

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ.М.В. КЕЛДЫША

С. В. ГЕЙН, Н. А. ЗАЙЦЕВ, В. С. ПОСВЯНСКИЙ,
Ю. Б. РАДВОГИН

МЕТОД НЕЗАВИСИМЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ
ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО
УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Москва, 2003

С. В. Гейн, Н. А. Зайцев, В. С. Посвянский, Ю. Б. Радвогин. *Метод независимых потоков для численного решения многомерного уравнения теплопроводности.*

Аннотация. В работе предлагается новый подход к построению безусловно устойчивых численных алгоритмов решения многомерного уравнения теплопроводности в ортогональных системах координат. Соответствующие методы (как первого, так и второго порядка аппроксимации по времени) являются абсолютно экономичными и параллелизуемыми, а расчетная область может быть многосвязной. Основным элементом этих методов — независимый расчет потоков по каждому пространственному направлению.

S. V. Gein, N. A. Zaitsev, V. S. Posvyanskii, Yu. B. Radvogin. *Method of independent fluxes for numerical solution of multidimensional heat equation.*

Abstract. A new approach for the construction of unconditionally stable numerical algorithms for the solution of the multidimensional heat equation for orthogonal coordinate systems is presented. The corresponding methods (both first and second order of accuracy in time) are absolutely economical and parallelizable. This approach can be applied to multiply connected domains as well. The key element of the method is the calculation of fluxes along each spatial direction independently of one another.

Введение

В данной работе предложен новый класс численных алгоритмов решения смешанной задачи для многомерного уравнения теплопроводности.¹ Этот класс содержит как схемы первого порядка аппроксимации (остаточный член $r = O(\tau) + O(h^2)$), так и второго — $r = O(\tau^2) + O(h^2)$). Все предлагаемые схемы безусловно устойчивы. Основным преимуществом данных методов является их абсолютная экономичность: число операций, необходимых для перехода на следующий временной слой равно CV , где V — объём разностной сетки, а C — константа, не зависящая от V . (Для не слишком сложного вида коэффициентов $C \approx 100 - 200$.)

Экономичность алгоритмов, как правило, достигается двумя путями. Первый — наиболее популярный — основан на редукции к одномерным разностным задачам. Именно этот подход лежит в основе метода переменных направлений или, в более общем плане, методе расщепления [2]. Второй подход состоит в использовании тех или иных итерационных процедур, самые удачные из которых требуют $CV \ln V$ операций [3].

Предлагаемый метод, так же, как и метод расщепления, в своей основе содержит решение одномерных задач. Однако он принципиально отличен от метода расщепления. Во-первых, здесь нет никакой факторизации оператора $E - \tau A$, которая и составляет суть метода расщепления. И, во-вторых, данные схемы по построению являются консервативными, что автоматически гарантирует выполнение дискретного аналога соответствующего закона сохранения. Основная идея алгоритма состоит в способе расчета потоков. Именно неявная разностная схема расчета потоков допускает редукцию к одномерным задачам, что и обеспечивает как безусловную устойчивость, так и экономичность.

Следует подчеркнуть, что расчет потоков по каждому из пространственных направлений выполняется независимо, что позволяет легко распараллеливать алгоритм. Именно по этой причине метод можно назвать методом независимых потоков (МНП).²

Данный метод предназначен для решения задач в ортогональных координатах. В качестве таковых в работе рассмотрены две основные координатные системы — декартова (для 2D и 3D задач) и полярная (для 2D уравнения). Эффективность алгоритма иллюстрируется численными примерами для различных областей, в том числе, двухсвязных. Наличие δ -образных источников не является осложняющим обстоятельством, что позволяет использовать предлагаемый подход для решения задач с различными сингулярностями.

¹ Краткое изложение основных элементов данного подхода см. [1].

² Использование потоков в качестве искомых величин в краевой разностной задаче было предложено в [4] ("метод потоковой прогонки").

Для того, чтобы выделить основные конструкции схемы и исследовать ее свойства, рассмотрим вначале простейшую двумерную задачу с постоянными коэффициентами:

в области $G: \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$. Граничные условия

где n — нормаль к ∂G . (Для постоянных a, b эти коэффициенты, конечно, можно считать равными, но в общем случае это не обязательно.)

Разобьём G на прямоугольные ячейки $\omega_{m,k}$ со сторонами $h_x = X/M$ и $h_y = Y/K$. Обозначим через $\Omega_{m,k}^{n+1/2}$ пространственно-временную ячейку $\omega_{m,k} \times [t^n, t^n + \tau]$, Рис. 1.

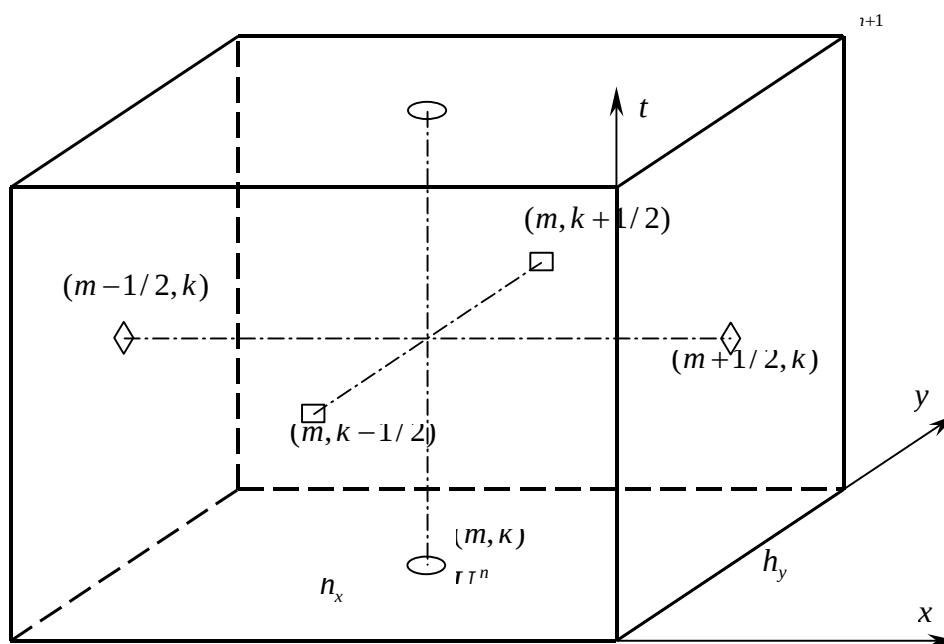


Рисунок 1.

Введем три набора точек и, соответственно, три набора сеточных функций:

а) целые точки — (m, k) — центры ячеек $\omega_{m,k}$; к этим точкам будем относить $P_{m,k}^n = P(x_m, y_k, t^n)$;

б) x -полуцелые — $(m+1/2, k)$ — и y -полуцелые — $(m, k+1/2)$ — точки; этим точкам сопоставляются потоки $U_{m+1/2,k}^{n+1/2}$ и

$$V_{m,k+1/2}^{n+1/2} : U = a \frac{\partial P}{\partial x}, \quad V = b \frac{\partial P}{\partial y}.$$

С использованием потоков уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Поскольку (1.3) имеет дивергентный вид, воспользуемся стандартной концепцией конечных объемов с тем, чтобы решение разностного уравнения точно удовлетворяло бы некоторому дискретному аналогу закона сохранения, соответствующему выбранной форме записи уравнения. Поэтому заключительным этапом разностной схемы является т.н. дивергентное замыкание (дивергентный пересчет):

$$P_{m,k}^{n+1} = P_{m,k}^n + \kappa_x \Delta_x U_{m,k} + \kappa_y \Delta_y V_{m,k}, \quad (1.4)$$

где $\Delta_x U_{m,k} = U_{m+1/2,k} - U_{m-1/2,k}$, $\Delta_y V_{m,k} = V_{m,k+1/2} - V_{m,k-1/2}$; $\kappa_x = \tau / h_x$, $\kappa_y = \tau / h_y$. Здесь и далее для упрощения записи в дальнейшем верхние дробные индексы опущены.

Таким образом, любая реализация разностной схемы, базирующаяся на дивергентном замыкании, полностью определяется способом вычисления потоков.

Напомним об одном важном обстоятельстве. Для получения разностной схемы p -го порядка аппроксимации ($p=1$ или 2) достаточно вычислять потоки по схеме пониженного, $(p-1)$ -го порядка. Повышение порядка до требуемого осуществляется за счет дивергентного пересчета. Этот факт является общим и не связан с конкретным типом уравнения (параболические, гиперболические и т.д.).

Начнем с простейшей схемы расчета потоков. Заметим, что U и V удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Учитывая сделанное выше замечание о порядке аппроксимации потоков, в качестве схемы нулевого порядка для расчетов U и V возьмем простейшую неявную схему для усеченных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = b \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad (1.6)$$

обозначая искомые потоки через $\tilde{U}$, $\tilde{V}$. А именно,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{\sigma}{2} q_x \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,k}, \\ \tilde{V}_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} q_y \Delta_{yy} \tilde{V}_{m,k+1/2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь

$$U_{m+1/2,k}^n = a \frac{P_{m+1,k}^n - P_{m,k}^n}{h_x}, \quad V_{m,k+1/2}^n = b \frac{P_{m,k+1}^n - P_{m,k}^n}{h_y}; \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,k} &= \tilde{U}_{m+3/2,k} - 2\tilde{U}_{m+1/2,k} + \tilde{U}_{m-1/2,k}, \\ \Delta_{yy} \tilde{V}_{m,k+1/2} &= \tilde{V}_{m,k+3/2} - 2\tilde{V}_{m,k+1/2} + \tilde{V}_{m,k-1/2}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

а $q_x = a\tau/h_x^2$, $q_y = b\tau/h_y^2$.

Параметер σ характеризует тот промежуточный слой $t^n + \sigma\tau/2$, для которого (1.7) аппроксимирует (1.6). Значению $\sigma=1$ соответствует срединный слой, значению $\sigma=2$ — верхний: $t = t^{n+1}$.

Система (1.7) состоит из двух независимых подсистем, каждая из которых замыкается граничным условием, порожденным (1.2):

$$U = ag, \quad V = bg. \quad (1.10)$$

Остается лишь выполнить дивергентный пересчет (1.4).

Для построения более точной схемы уточненные значения U и V будем находить уже из полной системы (1.5). Таким образом, искомый алгоритм перехода на следующий слой распадается на три этапа:

1) Нахождение предварительных, «грубых» значений потоков — $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ путем решения краевых задач для разностных систем:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{\sigma}{2} q_x \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,k}; \quad m=0, \dots, M-1; \\ \tilde{V}_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} q_y \Delta_{yy} \tilde{V}_{m,k+1/2}; \quad k=0, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Граничные условия — заданные (по (1.10)) значения $\tilde{U}_{1/2,k}$, $\tilde{U}_{M+1/2,k}$, $\tilde{V}_{m,1/2}$ и $\tilde{V}_{m,K+1/2}$.

2) Отыскание окончательных (уточненных) значения потоков U и V из системы разностных уравнений, аппроксимирующей (1.5):

$$\begin{aligned} U_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{\theta}{2} q_x \Delta_{xx} U_{m+1/2,k} + \frac{\theta}{2} q_{xy} \Delta_{xy} \tilde{V}_{m+1/2,k}, \\ V_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{\theta}{2} q_y \Delta_{yy} V_{m,k+1/2} + \frac{\theta}{2} q_{yx} \Delta_{yx} \tilde{U}_{m,k+1/2}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $q_{xy} = a\tau/h_x h_y$, $q_{yx} = b\tau/h_x h_y$, а

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} \tilde{V}_{m+1/2,k} &= \tilde{V}_{m+1,k+1/2} - \tilde{V}_{m+1,k-1/2} - \tilde{V}_{m,k+1/2} + \tilde{V}_{m,k-1/2}; \\ \Delta_{yx} \tilde{U}_{m,k+1/2} &= \tilde{U}_{m+1/2,k+1} - \tilde{U}_{m-1/2,k+1} - \tilde{U}_{m+1/2,k} + \tilde{U}_{m-1/2,k}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Граничные условия — те же, что и на этапе 1.

Подчеркнем, что второй этап характеризуется своим параметром θ , который не обязан совпадать с σ .

3) Дивергентное замыкание по U , V .

Данный алгоритм решает также и задачу с граничным условием Дирихле:

$$P = g(x, y, t). \quad (1.14)$$

Действительно, пусть нормаль к рассматриваемому элементу границы направлена вдоль оси x . Дифференцируя (1.14) по t , получаем $P_t = g_t(x, y, t)$. То есть

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = g_t. \quad (1.15)$$

Но $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} a \frac{\partial P}{\partial y}$ — известная на данном граничном элементе функция (в силу (1.14)). Поэтому (1.15) эквивалентно заданию $\frac{\partial U}{\partial x}$, что тривиальным образом формирует граничное условие, замыкающее разностную краевую задачу.

Легко видеть, что ни форма области G , ни даже ее связность не имеют значения. Важно лишь, чтобы любой элемент границы ∂G являлся стороной приграничной ячейки ω . На Рис. 2 изображен пример достаточно вычурной области, которая, тем не менее, подвластна обоим (как упрощенному, так и полному) алгоритмам. Единственным усложнением при обработке таких областей является переменность длины каждого луча.

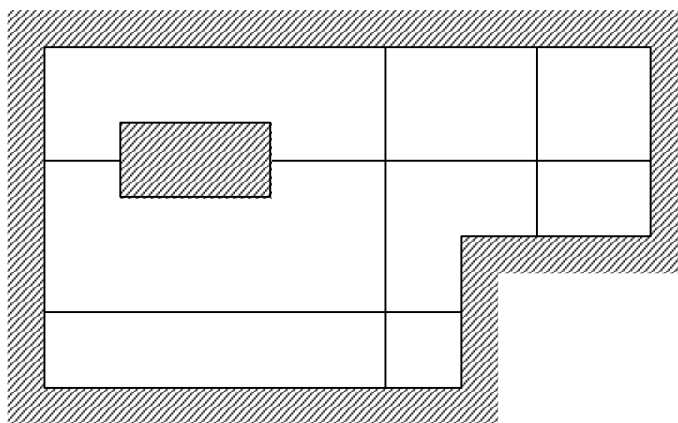


Рисунок 2.

Следует также добавить, что алгоритм очевидным образом параллелизуем, поскольку потоки на каждом луче обоих направлений рассчитываются независимо.

§2. Аппроксимация и устойчивость.

Обычная процедура определения порядка и аппроксимации с помощью соответствующих тейлоровских разложений точного решения в узлах шаблона разностной сетки здесь неосуществима ввиду отсутствия самого конечного шаблона. Специфика алгоритма не позволяет исключить значения потоков и получить непосредственную связь между $P_{m,k}^n$ и $P_{m,k}^{n+1}$ в конечном числе точек. Поэтому для установления порядка аппроксимации воспользуемся той же стандартной техникой, с помощью которой исследуется устойчивость схемы.

Положим

$$P_{m,k}^n = e^{i(m\alpha + k\beta)} = \mathcal{E}. \quad (2.1)$$

Тогда $P_{m,k}^{n+1} = \lambda(\alpha, \beta)\mathcal{E}$. Для нахождения собственного значения λ оператора послыонного перехода для полной схемы удобно ввести промежуточные величины λ_x , λ_y , $\tilde{\lambda}_x$ и $\tilde{\lambda}_y$:

$$\tilde{U}_{m+1/2,k} = \tilde{\lambda}_x \mathcal{E}, \quad \tilde{V}_{m,k+1/2} = \tilde{\lambda}_y \mathcal{E}, \quad (2.2)$$

$$U_{m+1/2,k} = \lambda_x \mathcal{E}, \quad V_{m,k+1/2} = \lambda_y \mathcal{E}. \quad (2.3)$$

Подставив (2.2) в (1.11), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_x [1 + \sigma q_x (1 - \cos \alpha)] &= \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x}, \\ \tilde{\lambda}_y [1 + \sigma q_y (1 - \cos \beta)] &= \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставив (2.3) в (1.12), получим

$$\begin{aligned} \lambda_x [1 + \theta q_x (1 - \cos \alpha)] &= \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} + \frac{\theta}{2} \tilde{\lambda}_y q_{xy} (e^{i\alpha} - 1) (1 - e^{-i\beta}), \\ \lambda_y [1 + \theta q_y (1 - \cos \beta)] &= \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y} + \frac{\theta}{2} \tilde{\lambda}_x q_{yx} (e^{i\beta} - 1) (1 - e^{-i\alpha}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

И, наконец, из (1.4) следует

$$\lambda = 1 + \kappa_x \lambda_x (e^{i\alpha} - 1) + \kappa_y \lambda_y (e^{i\beta} - 1). \quad (2.6)$$

Для укороченной схемы (без этапа 2) имеем просто

$$\begin{aligned} \lambda_x [1 + \sigma q_x (1 - \cos \alpha)] &= \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x}, \\ \lambda_y [1 + \sigma q_y (1 - \cos \beta)] &= \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Введем обозначения

$$\xi = q_x (1 - \cos \alpha), \quad \eta = q_y (1 - \cos \beta), \quad (2.8)$$

$$R_x^\sigma = \xi / (1 + \sigma \xi), \quad R_y^\sigma = \eta / (1 + \sigma \eta), \quad (2.9)$$

$$R_x^\theta = \xi / (1 + \theta \xi), \quad R_y^\theta = \eta / (1 + \theta \eta).$$

Тогда

$$\lambda = 1 - 2R, \quad (2.10)$$

где для укороченной схемы

$$R = R_x^\sigma + R_y^\sigma, \quad (2.11)$$

а для полной

$$R = R_x^\sigma + R_y^\sigma - \theta(R_x^\theta R_y^\sigma + R_y^\theta R_x^\sigma). \quad (2.12)$$

Начнем с порядка аппроксимации. Сопоставим собственные функции $e^{i(k_x x + k_y y)}$ исходного дифференциального оператора, рассматриваемые в узлах разностной сетки, т.е. сеточные функции $e^{i(k_x m h_x + k_y k h_y)}$, с собственными функциями разностного оператора перехода $e^{i(m\alpha + k\beta)}$. Ясно, что $\alpha = k_x h_x$, $\beta = k_y h_y$. Обозначим через λ^{ex} множитель перехода со слоя t^n на слой t^{n+1} для точной собственной функции. Тогда порядок аппроксимации определяется по степени совпадения тейлоровских разложений по τ функций λ^{ex} и λ .

Применительно к (1.1) для λ^{ex} имеем

$$\lambda^{ex} = e^{-\tau(ak_x^2 + bk_y^2)}. \quad (2.13)$$

То есть,

$$\lambda^{ex} = 1 - \tau(ak_x^2 + bk_y^2) + \frac{\tau^2}{2}(ak_x^2 + bk_y^2)^2 + o(\tau^2). \quad (2.14)$$

Найдем соответствующие разложения для обеих разностных схем.

Имеем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a\tau}{h_x^2}(1 - \cos \alpha) \approx \frac{a\tau}{h_x^2} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} + \dots \right) = \\ &= \frac{a\tau}{h_x^2} \left(\frac{k_x^2 h_x^2}{2} - \frac{k_x^4 h_x^4}{24} + \dots \right) = \frac{k_x^2 a\tau}{2} - \frac{a\tau k_x^4 h_x^2}{24} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку речь идет лишь о первом или втором порядке аппроксимации, то второе слагаемое в разложении ξ может быть отброшено. Выполнив аналогичное разложение для η , окончательно получим

$$\begin{aligned} \xi &\approx \frac{k_x^2 a\tau}{2}, \quad \eta \approx \frac{k_y^2 b\tau}{2}, \\ R_x^\sigma &\approx \frac{k_x^2 a\tau}{2} - \sigma \frac{k_x^4 a^2 \tau^2}{4}, \quad R_y^\sigma \approx \frac{k_y^2 b\tau}{2} - \sigma \frac{k_y^4 b^2 \tau^2}{4}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$R_x^\theta \approx \frac{k_x^2 a\tau}{2} - \theta \frac{k_x^4 a^2 \tau^2}{4}, \quad R_y^\theta \approx \frac{k_y^2 b\tau}{2} - \theta \frac{k_y^4 b^2 \tau^2}{4}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим укороченную схему. Для нее

$$\lambda = 1 - 2(R_x^\sigma + R_y^\sigma) = 1 - \tau(ak_x^2 + bk_y^2) + \frac{\tau^2}{2} \sigma(a^2 k_x^4 + b^2 k_y^4) + \dots \quad (2.17)$$

Сравнение (2.17) с (2.14) позволяет заключить, что

- (i) при любом σ укороченная схема является схемой первого порядка аппроксимации;

(ii) ни при каком значении σ второй порядок не достигается.

Поэтому в дальнейшем будем называть эту схему просто схемой первого порядка, или схемой 1.

Перейдем к полной схеме. Подставляя (2.15) и (2.16) в (2.12), найдем, что

$$2R \approx \tau(ak_x^2 + bk_y^2) - \frac{\tau^2}{2}\theta(a^2k_x^4 + b^2k_y^4) - \\ - 2\theta \left[\left(\frac{ak_x^2\tau}{2} - \theta \frac{a^2k_x^4\tau^2}{4} \right) \left(\frac{bk_y^2\tau}{2} - \sigma \frac{b^2k_y^4\tau^2}{4} \right) + \left(\frac{bk_y^2\tau}{2} - \theta \frac{b^2k_y^4\tau^2}{4} \right) \left(\frac{ak_x^2\tau}{2} - \sigma \frac{a^2k_x^4\tau^2}{4} \right) \right].$$

Оставляя лишь члены порядка τ и τ^2 , получим

$$2R \approx \tau(ak_x^2 + bk_y^2) - \frac{\tau^2}{2}\theta(a^2k_x^4 + b^2k_y^4) - \theta ak_x^2 bk_y^2 \tau^2 = \\ = \tau(ak_x^2 + bk_y^2) - \tau^2 \frac{\theta}{2}(ak_x^2 + bk_y^2)^2.$$

То есть,

$$\lambda = 1 - (ak_x^2 + bk_y^2)\tau + \frac{\theta}{2}(ak_x^2 + bk_y^2)^2 \tau^2 + \dots \quad (2.18)$$

Из сравнения (2.18) с (2.14) следует, что

- (i) полная схема реализует второй порядок аппроксимации лишь при $\theta = 1$;
- (ii) параметр σ не влияет на порядок аппроксимации.

Таким образом, далее эта схема будет рассматриваться лишь при $\theta = 1$ и называться схемой 2.

Перейдем к исследованию устойчивости. Из (2.10) следует, что необходимым условием устойчивости является выполнение неравенства

$$0 \leq R \leq 1. \quad (2.19)$$

В дальнейшем под устойчивостью будет пониматься безусловная устойчивость, т.е. устойчивость при всех значениях q_x и q_y .

Начнем со схемы первого порядка (схемы 1). Поскольку $0 \leq R_x^\sigma, R_y^\sigma \leq 1/\sigma$, то $0 \leq R \leq 2/\sigma$ и, следовательно, для устойчивости этой схемы необходимо, чтобы

$$\sigma \geq 2 \quad (2.20)$$

(т.е. «промежуточный» слой должен располагаться не ниже верхнего).

Для схемы 2, с учетом выбора $\theta = 1$,

$$R = R_x + R_y - (R_x R_y^\sigma + R_y R_x^\sigma), \quad (2.21)$$

где

$$R_x = R_x^1 = \xi / (1 + \xi), \quad R_y = R_y^1 = \eta / (1 + \eta). \quad (2.22)$$

Так как речь идет о безусловной устойчивости, то неравенство (2.19) должно выполняться при всех q_x, q_y и, в частности, при $q_x = q_y = +\infty$. Для

этих предельных значений $\xi, \eta = +\infty$, что дает $R_x = R_y = 1$ и $R_x^\sigma = R_y^\sigma = 1/\sigma$. Таким образом, $R = 2 - 2/\sigma$. Следовательно, для выполнения (2.19) необходимо, чтобы $1 \leq \sigma \leq 2$.

Справедлива следующая

Теорема 1.

Для всех $\sigma \in [1, 2]$ необходимое условие устойчивости схемы 2 выполнено.

Доказательство.

Очевидно, что

$$0 \leq R_x, R_y \leq 1. \quad (2.23)$$

Поэтому

$$R = R_x(1 - R_y) + R_y(1 - R_x) \geq 0. \quad (2.24)$$

Для доказательства неравенства $R \leq 1$ введем

$$Q = R_x + R_y - R_x R_y. \quad (2.25)$$

Разность $Q - R$ можно представить в виде

$$Q - R = \frac{1}{2} R_x R_y \frac{1 - (\sigma - 1) R_y}{1 + (\sigma - 1) R_y} + \frac{1}{2} R_y R_x \frac{1 - (\sigma - 1) R_x}{1 + (\sigma - 1) R_x}. \quad (2.26)$$

Следовательно, при $1 \leq \sigma \leq 2$, т.е. при $0 \leq \sigma - 1 \leq 1$, обе дроби в (2.26) неотрицательны в силу (2.23). Поэтому $R \leq Q$. Но $1 - Q = (1 - R_x)(1 - R_y) \geq 0$, что дает $Q \leq 1$, а, значит и искомую оценку $R \leq 1$.

§3. Монотонность (положительность)

Одним из важных свойств разностной схемы является ее монотонность. Впрочем, это понятие применимо лишь к одномерным задачам. В многомерном случае речь идет о положительности. Схема называется положительной, если из неотрицательности всех $u_{m,k}^n$ следует неотрицательность $u_{m,k}^{n+1}$.

Начнем с анализа схемы 1 и рассмотрим задачу Коши на всей плоскости. Ясно, что для доказательства положительности схемы достаточно проверить положительность для начальных данных вида

$$u_{m,k}^n = \delta_{m,k} = \begin{cases} 1, & m = k = 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (3.1)$$

Так как при этих начальных данных

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m+1/2,k} &= 0 \quad \text{при} \quad k \neq 0, \\ \tilde{V}_{m,k+1/2} &= 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

то $u_{m,k}^{n+1} = 0$ для всех «лучей», не проходящих через точку $m = k = 0$. Поэтому остается проверить положительность лишь величин $u_{0,k}^{n+1}$ и $u_{m,0}^{n+1}$.

Рассмотрим $\tilde{U}$. Поскольку $U_{m+1/2,k}^n = a(P_{m+1,k} - P_{m,k})/h_x$, то $\tilde{U}_{m+1/2,0}$ удовлетворяет разностному уравнению (см. (1.11))

$$\tilde{U}_{m+1/2,0} - \frac{\tau}{2} q_x \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,0} = \begin{cases} 0, & m \notin \{-1, 0\}, \\ -a/h_x, & m = 0, \\ a/h_x, & m = -1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Так как при $m < -1$ и $m > 0$ это уравнение является однородным

$$-\frac{\sigma}{2} q_x \tilde{U}_{m-1/2,0} + (1 + \sigma q_x) \tilde{U}_{m+1/2,0} - \frac{\sigma}{2} q_x \tilde{U}_{m+3/2,0} = 0, \quad (3.4)$$

то его ограниченное решение имеет вид

$$\tilde{U}_{m+1/2,0} = \begin{cases} A_x \mu_x^{m+1}, & m \leq -1, \\ B_x \left(\frac{1}{\mu_x} \right)^m, & m \geq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь $\mu_x = 1 + (1 + \sqrt{1 + 2\sigma q_x})/(\sigma q_x) > 1$ — корень характеристического уравнения

$$-\frac{\sigma}{2} q_x \mu_x^2 + (1 + \sigma q_x) \mu_x - \frac{\sigma}{2} q_x = 0. \quad (3.6)$$

Константы A_x и B_x определяются из двух неоднородных уравнений (3.3) для $m = 0$ и $m = -1$.

Согласно (3.5)

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{-3/2,0} &= A_x \mu_x^{-1}, & \tilde{U}_{-1/2,0} &= A_x, \\ \tilde{U}_{1/2,0} &= B_x, & \tilde{U}_{3/2,0} &= B_x \mu_x^{-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставив (3.7) в (3.3), получим

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma}{2} q_x A_x \mu_x^{-1} + (1 + \sigma q_x) A_x - \frac{\sigma}{2} q_x B_x &= \frac{a}{h_x}, \\ -\frac{\sigma}{2} q_x A_x + (1 + \sigma q_x) B_x - \frac{\sigma}{2} q_x B_x \mu_x^{-1} &= -\frac{a}{h_x}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что $B_x = A_x$ и

$$A_x = \frac{2a}{h_x} (1 + 2\sigma q_x + \sqrt{1 + 2\sigma q_x})^{-1}. \quad (3.9)$$

Заметим, что обе ветви последовательности $\tilde{U}_{m+1/2,0}$ — возрастающие, т.е. $\Delta_x \tilde{U}_{m+1/2,0} > 0$. Но поскольку $\tilde{V}_{m,\pm 1/2} = 0$ при $m \neq 0$, то вне точки $(0,0)$

$$u_{m,0}^{n+1} = \kappa_x \Delta_x \tilde{U}_{m,0} + \kappa_y \Delta_y \tilde{V}_{m,0} > 0. \quad (3.10)$$

Аналогичные формулы для $\tilde{V}_{0,k+1/2}$ имеют вид:

$$\tilde{V}_{0,k+1/2} = \begin{cases} A_y \mu_y^{k+1}, & k \leq -1, \\ B_y \left(\frac{1}{\mu_y} \right)^k, & k \geq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

$$A_y = \frac{2b}{h_y} \left(1 + 2\sigma q_y + \sqrt{1 + 2\sigma q_y} \right)^{-1}; \quad B_y = -A_y; \quad (3.12)$$

$$u_{0,k}^{n+1} = \kappa_x \Delta_x \tilde{U}_{0,k} + \kappa_y \Delta_y \tilde{V}_{0,k} > 0. \quad (3.13)$$

Осталось проверить положительность $u_{0,0}^{n+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} u_{0,0}^{n+1} - 1 &= \kappa_x \left(\tilde{U}_{1/2,0} - \tilde{U}_{-1/2,0} \right) + \kappa_y \left(\tilde{V}_{0,1/2} - \tilde{V}_{0,-1/2} \right) = \\ &= \kappa_x (B_x - A_x) + \kappa_y (B_y - A_y) = \\ &= -2(\kappa_x A_x + \kappa_y A_y). \end{aligned}$$

Таким образом, условие положительности эквивалентно неравенству

$$2(\kappa_x A_x + \kappa_y A_y) \leq 1. \quad (3.14)$$

Подставляя явный вид A_x, A_y в (3.14), получим

$$\frac{2\sigma q_x}{1 + 2\sigma q_x + \sqrt{1 + 2\sigma q_x}} + \frac{2\sigma q_y}{1 + 2\sigma q_y + \sqrt{1 + 2\sigma q_y}} \leq \frac{\sigma}{2}. \quad (3.15)$$

Несложные выкладки дают более удобную форму этого условия:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\sigma q_x}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sigma q_y}} \geq \frac{4 - \sigma}{2}. \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что при $\sigma \geq 4$ схема положительна при любых q_x, q_y .

В частном случае $q_x = q_y = q$ получаем простое условие положительности (для $\sigma < 4$)

$$q \leq \frac{8 - \sigma}{2(4 - \sigma)^2}. \quad (3.17)$$

Что касается схемы второго порядка (схема 2), то вопрос об ее монотонности может быть решен аналогичным образом. Однако интуитивно ответ и так ясен: за повышение порядка аппроксимации приходится расплачиваться отсутствием положительности — полная аналогия с теоремой Годунова [5] о монотонности схем второго порядка для решения уравнения переноса $u_t + au_x = 0$. И действительно, непосредственная проверка схемы 2 (т.е. вычисление одного шага с δ -образными начальными данными) для различных значений q_x, q_y и σ подтвердила ее неположительность.

Этот факт, впрочем, не препятствует использованию схемы. Просто следует иметь в виду, что расчет сингулярных решений требует особого внимания и все зависит от того, какой результат более предпочтителен: визуально гладкий или более точный. Стандартный способ «улучшения»

результата состоит в той или иной процедуре сглаживания — только для визуализации.

§4. Трехмерный случай (декартовы координаты)

Трехмерный аналог (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} a \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} b \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} c \frac{\partial P}{\partial z}, \quad a, b, c > 0. \quad (4.1)$$

Соответственно теперь $G: \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, 0 \leq z \leq Z\}$, а $h_z = Z/L$.

Уравнение (1.3) переходит в

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (4.2)$$

где $W = c \frac{\partial P}{\partial z}$. Потоки U , V и W отнесены к x -полуцелым, y -полуцелым и

z -полуцелым точкам: $U_{m+1/2,k,l}$, $V_{m,k+1/2,l}$ и $W_{m,k,l+1/2}$. В соответствии с (4.2) дивергентное замыкание (1.4) имеет вид

$$P_{m,k,l}^{n+1} = P_{m,k,l}^n + \kappa_x \Delta_x U_{m,k,l} + \kappa_y \Delta_y V_{m,k,l} + \kappa_z \Delta_z W_{m,k,l}. \quad (4.3)$$

Здесь, как обычно, $\Delta_z W_{m,k,l} = W_{m,k,l+1/2} - W_{m,k,l-1/2}$, а $\kappa_z = \tau/h_z$.

Первый этап схемы 1 — решение независимых краевых задач для разностных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m+1/2,k,l} - U_{m+1/2,k,l}^n &= \frac{\sigma}{2} q_x \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,k,l}, \\ \tilde{V}_{m,k+1/2,l} - V_{m,k+1/2,l}^n &= \frac{\sigma}{2} q_y \Delta_{yy} \tilde{V}_{m,k+1/2,l}, \\ \tilde{W}_{m,k,l+1/2} - W_{m,k,l+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} q_z \Delta_{zz} \tilde{W}_{m,k,l+1/2}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $W_{m,k,l+1/2}^n = c(P_{m,k,l+1}^n - P_{m,k,l}^n)/h_z$, $q_z = c\tau/h_z^2$, а

$$\Delta_{zz} W_{m,k,l+1/2} = W_{m,k,l+3/2} - 2W_{m,k,l+1/2} + W_{m,k,l-1/2}.$$

Второй этап — дивергентное замыкание по $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, $\tilde{W}$.

Схема 2 состоит из тех же этапов, что и в двумерном случае. Первый этап — определение $\tilde{U}_{m+1/2,k,l}$, $\tilde{V}_{m,k+1/2,l}$, $\tilde{W}_{m,k,l+1/2}$ из одномерных разностных уравнений (4.4).

На втором этапе уточненные значения U , V , W больших величин отыскиваются путем решения краевых разностных задач, аппроксимирующие смешанные задачи для системы дифференциальных уравнений вида (ср. с (1.5)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right), \\
\frac{\partial V}{\partial t} &= b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right), \\
\frac{\partial W}{\partial t} &= c \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Соответствующим аналогом (1.12) теперь является система

$$\begin{aligned}
U_{m+1/2,k,l} - U_{m+1/2,k,l}^n &= \frac{\sigma}{2} q_x \Delta_{xx} U_{m+1/2,k,l} + \frac{1}{2} q_{xy} \Delta_{xy} \tilde{V}_{m+1/2,k,l} + \frac{1}{2} q_{xz} \Delta_{xz} \tilde{W}_{m+1/2,k,l}; \\
V_{m,k+1/2,l} - V_{m,k+1/2,l}^n &= \frac{\sigma}{2} q_y \Delta_{yy} V_{m,k+1/2,l} + \frac{1}{2} q_{yx} \Delta_{yx} \tilde{U}_{m,k+1/2,l} + \frac{1}{2} q_{yz} \Delta_{yz} \tilde{W}_{m,k+1/2,l}; \\
W_{m,k,l+1/2} - W_{m,k,l+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} q_z \Delta_{zz} W_{m,k,l+1/2} + \frac{1}{2} q_{zx} \Delta_{zx} \tilde{U}_{m,k,l+1/2} + \frac{1}{2} q_{zy} \Delta_{zy} \tilde{V}_{m,k,l+1/2}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь Δ_{xy} , Δ_{xz} , Δ_{yx} , Δ_{yz} , Δ_{zx} и Δ_{zy} — смешанные разности

$$\begin{aligned}
\Delta_{xy} \tilde{V}_{m+1/2,k,l} &= \tilde{V}_{m+1,k+1/2,l} - \tilde{V}_{m+1,k-1/2,l} - \tilde{V}_{m,k+1/2,l} + \tilde{V}_{m,k-1/2,l}, \\
\Delta_{xz} \tilde{W}_{m+1/2,k,l} &= \tilde{W}_{m+1,k,l+1/2} - \tilde{W}_{m+1,k,l-1/2} - \tilde{W}_{m,k,l+1/2} + \tilde{W}_{m,k,l-1/2}, \\
\Delta_{yx} \tilde{U}_{m,k+1/2,l} &= \tilde{U}_{m+1/2,k+1,l} - \tilde{U}_{m-1/2,k+1,l} - \tilde{U}_{m+1/2,k,l} + \tilde{U}_{m-1/2,k,l}, \\
\Delta_{yz} \tilde{W}_{m,k+1/2,l} &= \tilde{W}_{m,k+1,l+1/2} - \tilde{W}_{m,k+1,l-1/2} - \tilde{W}_{m,k,l+1/2} + \tilde{W}_{m,k,l-1/2}, \\
\Delta_{zx} \tilde{U}_{m,k,l+1/2} &= \tilde{U}_{m+1/2,k,l+1} - \tilde{U}_{m-1/2,k,l+1} - \tilde{U}_{m+1/2,k,l} + \tilde{U}_{m-1/2,k,l}, \\
\Delta_{zy} \tilde{V}_{m,k,l+1/2} &= \tilde{V}_{m,k+1/2,l+1} - \tilde{V}_{m,k-1/2,l+1} - \tilde{V}_{m,k+1/2,l} + \tilde{V}_{m,k-1/2,l}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Подчеркнем, что на этом этапе, аналогично двумерному случаю, $\theta = 1$.

Повторяя все вычисления двумерного случая применительно к $P_{m,k,l}^n = e^{i(m\alpha + k\beta + l\gamma)} = \mathcal{E}$, легко убедиться в том, что снова $\lambda = 1 - 2R$, но теперь для схемы 1

$$R = R_x^\sigma + R_y^\sigma + R_z^\sigma, \tag{4.8}$$

Здесь R_x^σ , R_y^σ — см. (2.8) – (2.9), а $R_z^\sigma = \zeta / (1 + \sigma\zeta)$, где $\zeta = q_z(1 - \cos\gamma)$.

Для схемы 2 выражение для R несколько более сложное, чем (2.21). А именно:

$$R = R_x + R_y + R_z - (R_x^\sigma R_y + R_x^\sigma R_z + R_y^\sigma R_x + R_y^\sigma R_z + R_z^\sigma R_x + R_z^\sigma R_y), \tag{4.9}$$

где $R_z = R_z^1 = \zeta / (1 + \xi)\zeta$.

Непосредственной проверкой, повторяя все преобразования двумерного случая, несложно убедиться в том, что и для трехмерного уравнения теплопроводности схема 1 является схемой первого порядка при любом σ , а схема 2 имеет второй порядок аппроксимации.

Осталось получить условия устойчивости.

Схема 1:

Поскольку, как и в двумерном случае, здесь $0 \leq R_x^\sigma, R_y^\sigma, R_z^\sigma \leq 1/\sigma$, то $0 \leq R \leq 3/\sigma$ и, следовательно, для устойчивости этой схемы необходимо, чтобы

$$\sigma \geq 3. \quad (4.10)$$

Этот результат выглядит парадоксально, т.к. означает, что «промежуточный» слой должен располагаться выше верхнего, но это свидетельствует лишь об условности чисто геометрических интерпретаций.

Перейдём к схеме 2, где ситуация сложнее. Возьмем предельный набор $q_x = q_y = q_z = +\infty$. Тогда $R_x = R_y = R_z = 1$, а $R_x^\sigma = R_y^\sigma = R_z^\sigma = 1/\sigma$. Поэтому $R = 3 - 6/\sigma$ (см. (4.9)) и неравенство $0 \leq R \leq 1$ порождает ограничение

$$2 \leq \sigma \leq 3. \quad (4.11)$$

С другой стороны, полагая, например, $q_x = q_y = +\infty$, $q_z = 0$, получим $R_x = R_y = 1$, $R_x^\sigma = R_y^\sigma = 1/\sigma$, $R_z = R_z^\sigma = 0$. Тогда $R = 2 - 2/\sigma$, что приводит к неравенству

$$1 \leq \sigma \leq 2. \quad (4.12)$$

Сопоставляя (4.11) и (4.12), получаем, что единственным значением параметра схемы может быть лишь $\sigma = 2$. Поэтому в дальнейшем под трёхмерной схемой 2 будет пониматься только схема с $\sigma = 2$.

Используя это конкретное значение, представим R в двух эквивалентных формах

$$R = R_x + R_y + R_z - R_x \left(\frac{R_y}{1+R_y} + \frac{R_z}{1+R_z} \right) - R_y \left(\frac{R_x}{1+R_x} + \frac{R_z}{1+R_z} \right) - R_z \left(\frac{R_y}{1+R_y} + \frac{R_x}{1+R_x} \right); \quad (4.13)$$

$$R = \frac{1}{2} R_x \left(\frac{1-R_y}{1+R_y} + \frac{1-R_z}{1+R_z} \right) + \frac{1}{2} R_y \left(\frac{1-R_x}{1+R_x} + \frac{1-R_z}{1+R_z} \right) + \frac{1}{2} R_z \left(\frac{1-R_y}{1+R_y} + \frac{1-R_x}{1+R_x} \right). \quad (4.14)$$

Теорема 2.

Для трёхмерной схемы 2 необходимое условие устойчивости выполнено.

Доказательство.

Из представления R в виде (4.14) следует, что $R \geq 0$. Что касается неравенства $R \leq 1$, то его проверка повторяет соответствующее доказательство для двумерной схемы 2. Введем теперь

$$Q = R_x + R_y + R_z - R_x R_y - R_x R_z - R_z R_y. \quad (4.15)$$

Из очевидного неравенства $(1-R_x)(1-R_y)(1-R_z) \geq 0$, т.е. из неравенства $1 - Q - R_x R_y R_z \geq 0$ следует, что $Q \leq 1$. Осталось доказать, что $R \leq Q$. Взяв R в форме (4.13), получим

$$Q-R = R_x \left(\frac{R_y}{1+R_y} + \frac{R_z}{1+R_z} - \frac{R_y}{2} - \frac{R_z}{2} \right) + R_y \left(\frac{R_x}{1+R_x} + \frac{R_z}{1+R_z} - \frac{R_x}{2} - \frac{R_z}{2} \right) + \\ + R_z \left(\frac{R_x}{1+R_x} + \frac{R_y}{1+R_y} - \frac{R_x}{2} - \frac{R_y}{2} \right). \quad (4.16)$$

То есть

$$Q-R = R_x \left(R_y \frac{1-R_y}{1+R_y} + R_z \frac{1-R_z}{1+R_z} \right) + R_y \left(R_x \frac{1-R_x}{1+R_x} + R_z \frac{1-R_z}{1+R_z} \right) + \\ + R_z \left(R_x \frac{1-R_x}{1+R_x} + R_y \frac{1-R_y}{1+R_y} \right). \quad (4.17)$$

Таким образом, $Q-R \geq 0$, что и дает $R \leq 1$.

Прежде чем переходить к уравнению с переменными коэффициентами, рассмотрим — из чистого любопытства — случай высокой размерности: $D > 3$.

Обе схемы очевидным образом реализуются для уравнений любой размерности. Однако при $D > 3$ схема 1 безусловно устойчива лишь при $\sigma \geq D$, в то время, как схема 2 ни при каких значениях σ не является безусловно устойчивой. Этот факт доказывается тем же способом, с помощью которого была установлена единственность параметра σ ($\sigma = 2$) для трехмерного случая.

Коснемся вопроса положительности трехмерной схемы 1. Повторяя знакомые выкладки, получим условие положительности

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\sigma q_x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2\sigma q_y}} + \frac{1}{\sqrt{1+2\sigma q_z}} \geq \frac{6-\sigma}{2}. \quad (4.18)$$

Следовательно, схема 1 является положительной лишь при $\sigma \geq 6$.

Положив, как и в двумерном случае $q_x = q_y = q_z = q$ получим условие положительности (для $\sigma < 6$) в виде

$$q \leq \frac{12-\sigma}{2(6-\sigma)^2}. \quad (4.19)$$

§5. Переменные коэффициенты. Неоднородность. Система уравнений.

Представленный алгоритм естественным образом обобщается и на более общие случаи. Для примера рассмотрим двумерную задачу

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} a(x, y) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \frac{\partial P}{\partial y} + J(x, y, t). \quad (5.1)$$

Снова введём $U = a \frac{\partial P}{\partial x}$, $V = b \frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + J(x, y, t). \quad (5.2)$$

Для U и V имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + a \frac{\partial J}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) + b \frac{\partial J}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В соответствии со структурой алгоритма, в схеме 1 отыскиваются U и V из «укороченной» системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= b \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

а для схемы 2 используется (5.3). Дивергентный пересчет теперь соответствует (5.2), т.е. имеет вид

$$P_{m,k}^{n+1} = P_{m,k}^n + \kappa_x \Delta_x U_{m,k} + \kappa_y \Delta_y V_{m,k} + \tau J_{m,k}. \quad (5.5)$$

Для схемы 1 слагаемое J можно вычислять при любом t (на нижнем слое, на верхнем, на промежуточном). Для схемы 2 обязательно $J_{m,k} = J_{m,k}^{n+1/2}$.

Зависимость коэффициентов a и b также и от t принципиально не меняет алгоритм. Просто в (5.3) добавляются слагаемые вида

$$a_t \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + J \right), \quad b_t \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + J \right). \quad (5.6)$$

Соответствующим образом модифицируется и разностные уравнения. Трехмерный случай не вносит принципиальных изменений.

Рассмотрим, наконец, важный случай δ -образного источника (стока). Пусть в (5.1) $J = Q\delta(x - x_0, y - y_0)$, где Q — интенсивность источника. Для простоты ограничимся случаем $a = b = 1$.

Пусть точка (x_0, y_0) является центром «источниковой» ячейки, Рис. 3.

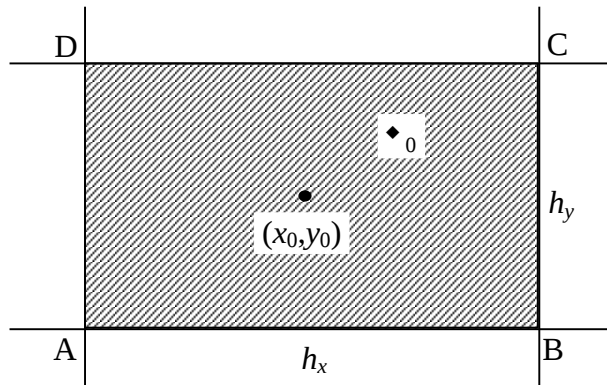


Рисунок 3.

Тогда речь идет о многосвязной области с вырезанным прямоугольником ω_0 и остается лишь задать граничные условия Неймана на всех сторонах этой ячейки. Пренебрегая угловой зависимостью P в окрестности (x_0, y_0) , т.е. считая $P = P(r)$, $r^2 = x^2 + y^2$, получаем:

$$U_{BC} = -\frac{Q}{\pi h_y} \operatorname{arctg} \frac{h_y}{h_x}; \quad U_{AD} = -U_{BC};$$

$$U_{DC} = -\frac{Q}{\pi h_x} \operatorname{arctg} \frac{h_x}{h_y}; \quad U_{AB} = -U_{DC}.$$

Для квадратной ячейки ($h_x = h_y$):

$$U_{BC} = U_{DC} = -\frac{Q}{4}; \quad U_{AB} = U_{AD} = \frac{Q}{4}.$$

Вернемся к постоянным коэффициентам и рассмотрим случай системы системы уравнений. Пусть в (1.1) a, b — положительные симметричные матрицы, не обязательно коммутирующие.

В силу линейности уравнения и постоянства коэффициентов векторная сеточная функция на нижнем слое

$$\mathbf{P}_{m,k}^n = e^{i(m\alpha + k\beta)} \mathbf{P}_* = \mathcal{E} \mathbf{P}_* \quad (5.7)$$

порождает аналогичные сеточные функции $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ $\left(\mathbf{U} = a \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x}, \quad \mathbf{V} = a \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \right)$. А

именно,

$$\mathbf{U}_{m+1/2,k}^n = a \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} \mathcal{E} \mathbf{P}_*, \quad \mathbf{V}_{m,k+1/2}^n = b \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y} \mathcal{E} \mathbf{P}_*, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{U}_{m+1/2,k} = \mathcal{E} \mathbf{U}_*, \quad \mathbf{V}_{m,k+1/2} = \mathcal{E} \mathbf{V}_*. \quad (5.9)$$

Векторный аналог (2.7) дает (после сокращения на $\mathcal{E}$)

$$\begin{aligned} \left[E + \sigma a \frac{\tau}{h_x^2} (1 - \cos \alpha) \right] \hat{\mathbf{U}} &= a \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} \hat{\mathbf{P}}, \\ \left[E + \sigma b \frac{\tau}{h_y^2} (1 - \cos \beta) \right] \hat{\mathbf{V}} &= b \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y} \hat{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Здесь E — единичная матрица.

То есть, введя обозначения

$$\xi = a \frac{\tau}{h_x^2} (1 - \cos \alpha), \quad \eta = b \frac{\tau}{h_y^2} (1 - \cos \beta),$$

получим (теперь, в отличие от (2.8), ξ и η — матрицы):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_* &= (E + \sigma \xi)^{-1} a \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} \mathbf{P}_*, \\ \mathbf{V}_* &= (E + \sigma \eta)^{-1} b \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y} \mathbf{P}_*. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Подстановка (5.9) в дивергентное замыкание дает

$$\mathbf{P}_{m,k}^{n+1} = \mathcal{E}\mathbf{P}_* + \frac{\tau}{h_x}(1-e^{i\alpha})\mathcal{E}\mathbf{U}_* + \frac{\tau}{h_y}(1-e^{i\beta})\mathcal{E}\mathbf{V}_*.$$

Выразив $\mathbf{U}_*$ и $\mathbf{V}_*$ через $\mathbf{P}_*$ согласно (5.11) и заменив $\mathcal{E}\mathbf{P}_*$ на $\mathbf{P}_{m,k}^n$, получим

$$\mathbf{P}_{m,k}^{n+1} = \left[E - 2(E + \sigma\xi)^{-1}\xi - 2(E + \sigma\eta)^{-1}\eta \right] \mathbf{P}_{m,k}^n. \quad (5.12)$$

Используя знакомые обозначения, перепишем (5.12) в виде

$$\mathbf{P}_{m,k}^{n+1} = [E - 2R] \mathbf{P}_{m,k}^n, \quad (5.13)$$

где

$$R = R_x^\sigma + R_y^\sigma, \quad R_x^\sigma = (E + \sigma\xi)^{-1}\xi, \quad R_y^\sigma = (E + \sigma\eta)^{-1}\eta. \quad (5.14)$$

Для устойчивости схемы необходимо, чтобы

$$\|E - 2R\| \leq 1, \quad (5.15)$$

т.е., учитывая положительность и симметричность матриц R_x^σ и R_y^σ

$$\|R\| \leq 1. \quad (5.16)$$

Имеем

$$R_x^\sigma = \frac{1}{\sigma}(E + \sigma\xi)^{-1}\sigma\xi, \quad R_y^\sigma = \frac{1}{\sigma}(E + \sigma\eta)^{-1}\sigma\eta. \quad (5.17)$$

Но для любой положительной симметричной матрицы A

$$\|(E - A)^{-1}A\| \leq 1.$$

Поэтому $\|R_x^\sigma\| \leq 1/\sigma$, $\|R_y^\sigma\| \leq 1/\sigma$. Следовательно, при $\sigma \geq 2$ $\|R\| \leq 1$, что и требовалось установить.

Аналогичный анализ схемы 2 и обеих трехмерных схем дает те же необходимые условия устойчивости, что и для скалярных схем.

§6. Полярная система координат.

Уравнение теплопроводности в полярной системе координат имеет вид (ограничимся случаем изотопной теплопроводности)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} kr \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} k \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \quad (6.1)$$

где коэффициент теплопроводности $k = k(r, \varphi)$.

Введем потоки

$$U = kr \frac{\partial P}{\partial r}, \quad V = \frac{k}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}. \quad (6.2)$$

Тогда аналогом (1.3) и (1.5) являются уравнения

$$r \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = kr \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right). \quad (6.5)$$

«Усеченные» уравнения (6.4) – (6.5), используемые для расчета предварительных значений потоков, имеют вид (ср. с (1.6)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= kr \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{k}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Введя естественным путем разностную сетку (r_m, φ_k) , получим следующую систему уравнений относительно $\tilde{U}_{m+1/2,k}, \tilde{V}_{m+1/2,k}$ (ср. с (1.11)):

Этап 1

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{\sigma}{2} r_{m+1/2} q_r k_{m+1/2,k} \Delta_{rr} \tilde{U}_{m+1/2,k}, \\ \tilde{V}_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} \frac{1}{r_m^2} q_\varphi k_{m,k+1/2} \Delta_{\varphi\varphi} \tilde{V}_{m,k+1/2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь $q_r = \tau / h_r^2$, $q_\varphi = \tau / h_\varphi^2$,

$$\Delta_{rr} \tilde{U}_{m+1/2,k} = \frac{1}{r_{m+1}} \Delta_r \tilde{U}_{m+1,k} - \frac{1}{r_m} \Delta_r \tilde{U}_{m,k}, \quad (6.8)$$

$$\Delta_{\varphi\varphi} \tilde{V}_{m,k+1/2} = \tilde{V}_{m,k+3/2} - 2\tilde{V}_{m,k+1/2} + \tilde{V}_{m,k-1/2},$$

$$\Delta_r \tilde{U}_{m,k} = \tilde{U}_{m+1/2,k} - \tilde{U}_{m-1/2,k},$$

$$U_{m+1/2,k}^n = k_{m+1/2,k} r_{m+1/2} \frac{\Delta_r P_{m+1/2,k}^n}{h_r}, \quad (6.9)$$

$$V_{m,k+1/2}^n = k_{m,k+1/2} \frac{1}{r_m} \frac{\Delta_\varphi P_{m,k+1/2}^n}{h_\varphi},$$

$$\Delta_\varphi P_{m,k+1/2}^n = P_{m,k+1}^n - P_{m,k}^n.$$

Дивергентное замыкание этого этапа:

$$P_{m,k}^{n+1} = P_{m,k}^n + \frac{1}{r_m} \left(\kappa_r \Delta_r \tilde{U}_{m,k} + \kappa_\varphi \Delta_\varphi \tilde{V}_{m,k} \right); \quad (6.10)$$

$$\kappa_r = \tau / h_r, \quad \kappa_\varphi = \tau / h_\varphi$$

порождает схему первого порядка.

Для реализации схемы второго порядка следует выполнить второй этап — пересчет потоков —, соответствующий уравнениям (6.4) – (6.5).

Этап 2

$$\begin{aligned} U_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{1}{2} r_{m+1/2} k_{m+1/2,k} \left(q_r \Delta_r U_{m+1/2,k} + q_{r\varphi} \Delta_{r\varphi} \tilde{V}_{m+1/2,k} \right), \\ V_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{1}{2} \frac{1}{r_m^2} k_{m,k+1/2} \left(q_\varphi \Delta_\varphi V_{m,k+1/2} + q_{\varphi r} \Delta_{\varphi r} \tilde{U}_{m,k+1/2} \right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь $q_{r\varphi} = q_{\varphi r} = \tau / (h_r h_\varphi)$, а

$$\begin{aligned} \Delta_{r\varphi} \tilde{V}_{m+1/2,k} &= \frac{1}{r_{m+1}} \Delta_\varphi \tilde{V}_{m+1,k} - \frac{1}{r_m} \Delta_\varphi \tilde{V}_{m,k}, \\ \Delta_{\varphi r} \tilde{U}_{m,k+1/2} &= \tilde{U}_{m+1/2,k+1} - \tilde{U}_{m+1/2,k} - \tilde{U}_{m-1/2,k+1} + \tilde{U}_{m-1/2,k}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Наконец, дивергентное замыкание этого этапа:

$$P_{m,k}^{n+1} = P_{m,k}^n + \frac{1}{r_m} \left(\kappa_r \Delta_r U_{m,k} + \kappa_\varphi \Delta_\varphi V_{m,k} \right). \quad (6.13)$$

Алгоритм решения соответствующих трехточечных разностных уравнений — тот же, что для декартовых координат. Для граничных условий Неймана значения потоков замыкают разностную краевую задачу. В случае постановки условий Дирихле (P на границе известно) — например, на границе $r = \text{Const}$ — трансверсальная производная легко вычисляется ($U_r = r P_t - V_\varphi$; P_t , V_φ — известные величины). Поэтому в качестве замыкающего разностного граничного условия можно использовать разностную аппроксимацию этой производной.

Алгоритм решения задачи с точечным источником интенсивности Q , расположенным в начале координат требует выделения «нулевой» ячейки ω_0 радиуса $r = h_r$. Таким образом, задача решается во внешней к ω_0 области. На границе $r = h_r$ задается поток U , определяемый интенсивностью источника: $U|_{r=h_r} = -Q / 2\pi$.

Поскольку данное уравнение — даже при $k = \text{Const}$ — имеет переменные коэффициенты, то анализ устойчивости проводится в рамках принципа замороженных коэффициентов. Для этого просто «заморозим» r , т.е. заменим все значения r_m и $r_{m+1/2}$ на r . Повторяя соответствующие преобразования декартового случая, получим те же выражения для собственного значения оператора перехода:

$$\lambda = 1 - 2(R_r^\sigma + R_\varphi^\sigma), \quad (6.14)$$

где снова

$$R_r^\sigma = \xi / (1 + \sigma \xi), \quad R_\varphi^\sigma = \eta / (1 + \sigma \eta), \quad (6.15)$$

но теперь $\xi = q_r (1 - \cos \alpha)$, а $\eta = q_\varphi (1 - \cos \beta) / r^2$.

Ясно, что $R_r^\sigma \leq 1/\sigma$, $R_\varphi^\sigma \leq 1/\sigma$. Поэтому схема первого порядка безусловно устойчива ($|\lambda| \leq 1$ для любых q_r, q_φ) лишь при $\sigma \geq 2$.

Анализ схемы второго порядка дает результат, аналогичный случаю декартовых координат: схема безусловно устойчива при $1 \leq \sigma \leq 2$.

§7. Верификация и численные эксперименты.

1. Как уже было сказано во Введении, предложенный метод был реализован в двух координатных системах — декартовой (2D и 3D) и полярной (2D). Для всех этих вариантов была проверена (экспериментально) аппроксимация обеих схем. Технологически это осуществлялось стандартным способом: для выбранной в качестве решения неоднородного уравнения $LP = f$ вычислялась аналитически соответствующая правая часть f , после чего задача решалась численно. Степень уменьшения разности $P_h - P$ (в различных нормах) при уменьшении шагов разностной сетки и дает реальный порядок аппроксимации. При этом для схемы 1 уменьшению временного шага τ в N раз соответствовало уменьшение пространственных шагов h в $\sqrt{N}$ раз, а для схемы 2 τ и h уменьшались пропорционально.

Анализ численных результатов для различных областей полностью подтвердил анонсированный порядок аппроксимации как в C -норме, так и в L_2 -норме.

2. Для демонстрации эффективности метода применительно к расчету сингулярных решений были выбраны следующие две задачи:

а) Уравнение теплопроводности (1.1) (для постоянных $a=b$) в квадратной области $X=Y=3000$ с точечным источником и стоком одинаковой интенсивности в точках $(2685,315)$ — источник и $(1485,1485)$ — сток. Начальные данные $P=300$. Граничные условия $\partial_\nu P=0$.

Расчет производился на равномерной сетке 100×100 по схеме 2 с $\sigma=2$, с постоянным шагом τ , соответствующим значению числа Куранта $q_x = q_y = 10$.

На Рис. 4 представлена картина решения после 1200 шагов по времени. Несмотря на сингулярный характер $P(r, \varphi)$ и несоответствие сетки (квадратная) поведению решения в окрестности особенностей, метод демонстрирует хорошую разрешающую способность.

Замечание: поскольку значения P в центрах особых ячеек не участвуют в алгоритме, для "красоты" рисунка они были восстановлены с помощью простой экстраполяции.

б) Уравнение теплопроводности (6.1) (для $k=1$) в круговой области G_R для $R=2$ с источником в центре интенсивности $Q=0.8\pi$. Начальные данные: $P_0(r, \varphi) = -0.4 \ln r$. Граничные условия: $P_r = \cos(\varphi + 10t)$.

Расчет проводился по схеме 1 с $\sigma=2$ на сетке 60 (по r) $\times$ 30 (по φ). Шаг по времени $\tau=0.01$.

На Рис. 5 изображено решение на момент $t=5$. (Здесь, в отличие от предыдущей задачи, значение P в центре не восстанавливалось и поэтому поверхность $P(r, \varphi)$ выглядит срезанной.)

3. Последний пример — решение задачи для (6.1) в двухсвязной области, представляющей собой сектор с вырезом. Граничные условия — $\partial_\nu P = 0$ на всех компонентах границы. Начальные данные моделируют сумму восьми δ -образных функций (см. Рис. 6, где изображены изолинии начального распределения $P_0(r, \varphi)$).

Численное интегрирование проводилось по схеме 1 с $\sigma = 2$ на сетке 120×120 , что соответствует шагам $h_r = 0.0125$ и $h_\varphi = 0.025$. Шаг по времени $\tau = 0.001$.

Ясно, что с течением времени решение должно выглаживаться, что и демонстрирует Рис. 7, на котором изображены изолинии $P(r, \varphi)$ на момент $t = 0.04$.

Представленный в данной работе метод решения уравнения теплопроводности в ортогональной системе координат может использоваться как составной элемент при создании численных алгоритмов решения и более общих задач, таких например, как система уравнений фильтрации или система Навье-Стокса.

Литература

1. Ю. Б. Радвогин. "Экономичные алгоритмы численного решения многомерного уравнения теплопроводности." — ДАН, 2003, т. 388, №3, 295 – 297.
2. Г. И. Марчук. "Методы вычислительной математики." — М., "Наука", 1988.
3. А. А. Самарский, Е. С. Николаев. "Методы решения сеточных уравнений." — М., "Наука", 1978.
4. Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский. "Потоковый вариант метода прогонки." — ЖВМиМФ, 1968, том 8, №3.
5. С. К. Годунов, А. В. Забродин. "Численное решение многомерных задач газовой динамики." — М., "Наука", 1976.

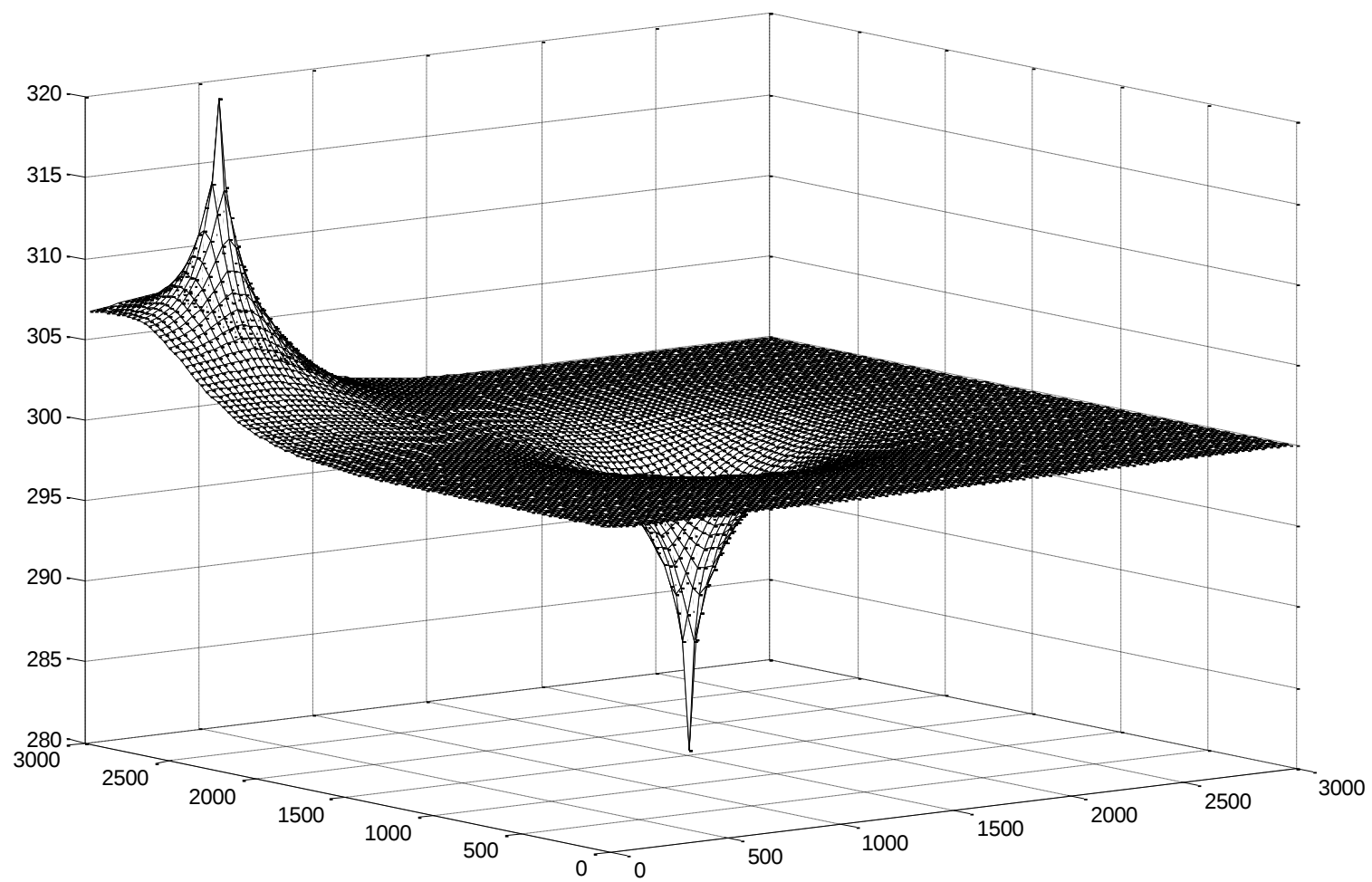


Рисунок 4.

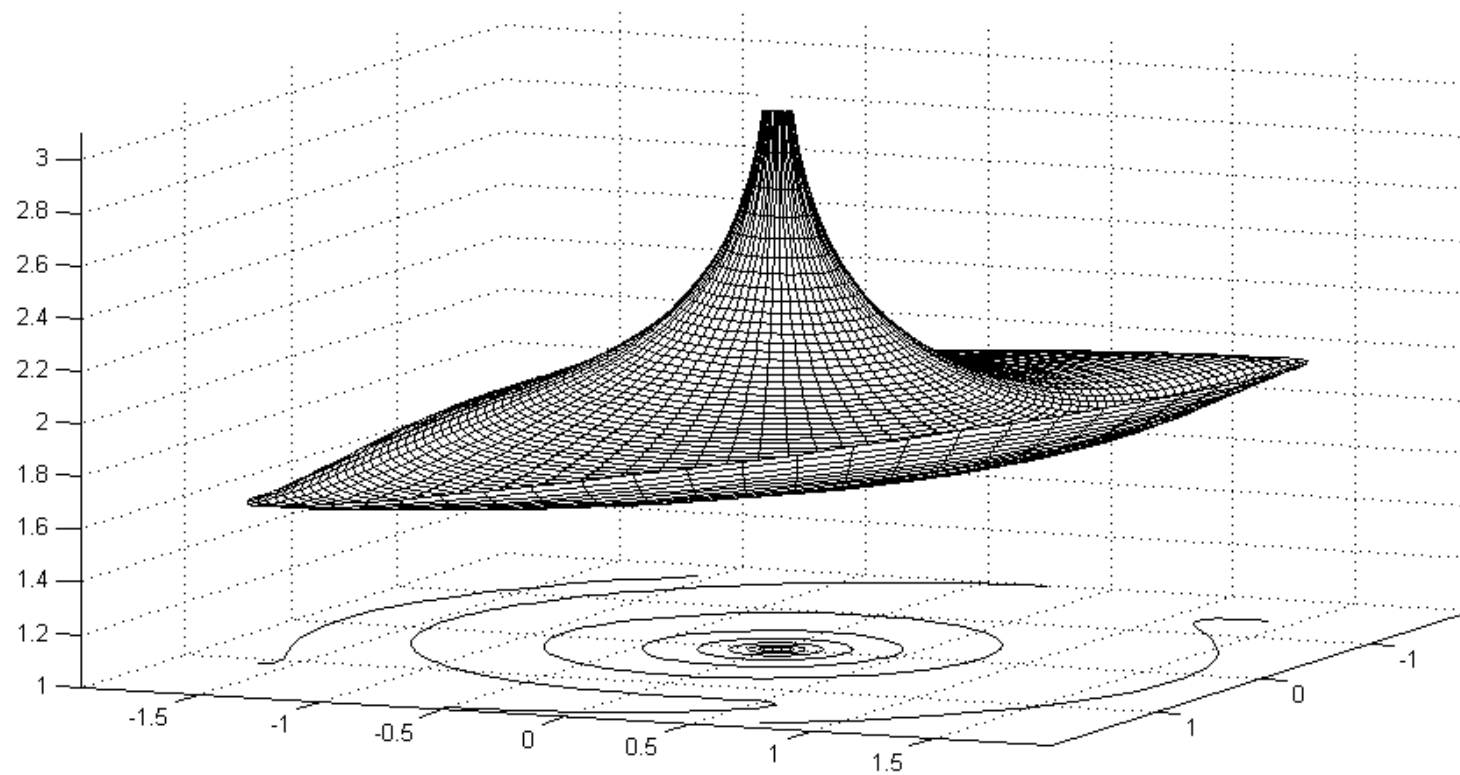


Рисунок 5.

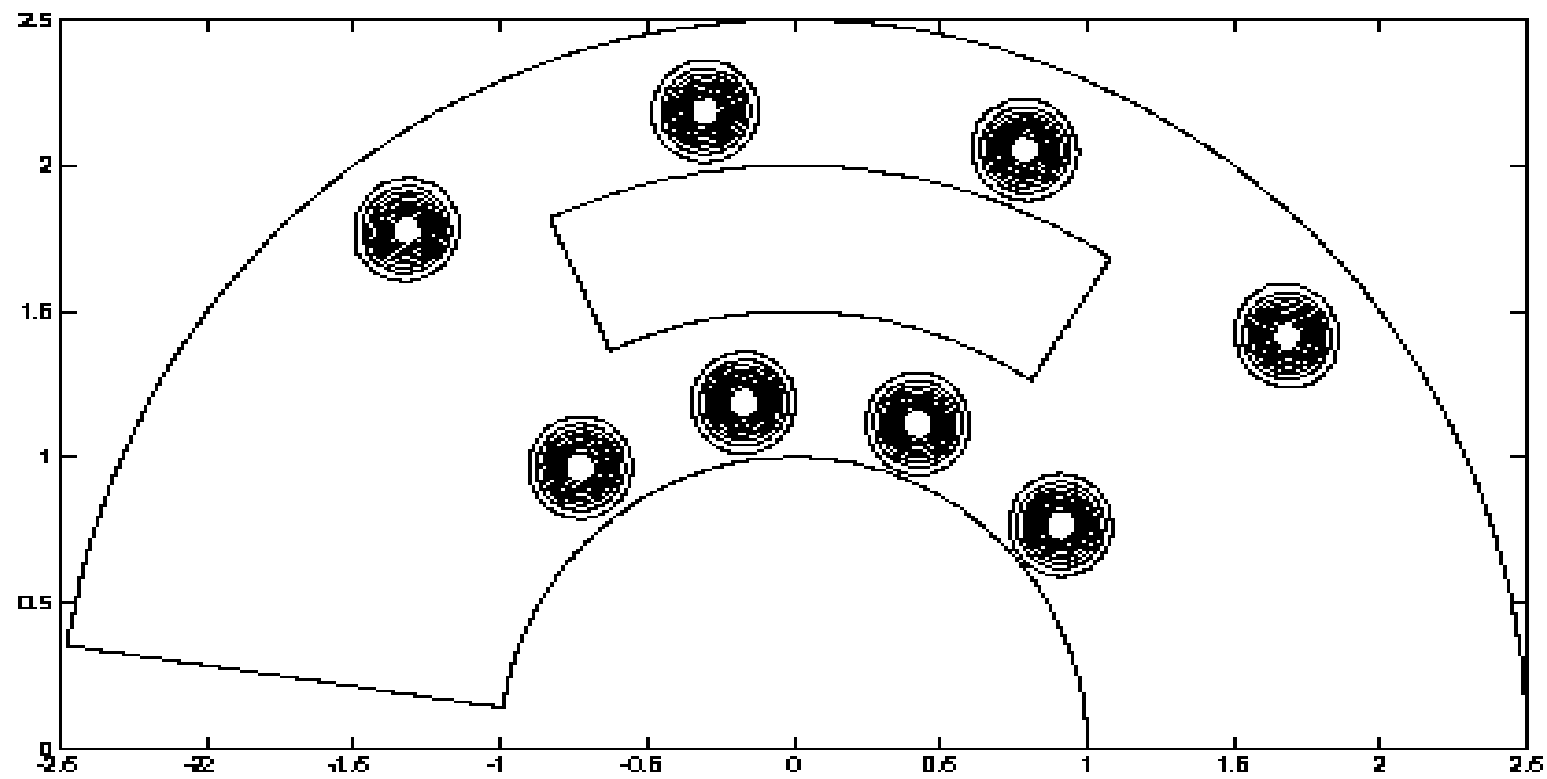


Рисунок 6.

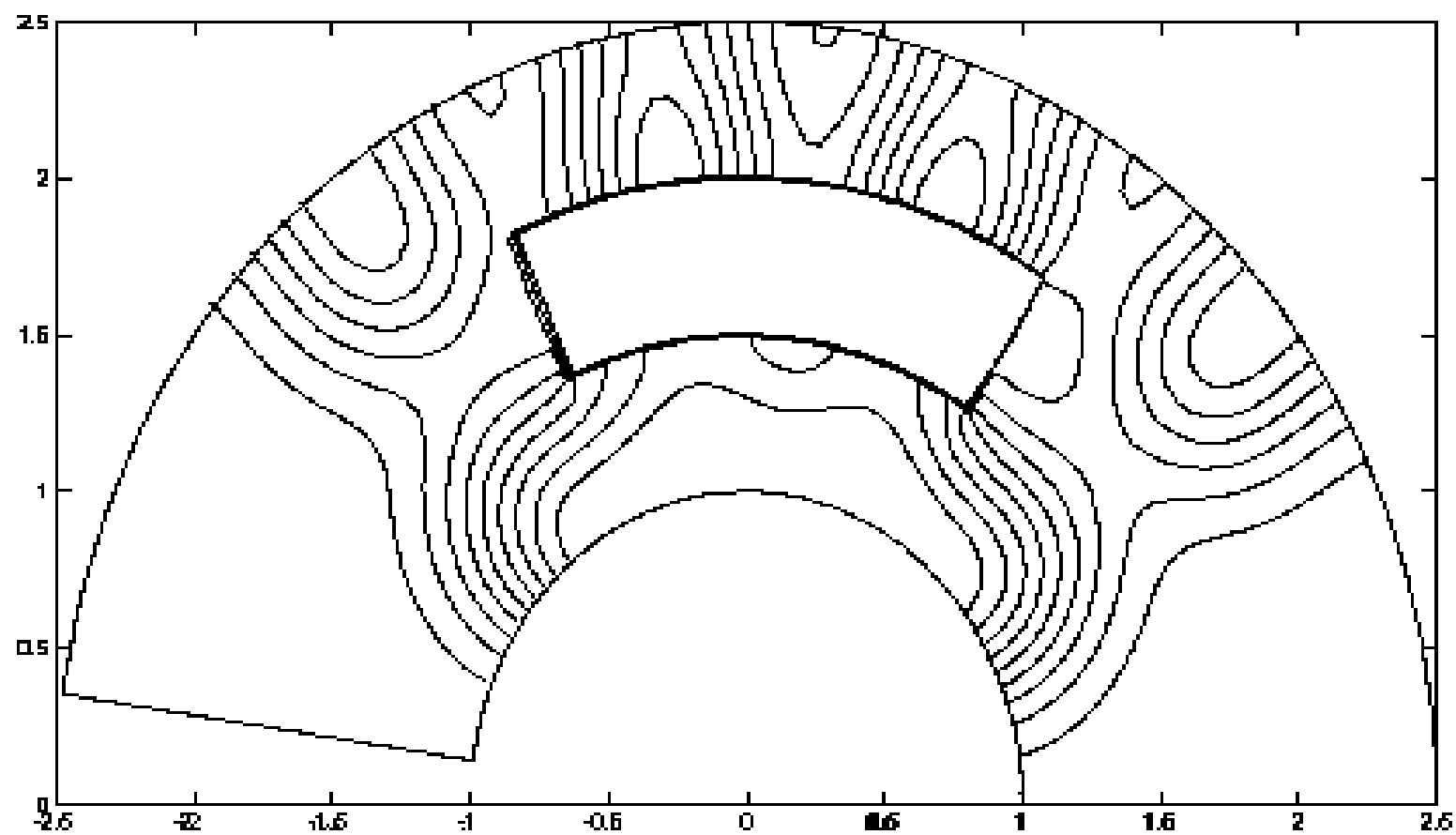


Рисунок 7.