2) = b_2$. Так как $c \in Z$ имеем $(\widetilde{\beta}^1, d^1) \bowtie (\widetilde{\alpha}, c)$, $(\widetilde{\beta}^2, d^2) \bowtie (\widetilde{\alpha}, c)$, но тогда по утверждению 8.2 $f(\widetilde{\alpha}, c) \in Z$, что неверно. Следовательно, $f(\widetilde{\alpha}, d) \notin Z$.

Из того, что $(\widetilde{\alpha}, d) \bowtie (\widetilde{\alpha}, c)$ и $f \in A_\rho$ получаем, что $f(\widetilde{\alpha}, d) \bowtie f(\widetilde{\alpha}, c)$. Из того, что $f(\widetilde{\alpha}, c), f(\widetilde{\alpha}, d) \notin Z$, используя утверждение 8.5 получаем, что $f(\widetilde{\alpha}, d) = f(\widetilde{\alpha}, c)$.

Следствие 8.3. *Пусть $t = 3$, $f(\widetilde{x}, y)$ — T-максимальная функция. Тогда для любого $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ верно равенство $f(\widetilde{\alpha}, b_2) = f(\widetilde{\alpha}, b_3)$.*

Доказательство. Используя следствие 8.1, получаем, что если $f(\widetilde{\alpha}, b_2) \neq a_1$, $f(\widetilde{\alpha}, b_3) \neq a_1$, то они равны, так как $(\widetilde{\alpha}, b_2) \bowtie (\widetilde{\alpha}, b_3)$, и следовательно, $f(\widetilde{\alpha}, b_2) \bowtie f(\widetilde{\alpha}, b_3)$.

Если $f(\widetilde{\alpha}, b_2) = a_1$, то по критерию T-максимальности существуют такие наборы $(\widetilde{\alpha}^1, d^1)$, $(\widetilde{\alpha}^2, d^2)$, что $(\widetilde{\alpha}, b_2) \bowtie (\widetilde{\alpha}^1, d^1)$, $(\widetilde{\alpha}, b_2) \bowtie (\widetilde{\alpha}^2, d^2)$, $f(\widetilde{\alpha}^1, d^1) = b_1$, $f(\widetilde{\alpha}^2, d^2) = b_2$. Из того, что $(\widetilde{\alpha}, b_2) \bowtie (\widetilde{\alpha}^1, d^1)$, $(\widetilde{\alpha}, b_2) \bowtie$ $\bowtie (\widetilde{\alpha}^2, d^2)$ следует $(\widetilde{\alpha}, b_3) \bowtie (\widetilde{\alpha}^1, d^1)$, $(\widetilde{\alpha}, b_3) \bowtie (\widetilde{\alpha}^2, d^2)$. Используя то, что $(\widetilde{\alpha}, b_3) \bowtie (\widetilde{\alpha}^1, d^1)$, $(\widetilde{\alpha}, b_3) \bowtie (\widetilde{\alpha}^2, d^2)$, из утверждения 8.2 получаем, что $f(\widetilde{\alpha}, b_3) = a_1$.

Аналогично доказывается, что если $f(\widetilde{\alpha}, b_3) = a_1$, то и $f(\widetilde{\alpha}, b_2) = a_1$.

Следствие 8.4. *Пусть $f(\widetilde{x}, y)$ — T-максимальная функция, $c \in E_k \backslash Z$. Тогда $g(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}, c)$ — T-максимальная функция.*

Доказательство. Пусть $g(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}, c) = a_1$. Тогда существуют два набора $(\widetilde{\beta}^1, c^1)$, $(\widetilde{\beta}^2, c^2)$, такие, что $(\widetilde{\beta}^1, c^1) \bowtie (\widetilde{\alpha}, c)$, $(\widetilde{\beta}^2, c^2) \bowtie (\widetilde{\alpha}, c)$, $f(\widetilde{\beta}^1, c^1) = b_1$, $f(\widetilde{\beta}^2, c^2) = b_2$.

Если $c^1 \notin Z$, то либо $c^1 = c$, либо $\{c^1, c\} = \{b_2, b_3\}$. В первом случае, очевидно, $g(\widetilde{\beta}^1) = f(\widetilde{\beta}^1, c) = b_1$, во втором случае это равенство вытекает из следствия 8.3. Если же $c^1 \in Z$, то по следствию 8.2 получаем, что $g(\widetilde{\beta}^1) =$ $= f(\widetilde{\beta}^1, c) = b_1$. Аналогично получаем равенство $g(\widetilde{\beta}^2) = f(\widetilde{\beta}^2, c) = b_2$. Таким образом, по критерию T-максимальности g — T-максимальная функция.

Следствие 8.5. *Пусть $f(\widetilde{x}, y)$ — T-максимальная функция, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, $c_1 \in Z$, $c_2 \in Z$. Тогда $f(\widetilde{\alpha}, c_1) = f(\widetilde{\alpha}, c_2)$.*

Доказательство. Используя следствие 8.1, получаем, что если $f(\widetilde{\alpha}, c_1) \neq a_1$, $f(\widetilde{\alpha}, c_2) \neq a_1$, то они равны, так как $(\widetilde{\alpha}, c_1) \bowtie (\widetilde{\alpha}, c_2)$, и следовательно, $f(\widetilde{\alpha}, c_1) \bowtie f(\widetilde{\alpha}, c_2)$.

Если $f(\widetilde{\alpha}, c_1) = a_1$, то по критерию T-максимальности существуют такие наборы $(\widetilde{\alpha}^1, d^1)$, $(\widetilde{\alpha}^2, d^2)$, что $(\widetilde{\alpha}, c_1) \bowtie (\widetilde{\alpha}^1, d^1)$, $(\widetilde{\alpha}, c_1) \bowtie (\widetilde{\alpha}^2, d^2)$, $f(\widetilde{\alpha}^1, d^1) = b_1$, $f(\widetilde{\alpha}^2, d^2) = b_2$. Используя то, что $(\widetilde{\alpha}, c_2) \bowtie (\widetilde{\alpha}^1, d^1)$, $(\widetilde{\alpha}, c_2) \bowtie (\widetilde{\alpha}^2, d^2)$, из утверждения 8.2 получаем, что $f(\widetilde{\alpha}, c_2) = a_1$. Аналогично, если $f(\widetilde{\alpha}, c_2) = a_1$, то и $f(\widetilde{\alpha}, c_1) = a_1$.

Утверждение 8.8. *Пусть $f(\widetilde{x})$ и $g(z, \widetilde{y})$ — T-максимальные функции. Тогда функция $h(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = g(f(\widetilde{x}), \widetilde{y})$ является T-максимальной.*

Доказательство. Если g — константа, то утверждение очевидно. Если f — константа, то по следствию 8.1 либо $f(\widetilde{x}) = b_1$, либо $f(\widetilde{x}) = b_2$. Применяя следствие 8.4, получаем, что функция h — T-максимальна.

Пусть f и g не являются константами. Функция h принимает только значения из множества $\{a_1, b_1, b_2\}$, поскольку функция g по утверждению 8.5 принимает только значения из этого множества. Докажем, что h — T-максимальная функция, применяя критерий T-максимальности. Пусть для некоторых наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\gamma}$ верно равенство $h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = a_1$. Найдем два набора $(\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\delta}^1)$, $(\widetilde{\beta}^2, \widetilde{\delta}^2)$, такие, что $(\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\delta}^1) \bowtie (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$, $(\widetilde{\beta}^2, \widetilde{\delta}^2) \bowtie (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$, $h(\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\delta}^1) = b_1$, $h(\widetilde{\beta}^2, \widetilde{\delta}^2) = b_2$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = c \notin Z$. Тогда по следствию 8.4 $g(c, \widetilde{y})$ — T-максимальная функция. Заметим, что $g(c, \widetilde{\gamma}) = h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = a_1$. Следовательно, по критерию T-максимальности существуют два набора $\widetilde{\delta}^1$, $\widetilde{\delta}^2$ такие, что $\widetilde{\delta}^1 \bowtie \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\delta}^2 \bowtie \widetilde{\gamma}$, $g(c, \widetilde{\delta}^1) = b_1$, $g(c, \widetilde{\delta}^2) = b_2$. Для наборов $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^1)$, $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^2)$ выполнены следующие условия: $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^1) \bowtie (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$, $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^2) \bowtie (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$, $h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^1) = b_1$, $h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^2) = b_2$.

Случай 2. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) \in Z$. Тогда из утверждения 8.5 следует, что $f(\widetilde{\alpha}) = a_1$. Следовательно, по критерию T-максимальности существуют два набора $\widetilde{\sigma}^1$, $\widetilde{\sigma}^2$, такие, что $\widetilde{\sigma}^1 \bowtie \widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\sigma}^2 \bowtie \widetilde{\alpha}$, $f(\widetilde{\sigma}^1) = b_1$, $f(\widetilde{\sigma}^2) = b_2$. Заметим, что $g(a_1, \widetilde{\gamma}) = h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = a_1$. Применяя критерий T-максимальности получаем, что существуют два набора $(c_1, \widetilde{\delta}^1)$, $(c_2, \widetilde{\delta}^2)$, такие, что $(c_1, \widetilde{\delta}^1) \bowtie (a_1, \widetilde{\gamma})$, $(c_2, \widetilde{\delta}^2) \bowtie (a_1, \widetilde{\gamma})$, $g(c_1, \widetilde{\delta}^1) = b_1$, $g(c_2, \widetilde{\delta}^2) = b_2$. Если $c_1 \in Z$, то по следствию 8.5 $h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^1) = g(a_1, \widetilde{\delta}^1) = g(c_1, \widetilde{\delta}^1) = b_1$. Если $c_1 = b_1$, то верны равенства $h(\widetilde{\sigma}^1, \widetilde{\delta}^1) = g(b_1, \widetilde{\delta}^1) = g(c_1, \widetilde{\delta}^1) = b_1$. Если же $c_1 \in \{b_2, b_3\}$, то по следствию 8.3 получаем равенства $h(\widetilde{\sigma}^2, \widetilde{\delta}^1) = g(b_2, \widetilde{\delta}^1) = g(c_1, \widetilde{\delta}^1) = b_1$. Итак, при любом значении c_1 мы нашли такой набор $\widetilde{\beta}^1 \in \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\sigma}^1, \widetilde{\sigma}^2\}$, что $(\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\delta}^1) \bowtie (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$ и $h(\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\delta}^1) = b_1$. Аналогичным образом можно выбрать набор $\widetilde{\beta}^2$ так, чтобы $(\widetilde{\beta}^2, \widetilde{\delta}^2) \bowtie (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$ и $h(\widetilde{\beta}^2, \widetilde{\delta}^2) = b_2$.

Таким образом, при всяком значении $f(\widetilde{\alpha})$ мы нашли два набора $(\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\delta}^1)$, $(\widetilde{\beta}^2, \widetilde{\delta}^2)$, такие, что $(\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\delta}^1) \bowtie (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$, $(\widetilde{\beta}^2, \widetilde{\delta}^2) \bowtie (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$, $h(\widetilde{\beta}^1, \widetilde{\delta}^1) = b_1$, $h(\widetilde{\beta}^2, \widetilde{\delta}^2) = b_2$. Отсюда получаем, что по критерию T-максимальности функция $h(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ является T-максимальной.

Следствие 8.6. *Бесповторная суперпозиция T-максимальных функций является T-максимальной функцией.*

Определим функцию $\zeta(x, y_1, y_2)$ следующим образом. Положим

$$\zeta(x, y_1, y_2) = \begin{cases} y_1, & \text{если } x = b_1 \text{ и } y_1 \neq b_3; \\ b_2, & \text{если } x = b_1 \text{ и } y_1 = b_3; \\ y_2, & \text{если } x \in \{b_2, b_3\} \text{ и } y_2 \neq b_3; \\ b_2, & \text{если } x \in \{b_2, b_3\} \text{ и } y_2 = b_3; \\ y_1, & \text{если } x \in Z, \text{ и } y_1 = y_2 \neq b_3; \\ b_2, & \text{если } x \in Z, \text{ и } y_1 = y_2 = b_3; \\ a_1, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

Утверждение 8.9. *Функция ζ принадлежит классу A_ρ.*

Доказательство. Заметим, что функция ζ принимает только значения из множества $\{a_1, b_1, b_2\}$.

Предположим, что функция ζ не принадлежит A_ρ, тогда существуют такие наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, что $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \bowtie (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = b_1$ и $\zeta(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = b_2$.

Таблица 2

	A	B	C
1	2	1	2
2	1	3	3
3	2	3	2

Из равенства $\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = b_1$ получаем, что выполнено одно из следующих условий:

A) $\alpha_1 = b_1$ и $\alpha_2 = b_1$,

B) $\alpha_1 \in \{b_2, b_3\}$ и $\alpha_3 = b_1$,

C) $\alpha_1 \in Z$ и $\alpha_2 = \alpha_3 = b_1$.

Из равенства $\zeta(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = b_2$ получаем, что выполнено одно из следующих условий:

1) $\beta_1 = b_1$ и $\beta_2 \in \{b_2, b_3\}$,

2) $\beta_1 \in \{b_2, b_3\}$ и $\beta_3 \in \{b_2, b_3\}$,

3) $\beta_1 \in Z$ и $\beta_2 = \beta_3 \in \{b_2, b_3\}$.

Значения i, такие, что $(\alpha_i, \beta_i) \notin \rho$, для каждого из случаев выписаны в табл. 2.

Таким образом, всегда существует такое i, что $(\alpha_i, \beta_i) \notin \rho$, а это противоречит тому, что $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \bowtie (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Таким образом, утверждение доказано.

Пусть $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, $\widetilde{\beta} \in E_k^n$. Будем писать $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$, если $\alpha_i \preceq \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Утверждение 8.10. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — T-максимальная функция, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, $\widetilde{\beta} \in E_k^n$ и $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$. Тогда выполнено соотношение $f(\widetilde{\alpha}) \preceq f(\widetilde{\beta})$.*

Доказательство. Очевидно, что $\widetilde{\alpha} \bowtie \widetilde{\beta}$. Поэтому выполнено соотношение $f(\widetilde{\alpha}) \bowtie f(\widetilde{\beta})$.

Пусть $f(\widetilde{\beta}) \neq a_1$. Поскольку по утверждению 8.5 T-максимальная функция f принимает только значения a_1, b_1, b_2, получаем, что $f(\widetilde{\beta}) \in \{b_1, b_2\}$. Тогда из $f(\widetilde{\alpha}) \bowtie f(\widetilde{\beta})$ вытекает неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \preceq f(\widetilde{\beta})$.

Пусть $f(\widetilde{\beta}) = a_1$. Покажем, что $f(\widetilde{\alpha}) = a_1$. Если $f(\widetilde{\beta}) = a_1$, то по критерию T-максимальности существуют такие наборы $\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2$, что $f(\widetilde{\tau}_1) = b_1$, $f(\widetilde{\tau}_2) = b_2$, $\widetilde{\tau}_1 \bowtie \widetilde{\beta}$, $\widetilde{\tau}_2 \bowtie \widetilde{\beta}$. Из того что $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$, следует, что для любого набора $\widetilde{\sigma}$ такого, что $\widetilde{\beta} \bowtie \widetilde{\sigma}$ верно $\widetilde{\alpha} \bowtie \widetilde{\sigma}$, а тогда $\widetilde{\tau}_1 \bowtie \widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\tau}_2 \bowtie \widetilde{\alpha}$. Следовательно, по утверждению 8.2 $f(\widetilde{\alpha}) \in Z$. Отсюда, применяя утверждение 8.5, получаем, что $f(\widetilde{\alpha}) = a_1$. Таким образом, утверждение доказано.

Из определения T-максимальности легко видеть, что для каждой функции $f \in A_\rho$ существует такая T-максимальная функция g, что $f \preceq g$. (Заметим, что таких функций может быть несколько.) Определим отображение Ω: $A_\rho \to A_\rho$ следующим образом. Пусть Ω отображает каждую функцию f из A_ρ в некоторую T-максимальную функцию $g = \Omega[f]$, такую, что $f \preceq g$. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, такая, что $[\mathfrak{A}] = A_\rho$. Положим $\Omega(\mathfrak{A}) = \{\Omega[f] \mid f \in \mathfrak{A}\}$. Очевидно, что $\Omega(\Omega(\mathfrak{A})) = \Omega(\mathfrak{A})$. Пусть Φ — формула над $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\Omega[\Phi]$ формулу, полученную из формулы Φ заменой всех функций $f \in \mathfrak{A}$, входящих в Φ, на их образы $\Omega[f]$ при отображении Ω. Отметим, что формула $\Omega[\Phi]$ является формулой над $\Omega(\mathfrak{A})$.

Пусть Φ и Ψ — произвольные формулы реализующие функции $f(\widetilde{x})$ и $g(\widetilde{x})$ соответственно. Будем писать $\Phi \preceq \Psi$ в том случае, когда верно неравенство $f(\widetilde{x}) \preceq g(\widetilde{x})$.

Следствие 8.7. *Пусть Φ — формула над A_ρ. Тогда $\Phi \preceq \Omega[\Phi]$.*

Доказательство. Положим $N = D(\Phi)$. Будем доказывать утверждение индукцией по N. Если $N=1$, то утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для всех $N < M$. Покажем, что оно верно и для $N = M$. Формула Φ имеет вид $\varphi(\Phi_1(\widetilde{x}),\ldots,\Phi_m(\widetilde{x}))$, где $\Phi_i(\widetilde{x})$, $i=1,\ldots,m$, — формулы над A_ρ, $\varphi\in A_\rho$ и $D(\Phi_i)<M$, $i=1,\ldots,m$. Положим $\Psi_i=\Omega[\Phi_i]$, если Φ_i — нетривиальная формула и $\Psi_i=\Phi_i$, если Φ_i — символ переменной, $i=1,\ldots,m$. Очевидно, что $\Omega[\Phi]=\Omega[\varphi](\Psi_1(\widetilde{x}),\ldots,\Psi_m(\widetilde{x}))$. Для произвольного набора $\widetilde{\alpha}$ верно соотношение $\Phi(\widetilde{\alpha})=\varphi(\Phi_1(\widetilde{\alpha}),\ldots,\Phi_m(\widetilde{\alpha}))\preceq\Omega[\varphi](\Phi_1(\widetilde{\alpha}),\ldots,\Phi_m(\widetilde{\alpha}))$, так как $\varphi\preceq\Omega[\varphi]$. Применяя предположение индукции к Φ_i, $i=1,\ldots,m$, получаем, что $\Phi_i\preceq\Psi_i$, $i=1,\ldots,m$. Используя утверждение 8.10 для функции $\Omega[\varphi]$ получаем, что $\Omega[\varphi](\Phi_1(\widetilde{\alpha}),\ldots,\Phi_m(\widetilde{\alpha}))\preceq\Omega[\varphi](\Psi_1(\widetilde{\alpha}),\ldots,\Psi_m(\widetilde{\alpha}))=\Omega[\Phi](\widetilde{\alpha})$. Отсюда $\Phi\preceq\Omega[\Phi]$.

Утверждение 8.11. *Пусть $f(y_1,\ldots,y_m,\widetilde{x})$ — T-максимальная функция, $m\geqslant 1$. Тогда выполняется соотношение.*

$$f(y,\ldots,y,\widetilde{x})\preceq\zeta(y,f(b_1,\ldots,b_1,\widetilde{x}),f(b_2,\ldots,b_2,\widetilde{x})).$$

Доказательство. Покажем, что для произвольных $\beta\in E_k$, $\widetilde{\alpha}\in E_k^n$ верно соотношение

$$f(\beta,\ldots,\beta,\widetilde{\alpha})\preceq\zeta(\beta,f(b_1,\ldots,b_1,\widetilde{\alpha}),f(b_2,\ldots,b_2,\widetilde{\alpha})). \quad (13)$$

Заметим, что по утверждению 8.5 функция f принимает только значения из множества $\{a_1,b_1,b_2\}$. Положим $v_1=f(b_1,\ldots,b_1,\widetilde{\alpha})$, $v_2=f(b_2,\ldots,b_2,\widetilde{\alpha})$, $v_3=f(b_3,\ldots,b_3,\widetilde{\alpha})$. Из следствия 8.3 следует, что $v_2=v_3$.

Случай 1. Пусть $\beta\notin Z$. Тогда из определения функции ζ получаем, что если $\beta=b_1$, то $\zeta(\beta,v_1,v_2)=v_1$, а если $\beta\in\{b_2,b_3\}$, то $\zeta(\beta,v_1,v_2)=v_2=v_3$. Следовательно, верно соотношение (13) (при этом достигается равенство).

Случай 2. Пусть $\beta\in Z$. Если $v_1\neq v_2$, то заметим, что из утверждения 8.10 следует, что $f(\beta,\ldots,\beta,\widetilde{\alpha})\preceq v_1$ и $f(\beta,\ldots,\beta,\widetilde{\alpha})\preceq v_2$. Используя то, что $v_1,v_2\in\{a_1,b_1,b_2\}$, получаем, что $f(\beta,\ldots,\beta,\widetilde{\alpha})=a_1$, и верно соотношение (13). Если $v_1=v_2$, то из определения функции ζ получаем, что $f(\beta,\ldots,\beta,\widetilde{\alpha})\preceq v_1=\zeta(\beta,v_1,v_2)$, т. е. в этом случае также выполняется соотношение (13).

При $m=1$ получаем следующее следствие.

Следствие 8.8. *Пусть $f(y,\widetilde{x})$ — T-максимальная функция. Тогда верно равенство*

$$f(y,\widetilde{x})=\zeta(y,f(b_1,\widetilde{x}),f(b_2,\widetilde{x})). \quad (14)$$

Доказательство. Из предыдущего утверждения вытекает следующее соотношение

$$f(y,\widetilde{x})\preceq\zeta(y,f(b_1,\widetilde{x}),f(b_2,\widetilde{x})).$$

Поскольку функции ζ, f и константы b_1, b_2 принадлежат классу A_ρ, правая часть этого неравенства тоже принадлежит A_ρ, но f — T-максимальная функция, а значит в классе A_ρ не существует такой функции $g(y,\widetilde{x})$, что $f(y,\widetilde{x})\prec g(y,\widetilde{x})$. Следовательно, верно равенство (14).

Определим функцию $j(x)$ следующим образом

$$j(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in Z;\\ b_1, & \text{если } x\notin Z.\end{cases}$$

Очевидно, что функция $j(x)$ принадлежит классу A_ρ. Для каждой функции $f(\widetilde{x})$ из A_ρ определим функцию $f'(\widetilde{x})$ из A_ρ следующим образом. Положим $f'(\widetilde{x})=j(f(\widetilde{x}))$. Пусть Φ — формула над A_ρ, $\Phi=f(\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_n)$, где

$\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ — формулы над A_ρ, $f \in A_\rho$. Обозначим через $\Gamma[\Phi]$ формулу $f'(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$. Очевидно, что $D(\Gamma[\Phi]) = D(\Phi)$ и $\Gamma[\Phi] \sim j(\Phi)$.

Определим функцию $u(x, y)$ следующим образом

$$u(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in Z; \\ y, & \text{если } x \notin Z, y \notin Z; \\ a_1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Утверждение 8.12. *Если функции $f(\widetilde{x})$ и $g(\widetilde{x})$ из A_ρ, f не принимает значения b_3 и $f \preceq g$, то $u(f'(\widetilde{x}), g(\widetilde{x})) = f(\widetilde{x})$.*

Доказательство. Покажем, что равенство верно для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$. Если $f(\widetilde{\alpha}) \in Z$, то $f'(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$ и верны равенства $u(f'(\widetilde{\alpha}), g(\widetilde{\alpha})) = u(f(\widetilde{\alpha}), g(\widetilde{\alpha})) = f(\widetilde{\alpha})$. Если $f(\widetilde{\alpha}) \notin Z$, то $f'(\widetilde{\alpha}) = b_1$, $g(\widetilde{\alpha}) \notin Z$ и верны равенства $u(f'(\widetilde{\alpha}), g(\widetilde{\alpha})) = u(b_1, g(\widetilde{\alpha})) = g(\widetilde{\alpha})$. Используя соотношения $f(\widetilde{\alpha}), g(\widetilde{\alpha}) \notin Z$, $f(\widetilde{\alpha}) \neq b_3$, и $f(\widetilde{\alpha}) \preceq g(\widetilde{\alpha})$, получаем, что $g(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Таким образом, утверждение доказано.

Определим функцию φ следующим образом: $\varphi(x, y_0, \ldots, y_{k-1}) = j(y_x)$.

Утверждение 8.13. *Функции $u(x, y)$ и $\varphi(x, y_0, \ldots, y_{k-1})$ принадлежат классу A_ρ.*

Доказательство. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \rho$, $u(\alpha_1, \beta_1) = \gamma_1$, $u(\alpha_2, \beta_2) = \gamma_2$. Покажем, что $(\gamma_1, \gamma_2) \in \rho$. Предположим, что $(\gamma_1, \gamma_2) \notin \rho$. Тогда $\gamma_1, \gamma_2 \notin Z$, следовательно, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \notin Z$ и $\gamma_1 = \beta_1$, $\gamma_2 = \beta_2$, а значит $(\beta_1, \beta_2) \notin \rho$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $(\gamma_1, \gamma_2) \in \rho$. Поэтому $u \in A_\rho$. Функция φ принимает только значения из $Z \cup \{b_1\}$ и поэтому принадлежит классу A_ρ. Таким образом, утверждение доказано.

Определим функцию $\psi(x, y_0, \ldots, y_{k-1}, z_1, z_2)$ следующим образом. Положим

$$\psi(x, y_0, \ldots, y_{k-1}, z_1, z_2) = u(\varphi(x, y_0, \ldots, y_{k-1}), \zeta(x, z_1, z_2)).$$

Легко видеть, что функция $\psi(x, y_0, \ldots, y_{k-1}, z_1, z_2)$ принадлежит классу A_ρ, так как является суперпозицией функций u, φ и ζ, которые принадлежат A_ρ. Заметим, что функция ζ не принимает значения b_3.

Утверждение 8.14. *Пусть $\mathfrak{D}$ — такая конечная система функций из P_k, что $\Omega(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D} \subseteq A_\rho$. Пусть $A(\widetilde{x})$ и $B(y, \widetilde{x})$ — формулы над $\mathfrak{D}$, такие, что $B(y, \widetilde{x})$ не принимает значения b_3, и в формуле $B(y, \widetilde{x})$ каждая переменная, кроме y имеет только одно вхождение. Пусть $\Phi(\widetilde{x}) = B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$. Тогда верно соотношение*

$$\psi(A(\widetilde{x}), B(0, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, \widetilde{x})) \sim \Phi(\widetilde{x}). \quad (15)$$

Доказательство. Пусть переменная y имеет m вхождений в формулу $B(y, \widetilde{x})$. Из определения функции φ получаем соотношение

$$\varphi(A(\widetilde{x}), B(0, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, \widetilde{x})) \sim \Gamma[\Phi](\widetilde{x}). \quad (16)$$

Для каждого $i = 1, \ldots, m$ заменим i-е вхождение переменной y в формулу $B(y, \widetilde{x})$ на y_i. Получим формулу $B'(y_1, \ldots, y_m, \widetilde{x})$, в которой каждая переменная имеет только одно вхождение. Заметим, что верно соотношение $B'(y, \ldots, y, \widetilde{x}) \sim B(y, \widetilde{x})$. Из следствия 8.6 получаем, что $\Omega[B'](y_1, \ldots, y_m, \widetilde{x})$ реализует T-максимальную функцию, так как является бесповторной суперпозицией T-максимальных функций. Тогда из утверждения 8.11 получаем соотношение

$$\Omega[B'](y, \ldots, y, \widetilde{x}) \preceq \zeta(y, \Omega[B'](b_1, \ldots, b_1, \widetilde{x}), \Omega[B'](b_2, \ldots, b_2, \widetilde{x})).$$

Отсюда получаем

$$\Omega[B](y, \widetilde{x}) \preceq \zeta(y, \Omega[B](b_1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, \widetilde{x})),$$

$$\Omega[B](A(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \preceq \zeta(A(\widetilde{x}), \Omega[B](b_1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, \widetilde{x})). \tag{17}$$

Применяя следствие 8.7, получаем

$$\Phi(\widetilde{x}) = B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \preceq \Omega[B](A(\widetilde{x}), \widetilde{x}).$$

Учитывая (17), получаем

$$\Phi(\widetilde{x}) \preceq \zeta(A(\widetilde{x}), \Omega[B](b_1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, \widetilde{x})).$$

Отсюда, применяя утверждение 8.12 и пользуясь тем, что Φ не принимает значения b_3, получаем соотношение

$$u(\Gamma[\Phi](\widetilde{x}), \zeta(A(\widetilde{x}), \Omega[B](b_1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, \widetilde{x}))) \sim \Phi(\widetilde{x}).$$

Подставляя (16), получаем

$$u(\varphi(A(\widetilde{x}), B(0, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, \widetilde{x})),$$
$$\zeta(A(\widetilde{x}), \Omega[B](b_1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, \widetilde{x}))) \sim \Phi(\widetilde{x}). \tag{18}$$

Воспользовавшись определением функции ψ, легко видеть, что левые части соотношений (18) и (15) эквивалентны.

Следствие 8.9. *Пусть $\mathfrak{D}$ — такая конечная система функций из P_k, что $\Omega(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D} \subseteq A_\rho$. Пусть $A(\widetilde{x})$ и $B(y, \widetilde{x})$ — формулы над $\mathfrak{D}$, такие, что $B(y, \widetilde{x})$ не принимает значения b_3 и верно равенство $\Phi(\widetilde{x}) = B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$. Тогда верно следующее соотношение*

$$\psi(A(\widetilde{x}), B(0, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, \widetilde{x})) \sim \Phi(\widetilde{x}).$$

Доказательство. Пусть переменная x_i имеет m_i вхождений в формулу $B(y, \widetilde{x})$, $i = 1, \ldots, n$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ и каждого $j = 1, \ldots, m_i$ в формуле $B(y, \widetilde{x})$ заменим j-е вхождение переменной x_i на x_i^j. Получим формулу $B'(y, \widetilde{x}')$, где через $\widetilde{x}'$ обозначен набор новых переменных, каждая из которых встречается в формуле $B'(y, \widetilde{x}')$ по одному разу. Ясно, что при подстановке x_i вместо x_i^j для каждого $i = 1, \ldots, n$ и каждого $j = 1, \ldots, m_i$ в формулу B' мы получаем формулу B.

Применяя утверждение 8.14 к формуле $B'(A(\widetilde{x}), \widetilde{x}')$, получаем соотношение

$$\psi(A(\widetilde{x}'), B'(0, \widetilde{x}'), \ldots, B'(k-1, \widetilde{x}'), \Omega[B'](b_1, \widetilde{x}'), \Omega[B'](b_2, \widetilde{x}')) \sim B'(A(\widetilde{x}), \widetilde{x}').$$

Теперь отождествляя переменные получаем

$$\psi(A(\widetilde{x}), B(0, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_1, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, \widetilde{x})) \sim B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x}) = \Phi(\widetilde{x}).$$

Следствие 8.10. *Пусть $s \geqslant 1$. Тогда существуют $l > 0$ и функция $\psi_s(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_l)$ из A_ρ, не принимающая значения b_3, такая, что для любой конечной системы функций $\mathfrak{D}$ из P_k такой, что $\Omega(\mathfrak{D}) \cup \{0, \ldots, k-1\} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq A_\rho$, любых формул $A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$ и любой формулы $B(y_1, \ldots, y_s, \widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, не принимающей значения b_3, существуют такие формулы $B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_l(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, что $D(B_i) \leqslant D(B) + s$, $i = 1, \ldots, l$, и верно следующее соотношение*

$$\psi_s(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_l(\widetilde{x})) \sim B(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_s(\widetilde{x}), \widetilde{x}).$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по s. Для $s=1$ утверждение следует из следствия 8.9.

Пусть утверждение верно для $s \leqslant N-1$. Покажем, что оно верно и для $s=N$. Положим $\Phi(\widetilde{x}) = B(A_1(\widetilde{x}), \ldots, A_N(\widetilde{x}), \widetilde{x})$. Рассмотрим формулу $B(A_1(\widetilde{x}), y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x})$. Применяя к этой формуле следствие 8.9, получаем соотношение

$$\psi(A_1(\widetilde{x}), B(0, y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}),$$
$$\Omega[B](b_1, y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x})) \sim B(A_1(\widetilde{x}), y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}).$$

Подставляя вместо переменных $y_2, \ldots, y_N$ формулы $A_2(\widetilde{x}), \ldots, A_N(\widetilde{x})$ получаем соотношение

$$\psi(A_1(\widetilde{x}), B(0, A_2(\widetilde{x}), \ldots, A_N(\widetilde{x}), \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, A_2(\widetilde{x}), \ldots, A_N(\widetilde{x}), \widetilde{x}),$$
$$\Omega[B](b_1, A_2(\widetilde{x}), \ldots, A_N(\widetilde{x}), \widetilde{x}), \Omega[B](b_2, A_2(\widetilde{x}), \ldots, A_N(\widetilde{x}), \widetilde{x})) \sim \Phi(\widetilde{x}). \quad (19)$$

Рассмотрим формулы:

$$\Psi_1(y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}) = B(0, y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}),$$
$$\ldots$$
$$\Psi_{k-1}(y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}) = B(k-1, y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}),$$
$$\Psi_k(y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}) = \Omega[B](b_1, y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}),$$
$$\Psi_{k+1}(y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}) = \Omega[B](b_2, y_2, \ldots, y_N, \widetilde{x}),$$
$$\Phi_j(\widetilde{x}) = \Psi_j(A_2(\widetilde{x}), \ldots, A_N(\widetilde{x}), \widetilde{x}), \qquad j = 1, \ldots s.$$

Из соотношения (19) и определения формул Φ_j вытекает следующее соотношение

$$\Phi(\widetilde{x}) \sim \psi(A_1(\widetilde{x}), \Phi_1(\widetilde{x}), \ldots, \Phi_{k+1}(\widetilde{x})). \quad (20)$$

Кроме того, справедливы неравенства $D(\Psi_j) \leqslant D(B)+1$, $j=0, \ldots, k+1$. Применяя предположение индукции к каждой из формул Φ_j, получаем, что существуют $l>0$, функция ψ_{N-1}, и формулы B_i^j, $i=1, \ldots, l$, $j=0, \ldots, k+1$, такие, что $D(B_i^j) \leqslant D(\Psi_j)+(N-1) \leqslant D(B)+N$, и при этом верны следующие соотношения

$$\psi_{N-1}(A_2(\widetilde{x}), \ldots, A_N(\widetilde{x}), B_1^j(\widetilde{x}), \ldots, B_l^j(\widetilde{x})) \sim \Phi_j(\widetilde{x}), \quad j=0, \ldots, k+1.$$

где $D(B_i^j) \leqslant D(B)$, $i=1, \ldots, l$, $j=0, \ldots, k+1$. Подставляя полученные разложения в соотношение (20), получаем требуемое соотношение для $s=N$. Следствие доказано.

Определим функцию $\varphi(x, y_0, \ldots, y_{k-1})$ следующим образом. Положим

$$\varphi(x, y_0, \ldots, y_{k-1}) = \begin{cases} y_x, & \text{если } y_x \neq b_1, \\ a_1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\varphi(x, y_0, \ldots, y_{k-1})$ принадлежит классу A_ρ, так как она принимает только значения из множества $Z \cup \{b_2, b_3\}$.

Утверждение 8.15. *Пусть $\mathfrak{D}$ — такая конечная система функций из P_k, что $\Omega(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D} \subseteq A_\rho$. Пусть $A(\widetilde{x})$ и $B(y, \widetilde{x})$ — некоторые формулы над $\mathfrak{D}$ и формула $B(y, \widetilde{x})$ не принимает значения b_1. Пусть $\Phi = B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$. Тогда верно следующее соотношение*

$$\varphi(A(\widetilde{x}), B(0, \widetilde{x}), \ldots, B(k-1, \widetilde{x})) \sim \Phi(\widetilde{x}).$$

Доказательство. Формулы $B(0,\widetilde{x}),\ldots,B(k-1,\widetilde{x})$ не принимают значения b_1, так как формула $B(y,\widetilde{x})$ не принимает этого значения. Отсюда легко видеть, что требуемое соотношение верно.

Следствие 8.11. *Пусть $s\geqslant 1$. Тогда существуют $l>0$ и функция $\varphi_s(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_l)$ из A_ρ не принимающая значения b_1, такая, что для любой конечной системы функций $\mathfrak{D}$ из P_k, такой, что $\Omega(\mathfrak{D})\cup\{0,\ldots,k-1\}\subseteq\mathfrak{D}\subseteq A_\rho$, любых формул $A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$ и любой формулы $B(y_1,\ldots,y_s,\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, не принимающей значения b_1, существуют такие формулы $B_1(\widetilde{x}),\ldots,B_l(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, что $D(B_i)\leqslant D(B)$, $i=1,\ldots,l$, и верно следующее соотношение*

$$\varphi_s(A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x}),B_1(\widetilde{x}),\ldots,B_l(\widetilde{x}))\sim B(A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x}),\widetilde{x}).$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 8.10.

Теперь, объединяя следствие 8.10 и следствие 8.11, мы можем сформулировать основное утверждение этого раздела.

Пусть $\tau\in\mathbb{C}^*_{k,2}\cup\mathbb{C}^{**}_{k,2}$ и пусть $b_1,\ldots,b_t$ — все элементы E_k, которые не принадлежат центру отношения τ $(2\leqslant t\leqslant 3)$, причем если $t=3$ (т. е. если $\tau\in\mathbb{C}^{**}_2$), то $(b_2,b_3)\in\tau$. Обозначим через K_τ множество всех функций из A_τ, которые не принимают значения b_3 или не принимают значения b_1.

Утверждение 8.16. *Пусть $\tau\in\mathbb{C}^*_{k,2}\cup\mathbb{C}^{**}_{k,2}$, $s\geqslant 1$. Тогда существуют $l\geqslant 1$ и такое конечное множество функций $\mathfrak{F}$ из K_τ, каждая из которых зависит от $l+s$ переменных, что для любой конечной системы функций $\mathfrak{D}$ из P_k такой, что $\Omega(\mathfrak{D})\cup\{0,\ldots,k-1\}\subseteq\mathfrak{D}\subseteq A_\tau$, любых формул $A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, любой формулы $B(y_1,\ldots,y_s,\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, реализующей некоторую функцию из K_τ, существуют функция $\varphi(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_l)$ из $\mathfrak{F}$ и формулы $B_1(\widetilde{x}),\ldots,B_l(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}$, такие, что $D(B_i)\leqslant D(B)+s$, $i=1,\ldots,l$, и верно следующее соотношение*

$$\varphi(A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x}),B_1(\widetilde{x}),\ldots,B_l(\widetilde{x}))\sim B(A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x}),\widetilde{x}).$$

Заметим, что в последнем утверждении множество $\mathfrak{F}$ зависит лишь от k, τ и s и не зависит от множества $\mathfrak{D}$. Это множество будем обозначать через $\mathfrak{F}_{k,\tau,s}$.

8.2. Равномерность порождающих систем в классах типа $\mathbb{C}_2$. Пусть $\rho\subseteq E_k^2$, $k\geqslant 3$, $\rho\in\mathbb{C}_2$, Z — центр отношения ρ. Положим $r=k-|Z|$. По определению $Z\neq E_k$, следовательно, $r\geqslant 1$. Если $r=1$, то из определения центрального отношения получаем, что $\rho=E_k^2\notin\mathbb{C}$. Поэтому $r\geqslant 2$. Пусть $Z=\{a_1,\ldots,a_{k-r}\}$, $E_k\backslash Z=\{b_1,\ldots,b_r\}$, и выполнены следующие условия.

$$Z=E_{k-r},\quad b_1=k-r,\ \ldots,\ b_r=k-1. \tag{21}$$

Предположим, что существуют такие i и j, что $1\leqslant i<j\leqslant r$ и $(b_i,b_j)\in\rho$. Тогда существуют такие попарно различные i_1,i_2,i_3, $1\leqslant i_1,i_2,i_3\leqslant r$, что $(b_{i_1},b_{i_2})\notin\rho$, $(b_{i_2},b_{i_3})\in\rho$. Если это не так, то легко показать, что $\rho=E_k^2$, но это невозможно, поскольку ρ — центральное отношение. Без ограничения общности будем считать, что $i_1=1$, $i_2=2$, $i_3=3$. Таким образом, мы считаем, что всегда верно соотношение $(b_1,b_2)\notin\rho$. Определим число q следующим образом. Рассмотрим два случая.

1. Если для всех i и j, таких, что $1\leqslant i<j\leqslant r$ набор (b_i,b_j) не принадлежит отношению ρ, то положим $q=k-r+2$. Таким образом, в этом случае $\{a_1,\ldots,a_{k-r},b_1,b_2\}=E_q$, $(b_1,b_2)\notin\rho$.

2. Если существуют такие i и j, что $1\leqslant i<j\leqslant r$ и $(b_i,b_j)\in\rho$, то положим $q=k-r+3$. Таким образом, в этом случае $\{a_1,\ldots,a_{k-r},b_1,b_2,b_3\}=E_q$,

$(b_1, b_2) \notin \rho$, кроме того, $(b_2, b_3) \in \rho$. Заметим, что $Z \subseteq E_q$, $3 \leqslant q \leqslant k$. Пусть τ — такое бинарное отношение на E_q, что $(a, b) \in \tau$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \rho$ и $a, b \in E_q$. Заметим, что если функция $f(\widetilde{x})$ принадлежит классу A_ρ и на наборах их множества E_q^n принимает значения из E_q, то функция $f\big|_{E_q}$ (являющаяся ее ограничением на E_q) принадлежит классу A_τ.

Утверждение 8.17. $\tau \in \mathbb{C}^*_{q,2} \cup \mathbb{C}^{**}_{q,2}$.

Доказательство. Из того, что $(b_1, b_2) \notin \rho$ следует, что $(b_1, b_2) \notin \tau$, а значит $\tau \neq E_q^2$. Если для всех i и j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant r$ пара (b_i, b_j) не принадлежит отношению ρ, то очевидно, что Z является центром τ, и по определению $\tau \in \mathbb{C}^*_{q,2}$. В противном случае по определению $(b_2, b_3) \in \rho$, и, следовательно, $(b_2, b_3) \in \tau$. Если при этом $(b_1, b_3) \in \tau$, то $Z \cup \{b_3\}$ является центром τ и $\tau \in \mathbb{C}^*_{q,2}$. Если же $(b_1, b_3) \notin \tau$, то Z является центром τ и $\tau \in \mathbb{C}^{**}_{q,2}$. Утверждение доказано.

Таблица 3

σ_1^1	...	σ_1^s
σ_2^1	...	σ_2^s
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
σ_r^1	...	σ_r^s

Рассмотрим множество $M = \{(i,j) \in \{1,\ldots,r\}^2 | i<j\}$. Положим $s = |M|$. Легко видеть, что множество M не пусто, поэтому $s \geqslant 1$. Пронумеруем пары из множества M числами от 1 до s. Пару с номером n обозначим через (i_n, j_n). Определим прямоугольную матрицу Σ, состоящую из r строк и s столбцов (см. табл. 3), элементами которой являются $\sigma_t^n \in \{a_1, b_1, b_2, b_3\}$, $n = 1, \ldots, s$, $t = 1, \ldots, r$.

Для каждого $n = 1, \ldots, s$ положим $\sigma_t^n = a_1$, для всех t, таких, что $1 \leqslant t \leqslant r$, $t \neq i_n$, $t \neq j_n$; если $(b_{i_n}, b_{j_n}) \notin \rho$, то положим $\sigma_{i_n}^n = b_1$, $\sigma_{j_n}^n = b_2$, если $(b_{i_n}, b_{j_n}) \in \rho$, то положим $\sigma_{i_n}^n = b_2$, $\sigma_{j_n}^n = b_3$. Определим функцию $\eta(x_1, \ldots, x_s)$ из P_k следующим образом. На k наборах определим η табл. 4.

Таблица 4

x_1	...	x_s	η
a_1	...	a_1	a_1
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{k-r}	...	a_{k-r}	a_{k-r}
σ_1^1	...	σ_1^s	b_1
σ_2^1	...	σ_2^s	b_2
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
σ_r^1	...	σ_r^s	b_r

Таблица 5

η	η_1	...	η_s
a_1	a_1	...	a_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{k-r}	a_{k-r}	...	a_{k-r}
b_1	σ_1^1	...	σ_1^s
b_2	σ_2^1	...	σ_2^s
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
b_r	σ_r^1	...	σ_r^s

На остальных наборах положим η равной a_1. Определим функции $\eta_1(x),\ldots,\eta_s(x)$ из P_k табл. 5.

Из определений вытекают следующие свойства функций $\eta,\eta_1,\ldots,\eta_s$.

1. *Функции $\eta_1,\ldots,\eta_s$ принимают только значения из множества E_q, причем каждая из этих функций либо не принимает значения b_1, либо не принимает значения b_3.*

2. *Верно равенство $\eta(\eta_1(x), \ldots, \eta_s(x)) = x$.*

Утверждение 8.18. $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_s \in A_\rho$.

Доказательство. Предположим, что $\eta \notin A_\rho$ Тогда существуют такие наборы $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_s^1), (\alpha_1^2, \ldots, \alpha_s^2) \in E_k^s$, что $(\alpha_i^1, \alpha_i^2) \in \rho$, $i = 1, \ldots, s$, $\eta(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_s^1) = \beta^1$, $\eta(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_s^2) = \beta^2$ и $(\beta^1, \beta^2) \notin \rho$. Из определения отношения ρ следует, что существуют такие i, j, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant r$, что $(\beta^1, \beta^2) = (b_i, b_j)$. Тогда из определения функции η следует, что $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_s^1) = (\sigma_i^1, \ldots, \sigma_i^s)$ и $(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_s^2) = (\sigma_j^1, \ldots, \sigma_j^s)$. Для определенности будем считать, что $i < j$. В таком случае $(i, j) \in M$ и существует такое

t, что $(i, j) = (i_t, j_t)$. Поскольку $(b_{i_t}, b_{j_t}) \notin \rho$ по определению матрицы Σ в t-м ее столбце в строках с номерами i_t, j_t стоят элементы b_1, b_2, т. е. $\alpha_t^1 = \sigma_{i_t}^t = b_1$, $\alpha_t^2 = \sigma_{j_t}^t = b_2$, а тогда $(\alpha_t^1, \alpha_t^2) = (b_1, b_2) \notin \rho$. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, $\eta \in A_\rho$.

Докажем теперь, что для всякого $t = 1, \ldots, s$, функция η_t принадлежит A_ρ. Если $(b_{i_t}, b_{j_t}) \in \rho$, то функция η_t по определению принимает только значения из множества $Z \cup \{b_2, b_3\}$, и, следовательно, принадлежит классу A_ρ. Пусть $(b_{i_t}, b_{j_t}) \notin \rho$. Предположим, что $\eta_t \notin A_\rho$. Тогда существуют такие $\alpha^1, \alpha^2 \in E_k$, что $(\alpha^1, \alpha^2) \in \rho$, $\eta_t(\alpha^1) = \beta^1$, $\eta_t(\alpha^2) = \beta^2$, $(\beta^1, \beta^2) \notin \rho$. Из определения отношения ρ следует, что существуют такие i, j, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant r$, что $(\beta^1, \beta^2) = (b_i, b_j)$. Для определенности будем считать, что $i < j$. В таком случае $i = 1$, $j = 2$, поскольку функция η_t принимает значения только из множества $Z \cup \{b_1, b_2, b_3\}$. По определению, функция $\eta_t(x)$ принимает значения b_1 и b_2 на элементах b_{i_t} и b_{j_t} соответственно, при этом $(b_{i_t}, b_{j_t}) \notin \rho$. Значит $(\alpha^1, \alpha^2) = (b_{i_t}, b_{j_t}) \notin \rho$. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, $\eta_t \in A_\rho$. Таким образом, утверждение доказано.

Для каждой функции $f(\widetilde{x})$ из A_ρ рассмотрим s функций $g_1(\widetilde{x}) = \eta_1(f(\widetilde{x}))$, ..., $g_s(\widetilde{x}) = \eta_s(f(\widetilde{x}))$. Каждая из этих функций принимает значения только из множества E_q. Используя функции $g_1, \ldots, g_s$, мы можем восстановить исходную функцию f, поскольку в силу свойства 2 функций $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_s$ верно равенство $f(\widetilde{x}) = \eta(g_1(\widetilde{x}), \ldots, g_s(\widetilde{x}))$. Определим функции $h_1, \ldots, h_s$, зависящие от переменных $x_1^1, \ldots, x_1^s, \ldots, x_n^1, \ldots, x_n^s$, следующим образом. В каждую из полученных функций g_i подставим вместо переменной x_j функцию $\eta(x_j^1, \ldots, x_j^s)$. Проделывая эту операцию для всех переменных $x_1, \ldots, x_n$, получаем функции

$$h_i(x_1^1,\ldots,x_1^s,\ldots,x_n^1,\ldots,x_n^s) = g_i(\eta(x_1^1,\ldots,x_1^s),\ldots,\eta(x_n^1,\ldots,x_n^s)), \quad i = 1,\ldots,s.$$

Ограничивая множество возможных значений переменных x_j^i до E_q, каждую из функций $h_1, \ldots, h_s$, мы можем рассматривать как функцию из P_q, поскольку она принимает только значения из E_q. Легко видеть, что по функциям $h_1, \ldots, h_s$ также можно восстановить исходную функцию f, поскольку верны равенства

$$h_i(\eta_1(x_1), \ldots, \eta_s(x_1), \ldots, \eta_1(x_n), \ldots, \eta_s(x_n)) = g_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, s.$$

Таким образом, мы можем вместо одной функции f рассматривать s функций $h_1, \ldots, h_s$, которые зависят от большего числа переменных. Мы воспользуемся этим фактом для доказательства равномерности систем функций из P_k, рассматривая вместо исходной формулы s-формулу (определения s-функций и s-формул были введены в § 2). При этом значность логики станет равной q, $q \leqslant k$.

Напомним, что через $\vec{x}_i$ мы обозначаем набор переменных $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^s)$, а через $\widetilde{\vec{x}}$ — набор переменных $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s, x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^s, \ldots, x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^s)$. Для каждой функции $f(\widetilde{x})$ из класса A_ρ определим функции $f_i(\widetilde{\vec{x}})$ из P_k, $i = 1, \ldots, s$, следующим образом. Положим

$$f_i(\widetilde{\vec{x}}) = \eta_i(f(\eta(\vec{x}_1), \eta(\vec{x}_2), \ldots, \eta(\vec{x}_n))), \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Заметим, что функции $f_i(\widetilde{\vec{x}})$ принимают только значения из E_q. Напомним, что через $f_i\big|_{E_q}$, $i = 1, \ldots, s$, мы обозначаем ограничения этих функций на

E_q (таким образом, $f_i|_{E_q} \in P_q$). Для каждой функции $f(\widetilde{x})$ из класса A_ρ определим s-функции $\vec{f}(\widetilde{\vec{x}})$ из V_k^s и $\vec{f}|_{E_q}(\widetilde{\vec{x}})$ из V_q^s соответствующие функции f следующим образом. Положим $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_s)$, $\vec{f}|_{E_q} = (f_1|_{E_q}, \ldots, f_s|_{E_q})$. Обозначим набор $(\eta_1(x_1), \ldots, \eta_s(x_1), \ldots, \eta_1(x_n), \ldots, \eta_s(x_n))$ через $H(\widetilde{x})$.

Утверждение 8.19. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из A_ρ, $\vec{f}(\widetilde{\vec{x}}) = (f_1(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, f_s(\widetilde{\vec{x}}))$ — s-функция из V_k^s соответствующая функции f. Тогда верно равенство $f(\widetilde{x}) = \eta(f_1(H(\widetilde{x})), \ldots, f_s(H(\widetilde{x})))$.*

Доказательство. Используя свойство 2 функций $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_s$, получаем следующие равенства

$$\begin{aligned}\eta(f_1(H(\widetilde{x})), \ldots, f_s(H(\widetilde{x}))) &= \\ = \eta(\eta_1(f(\eta(\eta_1(x_1), \ldots, \eta_s(x_1)), \ldots, \eta(\eta_1(x_n), \ldots, \eta_s(x_n)))). \ldots,& \\ \eta_s(f(\eta(\eta_1(x_1), \ldots, \eta_s(x_1)), \ldots, \eta(\eta_1(x_n), \ldots, \eta_s(x_n))))) &= \\ = \eta(\eta_1(f(x_1, \ldots, x_n)). \ldots, \eta_s(f(x_1, \ldots, x_n))) &= f(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Следствие 8.12. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из A_ρ, $\vec{f}(\widetilde{\vec{x}}) = (f_1(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, f_s(\widetilde{\vec{x}}))$ — соответствующая функция из V_k^s. Пусть $g_1(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, g_s(\widetilde{\vec{x}})$ — такие функции из P_k, что $g_i|_{E_q}(\widetilde{\vec{x}}) = f_i|_{E_q}(\widetilde{\vec{x}})$, для всех $i = 1, \ldots, s$. Тогда верно равенство $f(\widetilde{x}) = \eta(g_1(H(\widetilde{x})), \ldots, g_s(H(\widetilde{x})))$.*

Доказательство. Поскольку функции $\eta_1, \ldots, \eta_s$ принимают значения только из E_q, верны равенства $g_i(H(\widetilde{x})) = f_i(H(\widetilde{x}))$, $i = 1, \ldots, s$. Поэтому требуемое равенство вытекает из равенства $f(\widetilde{x}) = \eta(f_1(H(\widetilde{x})), \ldots$ $\ldots, f_s(H(\widetilde{x})))$, полученного в утверждении 8.19.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, такая, что $[\mathfrak{A}] = A_\rho$. В соответствии с построениями, проведенными выше, каждой функции $f(\widetilde{x})$ из $\mathfrak{A}$ соответствуют s-функции $\vec{f}(\widetilde{\vec{x}})$ из V_k^s и $\vec{f}|_{E_q}(\widetilde{\vec{x}})$ из V_q^s. Положим $\mathfrak{B}_k = \{\vec{f}(\widetilde{\vec{x}}) \mid f(\widetilde{x}) \in \mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{B}_q = \{\vec{f}|_{E_q}(\widetilde{\vec{x}}) \mid f(\widetilde{x}) \in \mathfrak{A}\}$. Таким образом, $\mathfrak{B}_k \subseteq V_k^s$, $\mathfrak{B}_q \subseteq V_q^s$. Кроме того, множества $\mathfrak{B}_k$ и $\mathfrak{B}_q$ конечны. Напомним, что через $K(\mathfrak{B}_k)$ мы обозначаем множество функций из P_k, определенное следующим образом: $K(\mathfrak{B}_k) = \{f_i \mid (f_1, \ldots, f_s) \in \mathfrak{B}_k,\ i = 1, \ldots, s\}$. Аналогично через $K(\mathfrak{B}_q)$ мы обозначаем множество функций из P_q, определенное следующим образом: $K(\mathfrak{B}_q) = \{f_i|_{E_q} \mid (f_1|_{E_q}, \ldots, f_s|_{E_q}) \in \mathfrak{B}_q,\ i = 1, \ldots, s\}$. Таким образом, $K(\mathfrak{B}_k) = \{\eta_i(f(\eta(\vec{x}_1), \eta(\vec{x}_2), \ldots, \eta(\vec{x}_n))) \mid f \in \mathfrak{A},\ i = 1, \ldots, s\}$, $K(\mathfrak{B}_q) = \{f_i|_{E_q} \mid f \in \mathfrak{A},\ i = 1, \ldots, s,\ f_i(\widetilde{\vec{x}}) = \eta_i(f(\eta(\vec{x}_1), \eta(\vec{x}_2), \ldots, \eta(\vec{x}_n)))\}$.

Утверждение 8.20. $K(\mathfrak{B}_q) \subseteq A_\tau$.

Доказательство. Функции из множества $K(\mathfrak{B}_k)$ принадлежат классу A_ρ, поскольку являются суперпозициями функций из A_ρ (функции $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_s$ принадлежат классу A_ρ по утверждению 8.18). Функции из множества $K(\mathfrak{B}_q)$ являются ограничениями функций из $K(\mathfrak{B}_k)$ на E_q и поэтому принадлежат классу A_τ. Таким образом, утверждение доказано.

Поскольку каждой функции из $\mathfrak{A}$ мы поставили в соответствие некоторую s-функцию из $\mathfrak{B}_k$ и некоторую s-функцию из $\mathfrak{B}_q$, каждой формуле Φ над $\mathfrak{A}$, реализующей некоторую функцию f, соответствует некоторая s-формула над $\mathfrak{B}_k$ и некоторая s-формула над $\mathfrak{B}_q$ (см. определения в § 2). Эти формулы реализуют некоторые s-функции. В следующем утверждении и его следствии показано, что эти s-функции есть $\vec{f}$ и $\vec{f}|_{E_q}$, где $\vec{f}$ — s-функция из V_k^s, соответствующая функции f.

Утверждение 8.21. *Пусть* $\Phi(\widetilde{x})$ *— нетривиальная формула над над* $\mathfrak{A}$, *реализующая функцию* $f(\widetilde{x})$ *из* A_ρ, $\vec{f}(\widetilde{\vec{x}})=(f_1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,f_s(\widetilde{\vec{x}}))$ *— s-функция из* V_k^s, *соответствующая функции* f. *Пусть* $\vec{\Phi}(\widetilde{\vec{x}})$ *— s-формула над* $\mathfrak{B}_k$, *соответствующая формуле* $\Phi(\widetilde{x})$. *Тогда s-формула* $\vec{\Phi}$ *реализует s-функцию* $\vec{f}$.

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по глубине формулы $\Phi(\widetilde{x})$. Пусть $D(\Phi)=1$. Тогда формула $\Phi(\widetilde{x})$ имеет вид $\Phi(\widetilde{x})=\varphi(\widetilde{x})$, где $\varphi\in\mathfrak{A}$. В этом случае по определению формула $\vec{\Phi}(\widetilde{\vec{x}})$ имеет вид $\vec{\Phi}(\widetilde{\vec{x}})=\vec{\varphi}(\widetilde{\vec{x}})$ и утверждение верно.

Предположим, что утверждение верно для всех формул, глубина которых не превосходит некоторого N. Покажем, что утверждение верно и для формул, глубина которых равна $N+1$. Пусть $D(\Phi)=N+1$. Тогда формула $\Phi(\widetilde{x})$ имеет вид $\Phi(\widetilde{x})=\varphi(\Phi_1(\widetilde{x}),\ldots,\Phi_m(\widetilde{x}))$, где $\varphi\in\mathfrak{A}$, $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ — формулы над $\mathfrak{A}$ и $D(\Phi_j)\leqslant N$, $j=1,\ldots,m$. Пусть формула $\Phi_i(\widetilde{x})$ реализует функцию $g^i(\widetilde{x})$ из A_ρ, $i=1,\ldots,m$. Тогда верно равенство

$$f(\widetilde{x})=\varphi(g^1(\widetilde{x}),\ldots,g^m(\widetilde{x})).$$

По определению формулы $\vec{\Phi}$, она имеет вид

$$\vec{\Phi}(\widetilde{\vec{x}})=\vec{\varphi}(\vec{\Phi}_1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,\vec{\Phi}_m(\widetilde{\vec{x}})).$$

По предположению индукции s-формулы $\vec{\Phi}_i(\widetilde{\vec{x}})$ реализуют s-функции $\vec{g}^i(\widetilde{\vec{x}})$ из V_k^s. Таким образом, верно соотношение

$$\vec{\Phi}(\widetilde{\vec{x}})\sim\vec{\varphi}(\vec{g}^1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,\vec{g}^m(\widetilde{\vec{x}})).$$

Следовательно, чтобы показать, что s-формула $\vec{\Phi}$ реализует s-функцию $\vec{f}$, достаточно доказать, что верно равенство s-функций

$$\vec{\varphi}(\vec{g}^1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,\vec{g}^m(\widetilde{\vec{x}}))=\vec{f}(\widetilde{\vec{x}}).$$

По определению, последнее равенство равносильно следующей системе равенств функций

$$\varphi_i(\vec{g}^1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,\vec{g}^m(\widetilde{\vec{x}}))=f_i(\widetilde{\vec{x}}),\qquad i=1,\ldots,s. \tag{22}$$

По определению выполняются следующие равенства

$$\varphi_i(\vec{g}^1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,\vec{g}^m(\widetilde{\vec{x}}))=\eta_i(\varphi(\eta(\vec{g}^1(\widetilde{\vec{x}})),\ldots,\eta(\vec{g}^m(\widetilde{\vec{x}}))))=$$
$$=\eta_i(\varphi(\eta(g_1^1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,g_s^1(\widetilde{\vec{x}})),\ldots,\eta(g_1^m(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,g_s^m(\widetilde{\vec{x}})))),\qquad i=1,\ldots,s.$$

$$f_i(\widetilde{\vec{x}})=\eta_i(f(\eta_1(\vec{x}_1),\ldots\eta_s(\vec{x}_s)))\qquad i=1,\ldots,s.$$

Следовательно, чтобы доказать равенства (22) достаточно показать, что верно равенство

$$\varphi(\eta(g_1^1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,g_s^1(\widetilde{\vec{x}})),\ldots,\eta(g_1^m(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,g_s^m(\widetilde{\vec{x}})))=f(\eta(\vec{x}_1),\ldots\eta(\vec{x}_s)) \tag{23}$$

Используя свойство 2 функций $\eta,\eta_1,\ldots,\eta_s$, получаем, что верны следующие равенства

$$\eta(g_1^j(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,g_s^j(\widetilde{\vec{x}}))=\eta(\eta_1(g^j(\eta(\vec{x}_1),\ldots,\eta(\vec{x}_n))),\ldots,\eta_s(g^j(\eta(\vec{x}_1),\ldots,\eta(\vec{x}_n))))=$$
$$=g^j(\eta(\vec{x}_1),\ldots,\eta(\vec{x}_n)),\qquad j=1,\ldots,m.$$

Отсюда получаем равенства

$$\varphi(\eta(g_1^1(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,g_s^1(\widetilde{\vec{x}})),\ldots,\eta(g_1^m(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,g_s^m(\widetilde{\vec{x}})))=$$
$$=\varphi(g^1(\eta(\vec{x}_1),\ldots,\eta(\vec{x}_n)),\ldots,g^m(\eta(\vec{x}_1),\ldots,\eta(\vec{x}_n)))=f(\eta(\vec{x}_1),\ldots\eta(\vec{x}_s))$$

Последнее соотношение доказывает справедливость равенства (23). Следовательно, утверждение верно для формул глубины $N+1$. А значит оно верно для формул произвольной глубины.

Следствие 8.13. *Пусть* $\Phi(\widetilde{x})$ *— нетривиальная формула над над* $\mathfrak{A}$, *реализующая функцию* $f(\widetilde{x})$ *из* A_ρ, $\vec{f}|_{E_q}(\widetilde{\vec{x}})=(f_1|_{E_q}(\widetilde{\vec{x}}),\ldots,f_s|_{E_q}(\widetilde{\vec{x}}))$ *— s-функция из* V_q^s, *соответствующая функции* f. *Пусть* $\vec{\Psi}(\widetilde{\vec{x}})$ *— s-формула над* $\mathfrak{B}_q$, *соответствующая формуле* $\Phi(\widetilde{x})$. *Тогда s-формула* $\vec{\Psi}$ *реализует s-функцию* $\vec{f}|_{E_q}$.

Доказательство. Пусть $\vec{\Phi}(\widetilde{\vec{x}})$ — s-формула над $\mathfrak{B}_k$, соответствующая формуле $\Phi(\widetilde{x})$. Тогда по утверждению 8.21 s-формула $\vec{\Phi}$ реализует s-функцию $\vec{f}$. Заметим, что s-формула $\vec{\Psi}(\widetilde{\vec{x}})$ получается из s-формулы $\vec{\Phi}(\widetilde{\vec{x}})$ заменой каждой входящей в нее s-функции $\vec{\varphi}\in\mathfrak{B}_k$ на s-функцию $\vec{\varphi}\big|_{E_q}\in\mathfrak{B}_q$. Произвольная s-функция $\vec{\varphi}$ из $\mathfrak{B}_k$ принимает только значения из множества E_q. Поэтому функции, реализуемые s-формулами $\vec{\Phi}$ и $\vec{\Psi}$, совпадают, когда значения переменных принадлежат множеству E_q. Отсюда следует, что s-формула $\vec{\Psi}$ реализует s-функцию $\vec{f}|_{E_q}$. Следствие доказано.

По утверждению 8.17 $\tau\in\mathbb{C}^*_{q,2}\cup\mathbb{C}^{**}_{q,2}$. Положим $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_{q,\tau,s}$, где $\mathfrak{F}_{q,\tau,s}$ — множество, существование которого доказано в утверждении 8.16. Определим множество функций $\mathfrak{D}_1$ из P_q следующим образом. Положим $\mathfrak{D}_1=\{0,\ldots,q-1\}\cup K(\mathfrak{B}_q)\cup\Omega(K(\mathfrak{B}_q))\cup\mathfrak{F}\cup\Omega(\mathfrak{F})$. Заметим, что система $\mathfrak{D}_1$ конечна и выполнены соотношения $\Omega(\mathfrak{D}_1)\cup\{0,\ldots,q-1\}\subseteq\mathfrak{D}_1$. Напомним, что через K_τ мы обозначаем множество всех функций из A_τ, которые не принимают значения b_3 или не принимают значения b_1.

Утверждение 8.22. *Система функций* $\mathfrak{D}_1$ *s-регулярна.*

Доказательство. По утверждению 8.20 $K(\mathfrak{B}_q)\subseteq A_\tau$. Множество $\mathfrak{F}$ содержится в A_τ по построению. Следовательно, $\mathfrak{D}_1\subseteq A_\tau$. Легко видеть, что каждая функция из $\mathfrak{D}_1$ либо не принимает значения b_3, либо не принимает значения b_1, т. е. $\mathfrak{D}_1\subseteq K_\tau$. Поэтому каждая функция реализуемая формулой над $\mathfrak{D}_1$, принадлежит K_τ. Кроме того, $\Omega(\mathfrak{D}_1)\cup\{0,\ldots,q-1\}\subseteq\mathfrak{D}_1$. Следовательно, по утверждению 8.16 для любых формул $A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x})$, $B(y_1,\ldots,y_s,\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}_1$ существует функция $\varphi(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_l)$ из $\mathfrak{F}$, и формулы $G_1(\widetilde{x}),\ldots,G_l(\widetilde{x})$ над $\mathfrak{D}_1$, такие, что $D(G_i)\leqslant D(B)+s$, $i=1,\ldots,l$, и верно следующее соотношение

$$B(A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x}),\widetilde{x})\sim\varphi(A_1(\widetilde{x}),\ldots,A_s(\widetilde{x}),G_1(\widetilde{x}),\ldots,G_l(\widetilde{x})).$$

Поскольку $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{D}_1$, получаем, что система $\mathfrak{D}_1$ s-регулярна.

Утверждение 8.23. *Существуют такие константы* c_1 *и* d_1, *что для любой формулы* Φ *над* $\mathfrak{A}$ *и соответствующей ей формулы* $\vec{\Phi}$ *над* $\mathfrak{B}_q$, *реализующей s-функцию* $\vec{f}\big|_{E_q}=(f_1\big|_{E_q},\ldots,f_s\big|_{E_q})$, *существуют такие формулы* $\Psi_1,\ldots,\Psi_s$ *над* $\mathfrak{D}_1$, *реализующие функции* $f_1\big|_{E_q},\ldots,f_s\big|_{E_q}$, *что выполняются неравенства* $D(\Psi_i)\leqslant c_1\,\overline{\log}(L(\Phi)-m(\mathfrak{A}))+d_1$.

Утверждение следует из леммы 2.9, поскольку в силу утверждения 8.22 система $\mathfrak{D}_1$ s-регулярна и $K(\mathfrak{B}_q)\subseteq\mathfrak{D}_1$.

Для каждой функции $f(\widetilde{x})$ из P_q мы можем рассмотреть функцию $f'(\widetilde{x})$ из P_k определенную следующим образом:

$$f'(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \in E_q^n; \\ a_1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $\mathfrak{D}' = \{f' \mid f \in \mathfrak{D}_1\}$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{D}' \subseteq A_\rho$.

Утверждение 8.24. *Существуют такие константы c и d, что для любой формулы Φ над $\mathfrak{A}$ существует такая формула Ψ над $\mathfrak{A}$, что $\Psi \sim \Phi$ и $D(\Psi) \leqslant c \log L(\Phi) + d$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(\widetilde{x})$ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $f(\widetilde{x})$, которой соответствует s-функция $\vec{f}(\widetilde{\vec{x}}) = (f_1(\widetilde{\vec{x}}), \ldots, f_s(\widetilde{\vec{x}}))$ из V_k^s. Пусть $\vec{\Phi}$ — s-формула над $\mathfrak{B}_q$, соответствующая формуле Φ. По следствию 8.13 она реализует s-функцию $\vec{f}\big|_{E_q} = (f_1\big|_{E_q}, \ldots, f_s\big|_{E_q})$.

По утверждению 8.23 существуют такие константы c_1 и d_1, зависящие только от системы $\mathfrak{A}$ (поскольку системы $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{B}_k$ и $\mathfrak{B}_q$ строятся по системе $\mathfrak{A}$ однозначно), и такие формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_s$ над $\mathfrak{D}_1$, реализующие функции $f_1\big|_{E_q}, \ldots, f_s\big|_{E_q}$, что выполняются неравенства $D(\Psi_i) \leqslant c_1 \log L(\Phi) + d_1$.

Рассмотрим формулы Ψ_i' над $\mathfrak{D}'$, полученные из формул Ψ_i путем замены функций из $\mathfrak{D}_1$ на соответствующие функции из $\mathfrak{D}'$. Легко видеть, что функции, реализуемые формулами Ψ_i и Ψ_i', совпадают на E_q^n, $i = 1, \ldots, s$. Поэтому из следствия 8.12 вытекает соотношение

$$\Phi(\widetilde{x}) \sim \eta(\Psi_1'(H(\widetilde{x})), \ldots, \Psi_s'(H(\widetilde{x}))).$$

Поскольку система $\mathfrak{A}$ является полной в A_ρ, и $\mathfrak{D}' \subseteq A_\rho$, верно соотношение $\mathfrak{D}' \subseteq [\mathfrak{A}]$. Следовательно, по утверждению 2.1 существуют такая константа c_2, зависящая только от системы $\mathfrak{A}$ (поскольку система $\mathfrak{D}'$ однозначно строится по системе $\mathfrak{A}$) и формулы Ψ_i'', $i = 1, \ldots, s$, над $\mathfrak{A}$, такие, что $\Psi_i'' \sim \Psi'$, $i = 1, \ldots, s$, и верны неравенства

$$D(\Psi_i'') \leqslant c_2(D(\Psi_i')) \leqslant c_2(c_1 \log L(\Phi) + d_1), \quad i = 1, \ldots, s.$$

Определим формулу Ψ'' следующим образом. Положим

$$\Psi''(\widetilde{x}) = \eta(\Psi_1''(H(\widetilde{x})), \ldots, \Psi_s''(H(\widetilde{x}))).$$

Формула Ψ'' является формулой над $\mathfrak{A} \cup \{\eta, \eta_1, \ldots, \eta_s\}$. Очевидно, что $\Psi''(\widetilde{x}) \sim \Phi(\widetilde{x})$ и верны следующие неравенства

$$D(\Psi'') \leqslant 2 + \max_{1 \leqslant i \leqslant s} D(\Psi_i'') \leqslant 2 + c_2(c_1 \log L(\Phi) + d_1).$$

Поскольку $\mathfrak{A} \cup \{\eta, \eta_1, \ldots, \eta_s\} \subseteq [\mathfrak{A}]$, из утверждения 2.1 следует, что существует такая константа c_3, зависящая только от системы $\mathfrak{A}$, и формула Ψ над $\mathfrak{A}$, такая, что $\Psi \sim \Phi$, и верно равенство

$$D(\Psi) \leqslant c_3(2 + c_2(c_1 \log L(\Phi) + d_1)).$$

Теорема 8.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система функций из P_k, такая, что $[\mathfrak{A}]$ — класс типа $\mathbb{C}_2$. Тогда $\mathfrak{A}$ — равномерная система.*

Доказательство. Легко видеть, что существует такая перестановка $s(x)$ на E_k и отношение ρ типа $\mathbb{C}_2$, удовлетворяющее условиям (21), что $[\mathfrak{A}^s] = A_\rho$. По утверждению 8.24 система $\mathfrak{A}^s$ равномерна. Следовательно, равномерна и система $\mathfrak{A}$.

§ 9. Классы типа $\mathbb{C}_h$ при $h \geqslant 3$

В предыдущем параграфе доказана равномерность произвольных порождающих систем для классов типа $\mathbb{C}_2$ из P_k при любых $k \geqslant 3$. В этом параграфе мы построим порождающие системы в классах типа $\mathbb{C}_h$ из P_k для произвольных k и h, таких, что $2 \leqslant h < k$ и докажем равномерность этих порождающих систем. Таким образом, основным результатом этого параграфа является существование равномерных порождающих систем при $h \geqslant 3$. Однако все построения, приведенные ниже верны для любых $h \geqslant 2$.

9.1. Порождающие системы. Пусть $\rho \subseteq E_k^h$ — отношение типа $\mathbb{C}_h$, $k \geqslant 3$, $2 \leqslant h < k$, Z — центр этого отношения. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in Z$, $1 \notin Z$. По определению центрального отношения любой набор, содержащий 0 или имеющий хотя бы два одинаковых элемента, принадлежит отношению ρ.

Утверждение 9.1. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — функция из A_ρ, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$,*

$$g(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \neq \widetilde{\alpha}; \\ 0, & \text{если } \widetilde{x} = \widetilde{\alpha}. \end{cases}$$

Тогда функция $g(\widetilde{x})$ принадлежит A_ρ.

Доказательство. Пусть $(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^h) \in \rho$, $j = 1, \ldots, n$, $\widetilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \ldots \ldots, \alpha_n^i)$, $i = 1, \ldots, h$, $g(\widetilde{\alpha}^i) = \beta^i$, $i = 1, \ldots, h$. Покажем, что $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \in \rho$. Если для какого-нибудь i выполнено равенство $\widetilde{\alpha}^i = \widetilde{\alpha}$, то $\beta^i = 0$ и, следовательно, $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$. Если все наборы $\widetilde{\alpha}^i$, $i = 1, \ldots, h$, отличны от набора $\widetilde{\alpha}$, то $\beta^i = f(\widetilde{\alpha}^i)$, $i = 1, \ldots, h$, и, следовательно, $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$, поскольку $f \in A_\rho$. Утверждение доказано.

Будем говорить, что набор $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ *является перестановкой* набора $(b_0, \ldots, b_{n-1})$, если существует такая перестановка $s(x)$ на E_n, что $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (b_{s(0)}, \ldots, b_{s(n-1)})$. Для каждого набора $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_h) \in \rho$ положим $M_{\widetilde{a}} = Z \cup \{a_1, \ldots, a_h\}$.

Утверждение 9.2. *Пусть $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_h) \in \rho$. Тогда $P_{k, M_{\widetilde{\gamma}}} \subseteq A_\rho$.*

Доказательство. Пусть функция $f(\widetilde{x})$ принадлежит $P_{k, M_{\widetilde{\gamma}}}$. Покажем, что $f \in A_\rho$. Пусть $(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^h) \in \rho$, $j = 1, \ldots, n$, $f(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i) = \beta^i$, $i = 1, \ldots, h$. Нам нужно доказать, что $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$.

Из того, что $f \in P_{k, M_{\widetilde{\gamma}}}$, следует, что $\beta^1, \ldots, \beta^h \in M_{\widetilde{\gamma}}$. Если хотя бы одно из чисел $\beta^1, \ldots, \beta^h$ принадлежит Z, то набор $(\beta^1, \ldots, \beta^h)$ принадлежит ρ. Если ни одно из чисел $\beta^1, \ldots, \beta^h$ не принадлежит Z, то все они принадлежат множеству $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_h\}$. В таком случае, поскольку $h \geqslant 2$, набор $(\beta^1, \ldots, \beta^h)$ либо содержит хотя бы два одинаковых элемента, и, следовательно, $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \iota_k^h \subseteq \rho$, либо является перестановкой набора $\widetilde{\gamma}$, и, следовательно тоже принадлежит ρ. Таким образом, утверждение доказано.

Определим множество функций $\mathfrak{A}_*$ следующим образом. Положим

$$\mathfrak{A}_* = \bigcup_{\widetilde{a} \in \rho} P^{(2)}_{k, M_{\widetilde{a}}}.$$

Отметим, что $\{0, \ldots, k-1\} \subset \mathfrak{A}_*$, поскольку для любого $\alpha = 0, \ldots, k-1$ набор $\widetilde{\alpha} = (\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{h})$ принадлежит отношению ρ и константа α принадлежит множеству функций $P^{(2)}_{k, M_{\widetilde{(\alpha)}}}$. Из леммы 2.1 следует, что $\bigcup_{\widetilde{a} \in \rho} P_{k, M_{\widetilde{a}}} \subseteq [\mathfrak{A}_*]$, поскольку $P_{k, M_{\widetilde{a}}} \subseteq [P^{(2)}_{k, M_{\widetilde{a}}}] \subseteq [\mathfrak{A}_*]$. В частности, верны следующие свойства множества $\mathfrak{A}_*$.

Утверждение 9.3. *Пусть* $f \in P_k$ *и выполнено одно из условий*
a) f *принимает только значения* $0, 1$;
b) f *принимает только значения из* Z;
c) f *принимает менее* h *значений вне* Z.
Тогда $f \in [\mathfrak{A}_*]$.

Определим функцию $t(x, y)$ и $\psi(x, y)$ следующим образом. Положим

$$t(x,y)=\begin{cases} x, & \text{если } x \notin Z,\ y=1;\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \qquad \psi(x,y)=\begin{cases} x, & \text{если } x \in Z,\ y \in Z;\\ y, & \text{если } y \notin Z;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пусть $\widetilde{a}=(a_1, \ldots, a_h)$, $\widetilde{b}=(b_1, \ldots, b_h)$, $\widetilde{a}, \widetilde{b} \notin \iota_k^h$, $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in E_k^h \backslash \rho$. Определим функцию $s_{\widetilde{a}, \widetilde{b}}(x)$ следующим образом. Положим

$$s_{\widetilde{a}, \widetilde{b}}(x)=\begin{cases} b_i, & \text{если } x=a_i;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Положим $\mathfrak{S}=\{s_{\widetilde{a}, \widetilde{b}} \mid \widetilde{a}, \widetilde{b} \in E_k^h \backslash \rho\}$. Определим функции $u_i(x, y)$, $i \in E_k \backslash Z$. Положим

$$u_i(x, y)=\begin{cases} i, & \text{если } x=i \text{ или } y=i;\\ x, & \text{если } x=y \notin Z;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Положим $U=\{u_i \mid i \in E_k \backslash Z\}$. Определим функции $\mu_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$, следующим образом. Пусть для всякого $a \in E_k \backslash Z$ на наборах, у которых хотя бы $n-1$ элементов равны a, функция μ_n принимает значение a, а на остальных наборах принимает значение 0. Положим $m(\rho)=k-|Z|$. Заметим, что $m(\rho) \geqslant h$, поскольку если $m(\rho)<h$, то любой набор из h элементов либо содержит одинаковые элементы, либо содержит элемент из Z, а $\rho \neq E_k^h$. Положим $\mathfrak{M}=\{\mu_{h+1}, \ldots, \mu_m(\rho)\}$, если $m(\rho)>h$ и $\mathfrak{M}=\varnothing$, если $m(\rho)=h$. В данном разделе мы докажем, что $A_\rho=[\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t, \psi\}]$.

Утверждение 9.4. $\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t, \psi\} \subseteq A_\rho$.

Доказательство. Покажем, что при $n>h$ функция μ_n принадлежит классу A_ρ. Пусть $\mu_n(\widetilde{\alpha}^i)=\beta^i$, $i=1, \ldots, h$, $(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^h) \in \rho$, $j=1, \ldots, n$. Если среди β^i есть одинаковые или хотя бы одно из β^i принадлежит Z, то $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$. Если же все β^i не принадлежат Z, то в каждом наборе $\widetilde{\alpha}^i$, $i=1, \ldots, h$, найдется не более одного элемента, отличного от β^i. Обозначим через $r(i)$ номер элемента из набора $\widetilde{\alpha}^i$ отличного от β^i $(\alpha_{r(i)}^i \neq \beta^i)$, $i=1, \ldots, h$, если же все элементы набора $\widetilde{\alpha}^i$ равны β^i то положим $r(i)$ равным 1. Тогда рассмотрим множество $M=\{1, \ldots, n\} \backslash \{r(1), \ldots, r(h)\}$. Оно не пусто, поскольку $n>h$. Для всякого j из M верно $\beta^i=\alpha_j^i$, $i=1, \ldots, h$, и, следовательно, $(\beta^1, \ldots, \beta^h)=(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^h) \in \rho$.

Докажем, что $U \subseteq A_\rho$. Покажем, что функция $u_1(x, y)$ принадлежит A_ρ. Пусть $(\alpha^1, \ldots, \alpha^h) \in \rho$, $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$, $u_1(\alpha^j, \beta^j)=\gamma^i$, $j=1, \ldots, h$. Если среди γ^j найдутся элементы из Z, то $(\gamma^1, \ldots, \gamma^h) \in \rho$. Пусть все γ^j не принадлежат Z. Если среди γ^j есть хотя бы два одинаковых, то $(\gamma^1, \ldots, \gamma^h) \in \iota_k^h \subseteq \rho$. Пусть все γ^j различны. Если среди γ^j нет равных 1, то $\alpha^j=\beta^j=\gamma^j$, $j=1, \ldots, h$, а тогда $(\gamma^1, \ldots, \gamma^h)=(\alpha^1, \ldots, \alpha^h) \in \rho$. Если среди γ^j есть единицы, то их не более одной, так как мы предположили, что все γ^j различны. Пусть $\gamma^{j_0}=1$. Тогда $\alpha^{j_0}=1$ или $\beta^{j_0}=1$. Пусть, без ограничения общности, $\alpha^{j_0}=1$. Поскольку все γ^j, кроме γ^{j_0}, отличны от единицы и не принадлежат Z, $\alpha^j=\gamma^j$ для всех $j=1, \ldots, h$. В таком случае

$(\gamma^1, \ldots, \gamma^h) = (\alpha^1, \ldots, \alpha^h) \in \rho$. Для остальных u_i, $i \in E_k \backslash Z$, доказательство аналогично.

Из утверждения 9.2 вытекает, что $\mathfrak{A}_* \subseteq A_\rho$.

Докажем, что $\mathfrak{S} \subseteq A_\rho$. Пусть $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in E_k^h \backslash \rho$, $a = (a_1, \ldots, a_h)$, $b = (b_1, \ldots \ldots, b_h)$. Заметим, что в этом случае $\widetilde{a}, \widetilde{b} \notin \iota_k^h$. Покажем, что функция $s_{\widetilde{a}, \widetilde{b}}(x)$ принадлежит A_ρ

Пусть $(\alpha^1, \ldots, \alpha^h) \in \rho$, $s_{\widetilde{a}, \widetilde{b}}(\alpha^i) = \beta^i$, $i = 1, \ldots, h$. Если среди α^i есть отличные от $a_1, \ldots, a_h$, то среди β^i есть 0 и тогда $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$. Если среди α^i есть одинаковые, то и среди β^i есть одинаковые, и, следовательно, $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \iota_k^h \subseteq \rho$. Если же все α^i различны и содержатся среди $a_1, \ldots, a_h$, то набор $(\alpha^1, \ldots, \alpha^h)$ не может содержаться в отношении ρ, поскольку является перестановкой набора $(a_1, \ldots, a_h) \notin \rho$.

Докажем, что $t \in A_\rho$. Пусть $t(\alpha^i, \beta^i) = \gamma^i$, $i = 1, \ldots, h$, $(\alpha^1, \ldots, \alpha^h) \in \in \rho$, $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$. Если для какого-нибудь j верно $\alpha^j \in Z$ или $\beta^j \neq 1$, то $\gamma^j = 0 \in Z$, и, следовательно, $(\gamma^1, \ldots, \gamma^h) \in \rho$. Если $\beta^1 = \ldots = \beta^h = 1$ и $\alpha^1, \ldots, \alpha^h \notin Z$, то $(\gamma^1, \ldots, \gamma^h) = (\alpha^1, \ldots, \alpha^h) \in \rho$. Следовательно, функция t сохраняет отношение ρ.

Покажем, что $\psi \in A_\rho$. Пусть $\psi(\alpha^i, \beta^i) = \gamma^i$, $i = 1, \ldots, h$, $(\alpha^1, \ldots, \alpha^h) \in \in \rho$, $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$. Тогда либо среди γ^i есть хотя бы один элемент из Z, а значит $(\gamma^1, \ldots, \gamma^h) \in \rho$, либо $\beta^1, \ldots, \beta^h \notin Z$ и $(\gamma^1, \ldots, \gamma^h) = (\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$.

Таким образом, утверждение доказано.

Множество всех функций из A_ρ, которые принимают только значение 0 из Z, обозначим через A_ρ^0. Таким образом, $A_\rho^0 = A_\rho \cap P_{k, \{0\} \cup E_k \backslash Z}$. Обозначим через $A_\rho^{0, h}$ множество функций из A_ρ^0, которые принимают ровно h различных значений, не принадлежащих Z, причем каждое из этих значений принимается только на одном наборе.

Утверждение 9.5. $A_\rho^{0,h} \subseteq [\mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t\}]$.

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из $A_\rho^{0,h}$, $\widetilde{\alpha}^i = (\widetilde{\alpha}_1^i, \ldots, \widetilde{\alpha}_n^i)$, $f(\widetilde{\alpha}^i) = \beta^i \notin Z$, $i = 1, \ldots, h$, и все значения β^i различны.

Предположим, что $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \notin \rho$. Тогда, поскольку $f \in A_\rho$, существует такое j, что $(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^h) \notin \rho$. Положим

$$f_1(\widetilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{x} \in \{\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^h\}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что при $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \{\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^h\}$ верно равенство

$$f(\widetilde{\gamma}) = s_{(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^h), (\beta^1, \ldots, \beta^h)}(\gamma_j).$$

Отсюда получаем равенство

$$f(\widetilde{x}) = t(s_{(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^h), (\beta^1, \ldots, \beta^h)}(x_j), f_1(\widetilde{x})).$$

Поскольку функция $f_1(\widetilde{x})$ принимает только значения 0, 1, по утверждению 9.3 $f_1 \in [\mathfrak{A}_*]$. Следовательно, $f \in [\mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t\}]$.

Предположим теперь, что $(\beta^1, \ldots, \beta^h) \in \rho$. Тогда $f(\widetilde{x})$ принимает значения только из множества $M_{\widetilde{\beta}} = Z \cup \{\beta^1, \ldots \beta^h\}$. Следовательно $f \in P_{k, M_{\widetilde{\beta}}} \subseteq [\mathfrak{A}_*] \subseteq [\mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t\}]$.

Утверждение доказано.

Пусть $0 \leqslant r \leqslant m(\rho)$. Обозначим через B_ρ^r множество всех функций из A_ρ^0, которые принимают ровно r различных значений вне Z.

Утверждение 9.6. $B_\rho^h \subseteq [U \cup A_\rho^{0,h}]$.

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из B_ρ^h, которая принимает некоторое значение $i \notin Z$ на наборах $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}$. Тогда $f(\widetilde{x}) = u_i(f_1(\widetilde{x}), f_2(\widetilde{x}))$, где

$$f_1(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \neq \widetilde{\beta}; \\ 0, & \text{если } \widetilde{x} = \widetilde{\beta}, \end{cases} \qquad f_2(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \neq \widetilde{\alpha}; \\ 0, & \text{если } \widetilde{x} = \widetilde{\alpha}. \end{cases}$$

По утверждению 9.1 $f_1, f_2 \in A_\rho$. Очевидно, что $f_1, f_2 \in B_\rho^h$. Количество наборов, на которых функции f_1 и f_2 принимают значение i, на единицу меньше, чем у функции f. Таким образом, можно уменьшить количество наборов, на которых принимается значение i, до одного. Аналогично поступим со всеми значениями исходной функции f вне Z. Утверждение доказано.

Из утверждений 9.6 и 9.5 вытекает очевидное следствие.

Следствие 9.1. $B_\rho^h \subseteq [U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t\}]$.

Утверждение 9.7. *Если* $r > h$, *то* $B_\rho^r \subseteq [\{\mu_r\} \cup B_\rho^{r-1}]$.

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из множества B_ρ^r значениями которой вне Z являются $\beta_1, \ldots, \beta_r$, причем все они различны. Построим r функций $f_i(\widetilde{x})$, $i = 1, \ldots, r$. Положим

$$f_i(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } f(\widetilde{x}) \neq \beta_i; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что $f(\widetilde{x}) = \mu_r(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_r(\widetilde{x}))$. Каждая из функций f_i принимает ровно $r-1$ значение вне Z и по утверждению 9.1 принадлежит A_ρ.

Следствие 9.2. *Если* $h < r \leqslant m(\rho)$, *то* $B_\rho^r \subseteq [\mathfrak{M} \cup B_\rho^h]$.

Утверждение 9.8. $A_\rho^0 \subseteq [\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t\}]$.

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из множества A_ρ^0, принимающая r различных значений вне Z. Возможны три случая.

1) Пусть $r < h$. Тогда $f \in [\mathfrak{A}_*]$ по утверждению 9.3.

2) Пусть $r = h$. Тогда $f \in [U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t\}]$ по следствию 9.1.

3) Пусть $r > h$. Тогда по следствию 9.2 и следствию 9.1 получаем, что $f \in [\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t\}]$.

Утверждение 9.9. $A_\rho = [\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t, \psi\}]$.

Доказательство. Из утверждения 9.4 получаем $[\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t, \psi\}] \subseteq A_\rho$. Покажем, что $A_\rho \subseteq [\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t, \psi\}]$. Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из A_ρ. Положим

$$f_1(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } f(\widetilde{x}) \in Z \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$f_2(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } f(\widetilde{x}) \notin Z \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

Легко видеть, что $f(\widetilde{x}) = \psi(f_1(\widetilde{x}), f_2(\widetilde{x}))$. По утверждению 9.3, поскольку f_1 принимает только значения из Z, $f_1 \in [\mathfrak{A}_*]$. По утверждению 9.1 функций f_2 принадлежит классу A_ρ. Следовательно, по утверждению 9.8 $f_2 \in [\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t\}]$. Отсюда получаем, что $f \in [\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t, \psi\}]$.

9.2. Подсистемы, равномерные в порождающих системах. В данном пункте мы покажем, что система функций $U \cup \mathfrak{M}$ равномерна в системе $\mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t, \psi\}$ (см. утверждение 9.20).

Пусть $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, $q \in E_k \backslash Z$. Через $C_q(\widetilde{\alpha})$ обозначим множество всех таких наборов $\widetilde{\beta} \in E_k^n$, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ если $\alpha_i = q$, то и $\beta_i = q$. Пусть Q — подмножество P_k, состоящее из всех функций $f(\widetilde{x})$, для которых выполнены следующие условия:

1) для любого $q \in E_k \backslash Z$ и произвольных наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in E_k^n$, таких, что $f(\widetilde{\alpha}) = q$ и $\widetilde{\beta} \in C_q(\widetilde{\alpha})$, верно равенство $f(\widetilde{\beta}) = q$;

2) функция $f(\widetilde{x})$ не принимает значений из Z отличных от нуля.

Утверждение 9.10. $[Q] = Q$.

Доказательство. Добавление и удаление несущественных переменных не влияет на то, принадлежит функция множеству Q или не принадлежит. Пусть $f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_r(\widetilde{x})$ — произвольные функции из множества $Q \cup [\{x\}]$, $g(y_1, \ldots, y_r)$ — функция из Q. Рассмотрим функцию $h(\widetilde{x}) = g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_r(\widetilde{x}))$. Для доказательства утверждения нам достаточно показать, что $h \in Q$. Пусть $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in E_k^n$, $h(\widetilde{\alpha}) = q \notin Z$, $\widetilde{\beta} \in C_q(\widetilde{\alpha})$. Для любого $i = 1, \ldots, r$ если $f_i(\widetilde{\alpha}) = q$, то и $f_i(\widetilde{\beta}) = q$, поскольку $f_i \in Q \cup [\{x\}]$. Тогда $(f_1(\widetilde{\beta}), \ldots, f_r(\widetilde{\beta})) \in C_q((f_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, f_r(\widetilde{\alpha})))$. Кроме того, $g(f_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, f_r(\widetilde{\alpha})) = h(\widetilde{\alpha}) = q$. Значит, поскольку $g \in Q$, верны равенства $h(\widetilde{\beta}) = g(f_1(\widetilde{\beta}), \ldots, f_r(\widetilde{\beta})) = q$. Следовательно, $h \in Q$. Таким образом, утверждение доказано.

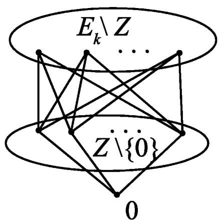

Рис. 2. Отношение частичного порядка $\preceq$

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 9.11. $U \cup \mathfrak{M} \subseteq Q$.

Определим отношение частичного порядка $\preceq$ не E_k следующим образом. Пусть для любых $a \in Z$, $b \in E_k \backslash Z$ верны неравенства $a \preceq b$, $0 \preceq a$. Для всякого $a \in E_k$ верно $a \preceq a$. Пусть остальные пары элементов не сравнимы, (см. рис. 2).

Пусть $r \geqslant 1$, $f_1, \ldots, f_r$ — функции из $U \cup \mathfrak{M}$, и число переменных функции f_i равно $n_i + 1$, $i = 1, \ldots, r$. Положим $N(p) = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i$, $p = 1, \ldots, r$. Определим формулы $\Omega_{f_1, \ldots, f_p}(x_1, \ldots, x_{N(p)}, z)$, $p = 1, \ldots, r$ следующим образом. Положим

$$\Omega_{f_1}(x_1, \ldots, x_{n_1}, z) = f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}, z).$$

Для $p = 2, \ldots, r$ положим

$$\Omega_{f_1, \ldots, f_p}(x_1, \ldots, x_{N(p)}, z) =$$
$$= \Omega_{f_1, \ldots, f_{p-1}}(x_1, \ldots, x_{N(p-1)}, f_p(x_{N(p-1)+1}, \ldots, x_{N(p)}, z))$$

(см. рис. 3). По определению функций из множеств U и $\mathfrak{M}$ получаем, что для произвольного $a \in E_k \backslash Z$ верно равенство $\Omega_{f_1, \ldots, f_r}(a, \ldots, a, a) = a$.

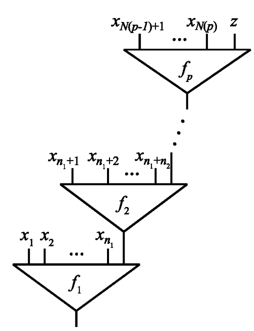

Рис. 3. Формула $\Omega_{f_1, \ldots, f_p}(x_1, \ldots, x_{N(p)}, z)$

Через $\mathfrak{F}$ обозначим множество функций которые реализуются формулами $\Omega_{g_1, \ldots, g_p}(y_1, \ldots, y_n, z)$, где p — произвольное, такое, что $1 \leqslant p \leqslant |U \cup \mathfrak{M}|$, функции g_i, $i = 1, \ldots, p$, — произвольные попарно различные функции из множества $U \cup \mathfrak{M}$. Отметим, что множество $\mathfrak{F}$ конечно. Поскольку $U \cup \mathfrak{M} \subseteq A_\rho$, верно соотношение $\mathfrak{F} \subseteq A_\rho$. Из определения множества $\mathfrak{F}$ и утверждений 9.11 и 9.10 вытекает следующее очевидное утверждение.

Утверждение 9.12. $\mathfrak{F} \subseteq Q$.

Утверждение 9.13. *Пусть $f(y_1, \ldots, y_r, z)$, $g(x_1, \ldots, x_n, z)$ — функции из Q и для каждого $q \in E_k \setminus Z$ если $g(q, \ldots, q, z) = q$ для любого значения z, то и $f(q, \ldots, q, z) = q$ для любого значения z. Тогда верно соотношение*

$$g(\widetilde{x}, f(y_1, \ldots, y_r, z)) \preceq f(g(\widetilde{x}, y_1), \ldots, g(\widetilde{x}, y_r), z).$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, $(\beta_1, \ldots, \beta_r) \in E_k^r$, $\gamma \in E_k$. Покажем что выполнено неравенство

$$g(\widetilde{\alpha}, f(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma)) \preceq f(g(\widetilde{\alpha}, \beta_1), \ldots, g(\widetilde{\alpha}, \beta_r), \gamma). \tag{24}$$

Предположим, что $g(\widetilde{\alpha}, f(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma)) = 0$. Тогда очевидно, что неравенство (24) выполняется. Если $g(\widetilde{\alpha}, f(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma)) \neq 0$, то $g(\widetilde{\alpha}, f(\beta_1, \ldots \ldots, \beta_r, \gamma)) = q \notin Z$, поскольку функции из Q не принимают значений из Z отличных от нуля.

Пусть $f(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma) \neq q$. Тогда, поскольку $g \in Q$, для любого значения z верны равенства $g(\widetilde{\alpha}, z) = g(q, \ldots, q, z) = q$, следовательно, по условию, $f(q, \ldots, q, z) = q$ для любого значения z. Значит $f(g(\widetilde{\alpha}, \beta_1), \ldots, g(\widetilde{\alpha}, \beta_r), \gamma) = f(q, \ldots, q, \gamma) = q$. Следовательно, в данном случае неравенство (24) верно.

Пусть $f(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma) = q$. Тогда $g(\widetilde{\alpha}, q) = q$. Отсюда вытекает, что верно соотношение $(g(\widetilde{\alpha}, \beta_1), \ldots, g(\widetilde{\alpha}, \beta_r), \gamma) \in C_q(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma)$. Так как $f \in Q$, верны равенства $f(g(\widetilde{\alpha}, \beta_1), \ldots, g(\widetilde{\alpha}, \beta_r), \gamma) = f(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma) = q$. Следовательно, в данном случае неравенство (24) также верно.

Утверждение доказано.

Утверждение 9.14. *Пусть $r \geqslant 1$, $f_1, \ldots, f_r \in U$, $j \in E_k \setminus Z$, и существует такое p, $1 \leqslant p \leqslant r$, что $f_p = u_j$. Тогда для произвольного $a \in E_k$ верно равенство $\Omega_{f_1, \ldots, f_r}(j, \ldots, j, a) = j$.*

Доказательство. Если $p < r$, то положим $b = \Omega_{f_{p+1}, \ldots, f_r}(j, \ldots, j, a)$. Если $p = r$, то положим $b = a$. Если $p = 1$, то верны равенства $\Omega_{f_1, \ldots, f_r}(j, \ldots \ldots, j, a) = u_j(j, b) = j$. Если $p > 1$, то верны равенства

$$\Omega_{f_1, \ldots, f_r}(j, \ldots, j, a) = \Omega_{f_1, \ldots, f_p}(j, \ldots, j, b) = \\ = \Omega_{f_1, \ldots, f_{p-1}}(j, \ldots, j, u_j(j, b)) = \Omega_{f_1, \ldots, f_{p-1}}(j, \ldots, j, j) = j.$$

Утверждение 9.15. *Пусть $r \geqslant 1$, $f_1, \ldots, f_r \in U \cup \mathfrak{M}$, и существует такое p, $1 \leqslant p \leqslant r$, что $f_p \in \mathfrak{M}$. Тогда для произвольных $a \in E_k$ и $j \in E_k \setminus Z$ верно равенство $\Omega_{f_1, \ldots, f_r}(j, \ldots, j, a) = j$.*

Доказательство. Если $p < r$, то положим $b = \Omega_{f_{p+1}, \ldots, f_r}(j, \ldots, j, a)$. Если $p = r$, то положим $b = a$. Если $p = 1$, то верны равенства $\Omega_{f_1, \ldots, f_r}(j, \ldots \ldots, j, a) = \mu_n(j, \ldots, j, b) = j$. Если $p > 1$, то верны равенства

$$\Omega_{f_1, \ldots, f_r}(j, \ldots, j, a) = \Omega_{f_1, \ldots, f_p}(j, \ldots, j, b) = \\ = \Omega_{f_1, \ldots, f_{p-1}}(j, \ldots, j, \mu_n(j, \ldots, j, b)) = \Omega_{f_1, \ldots, f_{p-1}}(j, \ldots, j, j) = j.$$

Утверждение 9.16. *Пусть $\varphi(y_1, \ldots, y_m, z)$ — произвольная функция из множества $\mathfrak{F}$, $f(x_1, \ldots, x_n, z)$ — произвольная функция из $U \cup \mathfrak{M}$, $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z) = f(\widetilde{x}, \varphi(y_1, \ldots, y_m, z))$. Тогда либо верно неравенство $g(\widetilde{x}, y_1, \ldots, y_m, z) \preceq \varphi(f(\widetilde{x}, y_1), \ldots, f(\widetilde{x}, y_m), z)$, либо функция $g(y_1, \ldots, y_{n+m}, z)$ принадлежит множеству $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Из утверждений 9.12 и 9.11 следует, что функции φ и f принадлежат множеству Q. Пусть функция $\varphi(y_1, \ldots, y_m, z)$ реализуется формулой $\Omega_{\varphi_1,\ldots,\varphi_r}(y_1, \ldots, y_m, z)$, где $r \geqslant 1$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in U \cup \mathfrak{M}$. Предположим, что существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant r$, что $\varphi_i \in \mathfrak{M}$. По утверждению 9.15 для любого $q \notin Z$ и для любого значения z верно равенство $\varphi(q, \ldots \ldots, q, z) = q$. Следовательно, по утверждению 9.13 неравенство $g(\widetilde{x}, y_1, \ldots \ldots, y_m, z) \preceq \varphi(f(\widetilde{x}, y_1), \ldots, f(\widetilde{x}, y_m), z)$ выполнено. Предположим, что $\varphi_i \notin \mathfrak{M}$ (т. е. $\varphi_i \in U$) для всех i. Если $f \in \mathfrak{M}$, то функция $g(y_1, \ldots, y_{n+m}, z)$ принадлежит множеству $\mathfrak{F}$. Если $f \in U$, то возможны два случая: 1) f совпадает с некоторой φ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Пусть φ_i — это функция u_j, $j \in E_k \setminus Z$. Тогда $n = 1$ и равенство $f(c, z) = c$ выполнено при любом значении z только для $c = j$. Из утверждения 9.14 следует, что $\varphi(j, \ldots, j, z) = j$. Следовательно, по утверждению 9.13 требуемое неравенство верно. 2) f не совпадает ни с одной из функций φ_i для всех $i = 1, \ldots, r$. Тогда функция $g(y_1, \ldots, y_{n+m}, z)$ принадлежит множеству $\mathfrak{F}$ по определению.

Утверждение 9.17. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_s, z)$ — функция из $U \cup \mathfrak{M}$, $\varphi(y_1, \ldots, y_q, z)$ — функция из $\mathfrak{F}$, $A_1, \ldots, A_s$, $B_1, \ldots, B_q$ — формулы над $U \cup \mathfrak{M}$, в которые не входит переменная z, $L(B_i) \leqslant N$, $i = 1, \ldots, q$. Тогда существуют p, $1 \leqslant p \leqslant q + s$, функция $\varphi_1(y_1, \ldots, y_p, z)$ из $\mathfrak{F}$ и формулы $B_1', \ldots, B_p'$ над $U \cup \mathfrak{M}$, в которые не входит переменная z, такие, что*

$$f(A_1, \ldots, A_s, \varphi(B_1, \ldots, B_q, z)) \preceq \varphi_1(B_1', \ldots, B_p', z),$$

и верны неравенства $L(B_i') \leqslant N + \sum_{j=1}^{s} L(A_j)$, $i = 1, \ldots, p$.

Доказательство. По утверждению 9.16 либо

$$f(x_1, \ldots, x_s, \varphi(y_1, \ldots, y_q, z)) \preceq \varphi(f(x_1, \ldots, x_s, y_1), \ldots, f(x_1, \ldots, x_s, y_q), z),$$

либо функция $f(x_1, \ldots, x_s, \varphi(y_1, \ldots, y_q, z))$ принадлежит множеству $\mathfrak{F}$.

В первом случае положим $p = q$, $\varphi_1 = \varphi$, $B_i' = f(A_1, \ldots, A_s, B_i)$, $i = 1, \ldots, q$. Легко видеть, что выполнены соотношения $L(B_i') = L(B_i) + \sum_{j=1}^{s} L(A_j) \leqslant N + \sum_{j=1}^{s} L(A_j)$, $i = 1, \ldots, p$.

Во втором случае положим $p = q + s$, $\varphi_1 = f(x_1, \ldots, x_s, \varphi(y_1, \ldots, y_q, z))$, $B_i' = A_i$, $i = 1, \ldots, s$, $B_{i+s}' = B_i$, $i = 1, \ldots, q$. Легко видеть, что выполнены соотношения $L(B_i') = L(A_i) \leqslant \sum_{j=1}^{s} L(A_j)$, $i = 1, \ldots, s$, и $L(B_{i+s}') \leqslant N$, $i = 1, \ldots, p$.

Утверждение 9.18. *Пусть $\Phi(\widetilde{x}, z)$ — формула над $U \cup \mathfrak{M}$, причем переменная z имеет только одно вхождение в формулу Φ. Тогда существуют такие $r \geqslant 1$, формулы $\Psi_1(\widetilde{x}), \ldots, \Psi_r(\widetilde{x})$ над $U \cup \mathfrak{M}$ и функция $\varphi(y_1, \ldots, y_r, z)$ из множества $\mathfrak{F}$, что*

$$\Phi(\widetilde{x}, z) \preceq \varphi(\Psi_1(\widetilde{x}), \ldots, \Psi_r(\widetilde{x}), z)$$

и $L(\Psi_i) < L(\Phi)$, $i = 1, \ldots, r$.

Доказательство. Поскольку все функции входящие в формулу Φ симметрические, формула $\Phi(\widetilde{x}, z)$ эквивалентна формуле $\Phi'(\widetilde{x}, z)$ над $U \cup \mathfrak{M}$ той же глубины и сложности, имеющей вид

$$\Phi'(\widetilde{x}, z) = \Omega_{f_1,\ldots,f_r}(A_1^1, \ldots, A_1^{n_1}, A_2^1, \ldots, A_2^{n_2}, \ldots, A_r^1, \ldots, A_r^{n_r}, z),$$

где $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}, z), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_{n_r}, z)$ — функции из множества $U \cup \mathfrak{M}$, A_i^j — формулы над $U \cup \mathfrak{M}$, в которые не входит переменная z, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n_i$.

Покажем, что для каждого $j=1,\ldots,r-1$ существует формула $\Phi_j(\widetilde{x}, z)$ над $U\cup\mathfrak{M}$ такая, что $\Phi'(\widetilde{x}, z)\preceq\Phi_j(\widetilde{x}, z)$, имеющая вид

$$\Phi_j(\widetilde{x}, z)=\Omega_{f_1,\ldots,f_j}(A_1^1,\ldots,A_1^{n_1},\ldots,A_j^1,\ldots,A_j^{n_j},\psi(B_1,\ldots,B_q,z)),$$

где $\psi\in\mathfrak{F}$, $B_i(\widetilde{x})$ — такие формулы над $U\cup\mathfrak{M}$, в которые не входит переменная z, что

$$L(B_i)\leqslant\sum_{l=j+1}^{r}\sum_{v=1}^{n_l}L(A_l^v),\quad i=1,\ldots,q.$$

Для $j=r-1$ формула Φ' уже имеет требуемый вид

$$\Phi_{r-1}(\widetilde{x},z)=\Phi'(\widetilde{x},z)=\Omega_{f_1,\ldots,f_{r-1}}(A_1^1,\ldots,A_1^{n_1},\ldots,A_{r-1}^1,\ldots,A_{r-1}^{n_{r-1}},f_r(A_r^1,\ldots,A_r^{n_r},z)).$$

В качестве ψ берем функцию f_r. В качестве B_i берем формулы A_r^i, $i=1,\ldots$ $\ldots,n_r$. Необходимые неравенства выполнены:

$$L(B_i)=L(A_r^i)\leqslant\sum_{v=1}^{n_r}L(A_r^v)=\sum_{l=j+1}^{r}\sum_{v=1}^{n_l}L(A_l^v),\quad i=1,\ldots,n_r.$$

Пусть мы построили формулы $\Phi_j(\widetilde{x}, z)$ для всех j больших N (т. е. для всех $j=N+1,\ldots,r-1$). Построим теперь формулу $\Phi_N(\widetilde{x}, z)$ такую, что $\Phi_{N+1}(\widetilde{x}, z)\preceq\Phi_N(\widetilde{x}, z)$.

$$\Phi_{N+1}(\widetilde{x}, z)=\Omega_{f_1,\ldots,f_{N+1}}(A_1^1,\ldots,A_{N+1}^{n_{N+1}},\psi(B_1,\ldots,B_q,z))=$$
$$=\Omega_{f_1,\ldots,f_N}(A_1^1,\ldots,A_N^{n_N},f_{N+1}(A_{N+1}^1,\ldots,A_{N+1}^{n_{N+1}},\psi(B_1,\ldots,B_q,z)))$$

Применяя к формуле

$$f_{N+1}(A_{N+1}^1,\ldots,A_{N+1}^{n_{N+1}},\psi(B_1,\ldots,B_q,z))$$

утверждение 9.17, получаем, что существует такая функция $\psi'(x_1,\ldots,x_p)$ из $\mathfrak{F}$ и формулы $B_1',\ldots,B_p'$ над $U\cup\mathfrak{M}$, в которые не входит переменная z, такие, что

$$f_{N+1}(A_{N+1}^1,\ldots,A_{N+1}^{n_{N+1}},\psi(B_1,\ldots,B_q,z))\preceq\psi'(B_1',\ldots,B_p',z),$$

и верны неравенства

$$L(B_i')\leqslant\sum_{l=N+2}^{r}\sum_{v=1}^{n_l}L(A_l^v)+\sum_{v=1}^{n_{N+1}}L(A_{N+1}^v)=\sum_{l=N+1}^{r}\sum_{v=1}^{n_l}L(A_l^v).$$

Таким образом, мы построили формулу $\Phi_N(\widetilde{x}, z)$. Тем самым мы построили формулы Φ_j для всех $j=1,\ldots,r-1$.

Рассмотрим формулу $\Phi_1(\widetilde{x}, z)$:

$$\Phi_1(\widetilde{x},z)=\Omega_{f_1}(A_1^1,\ldots,A_1^{n_1},\psi_1(B_1,\ldots,B_q,z))=f_1(A_1^1,\ldots,A_1^{n_1},\psi_1(B_1,\ldots,B_q,z)).$$

Применяя к ней утверждение 9.17, получаем формулу $\Phi_0(\widetilde{x}, z)$, такую, что $\Phi(\widetilde{x}, z)\preceq\Phi_1(\widetilde{x}, z)\preceq\Phi_0(\widetilde{x}, z)$, которая имеет вид $\Phi_0(\widetilde{x}, z)=\psi_0(B_1',\ldots,B_p',z)$, где B_i' — формулы над $U\cup\mathfrak{M}$, в которые не входит переменная z, ψ_0 — функция из $\mathfrak{F}$, и выполнены неравенства

$$L(B_i)\leqslant\sum_{l=1}^{r}\sum_{v=1}^{n_l}L(A_l^v)=L(\Phi)-1<L(\Phi),\quad i=1,\ldots,p.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Определим функцию $\lambda(z, x, y_0, \ldots, y_{k-1})$ следующим образом

$$\lambda(z, x, y_0, \ldots, y_{k-1}) = \begin{cases} 0, & \text{если } y_z = 0; \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $\lambda \in A_\rho$. Для каждой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_r, z)$ из $\mathfrak{F}$ рассмотрим функцию $\varphi_1(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_{r+k}, z) = \lambda(z, \varphi(y_1, \ldots, y_r, z), y_{r+1}, \ldots \ldots, y_{r+k})$. Множество всех таких функций φ_1 обозначим через $\mathfrak{F}_1$. Заметим, что множество $\mathfrak{F}_1$ конечно и $\mathfrak{F}_1 \subseteq A_\rho$.

Утверждение 9.19. *Пусть* $\Phi(\widetilde{x}, z)$ — *формула над* $U \cup \mathfrak{M} \cup \cup \{0, \ldots, k-1\}$, *причем переменная* z *имеет только одно вхождение в формулу* Φ. *Тогда существуют такие* $l \geqslant 0$, *формулы* $\Phi_1(\widetilde{x}), \ldots, \Phi_l(\widetilde{x})$ *над* $U \cup \mathfrak{M} \cup \{0, \ldots, k-1\}$ *и функция* $\varphi_1(y_1, \ldots, y_l, z)$ *из множества* $\mathfrak{F}_1$, *что*

$$\Phi(\widetilde{x}, z) = \varphi_1(\Phi_1(\widetilde{x}), \ldots, \Phi_l(\widetilde{x}), z)$$

и $L(\Phi_i) \leqslant L(\Phi)$, $i = 1, \ldots, r$.

Доказательство. Заменим в формуле Φ все вхождения константы 0 на переменную y_0, все вхождения константы 1 на переменную y_1, и так далее для всех констант. Получим формулу $\Psi(\widetilde{x}, y_0, \ldots, y_{k-1}, z)$ над $U \cup \mathfrak{M}$. По утверждению 9.18 существует такие формулы $\Psi_1(\widetilde{x}, y_0, \ldots, y_{k-1}), \ldots, \Psi_r(\widetilde{x}, y_0, \ldots, y_{k-1})$ над $U \cup \mathfrak{M}$ и функция $\varphi(y_1, \ldots, y_r, z)$ из множества $\mathfrak{F}$, что верно соотношение

$$\Psi(\widetilde{x}, y_0, \ldots, y_{k-1}, z) \preceq \varphi(\Psi_1(\widetilde{x}, y_0, \ldots, y_{k-1}), \ldots, \Psi_r(\widetilde{x}, y_0, \ldots, y_{k-1}), z)$$

и $L(\Psi_i) < L(\Psi) = L(\Phi)$, $i = 1, \ldots, r$. Поскольку формула Ψ не принимает значений из центра отличных от нуля, верны следующие соотношения

$$\Phi(\widetilde{x}, z) \sim \Psi(\widetilde{x}, 0, \ldots, k-1, z) \sim$$
$$\sim \lambda(z, \varphi(\Psi_1(\widetilde{x}, 0, 1, \ldots, k-1), \ldots, \Psi_r(\widetilde{x}, 0, 1, \ldots, k-1), z), \Phi(\widetilde{x}, 0), \ldots, \Phi(\widetilde{x}, k-1)) \sim$$
$$\sim \varphi_1(\Psi_1(\widetilde{x}, 0, 1, \ldots, k-1), \ldots, \Psi_r(\widetilde{x}, 0, 1, \ldots, k-1), \Phi(\widetilde{x}, 0), \ldots, \Phi(\widetilde{x}, k-1), z).$$

Утверждение доказано.

Положим $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \cup U \cup \mathfrak{A}_* \cup \mathfrak{S} \cup \{t, \psi\}$. Отметим, что $0, \ldots, k-1 \in \mathfrak{A}$, поскольку $0, \ldots, k-1 \in \mathfrak{A}_*$.

Утверждение 9.20. *Система функций* $U \cup \mathfrak{M}\{0, \ldots, k-1\}$ *равномерна в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Поскольку по утверждению 9.9 система $\mathfrak{A}$ полна в классе A_ρ, $\mathfrak{F}_1 \subseteq [\mathfrak{A}]$. Пусть $\mathfrak{F}_2$ — множество формул над $\mathfrak{A}$, реализующих функции из $\mathfrak{F}_1$. Множество $\mathfrak{F}_2$ конечно, поскольку конечно множество $\mathfrak{F}_1$. Пусть R — множество всех формул над $U \cup \mathfrak{M}$. Из утверждения 9.19 и конечности множества $\mathfrak{F}_2$ вытекает, что множество R является $(U \cup \mathfrak{M} \cup \{0, \ldots, k-1\}, \mathfrak{A})$-регулярным. Действительно, мы построили такое конечное множество формул $\mathfrak{F}_2$ над $\mathfrak{A}$, что для любых формул $A(\widetilde{x})$, $B(y, \widetilde{x})$ над $U \cup \mathfrak{M} \cup \{0, \ldots, k-1\}$, таких, что переменная y имеет только одно вхождение в формулу B и формула $B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x})$ принадлежит множеству R, найдутся формула $F(y, z_1, \ldots, z_r)$ из $\mathfrak{F}_2$, и формулы $B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})$ из R, такие что $L(B_i) \leqslant L(B)$, $i = 1, \ldots, r$, и верно соотношение

$$B(A(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \sim F(A(\widetilde{x}), B_1(\widetilde{x}), \ldots, B_r(\widetilde{x})).$$

Поэтому, по лемме 2.5, существуют такие константы c и d, что для всякой формулы Φ над $U \cup \mathfrak{M} \cup \{0, \ldots, k-1\}$ существует такая эквивалентная ей формула Φ' над $\mathfrak{A}$, что $D(\Phi') \leqslant c \log L(\Phi) + d$. Следовательно, система функций $U \cup \mathfrak{M} \cup \{0, \ldots, k-1\}$ равномерна в $\mathfrak{A}$.

9.3. Существование равномерных порождающих систем. Рассмотрим систему $\mathfrak{A}=U\cup\mathfrak{M}\cup\mathfrak{A}_*\cup\mathfrak{S}\cup\{t,\psi\}$. В данном пункте мы покажем, что она равномерна. Напомним, что в предыдущем пункте мы вводили отношение частичного порядка $\preceq$ на E_k.

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 9.21. *Функции из системы $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t\}$ монотонны относительно $\preceq$.*

Определим функцию $\psi_0(x,y)$. Положим

$$\psi_0(x,y)=\begin{cases} y, & \text{если } y\notin Z;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Утверждение 9.22. *Система $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi_0\}$ равномерна в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. По утверждению 9.21 функции из системы $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t\}$ монотонны относительно $\preceq$. Кроме того, верны неравенства $t(x,y)\preceq x$, $\psi_0(x,y)\preceq y$. Рассмотрим формулу $\Psi(\widetilde{x})$ над $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi_0\}$. Если в формулу Ψ входит функция ψ_0, то представим ее в виде

$$\Psi(\widetilde{x})=\Phi(\psi_0(A_1,B_1),\ldots,\psi_0(A_m,B_m),\widetilde{x}),$$

где Φ — некоторая формула над $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t\}$, $A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_m$ — формулы над $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi_0\}$, $m\geqslant 1$. Рассмотрим формулу

$$\Psi'(\widetilde{x})=\Phi(B_1,\ldots,B_m,\widetilde{x}).$$

Поскольку формула Φ реализует монотонную относительно $\preceq$ функцию и верны неравенства $\psi_0(A_1,B_1)\preceq B_1$, верно неравенство $\Psi\preceq\Psi'$, при этом число вхождений функции ψ_0 в формулу Ψ' меньше, чем в Ψ и $L(\Psi')\leqslant L(\Psi)$. Повторяя эту процедуру несколько раз можно получить формулу Ψ_0 над $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t\}$, такую, что $L(\Psi_0)\leqslant L(\Psi)$.

Применяя аналогичные преобразования к формуле Ψ_0, можно построить формулу Ψ_1 над $U\cup\mathfrak{M}$, такую, что $\Psi\preceq\Psi_0\preceq\Psi_1$, $L(\Psi_1)\leqslant L(\Psi_0)\leqslant L(\Psi)$.

Рассмотрим функцию $\eta(x)$

$$\eta(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\notin Z;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Очевидно, что $\eta\in A_\rho$. Формула Ψ не принимает значений из Z, отличных от нуля, поэтому

$$\Psi(\widetilde{x})\sim t(\Psi_1(\widetilde{x}),\eta(\Psi(\widetilde{x})))$$

По утверждению 9.20 система $U\cup\mathfrak{M}$ равномерна в $\mathfrak{A}$. Следовательно, существуют такие c_1,d_1, не зависящие от Ψ_1 и формула Ψ_2 над $\mathfrak{A}$ эквивалентная Ψ_1, что $D(\Psi_2)\leqslant c_1\log L(\Psi_1)+d_1\leqslant c_1\log L(\Psi)+d_1$. Поскольку формула $\eta(\Psi(\widetilde{x}))$ реализует функцию, принимающую только значения 0 и 1, из утверждения 2.1 следует, что существуют такие константы c_2,d_2 не зависящие от Ψ, и формула Ψ_3 над $P^{(2)}_{k,\{0,1\}}$, эквивалентная $\eta(\Psi(\widetilde{x}))$, что $D(\Psi_3)\leqslant c_2\log L(\Psi)+d_2$. Таким образом, получаем, что

$$\Psi(\widetilde{x})\sim t(\Psi_2(\widetilde{x}),\Psi_3(\widetilde{x}))$$

и верно неравенство

$$D(t(\Psi_2(\widetilde{x}),\Psi_3(\widetilde{x})))\leqslant 1+\max(c_1\log L(\Psi)+d_1,c_2\log L(\Psi)+d_2),$$

все константы в котором не зависят от исходной формулы Ψ. Поскольку $t\in\mathfrak{A}$ и $P^{(2)}_{k,\{0,1\}}\subseteq\mathfrak{A}_*\subseteq\mathfrak{A}$, формула $t(\Psi_2(\widetilde{x}),\Psi_3(\widetilde{x}))$ является формулой над $\mathfrak{A}$. Следовательно, система $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi_0\}$ равномерна в $\mathfrak{A}$.

Утверждение доказано.

Рассмотрим Δ — разбиение E_k, определенное следующим образом: $\Delta=\{Z,\{a_1\},\ldots,\{a_m\}\}$, где $\{a_1,\ldots,a_m\}=E_k\backslash Z$, $a_i\neq a_j$ при $i\neq j$. Таким образом, если $a,b\in E_k$ и $a\sim b \pmod{\Delta}$, то либо $a,b\in Z$, либо $a=b$.

Утверждение 9.23. *Пусть* $a, b, c \in E_k$ *и* $a \sim b \pmod{\Delta}$. *Тогда*

$$\psi(a, c) \sim \psi_0(b, c) \pmod{\Delta}.$$

Доказательство. Предположим, что $\psi(a, c) \notin Z$. Тогда по определению функции ψ получаем, что $c \notin Z$, $\psi(a, c) = c = \psi_0(b, c)$.

Предположим, что $\psi(a, c) \in Z$. Тогда по определению функции ψ получаем, что $c \in Z$. Если $a \notin Z$, поскольку $a \sim b \pmod{\Delta}$, получаем, что $a = b$, значит $b \notin Z$, и, следовательно, $\psi_0(b, c) = 0 \sim \psi(a, c) \pmod{\Delta}$. Если $a \in Z$, поскольку $a \sim b \pmod{\Delta}$, получаем, что $b \in Z$, и, следовательно, $\psi_0(b, c) = b \in Z$. Тогда $\psi_0(b, c) \sim \psi(a, c) \pmod{\Delta}$.

Следствие 9.3. *Пусть* $a_1, \ldots, a_n \in E_k$, $n \geqslant 2$. *Тогда верно соотношение*

$$\psi(\psi \ldots (\psi(a_1, a_2), \ldots, a_{n-1}), a_n) \sim \psi_0(\psi_0 \ldots (\psi_0(a_1, a_2), \ldots, a_{n-1}), a_n) \pmod{\Delta}. \quad (25)$$

Доказательство. Для $n = 2$ соотношение (25) непосредственно следует из утверждения 9.23. Пусть соотношение (25) верно для $n = N$, $N \geqslant 2$. Покажем, что это соотношение верно и для $n = N + 1$. Положим

$$q = \psi(\psi(\ldots\psi(a_1, a_2), \ldots, a_{N-1}), a_N),$$
$$p = \psi_0(\psi_0(\ldots\psi_0(a_1, a_2), \ldots, a_{N-1}), a_N).$$

Тогда по предположению индукции $q \sim p \pmod{\Delta}$. Необходимо показать, что $\psi(q, a_{N+1}) \sim \psi_0(p, a_{N+1}) \pmod{\Delta}$. Последнее соотношение следует из утверждения 9.23. Таким образом, соотношение (25) выполняется для любого $n \geqslant 2$.

Из определений функций u_i, t, ψ, ψ_0 вытекает следующее утверждение

Утверждение 9.24.

1) *Пусть* $a, b \in E_k$, $a \in Z$. *Тогда верны следующие равенства*:

$$u_i(a, b) = u_i(0, b), \quad u_i(b, a) = u_i(b, 0), \quad t(a, b) = t(0, b), \quad t(b, a) = t(b, 0),$$
$$\psi(b, a) = \psi(b, 0), \quad \psi_0(a, b) = \psi_0(0, b), \quad \psi_0(b, a) = \psi_0(b, 0).$$

2) *Пусть* $a, b_1, \ldots, b_n \in E_k$, $a \in Z$, $n \geqslant 3$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Тогда верно равенство*

$$\mu_n(b_1, \ldots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \ldots, b_n) = \mu_n(b_1, \ldots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \ldots, b_n).$$

Следствие 9.4. *Верны следующие равенства*

$$u_i(\psi(x, y), z) = u_i(\psi_0(x, y), z), \qquad u_i(x, \psi(y, z)) = u_i(x, \psi_0(y, z)),$$
$$\mu_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, \psi(x, y), x_{i+1}, \ldots, x_n) = \mu_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, \psi_0(x, y), x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$t(\psi(x, y), z) = t(\psi_0(x, y), z), \qquad t(x, \psi(y, z)) = t(x, \psi_0(y, z)),$$
$$\psi(x, \psi(y, z)) = \psi(x, \psi_0(y, z)),$$
$$\psi_0(\psi(x, y), z) = \psi_0(\psi_0(x, y), z), \qquad \psi_0(x, \psi(y, z)) = \psi_0(x, \psi_0(y, z)).$$

Из определений функций ψ, ψ_0 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 9.25. *Пусть* $a, b \in E_k$, $a \notin Z \backslash \{0\}$. *Тогда* $\psi(a, b) = \psi_0(a, b)$.

Следствие 9.5. *Верны следующие равенства*:

$$\psi(\psi_0(x, y), z) = \psi_0(\psi_0(x, y), z), \qquad \psi(u_i(x, y), z) = \psi_0(u_i(x, y), z),$$
$$\psi(t(x, y), z) = \psi_0(t(x, y), z), \qquad \psi(\mu_n(x_1, \ldots, x_n), z) = \psi_0(\mu_n(x_1, \ldots, x_n), z).$$

Утверждение 9.26. *Система* $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi\}$ *равномерна в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть Φ — формула над $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi\}$. Следствия 9.4 и 9.5 позволяют заменять в формуле некоторые вхождения функции ψ на функцию ψ_0. Будем заменять вхождения ψ на ψ_0, пользуясь этими равенствами, до тех пор пока это возможно. Получим эквивалентную формуле Φ формулу Φ_0 над $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi,\psi_0\}$, в которую либо не входит ψ, либо Φ_0 имеет вид

$$\Phi_0(\widetilde{x})=\psi(\psi(\ldots\psi(x_i,A_1(\widetilde{x})),\ldots,A_{r-1}(\widetilde{x})),A_r(\widetilde{x})), \qquad (26)$$

где $A_j(\widetilde{x})$, $j=1,\ldots,r$, — формулы над $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi_0\}$, $1\leqslant i\leqslant n$, при этом $L(\Phi)=L(\Phi_0)$. Если в формулу Φ_0 не входит ψ, то воспользуемся равномерностью системы $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi_0\}$ в $\mathfrak{A}$, доказанной в утверждении 9.22.

Предположим, что Φ_0 имеет вид (26). Положим

$$\Psi_0(\widetilde{x})=\psi_0(\psi_0(\ldots\psi_0(x_i,A_1(\widetilde{x})),\ldots,A_{r-1}(\widetilde{x})),A_r(\widetilde{x})).$$

Рассмотрим функции $\lambda(x)$ и $\eta(x,y)$ определенные следующим образом

$$\lambda(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=0;\\ 1 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \qquad \eta(x,y)=\begin{cases}x, & \text{если } y=1;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Легко видеть, что $\lambda,\eta\in A_\rho$. Покажем, что верно следующее соотношение

$$\Phi_0(\widetilde{x})\sim\psi(\eta(x_i,\lambda(\Phi_0(\widetilde{x}))),\Psi_0(\widetilde{x})). \qquad (27)$$

Пусть $\widetilde{\alpha}\in E_k^n$, $\Phi_0(\widetilde{\alpha})=a$, $\Psi_0(\widetilde{\alpha})=b$.

Случай 1. Пусть $a=b=0$. Тогда верны равенства

$$\psi(\eta(\alpha_i,\lambda(\Phi_0(\widetilde{\alpha}))),\Psi_0(\widetilde{\alpha}))=\psi(\eta(\alpha_i,\lambda(0)),0)=\psi(\eta(\alpha_i,0),0)=\psi(0,0)=0=a.$$

Случай 2. Пусть $a=b\neq 0$. Тогда $b\notin Z$, поскольку ψ_0 не принимает значений из Z отличных от нуля. Следовательно, верны равенства

$$\psi(\eta(\alpha_i,\lambda(\Phi_0(\widetilde{\alpha}))),\Psi_0(\widetilde{\alpha}))=\psi(\eta(\alpha_i,\lambda(a)),a)=\psi(\eta(\alpha_i,1),a)=\psi(\alpha_i,a)=a.$$

Случай 3. Пусть $a\neq b$. По следствию 9.3 в этом случае $a,b\in Z$. Следовательно, $b=0$, поскольку функция ψ_0 не принимает других значений из Z. Тогда $a\in Z\setminus\{0\}$. Из определения функции ψ получаем, что $A_1(\widetilde{\alpha}),\ldots$ $\ldots,A_r(\widetilde{\alpha})\in Z$, $\alpha_i\in Z$ и $a=\alpha_i$. Легко видеть, что верны равенства

$$\psi(\eta(\alpha_i,\lambda(\Phi_0(\widetilde{\alpha}))),\Psi_0(\widetilde{\alpha}))=\psi(\eta(a,\lambda(a)),a)=\psi(\eta(a,1),a)=\psi(a,a)=a.$$

Следовательно, соотношение (27) выполнено во всех трех случаях.

Поскольку функция, реализуемая формулой $\lambda(\Psi_0(\widetilde{x}))$, принадлежит множеству $P_{k,\{0,1\}}$, и верны соотношения $P_{k,\{0,1\}}\subseteq A_\rho=[\mathfrak{A}]$, по утверждению 2.4 существуют такие константы c_1 и d_1, не зависящие от формулы Φ, и формула $\Psi_1(\widetilde{x})$ над $P_{k,Q}^{(2)}\cup\{0,\ldots,k-1\}\subseteq\mathfrak{A}$, такая, что $D(\Psi_1)\leqslant c_1\log L(\lambda(\Psi_0))+d_1=c_1\log L(\Phi)+d_1$ и $\lambda(\Psi_0(\widetilde{x}))\sim\Psi_1(\widetilde{x})$. Поскольку система $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi_0\}$ по утверждению 9.22 равномерна в $\mathfrak{A}$, а формула Ψ_0 является формулой над $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi_0\}$, получаем, что существуют такие константы c_2 и d_2, не зависящие от формулы Φ, и формула $\Psi_2(\widetilde{x})$, такая, что $D(\Psi_2)\leqslant c_2\log L(\Psi_0)+d_2=c_2\log L(\Phi)+d_2$ и $\Psi_2(\widetilde{x})\sim\Psi_0(\widetilde{x})$. Таким образом, выполнены соотношения

$$\Phi(\widetilde{x})\sim\Phi_0(\widetilde{x})\sim\psi(\eta(x_i,\lambda(\Phi_0(\widetilde{x}))),\Psi_0(\widetilde{x}))\sim\psi(\eta(x_i,\Psi_1(\widetilde{x})),\Psi_2(\widetilde{x})).$$

При этом $D(\psi(\eta(x_i,\Psi_1(\widetilde{x})),\Psi_2(\widetilde{x})))\leqslant(c_1+c_2)\log L(\Phi)+d_1+d_2+2$. Отсюда, поскольку $\eta\in[\mathfrak{A}]$, используя утверждение 2.1, получаем, что система $U\cup$ $\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi\}$ равномерна в $\mathfrak{A}$.

Утверждение доказано.

Утверждение 9.27. *Для всякой функции* $s \in \mathfrak{S}$ *верны равенства*

$$s(\mu_n(x_1, \ldots, x_n)) = \mu_n(s(x_1), \ldots, s(x_n)),$$
$$s(t(x, y)) = t(s(x), y), \quad s(\psi(x, y)) = \psi(s(x), s(y)),$$
$$s(u_i(x, y)) = u_{s(i)}(s(x), s(y)), \text{ при } i \in E_k \backslash Z, s(i) \neq 0.$$

Кроме того, если для $s \in \mathfrak{S}$ *и некоторого* $i \in E_k \backslash Z$ *верно равенство* $s(i) = 0$, *то существует такое* $b \in E_k \backslash Z$, *что при любом значении* x *выполнено соотношение* $s(x) \neq b$ *и верно равенство*

$$s(u_i(x, y)) = u_b(s(x), s(y)).$$

Доказательство. Пусть $s \in \mathfrak{S}$. Заметим, что функция s принимает значения только из множества $\{0\} \cup E_k \backslash Z$.

Покажем, что для любого $n \geqslant 3$ и любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$ верно равенство $s(\mu_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mu_n(s(\alpha_1), \ldots, s(\alpha_n))$.

Случай 1. Пусть $\mu_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = q \neq 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} = q$. Следовательно, верны равенства

$$\mu_n(s(\alpha_1), \ldots, s(\alpha_n)) = \mu_n(s(q), \ldots, s(q), s(\alpha_n)) = s(q) = \\ = s(\mu_n(q, \ldots, q, \alpha_n)) = s(\mu_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Случай 2. Пусть $\mu_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Тогда $s(\mu_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = s(0) = 0$. Предположим, что $\mu_n(s(\alpha_1), \ldots, s(\alpha_n)) = q \neq 0$. Тогда без ограничения общности, можно считать, что $s(\alpha_1), \ldots, s(\alpha_{n-1}) = q$. Следовательно $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} \neq 0$. Но это противоречит тому, что $\mu_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Значит $\mu_n(s(\alpha_1), \ldots, s(\alpha_n)) = 0$.

Пусть $\alpha, \beta \in E_k$. Покажем, что $s(t(\alpha, \beta)) = t(s(\alpha), \beta)$.

Случай 1. Пусть $\alpha \notin Z$, $\beta = 1$. Тогда верно равенство $s(t(\alpha, \beta)) = s(\alpha)$.

Случай 1. 1. Пусть $s(\alpha) \notin Z$. Тогда верно равенство $t(s(\alpha), \beta) = s(\alpha)$.

Случай 1. 2. Пусть $s(\alpha) = 0$. Тогда верны равенства $t(s(\alpha), \beta) = t(0, \beta) = 0 = s(\alpha)$.

Случай 2. Пусть $\alpha \in Z$ или $\beta \neq 1$. Тогда верны следующие равенства

$$s(t(\alpha, \beta)) = s(0) = 0 = t(0, \beta) = t(s(\alpha), \beta).$$

Покажем, что $s(\psi(\alpha, \beta)) = \psi(s(\alpha), s(\beta))$.

Случай 1. Пусть $\alpha, \beta \in Z$. Тогда верны равенства

$$s(\psi(\alpha, \beta)) = s(\alpha) = 0, \quad \psi(s(\alpha), s(\beta)) = \psi(0, 0) = 0.$$

Случай 2. Пусть $\alpha \notin Z$, $\beta \in Z$. Тогда верны равенства

$$s(\psi(\alpha, \beta)) = s(0) = 0, \quad \psi(s(\alpha), s(\beta)) = \psi(s(\alpha), 0).$$

Случай 2. 1. Пусть $s(\alpha) = 0$. Тогда верны равенства $\psi(s(\alpha), 0) = \psi(0, 0) = 0$.

Случай 2. 2. Пусть $s(\alpha) \notin Z$. Тогда верно равенство $\psi(s(\alpha), 0) = 0$. Таким образом, в случае 2 верно равенство $\psi(s(\alpha), s(\beta)) = 0$.

Случай 3. Пусть $\beta \notin Z$. Тогда верно равенство $s(\psi(\alpha, \beta)) = s(\beta)$.

Случай 3. 1. Пусть $s(\beta) \notin Z$. Тогда $\psi(s(\alpha), s(\beta)) = s(\beta)$.

Случай 3. 2. Пусть $s(\beta) = 0$. Тогда $\psi(s(\alpha), s(\beta)) = \psi(s(\alpha), 0) = 0 = s(\beta)$.

Пусть $i \in E_k \backslash Z$, $s(i) \neq 0$. Покажем, что $s(u_i(\alpha, \beta)) = u_{s(i)}(s(\alpha), s(\beta))$.

Случай 1. Пусть $\alpha = i$. Тогда $s(u_i(\alpha, \beta)) = s(i)$, кроме того, верны равенства $u_{s(i)}(s(\alpha), s(\beta)) = u_{s(i)}(s(i), s(\beta)) = s(i)$.

Случай 2. Пусть $\beta = i$. Этот случай аналогичен случаю 1.

Случай 3. Пусть $\alpha \neq i$, $\beta \neq i$.

Случай 3. 1. Предположим, что $\alpha = \beta$.

Случай 3.1.1. Если $s(\alpha)\neq 0$, то $\alpha\notin Z$ и верны равенства $s(u_i(\alpha,\beta))=s(\alpha)$, $u_{s(i)}(s(\alpha),s(\beta))=s(\alpha)$.

Случай 3.1.2. Если $s(\alpha)=0$, то $s(u_i(\alpha,\beta))=s(0)=0=$ $=u_{s(i)}(s(\alpha),s(\beta))$.

Случай 3.2. Предположим теперь, что $\alpha\neq\beta$. Поскольку α и β отличны от i, верны равенства $s(u_i(\alpha,\beta))=s(0)=0=u_{s(i)}(s(\alpha),s(\beta))$.

Пусть $i\in E_k\backslash Z$ и $s(i)=0$. Функция $s(x)$ отображает h различных элементов из $E_k\backslash Z$ в h различных элементов из этого же множества, а остальные элементы множества E_k функция отображает в 0. Отсюда получаем, что $h<k-|Z|$. Следовательно, существует такое $b\in E_k\backslash Z$, что при любом значении x выполнено соотношение $s(x)\neq b$. Покажем, что для этого b верно равенство

$$s(u_i(\alpha,\beta))=u_b(s(\alpha),s(\beta)).$$

Случай 1. Пусть $\alpha=i$. Тогда $s(u_i(\alpha,\beta))=s(i)=0$, кроме того, верны равенства $u_b(s(\alpha),s(\beta))=u_b(0,s(\beta))=0$.

Случай 2. Пусть $\beta=i$. Этот случай аналогичен случаю 1.

Случай 3. Пусть $\alpha\neq i$, $\beta\neq i$.

Случай 3.1. Предположим, что $\alpha=\beta$.

Случай 3.1.1. Если $s(\alpha)\neq 0$, то $\alpha\notin Z$ и верны равенства $s(u_i(\alpha,\beta))=s(\alpha)$, $u_b(s(\alpha),s(\beta))=s(\alpha)$.

Случай 3.1.2. Если $s(\alpha)=0$, то $s(u_i(\alpha,\beta))=s(\alpha)=0=$ $=u_b(0,s(\beta))=u_b(s(\alpha),s(\beta))$.

Случай 3.2. Предположим теперь, что $\alpha\neq\beta$. Поскольку α и β отличны от i, верны равенства $s(u_i(\alpha,\beta))=s(0)=0=u_b(s(\alpha),s(\beta))$.

Утверждение доказано.

Утверждение 9.28. *Система $U\cup\mathfrak{M}\cup\mathfrak{S}\cup\{t,\psi\}$ равномерна в $\mathfrak{A}$*

Доказательство. Используя равенства, полученные в утверждении 9.27, применим лемму 2.2 и учитывая, что $U\cup\mathfrak{M}\cup\{t,\psi\}$ равномерна в $\mathfrak{A}$ получаем, что Система $U\cup\mathfrak{M}\cup\mathfrak{S}\cup\{t,\psi\}$ равномерна в $\mathfrak{A}$

Утверждение 9.29. *Система $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Доказательство. По утверждению 9.28 система $U\cup\mathfrak{M}\cup\mathfrak{S}\cup\{t,\psi\}$ равномерна в $\mathfrak{A}$. Из леммы 2.8 и определения множества $\mathfrak{A}_*$ получаем, что система $\mathfrak{A}$ тоже равномерна.

Теорема 9.1. *Пусть ρ — h-арное отношение типа $\mathbb{C}$, $h\geqslant 2$. Тогда существует система $\mathfrak{A}$ такая что $A_\rho=[\mathfrak{A}]$ и $\mathfrak{A}$ равномерна.*

Доказательство. В разделе 9.1 (утверждение 9.9) мы построили порождающую систему $\mathfrak{A}=U\cup\mathfrak{M}\cup\mathfrak{A}_*\cup\mathfrak{S}\cup\{t,\psi\}$ для класса A_ρ. Равномерность системы $\mathfrak{A}$ доказана в утверждении 9.29.

§ 10. Доказательство основных теорем

В этом параграфе приводятся доказательства теорем, содержащих основные результаты работы.

Теорема 1 объединяет результаты полученные для семейств предполных классов при любом $k\geqslant 3$, которые верны для любой порождающей системы. Все эти результаты были получены в предыдущих параграфах и здесь мы лишь сводим их вместе.

Доказательство теоремы 1. Если $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{L}$ то равномерность $\mathfrak{A}$ следует из теоремы 3.1. Если $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{P}$ то равномерность $\mathfrak{A}$ следует из теоремы 4.1. Если $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{E}$ то равномерность $\mathfrak{A}$ следует из теоремы 5.1. Если $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{B}$ то равномерность $\mathfrak{A}$ следует из теоремы 6.1. Доказательство равномерности $\mathfrak{A}$ в случае, если $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{O}^*$, приведено в [7]. Если $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{C}_1$ то равномерность $\mathfrak{A}$ следует из теоремы 7.1. Если $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{C}_2$ то равномерность $\mathfrak{A}$ следует из теоремы 8.1. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Если $[\mathfrak{A}]$ является классом одного из типов $\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, то утверждение непосредственно следует из теоремы 1. Нетрудно показать (см. [7]), что классы типа $\mathbb{O}$, не являющиеся классами типа $\mathbb{O}^*$, существуют только при $k \geqslant 6$. Классы типа $\mathbb{C}_h$ существуют в P_k только при $k > h$. Поэтому в P_3 отсутствуют классы типа $\mathbb{O}$, не являющиеся классами типа $\mathbb{O}^*$, и классы типа $\mathbb{C}_h$ при $h \geqslant 3$. Следовательно, если $[\mathfrak{A}]$ является классом типа $\mathbb{O}$ или типа $\mathbb{C}$, то утверждение также вытекает из теоремы 1. Следствие доказано.

Положим $\rho^* = E_4^3 \backslash \{(1,2,3), (2,1,3), (2,3,1), (3,2,1), (3,1,2), (1,3,2)\}$. При $k = 4$ существует лишь один, с точностью до двойственности, предполный класс, который не попадает в семейства, указанные в условии теоремы 1, а именно, в этом случае получаем следующее утверждение.

Доказательство следствия 2. Найдем классы типа $\mathbb{C}_3$ которые содержатся в P_4. Пусть $\rho \in E_4^3$ — отношение типа $\mathbb{C}_3$. Тогда должен существовать набор (a_0, a_1, a_2), не принадлежащий отношению ρ. Элементы a_0, a_1, a_2 попарно различны, поскольку ρ содержит все наборы, имеющие хотя бы два одинаковых элемента. Для любой подстановки s на E_3 набор $(a_{s(0)}, a_{s(1)}, a_{s(2)})$ также не содержится в ρ. Пусть $E_4 \backslash \{a_0, a_1, a_2\} = \{b\}$. Центр Z отношения ρ не пуст и не содержит элементов a_0, a_1, a_2. Следовательно $Z = \{b\}$. Таким образом, все наборы из E_4^3, кроме наборов вида $(a_{s(0)}, a_{s(1)}, a_{s(2)})$, где s — произвольная подстановка на E_3, содержатся в ρ. Легко видеть, что отношение ρ является двойственным отношению ρ^*, а именно, существует такая подстановка σ на E_4, что $(a, b, c) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)) \in \rho^*$. Следовательно класс A_ρ функций, сохраняющих отношение ρ и класс A_{ρ^*} функций, сохраняющих отношение ρ^*, двойственны. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2. Пусть A_ρ является предполным классом типа $\mathbb{C}_h$, $h \geqslant 1$. Если $h = 1$, то утверждение теоремы 2 следует из теоремы 7.1. Если $h \geqslant 2$, то утверждение теоремы 2 следует из теоремы 9.1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что класс A_ρ не является классом типа $\mathbb{C}$. Рассмотрим произвольную конечную систему функций из P_k, такую, что $[\mathfrak{A}] = A_\rho$. В частности, можно положить $\mathfrak{A} = A_\rho^{(3)}$ (в [22] доказано, что в этих случаях $[A_\rho^{(3)}] = A_\rho$). Если A_ρ является предполным классом одного из следующих типов: $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$, то по теореме 1 система $\mathfrak{A}$ равномерна. Равномерность системы $\mathfrak{A}$ в случае, если A_ρ — класс типа $\mathbb{O}$, доказана в [7].

Предположим теперь, что A_ρ является классом типа $\mathbb{C}$. Тогда равномерная порождающая система в этом классе существует по теореме 2. Теорема доказана.

Утверждение 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные конечные системы функций из P_k, $\mathfrak{A} \subseteq [\mathfrak{B}]$ и система $\mathfrak{A}$ равномерна. Тогда существуют такие константы a, b, что для всех $f \in [\mathfrak{A}]$ верно неравенство*

$$L_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant a(L_{\mathfrak{A}}(f))^b.$$

Доказательство. Пусть $m = m(\mathfrak{B})$, $c_1 = \max\limits_{f \in [\mathfrak{A}]} D_{\mathfrak{B}}(f)$. По утверждению 2.1 для любой функции f из $[\mathfrak{A}]$ верно неравенство $D_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant c_1 D_{\mathfrak{A}}(f)$. Поэтому для любой функции f из $[\mathfrak{A}]$ верна следующая цепочка неравенств

$$L_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant m^{D_{\mathfrak{B}}(f)} \leqslant m^{c_1 D_{\mathfrak{A}}(f)} \leqslant m^{c_1 c \log_2 L_{\mathfrak{A}}(f) + c_1 d} = m^{c_1 d} m^{c_1 c \log_2 L_{\mathfrak{A}}(f)} = m^{c_1 d} (L_{\mathfrak{A}}(f))^{c_1 c \log_2 m}.$$

Утверждение доказано.

Применяя это утверждение к результатам теорем $1-3$ получаем следующие очевидные следствия.

Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *— произвольные конечные системы функций из* P_k, $k \geqslant 3$, *такие, что* $[\mathfrak{A}] = [\mathfrak{B}]$ *и* $[\mathfrak{A}]$ *— является предполным классом одного из следующих типов:* $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{O}^*$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$. *Тогда существуют такие константы* a *и* b, *что для всех* $f \in [\mathfrak{A}]$ *верно неравенство*

$$L_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant a(L_{\mathfrak{A}}(f))^b.$$

Следствие 4. *Пусть* A *— произвольный предполный класс в* P_k, $2 \leqslant k \leqslant 7$. *Тогда существует такая конечная система функций* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset P_k$, *что* $A = [\mathfrak{A}]$ *и для всякой конечной системы функций* $\mathfrak{B}$, *такой, что* $[\mathfrak{B}] = A$, *существуют такие константы* a *и* b, *что для всех* $f \in A$ *верно неравенство*

$$L_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant a(L_{\mathfrak{A}}(f))^b.$$

Следствие 5. *Пусть* A *— произвольный предполный класс в* P_k, $k \geqslant 2$, *одного из следующих типов:* $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{O}^*$. *Тогда существует такая конечная система функций* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset P_k$, *что* $A = [\mathfrak{A}]$ *и для всякой конечной системы функций* $\mathfrak{B}$, *такой, что* $[\mathfrak{B}] = A$, *существуют такие константы* a *и* b, *что для всех* $f \in A$ *верно неравенство*

$$L_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant a(L_{\mathfrak{A}}(f))^b.$$

Таким образом, мы показали, что для каждого из предполных классов типов $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{O}^*$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ все его конечные порождающие системы полиномиально эквивалентны. Кроме того, для любого предполного класса в P_k при $2 \leqslant k \leqslant 7$ и для любого предполного класса при произвольном $k \geqslant 2$, кроме классов типа $\mathbb{O}$, не являющихся классами типа $\mathbb{O}^*$, существует конечная порождающая система $\mathfrak{A}$, которая является в некотором смысле «наихудшей», а именно, сложность функций в любой другой конечной системе, порождающей этот класс, ограничена полиномом от сложности функций в системе $\mathfrak{A}$.

Отметим, что методы, использованные в данной работе при доказательстве равномерности порождающих систем для предполных классов k-значной логики, можно также применять и к некоторым системам, которые порождают классы, отличные от предполных. Например, если система удовлетворяет условиям одной из лемм 2.6, 2.7, 2.2, 2.8 или утверждений 3.1, 4.3, то она является равномерной; в частности, при помощи утверждения 3.1 и леммы 2.8 можно доказать равномерность порождающих систем в любом замкнутом классе, содержащем все функции одной переменной (все такие классы перечислены в работе Г. А. Бурле [2]).

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А. Б. Угольникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахметова Л. И. О глубине формул для предполных классов трехзначной логики // Методы и системы технической диагностики. — Вып. 18. — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1993. — С. 19–20.
2. Бурле Г. А. Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной // Сборник трудов института математики СО АН СССР. — Вып. 10. — 1967. — С. 3–7.
3. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс. 2002.
4. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ. 1984.
5. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. — С. 61–80.

6. Сафин Р. Ф. О глубине и сложности формул в некоторых классах k-значной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2000. — № 6. — С. 65–68.
7. Сафин Р. Ф. О равномерности систем монотонных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. — № 2. — С. 15–20.
8. Сафин Р. Ф. О равномерности систем функций, сохраняющих центральные отношения // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». М.: Издательство механико-математического факультета МГУ. 2004. — С. 98–100.
9. Угольников А. Б. О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // VII Всесоюзная конференция «Проблемы теоретический кибернетики»: тезисы докладов. Часть 1. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета. 1985. — С. 194–195.
10. Угольников А. Б. О соотношении между глубиной и сложностью формул для замкнутых классов двузначной логики // IV Всесоюзная конференция "Применение методов математической логики": тезисы докладов. Таллин. 1986. — С. 184.
11. Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Математические заметки. — Т. 42, Вып. 4. — М.: Наука, 1987. — С. 603–612.
12. Храпченко В. М. О сложности реализации линейной функции в классе π-схем // Математические заметки. — Т. 9, № 1. — 1971. — С. 35–40.
13. Храпченко В. М. О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Вып. 32. Новосибирск, ИМ СО АН СССР. 1978. — С. 76–94.
14. Храпченко В. М. О соотношении между сложностью и глубиной формул в базисе, содержащем медиану // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Вып. 37. Новосибирск, ИМ СО АН СССР. 1981. — С. 77–84.
15. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института имени В. А. Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1958. — Т. 51. — С. 3–142.
16. Яблонский С. В., Козырев В. П. Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР. Вып. 19а. М.: 1968. — С. 3–15
17. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Предполные классы в многозначных логиках. — М.: Изд-во МЭИ, 1997.
18. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2001.
19. Brent R. P., Kuck D. J., Maruyama K. The parallel evaluation of arithmetic expressions without division // IEEE Transactions on Computers C-22. 1973. — P. 532–534.
20. Brent R. P. The parallel evaluation of arithmetic expressions in logarithmic time // Complexity of Sequential and Parallel Numerical Algorithms, Academic Press, New York. 1973. — P. 83–102.
21. Brent R. P. The parallel evaluation of general arithmetic expressions // Journal of the ACM, 21(2). 1974. — P. 201–206.
22. Lau D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. 24, 1978. — S. 79–96.
23. Pratt V. R. The Effect of Basis on the Size of Boolean Expressions // Proc. 16th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. New York, 1975. — P. 119–121 (Русский перевод: Пратт В. Р. Влияние базиса на сложность булевых формул // Кибернетический сборник (новая серия). Выпуск 17. М.: Мир, 1980. — С. 114–123).
24. Ragaz M. E. Parallelizable algebras. Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 26 (1986/7). — P. 77–99.
25. Rosenberg I. La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble finil. Comptes Rendus, de l'Academ. Paris, Ser. A-B. 260. 1965. — P. 3817–3819.
26. Rosenberg I. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrvertigen Logiken // Rozpravy Československě Academie věd. Rada matematickych a přirodnich věd. Praha, 1970, Ročnik 80, Sešit 4. — S. 3–93.
27. Spira P. M. On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences, North Hollywood, 1971, Western Periodicals Company, P. 525–527.
28. Tardos G. A maximal clone of monotone operations which is not finitely generated // Order. 1986. — V. 3. — P. 211–218.
29. Wegener I. Relating Monotone Formula Size and Monotone Depth of Boolean Functions // Information Processing Letters, 16. 1983. — P. 41–42.
30. Wegener I. The Complexity of Boolean Functions. Wiley-Teubner. 1987.

Поступило в редакцию 18 VII 2004