РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.КЕЛДЫША

А.В.Березин, Н.С.Келлин, М.Б.Марков, С.В.Паротькин, А.В.Сысенко

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВТОРИЧНОЙ ИОНИЗАЦИИ

МОСКВА 2002

А.В.Березин, Н.С.Келлин, М.Б.Марков, С.В.Паротькин, А.В.Сысенко

АННОТАЦИЯ

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВТОРИЧНОЙ ИОНИЗАЦИИ

Математическое моделирование электромагнитных полей ионизирующих излучений в технологических объектах требует построения моделей вторичной ионизации газового заполнения. Рассматриваются модели ионизации нейтрального газа потоком электронов высокой энергии. Для изотропного потока формулируется равновесная гидродинамическая модель. Несимметричное начальное распределение вторичных электронов рассматривается в рамках неравновесной модели.

A.V.Berezin, N.S.Kellin, M.B.Markov, S.V.Parot’kin, A.V.Sysenko

ABSTRACT

ON THE MATHEMATICAL MODELS OF THE SECONDARY IONIZATION

The mathematical modeling of the ionizing radiation’s electromagnetic fields in the technologic objects requires the construction of the gas filling secondary ionization models. The models of neutral gas ionizing by high energy electron flux are considering. The balanced hydrodynamic model is formulated for isotropic flux. The unsymmetrical initial distribution of secondary electrons is considering in the unbalanced model frames.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие электромагнитных процессов в заполненных газом полостях технологических объектов, находящихся в поле проникающего гамма-излучения определяется комптоновской ионизацией материалов и вторичной ионизацией газа, заполняющего полости между элементами конструкции. Первый процесс приводит к образованию потока комптоновских электронов высокой энергии, которые, в свою очередь, взаимодействуют с нейтральными молекулами газа и образуют потоки вторичных электронов. Традиционные модели вторичной ионизации основываются на рассмотрении равновесной по распределению вторичных электронов и электрическому полю интенсивности ионизации газа потоком электронов высокой энергии. Такой подход позволяет адекватно описывать электромагнитные процессы в стационарном потоке гамма-излучения. Электрический ток всей совокупности вторичных электронов при этом мгновенно начинает компенсировать ток комптоновских электронов. Это приводит к завышению проводимости вблизи фронта гамма-излучения и, соответственно, к занижению амплитуды и длительности импульса электрического поля. В ряде практических задач такое занижение приводит к получению неадекватных параметров электрических наводок, влияющих на функционирование электронной аппаратуры объектов.

Математическое моделирование рассеяния потока релятивистских электронов в нейтральном газе является весьма сложной проблемой, в частности, по следующим двум причинам. Первая состоит в том, что для построения интегралов столкновений необходимо дифференциальное сечение ионизационного рассеяния электронов всех возможных энергий с молекулами газа. Хорошо изученным является лишь сечение рассеяния на свободных электронах, применимость которого предполагает, что энергии падающего и рассеянных электронов существенно превосходят потенциалы ионизации молекул. Вторая причина заключается в принципиальных отличиях физических картин динамики и взаимодействий электронов различных энергий, что затрудняет их рассмотрение в рамках единой модели. Физически обоснованное разделение электронов на группы по энергиям и построение отдельных моделей для различных групп возможно только в некоторых частных случаях.

Данная работа ставит своей целью формулировку и сравнение моделей тока вторичных электронов в двух предельных случаях, позволяющих выделить существенные физические эффекты на примере задачи в простейшей геометрии.

1. Постановка задачи

Рассмотрим монохроматический параллельный поток квантов, падающий по направлению z, совпадающему с направлением нормали к поверхности бесконечной пластины, выполненной из материала с плотностью порядка 1 г/см^3 и зарядом ядра Z. Пусть Φ полное число квантов, падающих на единицу поверхности за все время импульса, временная форма которого описывается нормированной на единицу функцией $F(t)/t_0$, где t_0 – длительность импульса. Кванты формируют за счет комптоновского рассеяния поток электронов, который также будем считать параллельным и монохроматическим с энергиями $\varepsilon_k \approx 1$ МэВ. Пластина находится в воздухе, средняя цена ионизации ε_i которого равна 33 эВ. Введем следующие обозначения: λ_k – пробег квантов в материале пластины при комптоновском рассеянии, λ_i – ионизационный пробег комптоновских электронов до остановки в материале пластины, l_i – ионизационный пробег электронов до полной потери энергии в воздухе при нормальных условиях. Пусть величина λ_k существенно превышает толщину пластины. Тогда интенсивность начального потока комптоновских электронов с поверхности пластины можно оценить величиной

$$I_k = \Phi \frac{F(t)}{t_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_k (Z_m + 1)}.$$

Изотропизация начального потока комптоновских электронов за счет всей совокупности взаимодействий происходит на длине порядка $l_i/(Z+1)$, где Z – эффективный заряд ядра атомов в воздухе.

Равновесная модель ионизации предполагает, что каждый комптоновский электрон порождает до своей остановки $N(\varepsilon_k) = \varepsilon_k/\varepsilon_i \approx 3 \cdot 10^4$ вторичных электронов. Вторичные электроны находятся в тепловом равновесии с газом и распределены равномерно на всей траектории комптоновского электрона. Тогда концентрацию вторичных электронов можно оценить величиной

$$n_p = \frac{N(\varepsilon_k)(Z+1)}{l_i(\varepsilon_k)} \int_0^t I_k dt'$$

Данная оценка и равновесный по начальному распределению подход в целом справедливы на расстояниях z от пластины, которые превосходят $l_i/(Z+1)$ ~ 40 см. Здесь функцию распределения всей совокупности вторичных электронов можно считать изотропной.

Рассмотрим оценку концентрации вторичных электронов вблизи поверхности пластины, то есть при $z < l_i/(Z+1)$. Пусть l_{i1} – длина пробега комптоновского электрона до первого ионизационного столкновения. (Для азота $l_{i1} \sim 1$см.) Концентрацию вторичных электронов можно оценить следующим образом:

$$n_n = \frac{1}{l_{i1}} \int_0^t I_k dt'.$$

Последняя оценка занижена не более чем на порядок, поскольку не учтены процессы ионизационных столкновений самих вторичных электронов. Величина n_p даже при этом превосходит n_n на два порядка, что весьма существенно при анализе плотности тока. Кроме того, начальное распределение вторичных электронов на таких расстояниях нельзя считать изотропным и находящимся в равновесии с газом, поскольку оно порождается резко анизотропным распределением комптоновских электронов. Если $z < l_i /(Z+1)$, то необходимо построение неравновесной по начальному распределению вторичных электронов модели вторичной ионизации.

2. Равновесная модель плотности тока вторичных электронов

Комптоновский электрон передает атомарному электрону энергию, которая полностью тратится на ионизацию. Вторичный электрон имеет нулевую среднюю скорость. Его тепловая энергия определяется тем условием, что он находится в тепловом равновесии с окружающим газом. В дальнейшем вторичные электроны ускоряются суммарным электрическим полем, у них появляется отличная от нуля дрейфовая скорость $\vec{u}$.

Рассмотрим процессы перераспределения энергии, сопровождающие ускорение вторичных электронов в электрическом поле. Электрическое поле сообщает кинетическую энергию ускоряющемуся электрону. Затем, во время столкновения с молекулой газа, часть полной энергии переходит в кинетическую энергию молекулы, а также тратиться на ее возбуждение или ионизацию. Оставшаяся часть становится тепловой из-за изотропизации скорости. Таким образом, тепловая энергия увеличивается, а время свободного пробега, соответственно, уменьшается. На следующем участке свободного пробега от поля будет получено меньше энергии. Когда передача энергии молекулам среды сравняется с энергией, приобретаемой в электрическом поле, нагрев вторичных электронов прекратится. Установившееся значение тепловой энергии электронов будет, наряду с полем, определять их скорость дрейфа, а значит, и ток проводимости.

Рассмотрим кинетическое уравнение для функции распределения f вторичных электронов.

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial v_z} = I_у(f) + I_н(f) + Q(t,\vec{v}) + Q_{втор}(t,\vec{v}) - p\cdot\beta\cdot f\,, \qquad (1)$$

где e, m – абсолютные величины заряда и массы электрона;

$I_{упр}(f)$, $I_{неупр}(f)$ – интегралы, соответственно, упругих и неупругих столкновений электронов с молекулами,

Q – источник электронов, определяемый потоком комптоновских электронов;

$Q_{втор}$ – источник электронов, возникающих при ионизации молекул вторичными электронами;
β – частота прилипания электронов к молекулам кислорода.

Уравнение (1) является нерелятивистским и локально-однородным по пространственным переменным. Заметим, что локальная однородность следует из того, что длины пробегов вторичных электронов невелики по сравнению размерами полостей и характерной длиной волны электромагнитного поля. Эти условия справедливы для всех практически важных задач. Выбор самой простой геометрии задачи не ограничивает применимости данного рассмотрения. Под скоростью электрона понимается скорость в направлении электрического поля.

Рассмотрим правую часть (1). В общем случае частота ионизационных столкновений комптоновских электронов $\nu_i(\mu_s,\varepsilon,\varepsilon')$ с энергией ε' зависит от энергии вторичного электрона ε и косинуса угла рассеяния μ_s. Тогда источник вторичных электронов равен

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_s \int\limits_{-1}^{1} d\mu_s \int\limits_{\varepsilon_i+2\varepsilon}^{\infty} d\varepsilon' \cdot \nu_i(\mu_s,\varepsilon,\varepsilon') \cdot f_k(\mu',\varepsilon'),$$

где f_k – функция распределения комптоновских электронов, φ_s – азимутальный угол рассеяния, а μ_s – косинус полярного угла рассеяния. Нижний предел интегрирования по ε' – это энергия, при которой комптоновский электрон после столкновения имеет равную с вторичным электроном энергию.

В соответствии с равновесной моделью, вторичные электроны образуются с энергией $\varepsilon = 0$, так как передаваемая им энергия ε_i расходуется на ионизацию. Поэтому источник можно переписать в виде

$$\frac{\delta(\varepsilon)}{4\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_s \int\limits_{-1}^{1} d\mu_s \int\limits_{\varepsilon_i} d\varepsilon' \cdot pN(\varepsilon') \frac{\nu(\varepsilon')}{l_i(\varepsilon')} \cdot f_k(\mu',\varepsilon'),$$

где p – давление газа в атмосферах.

Функция распределения $f_k(\mu',\varepsilon')$ сосредоточена вблизи значений $\varepsilon' \approx \varepsilon_k$, много больших ε_i, поэтому в последнем интеграле можно приближенно заменить ε_i на $\tilde{\varepsilon}$: $\varepsilon_i << \tilde{\varepsilon} << \varepsilon_k$.

Следуя логике равновесного рассмотрения, свернем последнее выражение с функцией распределения Максвелла по энергии $f_м(\varepsilon) = \frac{3}{\sqrt{\pi}\varepsilon_g}\sqrt{\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon_g}} \cdot \exp\left(-\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon_g}\right)$ со средней энергией ε_g, соответствующей температуре газа. Получим равновесный источник вторичных электронов в следующем виде:

$$Q(\varphi,\mu,\varepsilon)=\frac{f_м(\varepsilon)}{4\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_s\int\limits_{-1}^{1}d\mu_s\int\limits_{\widetilde{\varepsilon}}d\varepsilon'\cdot pN_2(\varepsilon')\frac{\nu(\varepsilon')}{l_i(\varepsilon')}\cdot f_k(\mu',\varepsilon')$$

Функцию распределения комптоновских электронов будем рассматривать в виде:

$$f_k(\mu,\varepsilon)=\frac{\Phi(\xi_0)}{\nu(\varepsilon)}\cdot\frac{\lambda_i(\varepsilon)/(Z+1)}{\lambda_k(\xi_0)}\cdot P(\mu,\varepsilon)\cdot\frac{F(t)}{t_0},$$

где $P(\mu,\varepsilon)=\dfrac{K(\xi_0-\varepsilon,\xi_0)}{K_t(\xi_0)}\cdot\dfrac{\delta(\mu-\mu_k(\varepsilon,\xi_0))}{2\pi}$,

а $\mu_k(\varepsilon,\xi_0)=\dfrac{\xi_0+1}{\xi_0}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+2}}$ – косинус угла вылета комптоновского электрона [1], $K(\xi,\xi_0)$ и $K_t(\xi_0)$ – дифференциальное и полное сечения комптоновского рассеяния [1], соответственно.

Подстановка f_k дает следующее выражение для источника:

$$Q(\varphi,\mu,\varepsilon)=p\cdot N(\varepsilon_k)\cdot\frac{\Phi(\xi)}{t_0 l_i(\varepsilon_k)}\cdot\frac{\lambda_i(\varepsilon_k)/(Z+1)}{\lambda_k(\xi)}\cdot F(t)\cdot\frac{f_M(\varepsilon)}{4\pi}. \qquad (2)$$

Здесь ε_k – средняя энергия комптоновских электронов.

Ионизация вторичными электронами описывается аналогично. Под интегралом функция распределения самих вторичных электронов, и вместо пробега до остановки l_i надо подставить их пробег до ионизационного столкновения l_{i1}. Его значение определяется известными экспериментальными данными о полном сечении ионизации при малых энергиях [2].

$$Q_{втор}(\varphi,\mu,\varepsilon)=p\cdot\frac{f_м(\varepsilon)}{4\pi}\cdot\int\limits_{\varepsilon_i}d\varepsilon'\cdot\frac{\nu(\varepsilon')}{l_{i1}(\varepsilon')}\cdot f_0(\varepsilon'), \qquad (3)$$

где $f_0(\varepsilon')$ – нулевой угловой момент $f\ (\varepsilon')$.

Интегралы столкновений выглядят следующим образом [3]:

$$I_y=\int d\varphi_s\,d\theta_s\,sin\theta_s\,\nu_y(v,\theta_s)\cdot\left[f(v,cos\alpha')-f(v,cos\alpha)\right]+$$
$$+\frac{m}{M}\frac{1}{v^2}\frac{d}{dv}v^3\int d\varphi_s\cdot d\theta_s\cdot sin\theta_s\cdot(1-cos\theta_s)\cdot\nu_y(v,\theta_s)\cdot f(v,cos\alpha')$$
$$I_н=\int d\varphi_s\cdot d\theta_s\cdot sin\theta_s\cdot\left[v'\cdot\nu_н(v',\theta_s)\cdot f(v',cos\alpha')-v\cdot\nu_н(v,\theta_s)\cdot f(v,cos\alpha)\right]/v$$

где $\nu_{у,н}(v,\theta)$ – частота упругих или неупругих столкновений, α – угол, определяющий направление скорости v, а интегрирование идет по всей сфере.

Разложим функцию распределения по полиномам Лежандра $f(\mu,v)=\sum_0^\infty f_n(v)\cdot P_n(\mu)$. Если сечение неупругого рассеяния не зависит от угла рассеяния, то:

$$I_y=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\mu)\left\{-f_n(v)\int_{-1}^{1}d\mu_s(1-P(\mu_s))\cdot 2\pi\nu_y(v,\mu_s)+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{M}\frac{1}{v^2}\frac{d}{dv}v^3 f_n(v)\int_{-1}^{1}d\mu_s(1-\mu_s)P_n(\mu_s)\cdot 2\pi\nu_y(v,\mu_s)\right\}$$

$$I_н=\frac{v'}{v}\cdot 4\pi\nu_н(v')f_0(v')-4\pi\nu_н(v)f(v,\mu),\quad v'=\sqrt{\frac{2\varepsilon'}{m}},\ \varepsilon'=\varepsilon+\Delta\varepsilon \tag{4}$$

где $\Delta\varepsilon$ – энергия, передаваемая молекуле газа при неупругом столкновении.

Перейдем от уравнения (1) к гидродинамическому приближению для следующих моментов функции распределения

$$n(t)=\int d\vec{v}\cdot f,\qquad \vec{u}(t)=\frac{\int d\vec{v}\cdot v_z\cdot f}{n(t)},\qquad \bar{\varepsilon}(t)=\frac{\int d\vec{v}\cdot\frac{m\vec{v}^2}{2}\cdot f}{n(t)}-\frac{mu(t)^2}{2},$$

интегрируя его по элементу объема в пространстве скоростей с соответствующими весами. В правой части кинетического уравнения неизвестная функция при этом заменяется распределением Максвелла с определенной выше скоростью дрейфа $\vec{u}$, средней энергией $\bar{\varepsilon}$ и концентрацией n. Предполагается, что моменты правой части меняются при этом мало.

Получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{dn}{dt}=p\frac{\Psi}{t_0}F(t)+p\nu(\varepsilon)\cdot G_u\cdot n-p\cdot\beta(p,E)\cdot n$$
$$\frac{d(un)}{dt}+\frac{eE}{m}\cdot n=-p\nu(\varepsilon)\,G_1(\varepsilon,u)un-p\beta\cdot un$$
$$\frac{d}{dt}\left(n\varepsilon+n\frac{mu^2}{2}\right)+eEun=-p\nu(\varepsilon)\,G_2(\varepsilon,u)n+p\nu(\varepsilon)G_u(\varepsilon,u)n\,\varepsilon_g$$
$$+p\frac{\Psi}{t_0}F(t)\cdot\varepsilon_g-\frac{\varepsilon+mu^2/2}{\theta}\cdot n,$$

где

$$\Psi = N(\varepsilon_k)\cdot\frac{\Phi}{l_i(\varepsilon_k)}\cdot\frac{\lambda_i(\varepsilon_k)/(Z+1)}{\lambda_k}\ ,\ \ \nu(\varepsilon)=N_g\,\sigma_e\sqrt{2\varepsilon/m}\ ,$$

$$G_1=\frac{8}{3\sqrt{6\pi}}\exp\left(-3mu^2/4\varepsilon\right)\int_0^\infty dx\,x^2\,e^{-x}\,g_1\left(\sqrt{3xmu^2/\varepsilon}\right)\sum\sigma\left(2\varepsilon x/3\right)\ ,$$

$$G_2=\frac{4}{\sqrt{6\pi}}\exp\left(-3\,mu^2/4\varepsilon\right)\int_0^\infty dx\,x\,e^{-x}\,g_2\left(\sqrt{3xmu^2/\varepsilon}\right)\sum\Delta\left(2\varepsilon x/3\right)\sigma\left(2\varepsilon x/3\right)\ ,$$

$$G_u=\frac{4}{\sqrt{6\pi}}\exp\left(-3\,mu^2/4\varepsilon\right)\int_0^\infty dx\,x\,e^{-x}\,g_2\left(\sqrt{3xmu^2/\varepsilon}\right)\sigma_u\left(2\varepsilon x/3\right)\ ,$$

$$g_1(z)=3(z\,\mathrm{ch}(z)-\mathrm{sh}(z))/z^3\ ,\qquad g_2(z)=\mathrm{sh}(z)/z\,.$$

$\sigma(\varepsilon)$ – сечение столкновения электрона энергии ε с молекулой газа;
$\sigma_u(\varepsilon)$ – сечение ионизационного столкновения электрона энергии ε с молекулой газа;
$\Delta(\varepsilon)$ – энергия, отдаваемая электроном энергии ε при столкновении с молекулой газа;
Ψ – характерная концентрация электронов.
Суммирование подразумевается по всем возможным типам столкновений.

Выразим время в единицах $t_0=10^{-8}\ c$, электрическое поле в $E_0=1$СГСЭ, тепловую энергию – в единицах $\varepsilon_0=e/2N_g\,\sigma_e=5.56\cdot10^{-3}$эВ, скорость дрейфа – в единицах $v_0=\sqrt{2\varepsilon_0/m}=4.4\cdot10^6$ см/сек, а концентрацию – в единицах $p\Psi$. Учтем, что $\nu_0=N_g\,\sigma_e v_0=1.2\cdot10^{11}$ 1/сек – характерная частота упругих столкновений при нормальных условиях. Преобразуем полученные гидродинамические уравнения к безразмерному виду:

$$\frac{dn}{dt}=F(t)+p\,\nu_0 t_0\sqrt{\varepsilon}\cdot G_u(\varepsilon,u)\cdot n-p\cdot\beta(p,E)\cdot n \tag{5}$$

$$\frac{du}{dt}=-\nu_0\,t_0\,E-\left(p\,\nu_0 t_0\sqrt{\varepsilon}\ \left(G_1(\varepsilon,u)+G_u(\varepsilon,u)\right)+\frac{F(t)}{n(t)}\right)u \tag{6}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=p\,\nu_0\,t_0\,\sqrt{\varepsilon}\left(2G_1(\varepsilon,u)\cdot u^2-G_u(\varepsilon,u)\cdot\left(\varepsilon-\varepsilon_g-u^2\right)-\frac{G_2(\varepsilon,u)}{\varepsilon_0}\right)-\left(\varepsilon-\varepsilon_g-u^2\right)\frac{F(t)}{n(t)} \tag{7}$$

где

$$\beta(p,E)=\frac{0.623p}{\sqrt{0.351+E/p}}+3\exp\left(-\frac{69.6}{E/p}\right).$$

Стационарные решения $u(p,E)$ и $\varepsilon(p,E)$ системы (5–7), а также коэффициент Таунсенда $\alpha(p,E) = \nu_0 t_0 \sqrt{\varepsilon(p,E)} \cdot G_u(\varepsilon(p,E),u(p,E))/u(p,E)$, получены в [4]. Они хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Наличие источника $F(t)$ позволяет заменить дифференциальное уравнение (6) простым соотношением между *n, u,* ε и *E* в диапазоне давлений от 10^{-4} до 1 атм. Действительно, отношение $F(t)\big/n(t) \approx t^{-1}$ велико при малых *t*. При больших *t* становится большим выражение $p\nu_0 t_0 \sqrt{\varepsilon}\,\left(G_1(\varepsilon,u) + G_u(\varepsilon,u)\right)$. Даже при $p = 10^{-4}$ оно порядка 15, а при $p = 1$ – на 3 порядка больше. Поэтому в (6) можно пренебречь производной $du/dt \approx u$ по сравнению со вторым слагаемым в правой части. Отсюда получается соотношение

$$u = -\nu_0 t_0 E \Bigg/ \left(p\nu_0 t_0 \sqrt{\varepsilon}\,\left(G_1(\varepsilon,u) + G_u(\varepsilon,u)\right) + \frac{F(t)}{n(t)} \right).$$

Имея в виду, что оно разрешено относительно *u* , то есть получена функция *u = U(t,ε,E)*, в дальнейшем ее и будем полагать под обозначением *u*.

Замкнем систему (5–7) уравнением для электрического поля:

$$\frac{dE}{dt} + 4\pi J + 4\pi J_{cm} = 0\,,$$

где

$$J = -enu \cdot n_0 u_0\,,$$

Для моноэнергетического потока комптоновских электронов с функцией распределения

$$f_k(t,\mu,\varepsilon) = \frac{\Phi}{v(\varepsilon)} \cdot \frac{\lambda_i(\varepsilon)/(Z+1)}{\lambda_k} \cdot \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) \cdot \frac{\delta(\mu - \mu_k)}{2\pi} \cdot \frac{F(t)}{t_0}$$

получим

$$J_{cm} = -e\mu_k \Phi \cdot \frac{\lambda_i(\varepsilon_k)/(Z+1)}{\lambda_k(\xi_0)} \cdot \frac{F(t)}{t_0}$$

В безразмерных переменных

$$\frac{dn}{dt} = F(t) + p\nu_0 t_0 \sqrt{\varepsilon} \cdot G_u(\varepsilon,u)\cdot n - p\cdot\beta(p,E)\cdot n \tag{8}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = p\nu_0\, t_0\, \sqrt{\varepsilon}\left(2G_1\cdot u^2(\varepsilon,u) - G_u(\varepsilon,u)\cdot\left(\varepsilon-\varepsilon_g-u^2\right) - \frac{G_2(\varepsilon,u)}{\varepsilon_0}\right) - \\ -\left(\varepsilon-\varepsilon_g-u^2\right)\frac{F(t)}{n(t)} \tag{9}$$

$$\frac{dE}{dt} - p\cdot\frac{\omega_0^2 t_0}{\nu_0}\cdot n\cdot u = \mu_k \Phi\frac{4\pi e}{E_0}\cdot\frac{\lambda_i(\varepsilon_k)/(Z+1)}{\lambda_k(\xi_0)}\cdot F(t), \tag{10}$$

где $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 \Psi / m}$ – частота электронных колебаний.
Начальные условия – $n(0)=0, \quad \varepsilon(0)=\varepsilon_g/\varepsilon_0,\ E(0)=0$

Расчеты радиационной проводимости традиционно основываются на уравнениях химической кинетики для концентрации вторичных электронов и ионов. Вычисление тока проводимости проводится по экспериментальным данным о стационарной скорости дрейфа и коэффициенте Таунсенда. Отличие такого "стационарного" подхода от последовательной гидродинамической модели равновесной проводимости можно выявить, если, наряду с решением системы (8–10), рассмотреть стационарную по скорости дрейфа и коэффициенту Таунсенда систему уравнений:

$$\frac{dn}{dt} = F(t) + p\cdot\alpha_{эксп}(p,E)\cdot u_{эксп}(p,E)t_0\cdot n - p\cdot\beta_{эксп}(p,E)\cdot n$$

$$\frac{dE}{dt} - p\cdot\frac{\omega_0^2 t_0}{\nu_0 u_0}\cdot n\cdot u_{эксп}(p,E) = \mu_k\Phi\frac{4\pi e}{E_0}\cdot\frac{\lambda_i(\varepsilon_k)/(Z+1)}{\lambda_k(\xi_0)}\cdot F(t) \tag{11}$$

Электромагнитное поле возникает воздействием нестационарного потока ионизирующего излучения, а скорость дрейфа, тепловая энергия и коэффициент Таунсенда мгновенно подстраиваются под данное значение поля.

Результаты расчетов приведены на рис. 1 для системы (8–10) и на рис. 2 для стационарной системы (11), приводимых в Приложении. Видно, что стационарный подход приводит к некоторому занижению электрического поля.

2.Неравновесная модель плотности тока вторичных электронов

Обратимся к модели вторичной ионизации при $z < l_i/(Z+1)$. Частный случай, для которого возможно построение неравновесного источника вторичных электронов рассмотрен в [5]. Вторичные электроны будем описывать кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{eE}{m}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial v}\mu+\frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot\frac{1-\mu^2}{v}\right)=I_{упр}+Q \tag{12}$$

Представим все входящие в уравнение функции в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$.

$$Q=\sum_0^\infty Q_n(v)\cdot P_n(\mu),\qquad f=\sum_0^\infty f_n(v)\cdot P_n(\mu),$$

$$I_{упр}=\sum_0^\infty\left[-f_n(v)\cdot\hat{\nu}_n(v)+\frac{\delta}{2}\cdot\frac{1}{v^2}\frac{d}{dv}\left(v^3\cdot f_n\cdot\breve{\nu}_n(v)\right)\right]\cdot P_n(v).$$

где $\delta=\dfrac{2m}{M}\approx 4\cdot 10^{-4}$,

$$\hat{\nu}_n(v)=\int_{-1}^{1}d\mu\cdot(1-P_n(\mu))\cdot 2\pi\nu_e(v,\mu)=v\cdot pN_g\cdot\int_{-1}^{1}d\mu\cdot(1-P_n(\mu))\cdot 2\pi\sigma_e(\mu),$$

$$\breve{\nu}_n(v)=\int_{-1}^{1}d\mu\cdot(1-\mu)\cdot P_n(\mu)\cdot 2\pi\nu_e(v,\mu)=v\cdot pN_g\cdot\int_{-1}^{1}d\mu\cdot(1-\mu)\cdot P_n(\mu)\cdot 2\pi\sigma_e(\mu).$$

Полагаем, сечение упругих столкновений изотропно и не зависит от скорости. Тогда:

$$\hat{\nu}_n(v)=\begin{cases}0, & n=0\\ \dfrac{v}{l_e}, & n\ge 1\end{cases}\qquad \breve{\nu}_n(v)=\begin{cases}\dfrac{v}{l_e}, & n=0\\ -\dfrac{v}{3l_e}, & n=1\\ 0, & n\ge 2\end{cases}$$

где $l_e=1/pN_g\sigma_e$ – пробег относительно упругих столкновений.

Получим уравнений для первых двух коэффициентов разложения

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}-\frac{eE}{m}\cdot\frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2\cdot f_1)=\frac{\delta}{2}\cdot\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^3\cdot\frac{v}{l_e}\cdot f_0\right)+Q_0(v)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}-\frac{eE}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v}=-\frac{v}{l_e}f_1+\frac{\delta}{2}\cdot\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^3\cdot\left(-\frac{v}{3l_e}\right)\cdot f_1\right)+Q_1(v)$$

Коэффициенты f_0 и f_1 определяют соответственно концентрацию вторичных электронов и их среднюю скорость:

$$n=\int d\vec{v}\cdot f(\vec{v})=4\pi\int_0^\infty dv\cdot v^2\cdot f_0(v)\qquad nu=\int d\vec{v}\cdot v_z\cdot f(\vec{v})=\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dv\cdot v^3\cdot f_1(v)$$

Рассмотрим источник вторичных электронов $Q(\vec{v})$. Пусть

$$\sigma_{i1}(\mu,\varepsilon,\varepsilon')=\sigma_{i1}(\varepsilon')\cdot\frac{\varepsilon_i}{(\varepsilon+\varepsilon_i)^2}\cdot\frac{\delta(\mu-\mu_i(\varepsilon,\varepsilon'))}{2\pi},$$

$\sigma_{i1}(\varepsilon)=2\cdot Z\cdot 2\pi r_0^2\,\dfrac{(\varepsilon+mc^2)^2}{\varepsilon(\varepsilon+2mc^2)}\cdot\dfrac{mc^2}{\varepsilon_i}$ – дифференциальное и полное сечение рассеяния на свободных электронах [1].

$$\mu_i(\varepsilon,\varepsilon')=\sqrt{\frac{(\varepsilon_i+\varepsilon)\cdot(2mc^2+\varepsilon')}{\varepsilon'\cdot(\varepsilon_i+2mc^2+\varepsilon)}}$$

Тогда источник будет иметь вид:

$$\frac{\varepsilon_i}{(\varepsilon+\varepsilon_i)^2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_s\int\limits_{-1}^{1}d\mu_s\int\limits_{\varepsilon_i+2\varepsilon}d\varepsilon'\cdot pN_g\sigma_i(\varepsilon')\cdot\frac{\delta(\mu-\mu_i(\varepsilon,\varepsilon'))}{2\pi}\cdot v(\varepsilon')\cdot f_k(\mu',\varepsilon'),$$

Подставляя сюда усредненную функцию распределения комптоновских электронов и выполняя интегрирование по углам, в безразмерных переменных получим:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}-\delta pb\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon^{1.5}\cdot f_0\right)=aE\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\varepsilon^{0.5}\cdot f_1)+p\frac{\Psi}{4\pi}\cdot F(t)\cdot\frac{\varepsilon_i}{(\varepsilon+\varepsilon_i)^2}\tag{13}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+pb\cdot\varepsilon^{0.5}\cdot f_1=3aE\cdot\varepsilon\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{f_0}{\varepsilon^{0.5}}\right)+p\frac{3\Psi}{4\pi}\cdot F(t)\cdot\mu_k\cdot\mu_i\cdot\frac{\varepsilon_i}{(\varepsilon+\varepsilon_i)^{1.5}}\tag{14}$$

где

$$\Psi=\frac{\Phi}{l_{i1}(\varepsilon_k)}\cdot\frac{\lambda_i(\varepsilon_k)/(Z+1)}{\lambda_k},\quad a=\frac{eE_0t_0v_0}{3\varepsilon_0}=\frac{2et_0}{3mv_0}\approx 55,\quad b=\frac{v_0t_0}{l_e}\approx 2\cdot 10^4,$$

$v_0=\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0}{m}}\approx 0.6\cdot 10^8$, ε выражено в единицах $\varepsilon_0=1$ эВ.

Концентрация и средняя скорость выражаются теперь следующим образом:

$$n=4\pi\int\limits_0^{\infty}d\varepsilon\cdot f_0(\varepsilon)\qquad\qquad nu=\frac{4\pi}{3}\cdot v_0\cdot\int\limits_0^{\infty}d\varepsilon\cdot\sqrt{\varepsilon}\cdot f_1(\varepsilon)$$

Выполним дифференцирование в системе (13–14), положив $E=0$:

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial t} - \delta pb \cdot \varepsilon^{1.5} \cdot \frac{\partial f_{00}}{\partial \varepsilon} = 1.5 \cdot \delta pb \cdot \varepsilon^{0.5} \cdot f_{00} + p \cdot \frac{\Psi}{4\pi} \cdot F(t) \cdot S_0(\varepsilon) \tag{15}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial t} = -pb \cdot \varepsilon^{0.5} \cdot f_{10} + p \cdot \frac{3\Psi}{4\pi} \cdot F(t) \cdot \mu_k \cdot \mu_i \cdot S_1(\varepsilon) \tag{16}$$

где: $S_0(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon_i}{(\varepsilon + \varepsilon_i)^2}$, $S_1(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon_i}{(\varepsilon + \varepsilon_i)^{1.5}}$.

Система (15–16) имеет следующее решение (здесь $T = 2/(\delta pb\sqrt{\varepsilon})$):

$$f_{00}(t,\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\Psi}{8\pi} \cdot \dfrac{pT}{\varepsilon} \cdot \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon\cdot(1-t/T)^{-2}} dx F\left(t - T \cdot \left(1 - \sqrt{\varepsilon / x}\right)\right) S_0(x), & t \le T\delta \\ \dfrac{\Psi}{8\pi} \cdot \dfrac{pT}{\varepsilon} \cdot \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} dx F\left(t - T \cdot \left(1 - \sqrt{\varepsilon / x}\right)\right) S_0(x), & t > T\delta \end{cases}$$

При $t \to 0$ $\quad f_{00}(t,\varepsilon) \to p\dfrac{\Psi}{4\pi} S_0(\varepsilon)\displaystyle\int_0^t d\tau F(\tau)$, $\quad f_{00}(t,0) = p\dfrac{\Psi}{4\pi} S_0(0)\displaystyle\int_0^t d\tau F(\tau)$.

Зависимость средней по распределению $f_{00}(t,\varepsilon)$ энергии вторичных электронов представлена на рис.3 Приложения.

$$f_{10}(t,\varepsilon) = p\frac{3\Psi}{4\pi} \cdot \mu_k \cdot \mu_i \cdot S_1(\varepsilon) \cdot \int_0^t d\tau \cdot F(t-\tau) \cdot \exp(-pb \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \tau)$$

Ток вторичных электронов будет равен

$$J_0 = -p \cdot \Psi e v_0 \cdot \mu_k \mu_i \cdot H(t),$$

где

$$H(t) = \int_0^t d\tau \cdot F(t-\tau) \int_0^\infty d\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon_i \sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon_i + \varepsilon)^{1.5}} \cdot \exp(-pb \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \tau)$$

Энергия, передаваемая основной группе электронов электрическим полем на длине свободного пробега равна $\Delta_1 = e^2 E^2 l_e^2 \big/ \left(4p^2 \bar{\varepsilon}\right)$, а теряемая в столкновениях с молекулой – $\Delta_2 = \delta \cdot \bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon}$ – средняя энергия. Отношение этих величин равно

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{e^2 E^2 l_e^2}{4\delta p^2 \bar{\varepsilon}^2} = \frac{0.77}{\bar{\varepsilon}^2} \cdot \frac{E}{p} << 1, \tag{17}$$

для всех практически актуальных наборов исходных данных. Будем искать решение системы (13–14) в виде $f_{00}+f_{01}$ и $f_{10}+f_{11}$, где f_{01} и f_{11} – малые поправки.

Условие (17) – необходимое условие малости поля. Действительно, если выполняется условие $f_{01} << f_{00}$, то средняя энергия вторичных электронов будет определяться распределением f_{00}. Это распределение формируется только процессами потери энергии в упругих столкновениях. Значит, столкновения гораздо существеннее влияют на энергию электронов, чем электрическое поле, что и выражает условие (17).

Считая условие малости поля выполненным, запишем уравнения для поправок:

$$\frac{\partial f_{01}}{\partial t}-\delta pb\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon^{1.5}\cdot f_{01}\right)=aE\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\varepsilon^{0.5}\cdot f_{10}) \qquad (18)$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial t}+pb\cdot\varepsilon^{0.5}\cdot f_{11}=3aE\cdot\varepsilon\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{f_{00}}{\varepsilon^{0.5}}\right) \qquad (19)$$

Для вычисления плотности тока нам потребуется только знание величины f_{11}:

$$f_{11}(t,\varepsilon)=3a\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t d\tau\cdot E(\tau)\cdot f_{00}(\tau,\varepsilon)\cdot\exp(-pb\cdot\sqrt{\varepsilon}\cdot(t-\tau))$$

Вклад в ток проводимости от $f_{11}(t,\varepsilon)$ имеет вид

$$J_1=1.5a\cdot e\Psi\cdot\int_0^t d\tau\cdot E(t-\tau)\int_0^\infty d\varepsilon\cdot f_{00}(t-\tau,\varepsilon)\cdot\exp(-pb\cdot\sqrt{\varepsilon}\cdot\tau)$$

Учитывая то, что внутренний интеграл в данной формуле является медленно меняющейся функцией от τ по сравнению с $E(t-\tau)$, можно записать J_1 в виде :

$$J_1=1.5a\cdot e\Psi v_0\cdot N(t)G(t)E(t)$$

где

$$G(t)=\int_0^\infty d\varepsilon\cdot\frac{f_{00}(t-\tau,\varepsilon)}{N(t)}\cdot\exp(-pb\cdot\sqrt{\varepsilon}\cdot\tau)$$

Окончательное выражение для плотности тока имеет вид:

$$J=-p\cdot\mu_k\mu_i\cdot e\Psi v_0\cdot H(t)+p\cdot 1.5a\cdot e\Psi v_0\cdot N(t)\cdot G(t)\cdot E(t)$$

Подставляя в уравнение для поля выражения для плотностей стороннего тока и тока проводимости, получим:

$$\frac{dE}{dt} + pa \cdot 6\pi e \Psi v_0 G(t) N(t) E(t) = \mu_k \cdot 4\pi e \Phi \frac{\lambda_i}{\lambda_k (Z+1)} \cdot \frac{F(t)}{t_0} + p\mu_k \mu_i \cdot 4\pi e \Psi v_0 H(t)$$

В безразмерном виде

$$\frac{dE}{dt} + C_1 \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot E(t) = C_2 \cdot H(t) + C_3 \cdot F(t), \tag{20}$$

где

$$C_1 = p \cdot 1.5a \cdot \frac{4\pi e \Psi v_0 t_0}{E_0} = 6.2 \cdot 10^2, \quad C_2 = p \cdot \mu_i \mu_k \cdot \frac{4\pi e \Psi v_0 t_0}{E_0} = 8.6 \cdot 10^{-3},$$

$$C_3 = \mu_k \cdot \frac{4\pi e}{E_0} \cdot \frac{\lambda_i / (Z+1)}{\lambda_k} \Phi = 6.8,$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид:

$$E(t) = \int_0^t d\tau \cdot (C_2 H(\tau) + C_3 F(\tau)) \cdot exp(-C_1 \int_\tau^t d\eta \cdot N(\eta) \cdot G(\eta))$$

График *E(t)* показан на рис.4 Приложения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены равновесная и неравновесная модель ионизации исходно нейтрального газа потоком электронов высокой энергии. Модели применимы в задачах математического моделирования радиационной генерации электромагнитных полей в полостях любой геометрии. Основным физическим приближением, использованным при построении неравновесной модели, является применение дифференциального сечения ионизационного рассеяния на свободных электронах для определения параметров начального распределения вторичных электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Экспериментальная ядерная физика. Под ред. Э.Сегре. М.:ИЛ, 1955

2. И.Мак–Даниэль Процессы столкновений в ионизированных газах. М.: Мир, 1967

3. В.Л.Гинзбург, Ф.В.Гуревич Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электрическом поле, УФН 70, 201, 1960.

4. А.В.Березин и др. Однородная гидродинамическая модель для электронов проводимости в слабоионизованном газе. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, № 8 за 2000 г.

5. А.В.Березин и др. Радиационное возбуждение электрического поля в заполненном газом объекте с неоднородной структурой. – Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, № 37, 2001 г.