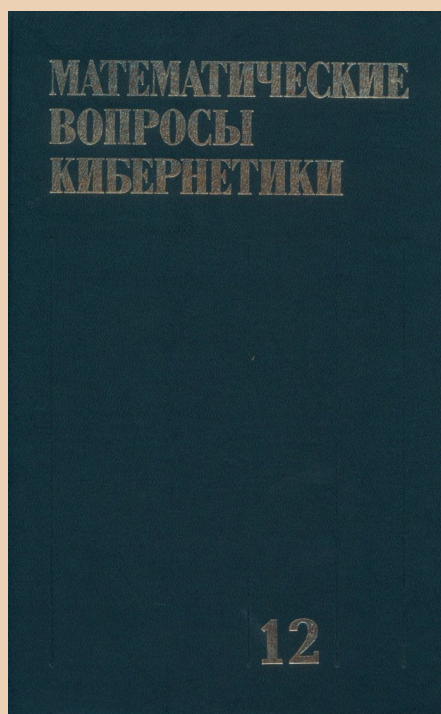




**С. В. Архангельский,
Н. П. Редькин**

**О кодировании
цифровых сигналов**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Архангельский С. В., Редькин Н. П. О кодировании цифровых сигналов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 75–86. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2003-75>

О КОДИРОВАНИИ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

С. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Н. П. РЕДЬКИН

(САМАРА)

(МОСКВА)

Представлены некоторые способы кодирования цифровых сигналов, получаемых из аналоговых при аналого-цифровых преобразованиях. Эти способы учитывают особенности и свойства аналого-цифровых преобразований и рассматриваемых исходных аналоговых сигналов. Показано, что такой учет приводит к существенному сокращению длины кодовых слов.

Введение

Аналоговые сигналы, составляющие некоторый класс непрерывных функций, задаваемых тригонометрическими рядами Фурье, исключительно широко распространены в качестве первичных носителей информации. Такими сигналами являются, например, акустические, в том числе и речевые, сигналы, радиосигналы, видеосигналы, сигналы вибрации и др. Появление и развитие систем цифровой обработки сигналов позволило перейти к представлению аналоговых сигналов в цифровых формах, имеющих очевидные преимущества: высокую помехоустойчивость при передаче и хранении, точность воспроизведения и отсутствие искажений при копировании, огромные возможности функциональных преобразований цифровых сигналов при компьютерной обработке и др.

При использовании цифровых форм представления аналоговых сигналов естественным образом возникают и проблемы, связанные с передачей соответствующей информации по каналам связи; заметим, что передачу информации в данном случае можно рассматривать как в пространстве (по линиям связи), так и во времени (хранение в памяти ЭВМ). Одной из проблем (в некоторых случаях, быть может, даже главной) является «сжатие» информации [11], заключенной в цифровом сигнале, или, другими словами, оптимальное кодирование [12] цифровых сигналов. Под оптимизацией в данном случае подразумевается прежде всего минимизация длины кодовых слов, отвечающих цифровым сигналам; кроме того, кодирование должно удовлетворять и некоторым другим естественным требованиям. Успешное решение указанной проблемы, очевидно, возможно лишь при достаточно полном учете и использовании свойств и особенностей как цифровых сигналов, так и их прообразов — аналоговых сигналов.

В данной работе излагаются некоторые способы кодирования цифровых сигналов с полным амплитудным ограничением. Эти способы учитывают изложенные выше соображения и позволяют получать (при некоторых достаточно естественных соотношениях между параметрами аналого-цифровых преобразователей) коды цифровых сигналов существенно более короткие,

чем при тривиальном, почти очевидном способе кодирования. Полученный результат достигается с использованием принципа локального кодирования О. Б. Лупанова [7], содержательная суть которого применительно к нашему случаю заключается в том, что кодирование цифрового сигнала производится частями, причем каждая часть кодового слова отвечает не всему цифровому сигналу, а только некоторой соответствующей части его.

Аналоговые и цифровые сигналы

С учетом обусловленных практически опытом особенностей и ограничений (они указаны, например, в [1, 2]) в качестве математической модели *аналогового сигнала* берется функция

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{k=0}^{\frac{T}{2}-1} \left(a_{2k} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{T} + a_{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi t}{T} \right), \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{T-1} \in \mathbb{R}$, а T — натуральное четное число *).

Параметр T определяет *длительность* (или *размерность*) сигнала $\varphi(t)$. Множество всех (конечномерных) аналоговых сигналов длительности T составляет класс A^T .

Под классом *аналоговых сигналов с полным амплитудным ограничением* с параметром (ограничения) g будем подразумевать (как, например, и в [1]) множество аналоговых сигналов $\varphi(t)$ из A^T , удовлетворяющих условию: $|\varphi(t)| < \frac{g}{2}$ при $0 \leq t < T$. Исследование аналоговых сигналов (и отвечающих им цифровых сигналов) из данного класса — обозначим его через P_g^T — и проводится в данной работе.

Цифровой сигнал получается проецированием аналогового сигнала на решетку Q , представляющую собой конечное множество точек на плоскости E^2 с системой координат (t, y) . Предполагается, что в указанной плоскости функция $\varphi(t)$ (аналоговый сигнал) задана уравнением $y = \varphi(t)$. Дадим исчерпывающее описание указанного проецирования.

Введем (как и в [1, 2]) дискретные множества на осях системы координат (t, y) , которые называются соответственно дискретизацией и квантизацией.

Дискретизацией с длительностью T , плотностью дискретизации θ , $\theta \in \mathbb{N}$, и локальным ограничением ρ , $\rho \in \{1, 2, \dots, \theta\}$, называется множество $\Psi = \{t = i + \frac{\tau}{\theta} : i \in \{0, 1, \dots, T-1\}, \tau \in \mathbb{Z} \cap [-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}]\}$.

Очевидно, что при $\rho = \theta$ дискретизация представляет собой равномерное распределение точек на числовой оси с шагом $\frac{1}{\theta}$; при $\rho = 1$ распределение также равномерно, но шаг равен 1.

Квантизацией с плотностью квантования β , $\beta \in \mathbb{N}$, называется множество $\Phi = \{y : \beta y \in \mathbb{Z}, |y| < \frac{g}{2}\}$. Решеткой (см. рис. 1) с дискретизацией Ψ и квантизацией Φ называется множество $Q = \{d = (t, y) \in E^2 : t \in \Psi, y \in \Phi\}$. Числа T, θ, ρ, β называются параметрами решетки.

Пусть $a \in \mathbb{R}$; число $\lfloor \beta a \rfloor$ называется *цифровым представлением числа a с плотностью квантования β* .

*) Здесь и ниже используются следующие обозначения: $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ — множества соответственно действительных, целых и натуральных чисел; если B — некоторое множество, а J — некоторое свойство, то $\{x \in B : J\}$ — множество, состоящее из элементов множества B , обладающих свойством J ; $\log a = \log_2 a$; через $\lfloor a \rfloor$ ($\lceil a \rceil$) обозначаем наибольшее (наименьшее) целое число, не большее (не меньшее) a .

Цифровым сигналом от сигнала $\varphi(t) \in A^T$ над решеткой Q (с дискретизацией Ψ и квантизацией Φ) называется функция $\varphi_{\text{ц}}: \Psi \rightarrow \Phi$, удовлетворяющая равенству $\varphi_{\text{ц}}(t) = \lfloor \beta \varphi(t) \rfloor$ при всех $t \in \Psi$.

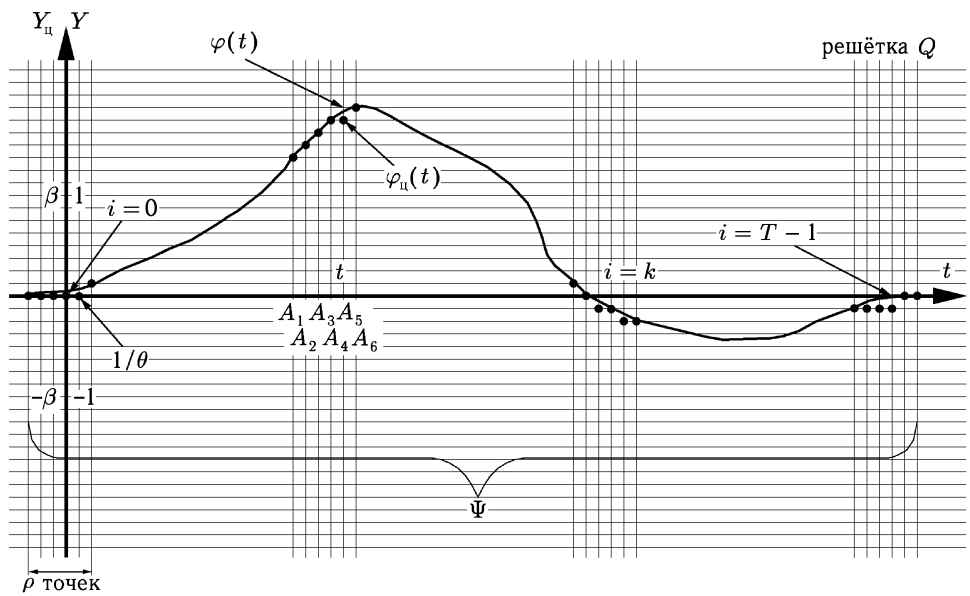


Рис. 1

На рис. 1 аналоговый сигнал $y = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, изображен сплошной линией, а цифровой сигнал $y_{\text{ц}} = \varphi_{\text{ц}}(t)$, $t \in \Psi$, — точками. Масштабы при изображении графиков связаны соотношением $y_{\text{ц}} = \beta y$. Для данного рисунка $\theta = 10$, $\beta = 8$, $\rho = 6$; точкам $A_1, \dots, A_6$ отвечают значения $\tau = -3, -2, -1, 0, 1, 2$; для всех этих точек $i = 1$.

Описанный здесь процесс получения цифрового сигнала из аналогового называется *аналого-цифровым преобразованием*, а устройство, его осуществляющее, — *аналого-цифровым преобразователем* [4, 6, 8, 10].

Первый способ кодирования цифровых сигналов — тривиальное кодирование

Типичный фрагмент функционирования системы цифровой обработки сигналов представлен на рис. 2. Аналоговый сигнал $\varphi(t)$ преобразуется

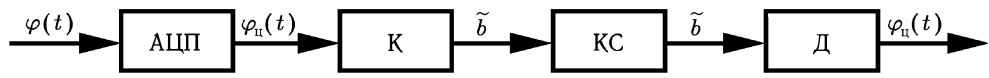


Рис. 2

в аналогово-цифровом преобразователе (АЦП) в цифровой $\varphi_{\text{ц}}(t)$ путем проецирования его на решетку Q с параметрами T, θ, ρ, β , определяющими соответственно длительность, плотность дискретизации, локальное ограничение и плотность квантования. Сигнал $\varphi_{\text{ц}}(t)$ поступает в кодер (К), где осуществляется его преобразование в кодовый сигнал (или просто — в код) $\tilde{b}$, передаваемый по каналу связи (КС). В декодере (Д) по коду определяется исходный цифровой сигнал.

Без принципиального ограничения общности будем рассматривать двоичное кодирование, когда всякий код $\tilde{b}$ представляет собой слово в алфавите $E_2 = \{0, 1\}$, т. е. $\tilde{b} = b(1)b(2)\dots b(n)$, где $b(i) \in E_2$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$; через $l(\tilde{b})$ будем обозначать длину кодового слова $\tilde{b}$, т. е. число символов из E_2 , составляющих $\tilde{b}$.

Основные технико-экономические показатели системы цифровой обработки сигналов существенно зависят от длины кодовых слов, поскольку от этого параметра прямо пропорционально зависят необходимая емкость памяти для хранения кодовых слов и требуемая пропускная способность канала связи для передачи цифровых сигналов (точнее, кодов этих сигналов). Поэтому естественной и актуальной является задача сокращения длины кодовых слов при кодировании цифровых сигналов; именно эта задача имела в виду, когда выше говорилось о проблеме сжатия информации.

Существует тривиальное решение задачи сжатия информации, при котором осуществляемые кодером и декодером отображения задаются так называемыми таблицами кодирования [11], в которых перечисляются всевозможные цифровые сигналы из заданного класса и каждому цифровому сигналу ставится в соответствие кодовое слово, например, номер цифрового сигнала в таблице. При наличии таблицы по цифровому сигналу однозначно находится код и, наоборот, по коду однозначно восстанавливается сигнал. Хотя при таком способе кодирования и достигается максимальное сжатие информации, но практически этот способ не применим, поскольку требует чрезвычайно большого объема памяти для запоминания таблиц кодирования и декодирования, размеры которых растут экспоненциально с ростом длины кодов, а необходимость оперирования со всем сигналом «в целом» или со всем кодовым словом приводит к неприемлемо большой сложности специализированных устройств, играющих роль кодера и декодера. В связи с этим возникает необходимость в разработке конструктивных методов построения кодов с эффективными алгоритмами кодирования и декодирования, которые учитывали бы специфику рассматриваемых кодируемых объектов (цифровых сигналов).

При разработке методов кодирования цифровых сигналов с учетом вышеизложенных соображений представляется естественным воспользоваться *принципом локального кодирования* [7]; этот принцип применительно к кодированию цифровых сигналов можно сформулировать в общих чертах следующим образом. Временной промежуток длины T , на котором задаются аналоговый и цифровой сигналы, разбивается на отрезки, существенно более короткие, чем T . В соответствии с этим разбиением и кодовое слово $\tilde{b}$ для цифрового сигнала $\varphi_c(t)$ разбивается на подслова, существенно более короткие, чем $\tilde{b}$. Каждое подслово однозначно строится по значениям цифрового сигнала из соответствующего временного отрезка и, наоборот, значения цифрового сигнала из любого временного отрезка однозначно восстанавливаются по соответствующему кодовому подслову. Другими словами, кодирование должно быть *локальным*, т. е. должно осуществляться последовательно, по относительно небольшим частям цифрового сигнала. Желательно также, чтобы само кодирование (а также и декодирование) частей сигнала было достаточно простым.

Простейший, можно сказать, тривиальный способ кодирования цифровых сигналов можно представить следующим образом.

Будем считать, что дискретизация представляет собой упорядоченное множество чисел, т. е. $\Psi = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, где $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_1 = -\frac{1}{\theta} \lfloor \frac{\rho}{2} \rfloor$, $t_m = T - 1 + \frac{1}{\theta} \lfloor \frac{\rho}{2} - \frac{1}{4} \rfloor$, $m = \rho T$. Отрезок $[t_1, t_m]$ (на оси времени) разобьем на m непересекающихся промежутков так, чтобы t_i оказалось в i -м проме-

жутке, $i = 1, \dots, m$. Пусть $\tilde{\varphi}_u(t_i)$, $i = 1, \dots, m$, есть r -разрядное двоичное число, изображающее $|\varphi_u(t_i)|$ (величину цифрового сигнала в момент времени t_i). Для рассматриваемого класса P_g^T аналоговых сигналов $|\varphi(t)| < \frac{g}{2}$, и потому можно взять $r = \lceil \log(\beta g + 2) \rceil - 1$. Значению цифрового сигнала в момент времени t_i взаимно однозначно соответствует двоичное слово (код) $\tilde{b}_i = z_i \tilde{\varphi}_u(t_i)$, где

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_u(t_i) \geq 0, \\ 1, & \text{если } \varphi_u(t_i) < 0. \end{cases}$$

Цифровому сигналу $\varphi_u(t)$ взаимно однозначно соответствует кодовое слово $\tilde{b} = \tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \dots \tilde{b}_m$.

При растущих значениях параметров дискретизации и параметра g слов $\tilde{b}$ (вместе с разбиением его на подслова $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$), очевидно, определяет некоторое в понятном смысле тривиальное локальное кодирование цифрового сигнала. Это кодирование удовлетворяет сформулированным выше условиям; более того, здесь мы имеем случай *равномерного* кодирования [7], когда весь код $\tilde{b}$ разбивается на куски $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ одинаковой длины. Длина кодового слова, являющаяся, по существу, главным критерием оптимальности кодирования, в данном случае вычисляется просто:

$$l(\tilde{b}) = T\rho \lceil \log(\beta g + 2) \rceil. \quad (2)$$

Второй способ кодирования — по приращениям сигнала на равных («единичных») промежутках времени

Промежуток $\Delta = [-\frac{\rho}{2}, T - \frac{\rho}{2})$ на оси времени (рис. 1) разобьем на более короткие промежутки $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{T-1}$, где $\Delta_i = [i - \frac{\rho}{2}, i + 1 - \frac{\rho}{2})$. Соответственно этому разбиению и множество Ψ (т. е. дискретизацию) разобьем на упорядоченные подмножества $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{T-1}$, где $\Psi_i = \{t = i + \frac{\tau}{\theta} : \tau \in \mathbb{Z} \cap [-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2})\} = \{t_{i\rho+1}, t_{i\rho+2}, \dots, t_{(i+1)\rho}\}$ и $t_{i\rho+1} < t_{i\rho+2} < \dots < t_{(i+1)\rho}$. Разбиения промежутка Δ и множества Ψ на более короткие промежутки и на подмножества определяют и разбиения аналогового и цифрового сигналов на части для дальнейшего локального кодирования. Набор $\Phi = (\varphi_u(t_1), \varphi_u(t_2), \dots, \varphi_u(t_m))$ значений цифрового сигнала $\varphi_u(t)$ на множестве значений t из Ψ разобьем на поднаборы $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{T-1}$, где $\Phi_i = (\varphi_u(t_{i\rho+1}), \varphi_u(t_{i\rho+2}), \dots, \varphi_u(t_{(i+1)\rho}))$. Каждому набору Φ_i поставим во взаимно однозначное соответствие набор приращений цифрового сигнала $B_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,\rho})$, где $b_{i,1} = \varphi_u(t_{i\rho+1})$ и $b_{i,j} = \varphi_u(t_{i\rho+j}) - \varphi_u(t_{i\rho+j-1})$ для $j = 2, 3, \dots, \rho$. Очевидно, по набору B_i набор Φ_i восстанавливается однозначно:

$$\varphi_u(t_{i\rho+j}) = \sum_{s=1}^j b_{i,s},$$

где $j = 1, 2, \dots, \rho$, а $i = 0, 1, \dots, T-1$.

Пусть $\tilde{b}_{i,1}, \tilde{b}_{i,2}, \dots, \tilde{b}_{i,\rho}$ — двоичные наборы, изображающие числа $b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,\rho}$, при этом первый разряд $b_{i,j,1}$ набора $\tilde{b}_{i,j}$ указывает знак $b_{i,j}$, например,

$$b_{i,j,1} = \begin{cases} 0, & \text{если } b_{i,j} \geq 0, \\ 1, & \text{если } b_{i,j} < 0, \end{cases}$$

а остальные разряды набора $\tilde{b}_{i,j}$ задают величину $|b_{i,j}|$, $j = 1, \dots, \rho$. Будем считать, что набор $\tilde{b}_{i,1}$ имеет $r+1$ разрядов (как и каждый из набо-

ров $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m$, рассматривавшихся выше при тривиальном способе кодирования), а каждый из наборов $\tilde{b}_{i,2}, \dots, \tilde{b}_{i,\rho}$ имеет q разрядов, где q — некоторое натуральное число, оценкой которого мы и займемся далее ($i = 0, 1, \dots, T-1$). Положим $\tilde{b}'_i = \tilde{b}_{i,1} \tilde{b}_{i,2} \dots \tilde{b}_{i,\rho}$, а $\tilde{b}' = \tilde{b}'_0, \tilde{b}'_1, \dots, \tilde{b}'_{T-1}$; слово $\tilde{b}'$ объявим кодом цифрового сигнала $\varphi_{\text{ц}}(t)$, а подслова $\tilde{b}'_0, \tilde{b}'_1, \dots, \tilde{b}'_{T-1}$ — кусками этого кода. Из построения видно, что определяемое таким образом кодирование будет равномерным локальным и сигнал $\varphi_{\text{ц}}(t)$ восстанавливается по коду однозначно.

Для длины $l(\tilde{b}')$ построенного указанным способом кода $\tilde{b}'$ при надлежащем выборе параметра q оказывается справедливой следующая верхняя оценка.

Теорема 1. *Если аналоговый сигнал $\varphi(t)$ ограничен по амплитуде, т. е. $\varphi(t) \in P_g^T$, то отвечающий ему цифровой сигнал $\varphi_{\text{ц}}(t)$ допускает локальное кодирование с использованием двоичного кода $\tilde{b}'$, длина которого удовлетворяет неравенству*

$$l(\tilde{b}') \leq T(\lceil \log(\beta g + 2) \rceil + \rho(\lceil \log(\frac{\pi g \beta}{2\theta} + 1) \rceil + 1)), \quad (3)$$

где T, θ, ρ, β — параметры решетки (аналого-цифрового преобразования), а g — параметр ограничения.

Доказательство. Оценим сверху величину приращения $|b_{i,j}|$ цифрового сигнала для произвольного $j, j \in \{2, 3, \dots, \rho\}$. Для этого воспользуемся неравенством Бернштейна [5], дающим оценку (в общем случае неумлучшаемую) для производной от тригонометрического полинома через наибольшую величину самого полинома: если $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше n и $|T_n(x)| \leq M$ на отрезке $[0, 2\pi]$, то для любого x выполняется неравенство

$$|T'_n(x)| \leq nM. \quad (4)$$

В выражении (1) для аналогового сигнала введем новую переменную $x = \frac{\pi}{T}t$ и получим

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{k=0}^{\frac{T}{2}-1} (a_{2k} \cos(2k+1)x + a_{2k+1} \sin(2k+1)x). \quad (5)$$

Амплитудное ограничение (величиной g) для $\varphi(t)$ остается в силе и для $\varphi(x)$:

$$|\varphi(x)| < \frac{g}{2}.$$

С учетом последнего неравенства и неравенства (4) применительно к тригонометрическому полиному (5) порядка не выше $T-1$ получаем

$$\left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right| \leq \frac{(T-1)g}{2}.$$

Учитывая последнее неравенство и возвращаясь к прежней переменной t , получаем

$$\left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right| < \frac{\pi g}{2}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что приращение $\Delta\varphi$ аналогового сигнала $\varphi(t)$ при изменении аргумента (т. е. времени) на $\frac{1}{\theta}$ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta\varphi| < \frac{\pi g}{2\theta}. \quad (7)$$

В свою очередь из неравенства (7) и определения цифрового сигнала получаем оценку для величины приращения $|b_{i,j}|$ цифрового сигнала при $j = 2, 3, \dots, \rho$:

$$|b_{i,j}| \leq \left\lceil \frac{\pi g \beta}{2\theta} \right\rceil. \quad (8)$$

При предыдущем тривиальном способе кодирования было установлено, что длина набора $\tilde{b}_{i,1}$ не превосходит $\lceil \log(\beta g + 2) \rceil$. Из определения набора $\tilde{b}_{i,j}$, $j = 2, 3, \dots, \rho$, и оценки (8) следует

$$l(\tilde{b}_{i,j}) \leq \left\lceil \log\left(\frac{\pi g \beta}{2\theta} + 1\right) \right\rceil + 1.$$

Из последних двух оценок для длины кода $\tilde{b}'$ в целом получаем верхнюю оценку

$$l(\tilde{b}') \leq T(\lceil \log(\beta g + 2) \rceil + \rho(\lceil \log(\frac{\pi g \beta}{2\theta} + 1) \rceil + 1)).$$

Теорема доказана.

Из оценок (2) и (3) видно, что при растущих параметрах g , β , ρ и опережающем росте локального ограничения ρ (или плотности дискретизации θ при $\rho = \theta$) второй способ кодирования может давать существенно более короткие коды цифровых сигналов, чем первый (тривиальный) способ кодирования.

Третий способ кодирования — по приращениям времени на единичное приращение сигнала

Будем предполагать, что дискретизация Ψ разбита на точно такие же подмножества $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{T-1}$, как и при предыдущем способе кодирования; соответственно и набор Φ значений цифрового сигнала $\varphi_{\text{ц}}(t)$ на множестве значений t из Ψ разбит на прежние поднаборы $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{T-1}$.

В каждом подмножестве Ψ_i выделим некоторое упорядоченное подмножество чисел $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,r_i}$ с помощью следующей пошаговой процедуры. На первом шаге в качестве $t_{i,1}$ берем $t_{i\rho+1}$. Если на первых j шагах выделены числа $t_{i,1}, \dots, t_{i,j}$, то на $(j+1)$ -м шаге в качестве $t_{i,j+1}$ берем наименьшее возможное число t_h из Ψ_j такое, что $t_h > t_{i,j}$ и $\varphi_{\text{ц}}(t_{i,j}) \neq \varphi_{\text{ц}}(t_h)$; при отсутствии в Ψ_i числа t_h , удовлетворяющего указанным условиям, процедуру обрываем, полагаем $j = r_i$ и упорядоченное подмножество $\Psi_i^* = \{t_{i,1}, \dots, t_{i,r_i}\}$ объявляем i -м базовым подмножеством ($i = 0, 1, \dots, T-1$). Нетрудно заметить, что набор Φ значений цифрового сигнала полностью определяется значениями его в выделенные моменты времени из базовых подмножеств $\Psi_0^*, \dots, \Psi_{T-1}^*$.

Внутри базовых подмножеств $\Psi_0^*, \dots, \Psi_{T-1}^*$ сформируем базовые тройки и, возможно, двойки чисел. Возьмем подмножество Ψ_i^* , $i \in \{0, 1, \dots, T-1\}$, содержащее числа $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,r_i}$. Первой базовой тройкой чисел в Ψ_i^* считаем упорядоченную тройку $\delta_{i,1} = (t_{i,1}, t_{i,2}, t_{i,3})$, второй базовой тройкой считаем $\delta_{i,2} = (t_{i,3}, t_{i,4}, t_{i,5})$ и т. д.; j -й базовой тройкой будет $\delta_{i,j} = (t_{i,2j-1}, t_{i,2j}, t_{i,2j+1})$, $j = 1, 2, \dots, s_i$, где $s_i = \lceil \frac{r_i}{2} \rceil - 1$. В случае, когда r_i — нечетное число, базовое подмножество Ψ_i^* содержит только базовые тройки. Если же r_i — четное число, то к базовым тройкам подмножества Ψ_i^*

добавляется еще (единственная) базовая двойка $\delta'_i = (t_{i,r_i-1}, t_{i,r_i})$. Базовые тройки чисел будем разделять на монотонные и экстремальные: тройку $\delta_{i,j}$ считаем *монотонной*, если числа $\varphi_{\text{ц}}(t_{i,2j-1})$ и $\varphi_{\text{ц}}(t_{i,2j+1})$ лежат на числовой прямой по разные стороны от числа $\varphi_{\text{ц}}(t_{i,2j})$, или *экстремальной*, если числа $\varphi_{\text{ц}}(t_{i,2j-1})$ и $\varphi_{\text{ц}}(t_{i,2j+1})$ лежат по одну сторону от числа $\varphi_{\text{ц}}(t_{i,2j})$.

Установим некоторые факты, относящиеся к базовым тройкам и значениям цифровых сигналов.

Лемма 1. Если $\delta_{i,j} = (t_{i,2j-1}, t_{i,2j}, t_{i,2j+1})$ — монотонная базовая тройка, то для нее выполняется неравенство

$$t_{i,2j+1} - t_{i,2j-1} > \frac{2}{\pi g \beta}. \quad (9)$$

Доказательство. Из определений цифрового сигнала и монотонной базовой тройки следует неравенство

$$|\varphi(t_{i,2j+1}) - \varphi(t_{i,2j-1})| > \frac{1}{\beta}.$$

Аналоговый сигнал является непрерывной и дифференцируемой функцией от t , поэтому

$$|\varphi(t_{i,2j+1}) - \varphi(t_{i,2j-1})| \leq \varphi'_{\max} \cdot (t_{i,2j+1} - t_{i,2j-1}), \quad (10)$$

где $\varphi'_{\max}$ — наибольшая величина производной функции $\varphi(t)$ на отрезке $[0, T]$. Из последних двух неравенств и оценки (6) получаем неравенство (9). Лемма доказана.

Лемма 2. Общее число экстремальных троек во всех базовых подмножествах не превосходит $2(T-1)$.

Доказательство. Предположим, что $\delta_{i,j} = (t_{i,2j-1}, t_{i,2j}, t_{i,2j+1})$ — экстремальная базовая тройка. Из определений цифрового сигнала, базовых троек и свойств аналогового сигнала $\varphi(t)$ (непрерывность, ограниченность, дифференцируемость $\varphi(t)$) следует, что $\varphi(t)$ имеет по крайней мере одну точку локального экстремума на $(t_{i,2j-1}, t_{i,2j+1})$, в которой производная функции $\varphi(t)$ обращается в нуль.

Аналоговый сигнал $\varphi(t)$, задаваемый соотношением (1), линейным преобразованием переменной переводится в тригонометрический полином $\varphi(x)$ порядка $T-1$, задаваемый соотношением (5). Продифференцировав $\varphi(x)$ по x , получим опять же тригонометрический полином порядка $T-1$. Но тригонометрический полином порядка $T-1$, как известно (см., например, [9]), не может иметь более чем $2(T-1)$ действительных корней на $[0, 2\pi]$, если даже каждый из них считать столько раз, сколько единиц в его кратности. А в таком случае, как нетрудно заметить, и производная $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ не может обращаться в нуль более чем в $2(T-1)$ точках на отрезке $[0, T]$. В итоге (с учетом периодичности функции $\varphi(t)$) получаем утверждение леммы.

Лемма 3. Если для параметров g, β, θ выполняется условие

$$\pi g \beta \leq 2\theta, \quad (11)$$

то для любых двух соседних моментов времени $t_{i,j}, t_{i,j+1}$ из любого базового множества Ψ_i^* выполняется условие

$$|\varphi_{\text{ц}}(t_{i,j+1}) - \varphi_{\text{ц}}(t_{i,j})| = 1. \quad (12)$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не выполняется и для некоторых соседних моментов времени $t_{i,j}$ и $t_{i,j+1}$ из некоторого базового множества Ψ_i^* выполняется неравенство

$$|\varphi_{\text{ц}}(t_{i,j+1}) - \varphi_{\text{ц}}(t_{i,j})| \geq 2. \quad (13)$$

При переходе от момента времени $t_{i,j+1} - \frac{1}{\theta}$ к моменту времени $t_{i,j+1}$ для приращения значения аналогового сигнала выполняется соотношение (аналогичное неравенству (10))

$$|\varphi(t_{i,j+1}) - \varphi(t_{i,j+1} - \frac{1}{\theta})| \leq \varphi'_{\max} \cdot \frac{1}{\theta}.$$

Из последнего неравенства, оценки (6) и условия (11) получаем неравенство

$$|\varphi(t_{i,j+1}) - \varphi(t_{i,j+1} - \frac{1}{\theta})| < \frac{1}{\beta},$$

из которого следует, что при переходе от $t_{i,j+1} - \frac{1}{\theta}$ к $t_{i,j+1}$ значение цифрового сигнала могло измениться не более чем на единицу. Но в таком случае с учетом предполагаемого неравенства (13) получаем, что $\varphi_{\text{ц}}(t_{i,j}) \neq \varphi_{\text{ц}}(t_{i,j+1} - \frac{1}{\theta})$, откуда следует, что $t_{i,j} \neq t_{i,j+1} - \frac{1}{\theta}$, и момент времени $t_{i,j+1} - \frac{1}{\theta}$ или какой-нибудь иной момент времени из Ψ_i , лежащий между $t_{i,j}$ и $t_{i,j} - \frac{1}{\theta}$, должен был быть выделенным и включенным в Ψ_i^* . Получаем противоречие, исключающее исходное предположение. Лемма доказана.

Л е м м а 4. Любое базовое подмножество содержит не более чем $\lfloor \frac{\pi(\rho-1)g\beta}{2\theta} \rfloor$ монотонных базовых троек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения Ψ_i , $i=0, 1, \dots, T-1$, следует, что разность между последним и первым моментами времени из Ψ_i равна $\frac{\rho-1}{\theta}$. Но в таком случае разность между последним и первым моментами времени из Ψ_i^* не превосходит $\frac{\rho-1}{\theta}$. Отсюда и из неравенства (9) леммы 1 делаем вывод, что в любом базовом подмножестве монотонных троек не больше чем $\lfloor \frac{\pi(\rho-1)g\beta}{2\theta} \rfloor$. Лемма доказана.

Ранее мы уже обращали внимание на то, что цифровой сигнал полностью определяется его значениями в выделенные моменты времени из базовых подмножеств $\Psi_0^*, \dots, \Psi_{T-1}^*$. Следовательно, если по цифровому сигналу однозначно строится некоторый код, по которому однозначно восстанавливаются базовые подмножества и значения цифрового сигнала в моменты времени из этих подмножеств, то такой код допускает взаимно однозначное декодирование.

Далее мы будем предполагать, что параметры аналого-цифровых преобразований удовлетворяют неравенству (11). В этом случае согласно лемме 3 при переходе от какого-либо момента времени $t_{i,j}$ из базового подмножества Ψ_i^* к следующему моменту $t_{i,j+1}$ значение цифрового сигнала изменяется (увеличивается или уменьшается) ровно на единицу. А это означает (с учетом вышесказанного), что для однозначного восстановления цифрового сигнала достаточно, чтобы код позволял однозначно восстанавливать: а) базовые подмножества; б) внутри каждого базового подмножества для каждой пары $t_{i,j}$, $t_{i,j-1}$ соседних моментов времени знак (плюс или минус) приращения цифрового сигнала при переходе от $t_{i,j-1}$ к $t_{i,j}$; в) значение цифрового сигнала в первый момент времени внутри каждого базового подмножества. Любое базовое подмножество Ψ_i^* , очевидно, однозначно задается набором разностей $t_{i,j} - t_{i,j-1}$, $j=2, \dots, r_i$, а потому условие а) можно заменить условием а'), согласно которому код должен задавать вышеуказанные наборы разностей соседних моментов времени в базовых подмножествах. Код, удовлетворяющий условиям а'), б) и в), и строится ниже.

Весь код $\tilde{d}$ разбиваем на куски $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{T-1}$, отвечающие соответственно базовым множествам $\Phi_0^*, \Phi_1^*, \dots, \Phi_{T-1}^*$; куски кода в данном случае могут иметь различную длину. Пусть $\Psi_i^* = \{t_{i,1}, \dots, t_{i,r_i}\}$ — i -е базовое

подмножество, $i \in \{0, 1, \dots, T-1\}$; ему ставим в соответствие кусок кода (слово)

$$\tilde{d}_i = \tilde{d}_{i,0} \tilde{d}_{i,1} \dots \tilde{d}_{i,r_i},$$

составленный из более мелких кусков (подслов). Первое подслово $\tilde{d}_{i,0}$ имеет $\lceil \log \rho \rceil$ символов и представляет собой двоичную запись числа r_i , т. е. задает, фактически, длину слова $\tilde{d}_i$. Второе подслово (аналогичное подслову $\tilde{b}_i$ из первого способа кодирования) задаем формулой

$$\tilde{d}_{i,1} = z_i \tilde{\varphi}_u(t_{i,1}),$$

где

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_u(t_{i,1}) \geq 0, \\ 1, & \text{если } \varphi_u(t_{i,1}) < 0, \end{cases}$$

а $\tilde{\varphi}_u(t_{i,1})$ есть r -разрядное двоичное число, изображающее $|\varphi_u(t_{i,1})|$, $r = \lceil \log(\beta g + 2) \rceil - 1$. Далее для каждого j , $j = 2, 3, \dots, r_i$, очередное подслово задаем формулой

$$\tilde{d}_{i,j} = z_{i,j} \tilde{d}'_{i,j},$$

где $\tilde{d}'_{i,j}$ содержит $\lceil \log(\rho - 1) \rceil$ разрядов и представляет собой двоичную запись числа $t_{i,j} - t_{i,j-1}$, а

$$z_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_u(t_{i,j}) - \varphi_u(t_{i,j-1}) > 0, \\ 1, & \text{если } \varphi_u(t_{i,j}) - \varphi_u(t_{i,j-1}) < 0 \end{cases}$$

($z_{i,j}$ задает знак приращения цифрового сигнала).

При указанном способе кодирования для кода $\tilde{d}$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если для параметров аналого-цифрового преобразования и ограничения класса P_g^T выполняется условие

$$\pi g \beta \leq 2\theta,$$

то длина кода $\tilde{d}$ удовлетворяет неравенству

$$l(\tilde{d}) < T(\lceil \log \rho \rceil + \lceil \log(\beta g + 2) \rceil + (\lceil \log(\rho - 1) \rceil + 1)(5 + \lfloor \frac{\pi(\rho - 1)g\beta}{2\theta} \rfloor)). \quad (14)$$

Доказательство. Общая длина l_1 всех подслов $\tilde{d}_{i,0}$ в коде $\tilde{d}$ по построению удовлетворяет неравенству

$$l_1 \leq T \lceil \log \rho \rceil.$$

Общая длина l_2 всех подслов $\tilde{d}_{i,1}$ в коде $\tilde{d}$ удовлетворяет неравенству

$$l_2 \leq T \lceil \log(\beta g + 2) \rceil.$$

Легко заметить, что каждая базовая тройка (как экстремальная, так и монотонная) порождает пару подслов вида $\tilde{d}_{i,j}$, $\tilde{d}_{i,j+1}$, где $j \geq 2$, в коде $\tilde{d}$, а каждая базовая двойка порождает одно подслово $\tilde{d}_{i,j}$, $j \geq 2$, в коде $\tilde{d}$. Из лемм 2 и 4 следует, что общее число базовых троек во всех базовых множествах не превосходит $2(T-1) + \lfloor \frac{\pi(\rho-1)g\beta}{2\theta} \rfloor$. Следовательно, общая длина l_3 всех подслов $\tilde{d}_{i,j}$, $j \geq 2$, в коде $\tilde{d}$ удовлетворяет неравенству

$$l_3 \leq (\lceil \log(\rho - 1) \rceil + 1)(4(T - 1) + 2T \lfloor \frac{\pi(\rho - 1)g\beta}{2\theta} \rfloor + T).$$

Из верхних оценок для l_1 , l_2 , l_3 получаем требуемую оценку для $l(\tilde{d})$. Теорема доказана.

Заключение

Изложенные выше три способа кодирования цифровых сигналов позволяют получать коды $\tilde{b}$, $\tilde{b}'$ и $\tilde{d}$, удовлетворяющие соответственно соотношениям (2), (3) и (14). Из этих соотношений при растущих параметрах T , θ , ρ , β , g получаем следующие асимптотические оценки для длин кодов:

$$l(\tilde{b}) \sim T\rho \log(\beta g), \quad (15)$$

$$l(\tilde{b}') \lesssim T(\log(\beta g) + \rho(\lceil \log(\frac{\pi\beta g}{2\theta}) + 1 \rceil + 1)), \quad (16)$$

$$l(\tilde{d}) \lesssim T(\log(\rho\beta g) + (5 + \lfloor \frac{\pi(\rho-1)\beta g}{2\theta} \rfloor) \log \rho). \quad (17)$$

Если выполняется условие

$$\rho \geq \pi\beta g, \quad (18)$$

то из (16) следует неравенство

$$l(\tilde{b}') \lesssim 2T\rho; \quad (19)$$

а если помимо (18) выполняется еще и условие

$$\theta \geq \frac{\pi}{2}(\rho - 1)\beta g, \quad (20)$$

то из (17) следует неравенство

$$l(\tilde{d}) \lesssim 8T \log \rho. \quad (21)$$

Из соотношений (15) и (19) следует, что при переходе от первого (тривиального) способа кодирования ко второму можно добиться существенного сокращения длины кода цифрового сигнала; а из (15), (19) и (21) видно, что еще более существенного сжатия информации можно добиться при использовании третьего способа кодирования.

Обозначим через $H(Q, P_g^T)$ логарифм (двоичный) числа рассматриваемых цифровых сигналов, отвечающих аналоговым сигналам из P_g^T при заданной решетке Q . Предположим, что растущие параметры класса P_g^T и решетки Q помимо соотношений (18) и (20) удовлетворяют еще и условиям

$$\log \log T = o(\log g), \quad (22)$$

$$\rho \leq c_1 \frac{\theta}{\log T}, \quad (23)$$

$$\log \theta \leq c_2 \log \rho, \quad (24)$$

где c_1, c_2 — некоторые константы. В таком случае для $H(Q, P_g^T)$ согласно теореме об энтропии конкретных классов из [1] выполняется оценка

$$H(Q, P_g^T) \sim T \log(g\beta\rho). \quad (25)$$

Сравнивая оценки (21) и (25), видим, что при выполнении соответствующих условий (соотношений (18), (20), (22)–(24)) третий способ кодирования позволяет строить коды минимальной по порядку длины.

Условия (18) и (20) предполагают опережающий рост параметров ρ и θ аналого-цифрового преобразования (сравнительно с параметрами β и g) и

выглядят вполне естественными и приемлемыми с учетом следующих соображений. Известно (см., например, теорему об удельной энтропии в [2] или в [3]), что если растущие параметры T , θ , ρ , β аналого-цифрового преобразования удовлетворяют некоторым естественным условиям, то плотность дискретизации θ и локальное ограничение ρ влияют на рост удельной энтропии цифрового сигнала (т. е. на количество информации в цифровом сигнале) точно так же, как и плотность квантования β . Это информационное свойство аналого-цифрового преобразования позволяет повышать информативность цифровых сигналов за счет увеличения параметров θ и ρ . Данное обстоятельство весьма существенно, поскольку на практике, как правило, значительно проще увеличить θ (и ρ), но не β , другими словами, гораздо проще бывает увеличить количество измерений величины сигнала, а не точность измерений.

Отметим, что третий способ кодирования дает, вообще говоря, неравномерные коды — длины кусков $\tilde{d}_i$, $i = 0, 1, \dots, T-1$, могут быть различными. Однако путем несложной модификации кода $\tilde{d}$ с использованием прежних основных соображений (лемм 1–4) можно перейти к равномерному кодированию; соответствующие асимптотические верхние оценки длины получающихся кодов при этом существенных изменений не претерпят.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский С. В. Информационный анализ цифровых сигналов. — Изд-во Сарат. ун-та, Самарский филиал, 1991.
2. Архангельский С. В., Редькин Н. П. Информационные свойства аналого-цифровых преобразований сигналов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 9–54.
3. Архангельский С. В., Редькин Н. П. Информационные процессы в аналого-цифровых преобразователях // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Тр. III Межд. конф. — Самара, 2001. — С. 528–534.
4. Бахтияров Г. Д., Дикий С. Л. Аналого-цифровые преобразователи // Зарубежная радиоэлектроника. — 1975. — № 1. — С. 52–90.
5. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. Конструктивная теория функций. — М.: Издательство АН СССР, 1952.
6. Гитис Э. И., Пискулов Е. А. Аналого-цифровые преобразователи. — М.: Энергоиздат, 1981.
7. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 31–110.
8. Маркус Ж. Дискретизация и квантование. — М.: Энергия, 1969.
9. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.: Гостехиздат, 1949.
10. Микроэлектронные цифро-аналоговые и аналого-цифровые преобразователи информации / Под. ред. В. Б. Смоллова. — Л.: Энергия, 1976.
11. Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. — М.: Наука, 1980.
12. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

Поступило в редакцию 04 IV 2003