Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша
Российской Академии Наук

В.А. Мельдианова, Е.И. Кугушев

Об инвариантных многообразиях механических систем.

Москва 2002

Аннотация. Устанавливается тип инвариантных многообразий для некоторых механических систем. Доказывается несколько утверждений об эквивалентности фазовых потоков таких многообразий,

Ключевые слова: инвариантные многообразия, механические системы, неголономные системы

Abstract. Invariant manifolds of hamiltonian dynamic systems are investigated. In some cases the type of such manifolds are established. Some statements are approved about the equvalenece of phase flows of such manifolds.

Key words: invariant manifolds, hamiltonian dynamic systems, nonholonomoc systems

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-01-00508, 02-01-00352 и 02-07-90027).

Содержание

Введение

Известно [1-4], что гамильтонова система порядка n, имеющая независимую систему n первых интегралов, образующих конечномерную алгебру Ли относительно скобки Пуассона, интегрируема в квадратурах, и компактная связная компонента инвариантного многообразия уровня этой системы представляет собой инвариантный тор. При этом требуется, чтобы размерность алгебры первых интегралов в сумме с ее рангом совпадала с размерностью инвариантного многообразия. Такая система первых интегралов (и само инвариантное многообразие) называется лиувиллевой.

В данной работе доказывается несколько утверждений, об инвариантных многообразиях, не являющихся лиувиллевыми, а также об эквивалентности фазовых потоков на них. Результаты работы можно рассматривать как обобщение известных утверждений о том, что для натуральных консервативных механических систем с двухмерным, компактным конфигурационным многообразием, при достаточно больших значениях константы интеграла энергии, его поверхность уровня представляет собой гладкое расслоение с конфигурационным пространством в качестве базы и слоем S^1 [5].

Для натуральных механических систем вводится понятие кинематической независимости первых интегралов на многообразии их уровней. Оно состоит в том, что естественная проекция касательного расслоения фазового пространства является регулярной в каждой точке многообразия уровней. Оказывается, что если система n кинематически независимых первых интегралов высекает компактное инвариантное многообразие M^n, то оно является конечнолистным накрытием конфигурационного пространства. В окрестности M^n многие соседние инвариантные многообразия диффеоморфны M^n и фазовые потоки на них эквивалентны. Аналогичные утверждения формулируются и для систем $k \leq n$ кинематически независимых первых интегралов.

Следует отметить, что условие кинематической независимости является довольно сильным, и далеко не всегда имеет место. Тем не менее, системы, удовлетворяющих рассматриваемым здесь условиям, имеются, и мы приводим их примеры. Опишем кратко содержание работы.

В первом разделе, без использования понятия кинематической независимости, рассматривается простой известный пример – волчок Эйлера, у которого интегралы моментов высекают компактные трёхмерные нелиувиллевые многообразия диффеоморфные конфигурационному пространству $SO(3)$. Оказывается, среди этих многообразий довольно много эквивалентных с точки зрения движения на них.

Во втором разделе приводятся необходимые для дальнейшего, известные утверждения о топологических свойствах многообразий уровня системы функций, заданных на гладком многообразии, которое гладко проектируется на некое другое гладкое многообразие.

В третьем разделе формулируются утверждения, касающиеся кинематической независимости и топологических свойств многообразий A уровня системы функций, заданных на гладком многообразии B, которое гладко проектируется на некое другое гладкое многообразие C. При этом требуется, чтобы $\dim B > \dim C$ и $\dim A = \dim C$. Утверждения формулируются в терминах теории накрытий. Результаты этого раздела, сформулированные через условие регулярности отображений хорошо известны [6, 7]. В четвёртом разделе формулируются утверждения, касающиеся кинематической независимости и топологических свойств многообразий A уровня системы функций, заданных на гладком многообразии B, которое гладко проектируется на некое другое гладкое многообразие C. При этом требуется, чтобы $\dim B > \dim C$ и $\dim A \geq \dim C$. Утверждения формулируются в терминах теории гладких расслоений.

В пятом разделе результаты предыдущих разделов формулируются для специального случая многообразий, возникающих в механических системах. В этом случае многообразия уровня системы функций располагаются в фазовом пространстве, естественным образом проектирующемся на конфигурационное пространство.

В шестом разделе рассматривается несколько простых механических систем. Первые два примера (тяжёлые точки на сфере и на горизонтальном торе) – это системы с двумя степенями свободы, имеющие, кроме интеграла энергии, ещё один первый интеграл. В соответствии с теоремой Лиувилля, в обоих случаях многообразие уровня этих интегралов является двухмерным тором. Однако условие кинематической независимости выполняется только в одном из них. Кроме того, приводится общее утверждение о строении многообразия уровня интеграла энергии. Рассматриваются многообразия уровня первых интегралов в задаче о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой и в задаче о движении волчка Эйлера. В седьмом разделе рассматриваются свойства многообразий уровня первых интегралов движения для волчка Эйлера, к которому добавлен одностепенной эксцентрик.

В восьмом разделе рассматриваются свойства многообразий уровня первых интегралов движения неголономной системы, представляющей собой динамически симметричный тяжёлый конёк, катающийся по поверхности горизонтально лежащего тора.

В девятом разделе доказывается несколько простых утверждений об эквивалентности фазовых потоков на многообразиях уровня первых интегралов движения при различных значениях их констант.

В последнем разделе исследуется вопрос о кинематической независимости первых интегралов линейных по скоростям. Показывается, что, если эти интегралы порождаются независимыми полями симметрий, то при достаточно больших значениях константы интеграла энергии полная система интегралов является кинематически независимой.

1. Простой пример.

В данном разделе мы рассмотрим пример нелиувиллевой системы первых интегралов, и покажем, что она высекает инвариантное многообразие диффеоморфное многообразию конфигурационного пространства. И, что среди этих многообразий довольно много эквивалентных с точки зрения движения на них. В следующих разделах результаты данного раздела будут сформулированы в виде общих утверждений. Результаты этого раздела являются общеизвестными (см. [8]), однако, мы сформулируем их в форме, согласующейся с утверждениями следующих разделов.

Обратимся к случаю Эйлера-Пуансо движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки (будем рассматривать основной случай, когда тензор инерции твердого тела невырожден). Для простоты обозначений рассмотрим эту задачу не в Гамильтоновом, а в Лагранжевом формализме. Конфигурационное многообразие здесь – это пространство ориентаций твердого тела $SO(3)$, а фазовое пространство – это касательное расслоение $P = TSO(3) = SO(3) \times R^3$, т.е. пространство ориентаций и мгновенных угловых скоростей движения твердого тела с неподвижной точкой. Поскольку в данном случае момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю, то система допускает три первых интеграла движения – компоненты момента количества движения $\overline{K} = (K_x, K_y, K_z)$ в абсолютном пространстве. Эти интегралы не находятся в инволюции. Но, в совокупности с интегралом энергии, они образуют лиувиллеву систему и, в общем случае, высекают в фазовом пространстве двухмерные торы (см., например [1]).

<u>*Утверждение 1.1.*</u> Рассмотрим инвариантное многообразие M_K уровня компонент момента количества движения

$$M_K = \{p \in P : K_x = c_x^0, K_y = c_y^0, K_z = c_z^0\}$$

Докажем, что M_K диффеоморфно конфигурационному многообразию $SO(3)$.

<u>*Доказательство*</u>. Поскольку фазовое пространство есть прямое произведение $SO(3)$ и R^3, то любую его точку $p \in P$ можно представить парой $p = (X, \Omega)$, где $X \in SO(3)$ описывает ориентацию твердого тела в пространстве, а $\Omega \in R^3$ характеризует его скорость движения (т.е. мгновенную угловую скорость). Обозначим π – естественную проекцию фазового пространства на конфигурационное: $\pi : P \to SO(3)$, $\pi(p) = X$, и F – сужение этого отображения на M_K: $F = \pi|_{M_K} : M_K \to SO(3)$. Покажем, что F является диффеоморфизмом M_K и $SO(3)$. Гладкость F следует из гладкости естественной проекции. Докажем его инъективность (т.е. взаимную однозначность), и сюръективность (т.е. то, что оно является отображением на все пространство $SO(3)$).

Инъективность. Возьмём две любые различные точки $p_1 = (X_1, \Omega_1)$ и $p_2 = (X_2, \Omega_2)$ на M_K: $p_1, p_2 \in M_K$, $p_1 \neq p_2$. Допустим противное – пусть $F(p_1) = F(p_2)$. Поскольку $F(X, \Omega) = X$, то это означает, что $X_1 = X_2$ при том, что $\Omega_1 \neq \Omega_2$. В терминах нашей механической системы можно сказать, что при заданной ориентации твердого тела X_1 мы можем найти два разных вектора мгновенной угловой скорости движения Ω_1 и Ω_2, которым будет отвечать один и тот же вектор кинетического момента $\overline{K} = (K_x, K_y, K_z)$. Пусть J – матрица инерции твердого тела в абсолютных осях при его ориентации X_1. Тогда $K = J\Omega_1 = J\Omega_2$. И, поскольку тензор инерции невырожден, то $\det J \neq 0$ и $\Omega_1 = \Omega_2$, т.е., мы приходим к противоречию.

Сюръективность. Пусть $X \in SO(3)$. Нам надо показать, что найдётся такой вектор мгновенной угловой скорости движения твердого тела $\Omega \in R^3$, что $(X, \Omega) \in M_K$. Пусть опять J – матрица инерции твердого тела в абсолютных осях при его ориентации X. Возьмем вектор $c^0 = (c^0_x, c^0_y, c^0_z)$. Тогда $\Omega = J^{-1} c^0$ является искомым вектором мгновенной угловой скорости. Доказательство закончено.

Обозначим $c = (c_x, c_y, c_z)$ – вектор констант интегралов момента количества движения. Каждому значению этого вектора соответствует инвариантное многообразие уровня интегралов компонент момента количества движения $M_K(c) = \{p \in P : K_x = c_x, K_y = c_y, K_z = c_z\}$. Обозначим $c^0 = (c^0_x, c^0_y, c^0_z)$ – некий выделенный набор этих констант. Покажем теперь, что в окрестности многообразия $M_K(c^0)$ довольно много инвариантных многообразий уровня, на которых движение устроено так же, как на M_K.

Будем говорить, что движение на многообразиях $M_K(c^0)$ и $M_K(c^1)$ устроено, или, что фазовые потоки на них эквивалентны, если существует диффеоморфизм $W : M_K(c^0) \to M_K(c^1)$, при котором фазовый поток на $M_K(c^0)$ переходит в фазовый поток на $M_K(c^1)$.

Утверждение 1.2. В окрестности константы c^0 найдется гладкое двухпараметрическое семейство констант $c = c(u, v)$, такое, что потоки на $M_K(c(u, v))$ эквивалентны потоку на $M_K(c^0)$.

Доказательство. В нашем случае поворот абсолютной системы координат эквивалентен повороту вектора момента количества движения в обратном направлении. При повороте системы координат, инвариантное многообразие, соответствующее какому-либо вектору констант c, перейдёт в многообразие соответствующее повёрнутому вектору констант. Движения при этом, естественно совпадут. Поэтому двухпараметрическое семейство констант лежит на поверхности двухмерной сферы с радиусом равным $\left\|c^0\right\|$.

2. Многообразия уровня.

Сформулируем несколько общих утверждений, имея в виду их дальнейшее применение к механическим системам. Рассмотрим гладкие связные многообразия N^r и K^s размерностей r и s соответственно, причем $r > s$. Пусть $g : N^r \to K^s$ – гладкое отображение N^r на K^s (сюръекция). Для краткости будем здесь называть это отображение *кинематическим*. Пусть на N^r определена система из k гладких функций $F = \{f_i\}$, $i = 1,2,...,k$. Для вектора $c = (c_1, c_2,..., c_k) \in R^k$ обозначим M_c – множество уровня системы F, т.е.

$$M_c = \{x \in N^r : f_i(x) = c_i, \forall i = 1,2,..., k\}$$

Ниже мы будем рассматривать не все множество, M_c а только какую-нибудь его связную компоненту, обозначая ее также M_c.

Пусть система F функционально независима на M_c (т.е., в каждой точке M_c дифференциальные формы df_i линейно независимы), тогда M_c является замкнутым подмногообразием. В некоторой ее открытой окрестности нет других точек этого многообразия уровня. В локальной системе координат $x = (x_1, x_2,..., x_r)$ условие функциональной независимости записывается в виде условия

$$rank\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\| = k \qquad (2.1)$$

Обозначим $D^k(c,\varepsilon) \subset R^k$ открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $c \in R^n$: $D^n(c,\varepsilon) = \{a \in R^n : \|a - c\| < \varepsilon\}$.

Утверждение 2.1. Пусть M_c компактно. Существует некоторое $\varepsilon > 0$, такое, что для всех $a \in D^n(c,\varepsilon)$ множество M_a уровня системы функций F представляет собой замкнутое компактное подмногообразие диффеоморфное M_c. Объединение всех M_a образует открытую окрестность M_c диффеоморфную прямому произведению $D^n(c,\varepsilon) \times M_c$.

Доказательство. Такое утверждение является одним из основных в теории Морса (см., например, [9]). Приведём здесь схему доказательства. Строим в окрестности M_c семейство гладких, ограниченных векторных полей v_i, $i = 1,2,..., k$ таких, что

$$v_i(f_i) \equiv 1, \text{ и } v_i(f_j) \equiv 0 \text{ при } i \neq j \qquad (2.2)$$

Возьмём вектор констант $a \in R^k$ достаточно близким к c. Построим векторное поле $v = \sum_i (a_i - c_i) v_i$. Его траектории могут быть продолжены неограниченно во времени. Сдвиг по ним за время равное единице диффеоморфно переводит M_c в M_a. Построение векторных полей v_i можно провести, например, следующим образом. Покроем M_c конечной системой координатных окрестностей в N^r таких, что в каждой из них условие (2.1) выполняется за счёт линейной независимости одного и того же набора столбцов якобиевой матрицы. Для окрестности l этот набор столбцов обозначим A_l. Произведём разбиение единицы $\{\varphi_l\}$ для этой системы окрестностей. Внутри каждой окрестности l в локальных координатах строим векторные поля v_{il}, удовлетворяющие (2.2). Для этого разрешаем систему $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\| V_l = E$ относительно набора столбцов A_l. Здесь V_l – матрица $n \times k$ локальных координат векторов v_{il}, а E – единичная матрица $k \times k$. Суммирование этих полей с весами φ_l даст искомый результат.

Замечание 2.1. Разобьём систему функциональных констант c на две группы $c = (c^1, c^2)$, $c^1 \in R^h$, $c^2 \in R^{k-h}$. Будем изменять теперь только константы c^1. Тогда из утверждения 2.1 следует, что существует некоторое $\varepsilon > 0$, такое, что для всех $a \in D^h(c^1, \varepsilon) \times c^2$ множество M_a уровня системы функций F представляет собой замкнутое компактное подмногообразие диффеоморфное M_c. Объединение всех M_a образует окрестность M_c диффеоморфную прямому произведению $D^h(c^1, \varepsilon) \times M_c$.

Кинематическая независимость. Обозначим $g_c : M_c \to K^s$ – сужение кинематического отображения g на M_c. Дифференциал dg_c отображения g_c порождает отображение касательных расслоений: $dg_c : TM_c \to TK^s$. Назовем систему функций F кинематически независимой на уровне c, если в каждой точке $x \in M_c$ линейное отображение соответствующих касательных пространств имеет максимально возможный ранг (т.е. $\min\{s, r-k\}$).

Пусть теперь система функций F функционально и кинематически независима на уровне c. Множество уровня M_c является замкнутым подмногообразием размерности s. Следуя [6] сформулируем несколько утверждений.

Утверждение 2.2. Если $r - k \geq s$, то образ M_c при отображении g_c является открытым множеством в K^s.

Доказательство. Для краткости обозначим $n = r - k$ – размерность многообразия M_c. Тогда $n \geq s$. Возьмём любую точку $y \in g_c(M_c)$, и докажем, что у неё есть открытая окрестность в $g_c(M_c)$. Пусть $x \in M_c$ – любой прообраз точки y, т.е. $g_c(x) = y$. Выберем локальные координаты $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в окрестности точки x и $(y_1, y_2, ..., y_s)$ в окрестности точки y. В силу условия кинематической независимости ранг якобиевой матрицы $\frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial(y_1, y_2, ..., y_s)}$ равен $\min(s, n) = s$, поскольку $n \geq s$. Откуда, как следствие теоремы о неявных функциях, получаем, что у точки y есть открытая окрестность U, каждая точка которой имеет прообраз. Значит $U \subseteq g_c(M_c)$. Доказательство закончено.

Утверждение 2.3. Если многообразие N^r компактно, то образ M_c при отображении g_c является замкнутым множеством в K^s.

Доказательство. Пусть $y \in K^s$ – любая предельная точка множества $g_c(M_c)$, докажем, что она лежит в $g_c(M_c)$. Поскольку y – предельная точка, то найдётся последовательность точек из $g_c(M_c)$, сходящаяся к y. Возьмём множество прообразов этих точек. Поскольку N^r компактно, то у этого множества есть предельная точка, образ которой и будет совпадать с y в силу непрерывности отображения g_c. Доказательство закончено.

Утверждение 2.4. Если K^s связно, M_c компактно и $r - k \geq s$, то отображение g_c является сюръекцией, т.е. отображением M_c на всё K^s. При этом, как непрерывный образ компакта, K^s тоже компактно.

Доказательство. Из предыдущих двух утверждений следует, что $g_c(M_c)$ одновременно и замкнуто и открыто. Следовательно, и его дополнение $K^s \setminus g_c(M_c)$ замкнуто. Тогда K^s есть объединение двух замкнутых множеств $K^s = g_c(M_c) \bigcup (K^s \setminus g_c(M_c))$ и из его связности следует, что $K^s \setminus g_c(M_c)$ пусто. Доказательство закончено.

3. Уровни и накрытия.

Накрытие. Напомним кратко определение накрытия, следуя [7]. Пусть у нас есть два гладких конечномерных связных многообразия X и Y одинаковой размерности. Гладкое отображение $f : X \to Y$ называется накрытием, если для него выполняются следующие свойства.

a) Отображение является сюръекцией (т.е. отображением на всё пространство Y).
b) Отображение регулярно в том смысле, что в любой точке $x \in X$ ранг отображения равен размерности многообразий;
c) У любой точки $y \in Y$ найдётся (открытая) окрестность U такая, что ее прообраз состоит из конечного или счётного набора непересекающихся открытых множеств $f^{-1}(U) = V_1 \bigcup V_2 \bigcup ...$ таких, что отображение f, суженное на любое V_i, является диффеоморфизмом V_i и U.

Таким образом, прообраз любой точки $y \in Y$, который называется слоем накрытия, содержит конечное или счётное число элементов. Число элементов в любом слое одинаково и называется числом листов накрытия. Если оно, конечно, то накрытие называется конечнолистным. Пространство Y называется базой накрытия, а X накрывающим пространством. Из свойств накрытий нам понадобится *лемма о поднятии пути*. В ней утверждается, что всякий кусочно-гладкий путь на базе накрытия, у которого задана одна точка прообраза, может быть однозначно поднят на накрывающее пространство. Т.е. может быть однозначно определён кусочно-гладкий путь в накрывающем пространстве, проходящий через заданную точку прообраза, и проекция которого на базу совпадает с исходным путём.

Пусть мы находимся теперь в рамках определений второго раздела.

Утверждение 3.1. Пусть M_c компактно, K^s связно и размерности M_c и K^s совпадают (т.е. $r-k=s$). Если отображение g_c кинематически независимо, то K^s компактно и g_c является конечнолистным накрытием с накрывающим пространством $X = M_c$ и базой $Y = K^s$. Если же K^s односвязно, то g_c является диффеоморфизмом многообразий M_c и K^s.

Доказательство. Данное утверждение известно и обычно формулируется в терминах регулярности отображений [7]. Тем не менее, мы приведём его доказательство, для того, чтобы вывести из него следствие 3.1.

В силу утверждения 2.4 кинематическое отображение g_c является сюръекцией. А в силу условия кинематической независимости ранг отображения g_c равен s, поэтому нам надо доказать только свойство с). Докажем сначала, что у каждой точки $y \in g_c(M_c)$ прообраз состоит из конечного числа элементов. Допустим противное. Пусть $g_c^{-1}(y) \subseteq M_c$ состоит из бесконечного числа точек. Поскольку M_c компактно, то из этих точек можно выбрать последовательность, сходящуюся к некой точке $x \in M_c$. При этом $g_c(x) = y$ в силу непрерывности отображения g_c. Однако, из условия кинематической независимости и теоремы о неявных функциях следует, что у каждой точки прообраза должна существовать окрестность, в которой нет других точек прообраза. Это противоречит тому, что x – предельная точка. Докажем теперь свойство с). Возьмём любую точку $y \in Y$. Пусть $x \in X$ любой из её прообразов. В соответствии с теоремой о неявных функциях найдутся шаровые окрестности $U_x \subseteq Y$ точки y, и $V_x \subseteq X$ точки x такие, что сужение f на V_x является диффеоморфизмом U_x и V_x. Обозначим это сужение f_x. Проделаем такое построение для каждого прообраза точки y. Пусть U – шаровая окрестность точки y, лежащая в пересечении всех получившихся окрестностей U_x. Поскольку число прообразов точки y конечно, то она существует. Тогда набор шаровых окрестностей $f_x^{-1}(U)$ удовлетворяет требованиям свойства с).

Осталось рассмотреть случай односвязного многообразия K^s. Пусть K^s односвязно. Докажем, что накрытие является однолистным. Допустим противное. Пусть у точки $y \in Y$ есть два прообраза $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Соединим их кусочно-гладким путём γ в X. Путь этот выберем таким, чтобы касательные к нему проектировались в ненулевые вектора, касательные к базе. Это можно сделать, поскольку выполнено условие кинематической независимости. Проекция этого пути на Y является кусочно-гладким замкнутым путём в Y, начинающимся и кончающимся в точке y. Поскольку K^s односвязно, то этот путь можно гладко гомотопно стянуть в точку. Подняв промежуточные пути на X, мы получим гомотопию пути γ в путь с концами в $x_1, x_2 \in X$ и весь проектирующийся в точку y. Это противоречит тому, что число прообразов этой точки конечно.

Поскольку накрытие однолистно, то накрывающее отображение взаимно однозначно и, поэтому, существует обратное ему. Гладкость обратного отображения следует из условия кинематической независимости и теоремы о неявных функциях. Доказательство закончено.

Замечание 3.1. Из доказательства утверждения 3.1 видно, что вместо односвязности базы можно потребовать, чтобы число листов накрытия было равным единице. В этом случае так же накрывающее отображение взаимно однозначно и, поэтому, существует обратное ему. Аналогично гладкость обратного отображения следует из условия кинематической независимости и теоремы о неявных функциях. Таким образом, и в данном случае g_c является диффеоморфизмом многообразий M_c и K^s.

Замечание 3.2. Утверждение 3.1 можно обобщить. Пусть h – число образующих фундаментальной группы базы K^s, тогда число листов накрытия не более чем $h+1$. Доказательство почти дословно повторяет рассуждения приведённые в доказательстве утверждения 3.1.

1. Уровни и расслоения.

Гладкое расслоение. Напомним кратко определение гладкого расслоения, следуя [7]. Пусть у нас есть три гладких конечномерных многообразия X (расслоённое пространство), Y (база) и Z (слой), причём суммарная размерность базы и слоя совпадает с размерностью расслоённого пространства: $\dim X = \dim Y + \dim Z$. Пусть также имеется гладкое отображение $f: X \to Y$, называемое проекцией. Дифференциал проекции в каждой точке должен быть невырожден (т.е. в локальных координатах якобиева матрица должна иметь максимальный ранг равный $\dim Y$). Пусть имеется некая группа G автоморфизмов слоя Z (т.е. диффеоморфизмов Z на себя). Эта группа называется *структурной группой* расслоения. Пусть задана *структура расслоения*, т.е. база Y покрыта некоторым семейством *структурных окрестностей*, т.е. координатных окрестностей U_i, для которых выполняются следующие условия. Обозначим $V_i = f^{-1}(U_i) \subseteq X$ – полный прообраз окрестности U_i для проекции f. Тогда

1. Для каждого i существует расслаивающий диффеоморфизм $\varphi_i : U_i \times Z \to V_i$.
2. Отображение $f \circ \varphi_i = id$ – это тождественное преобразование U_i в U_i. Иначе говоря, если $(u,z) \in U_i \times Z$, то $\varphi_i(u,z) \in V_i \in X$ и $f(\varphi_i(u,z)) = u$.
3. Расслаивающие диффеоморфизмы попарно согласованы через структурную группу G. А именно, пусть пересечение областей U_i и U_j не пусто $U_i \bigcap U_j \neq \varnothing$. Требуется, чтобы для любой точки $x \in U_i \bigcap U_j$ совпадали слои проходящие через неё и соответствующие U_i и U_j. Тогда $f^{-1}(U_i \bigcap U_j) = f^{-1}(U_i) \bigcap f^{-1}(U_j) = V_i \bigcap V_j$, и можно определить отображение $\psi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ окрестности $(U_i \bigcap U_j) \times Z$ на себя $\psi_{ij} : (U_i \bigcap U_j) \times Z \xrightarrow{\varphi_i} V_i \bigcap V_j \xrightarrow{\varphi_j^{-1}} (U_i \bigcap U_j) \times Z$. Это отображение называется отображением склейки. Для любой точки $\tilde{u} \in U_i \bigcap U_j$ оно порождает некий диффеоморфизм λ слоя Z на себя $\lambda(z) \times \tilde{u} = \psi_{ij}(z \times \tilde{u})$. Требуется, чтобы этот диффеоморфизм лежал в структурной группе G.

Исходя из приложения к механическим системам, и для краткости изложения, мы будем рассматривать только расслоения с максимальной структурной группой G, которая включает все автоморфизмы слоя Z. Поэтому в дальнейшем структурную группу мы не будем упоминать.

Утверждение 4.1. Пусть объемлющее многообразие N^r является гладким расслоением с базой K^s и некоторым слоем W, причём кинематическое отображение g является проекцией этого расслоения. Условие кинематической независимости состоит в том, что многообразие уровня M_c в каждой своей точке максимально трансверсально слою W, проходящему через эту точку. В локальном координатном виде это означает следующее. Возьмем любую точку $p \in M_c$. Тогда существует её координатная окрестность в N^r, в которой координаты слоя и базы разделены $p=(x,y)$, $x=(x_1,x_2,...,x_s)\in K^s$, $y=(y_1,y_2,...,y_{r-s})\in W$. Полное условие кинематической независимости выглядит следующим образом

$$rank\left\|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right\| = k \tag{4.1}$$

на всём многообразии уровня M_c. Иначе говоря, это условие означает, что система функций $F=\{f_i\}$, $i=1,2,...,k$, высекающих M_c, функционально независима на каждом слое расслоения.

<u>*Доказательство.*</u> Будем обозначать касательные вектора приставкой δ. Тогда вектора, касательные к M_c определяются в локальной системе координат $(x.y)$ системой уравнений

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y}\delta y = 0 \tag{4.2}$$

Условие кинематической независимости эквивалентно тому, что для любого вектора $\delta x \in R^s$ можно подобрать такой вектор $\delta y \in R^{r-s}$, что система (4.2) будет выполнена. Отсюда сразу следует, достаточность условия (4.1). Докажем теперь его необходимость. Поскольку система функций $F=\{f_i\}$, $i=1,2,...,k$ является функционально независимой, то

$$rank\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x},\frac{\partial f_i}{\partial y}\right\| = k \tag{4.3}$$

Теперь можно воспользоваться следующим известным утверждением линейной алгебры. Система $Ax+By=0$ имеет решение относительно y для любого заданного x тогда и только тогда, когда $rank\|B\| = rank\|A,B\|$. Тем не менее, для полноты, приведём доказательство, не опирающееся на этот факт. Допустим противное, что

$$rank\left\|\frac{\partial f_i}{\partial y}\right\| = m < k \tag{4.4}$$

Тогда из (4.3) следует, что в матрице $\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x}\right\|$ можно найти хотя бы один столбец $\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$ такой, что

$$rank\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\frac{\partial f_i}{\partial y}\right\| = m+1 \tag{4.5}$$

Положив в (4.2) $\delta x_i = 0$, при $i \neq j$, и $\delta x_j = 1$, получим, что система $\frac{\partial f_i}{\partial y}\delta y = -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ должна иметь решение относительно δy. По теореме Кронекера-Капелли [10] это возможно тогда и только тогда, когда

$$rank\left\|\frac{\partial f_i}{\partial y}\right\| = rank\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial y}\right\|$$

Мы пришли к противоречию с (4.4, 4.5). Доказательство закончено.

<u>*Утверждение 4.2.*</u> Пусть объемлющее многообразие N^r является гладким расслоением с базой K^s, некоторым слоем Z, причём кинематическое отображение g является проекцией этого расслоения. Будем обозначать это расслоение символом Φ. Обозначим g_c сужение g на M_c. Пусть M_c компактно, а K^s связно. Если отображение g_c кинематически независимо, то K^s также компактно, а M_c является гладким расслоением с базой K^s, некоторым слоем W и проекцией g_c. Будем обозначать это расслоение символом Ψ. При этом слой W является компактным многообразием соответствующей размерности $\dim M_c = \dim K^s + \dim W$.

<u>*Доказательство.*</u> Компактность K^s следует из утверждения 2.4. Докажем остальное. Возьмем любую точку $a \in K^s$, и содержащую её структурную окрестность U расслоения Φ. Тогда $g^{-1}(U) = U \times Z$. Не нарушая общности можно считать, что U – это координатная окрестность точки a, с локальными координатами $x = (x_1, x_2, ..., x_s) \in K^s$. Тогда слой Z задаётся системой функциональных уравнений

$$x_i = a_i,\ i = 1,2,...,s \tag{4.6}$$

где a_i – координаты точки a. Обозначим W_a полный прообраз точки a в пересечении с M_c: $W_a = g^{-1}(a) \cap M_c = g_c^{-1}(a)$. Для его задания в $U \times Z$ надо к (4.6) добавить систему уравнений

$$f_j(x, y) = c_j,\ j = 1,2,...,k,\ (x, y) \in U \times Z \tag{4.7}$$

Якобиева матрица системы (4.6-4.7) в локальных координатах $y = (y_1, y_2, ..., y_{r-s}) \in Z$ выглядит следующим образом $J = \begin{Vmatrix} E_s & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{Vmatrix}$, где E_s – единичная матрица $s \times s$. В силу условия кинематической независимости $rank\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\| = k$, поэтому $rank\, J = k + s$. Значит, W_a является замкнутым компактным многообразием размерности $r - k - s$ (см. утверждение 2.1). Из замечания 2.1 следует, что для некоторой окрестности $V_a \subseteq U$ точки a имеем

$V_a \times W_a$ диффеоморфно $g_c^{-1}(V_a)$.

Осталось показать структурную согласованность расслаивающих диффеоморфизмов. Но она непосредственно следует из структурной согласованности расслаивающих диффеоморфизмов исходного расслоения.

Дадим ещё несколько определений, следуя [7]. _Гладким n-мерным распределением_ на многообразии X называется система n независимых дифференциальных форм $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$. В касательном пространстве Tx любой точки $x \in X$ система уравнений $\omega(v)=0$, $v \in Tx$ определяет гиперплоскость размерности $\dim X - n$. Будем обозначать эту гиперплоскость $T(\omega,x)$. _Связность на гладком расслоении_ – это гладкое распределение ω на пространстве расслоения X, размерность ω равна размерности слоя Z, и оно трансверсально слою в каждой точке. Это означает, что размерность гиперплоскости $T(\omega,x)$ равна размерности базы Y и при естественной проекции $g: X \to Y$ гиперплоскость $T(\omega,x)$ проектируется в касательное пространство $T_{g(x)}Y$ без вырождений. Вектора $v \in T(\omega,x)$ называются _горизонтальными направлениями_ связности ω. Кусочно-гладкая кривая на X называется горизонтальной, если вектора её скорости горизонтальны. В любом гладком расслоении можно определить какую-нибудь риманову метрику ρ, и она породит естественную связность ω_ρ, в которой горизонтальными являются все вектора ортогональные слою. Если слой Z расслоения компактен, то, как и в случае накрытий, верна _лемма о поднятии пути_. В ней утверждается, что всякий кусочно-гладкий путь на базе расслоения, у которого задана одна точка прообраза, может быть однозначно поднят до горизонтального пути на пространстве расслоения X. Т.е., может быть однозначно определён кусочно-гладкий горизонтальный путь в пространстве, расслоения, проходящий через заданную точку прообраза, и проекция которого на базу совпадает с исходным путём.

Замечание 4.1. Как и в случае накрытий, можно выделить отдельно ситуацию, когда база K^s является односвязным многообразием. В этом случае, если многообразие уровня M_c связно, то можно добавочно утверждать, что слой W является связным многообразием. Приведём схему доказательства. Сначала введём на гладком расслоении M_c какую-нибудь риманову метрику и соответствующую ей связность ω. Возьмём любую точку $y \in K^s$ и лист W_y, проходящий через неё. Пусть у слоя W_y есть две связные компоненты V_0 и $V_1 \subset W_y$. Поскольку они лежат на связной компоненте многообразия уровня M_c, то их можно соединить кусочно-гладким путём γ в M_c. Проекция этого пути на K^s является кусочно-гладким замкнутым путём γ_0 в K^s, начинающимся и кончающимся в точке y. Поднимем этот путь до горизонтального пути $\tilde{\gamma}$. Как и путь γ, он начинается на компоненте V_0.

Покажем, что оканчивается он на компоненте V_1, возможно в другой точке, чем γ. Пусть γ параметризован параметром $t \in [0,1]$. В каждый момент точка $\gamma(t)$ лежит в некоей связной компоненте $V(t)$ слоя, проходящего через неё. Причём $V(0) = V_0$ и $V(1) = V_1$. Для любого t путь γ_0 порождает горизонтальное векторное поле на $V(t)$. Несложно убедиться в локальных координатах, что $V(t + \delta t)$ получается из $V(t)$ сдвигом вдоль этого поля. Значит, $\tilde{\gamma}(t) \in V(t)$.

Таким образом, мы получили горизонтальный путь $\tilde{\gamma}$, соединяющий компоненты V_0 и V_1. Далее рассуждаем так же, как и в случае накрытий. Поскольку K^s односвязно, то путь γ_0 можно гладко гомотопно стянуть в точку. Подняв горизонтально промежуточные пути, мы получим гомотопию пути $\tilde{\gamma}$ в путь с концами на V_0 и V_1, и весь проектирующийся в точку y. Это противоречит тому, что V_0 и V_1 связные компоненты слоя, и их нельзя соединить путём, который лежит в слое.

Замечание 4.2. В условиях замечания 4.1, если размерность слоя равна единице, то это – окружность S^1. Если размерность слоя равна двум, то это сфера с ориентируемыми и неориентиремыми ручками.

Замечание 4.3. Замечание 4.1 можно обобщить. Пусть h – число образующих фундаментальной группы базы K^s, тогда число связных компонент слоя Z не более чем $h+1$. Доказательство почти дословно повторяет рассуждения приведённые в замечании 4.1.

2. Кинематическая независимость в механических системах.

Теперь рассмотрим лагранжеву механическую систему на n-мерном связном конфигурационном многообразии K^n. Фазовое пространство в этом случае представляет собой $2n$-мерное многообразие касательного расслоения TK^n, точки которого мы будем обозначать $x = (q, \dot{q})$. В качестве кинематического отображения g возьмем естественную проекцию π многообразия TK^n на K^n: $\pi(x) = q$. Его дифференциал $d\pi$ порождает отображение касательных пространств $d\pi : TTK^n \to TK^n$.

Рассмотрим систему k первых интегралов движения $F = \{ f_i(q, \dot{q}) = c_i \}$, $i = 1,2,...,k$. Обозначим M_c многообразие уровня этих интегралов (предполагая, что они функционально независимы на M_c). Будем говорить, что первые интегралы системы F *кинематически независимы* на многообразии уровня M_c, если сужение отображения $d\pi$ на TM_c невырождено на M_c. Это означает, в частности, что в каждой точке $x \in M_c$ ранг соответствующего линейного отображения касательных пространств равен $2n - k$, однако, это всего лишь необходимое условие.

Рассмотрим сначала случай $k = n$.

Утверждение 5.1. Условие кинематической независимости эквивалентно тому, что на всём многообразии уровня M_c выполняется

$$\det\left\|\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j}\right\| \neq 0 \qquad (5.1)$$

Доказательство сразу следует из утверждения 4.1. Однако, для большей ясности докажем это утверждение непосредственно. Будем обозначать касательные вектора приставкой δ. Тогда вектора, касательные к M_c, определяются в локальной системе координат $(q,\dot{q}) \in TK^n$ системой уравнений

$$\frac{\partial f_i}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} = 0 \qquad (5.2)$$

Введём вектора $V_i \in R^{2n}$, $i = 1,2,...,n$

$$V_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}}, -\frac{\partial f_i}{\partial q}\right) \qquad (5.3)$$

Они удовлетворяют (5.2) и, поэтому касаются M_c, т.е. $V_i \in TM_c$. Поскольку первые интегралы движения функционально независимы, то система векторов V_i линейно независима. Поэтому их линейная оболочка совпадает с пространством TM_c в каждой точке $(q.\dot{q}) \in TK^n$. При естественной проекции эти вектора проектируются в вектора $W_i \in R^n$, касательные к конфигурационному многообразию в точке q. В указанной локальной системе координат имеем

$$W_i = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}} \qquad (5.4)$$

Условие кинематической независимости означает, что линейная оболочка векторов W_i совпадает со всем касательным пространством, и это эквивалентно условию (5.1). Доказательство закончено.

Утверждение 5.2. Любая компактная связная компонента M_c инвариантного многообразия уровня системы n функционально и кинематически независимых первых интегралов является конечнолистным накрытием многообразия конфигурационного пространства K^n. Если же K^n односвязно, то M_c и K^n диффеоморфны. Если h – число образующих фундаментальной группы конфигурационного пространства K^n, то число листов накрытия не более, чем $h+1$.

Доказательство. Непосредственно следует из утверждения 3.1 и замечаний к нему.

Рассмотрим теперь случай $k \leq n$.

Утверждение 5.3. Полное условие кинематической независимости выглядит следующим образом

$$rank\left\|\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j}\right\| = k \tag{5.1}$$

на всём многообразии уровня M_c.

Доказательство сразу следует из утверждения 4.1.

Утверждение 5.4. Любая компактная связная компонента M_c инвариантного многообразия уровня системы k функционально и кинематически независимых первых интегралов является расслоённым пространством с базой K^n и некоторым слоем Z, который является гладким компактным многообразием размерности $n-k$. Если h – число образующих фундаментальной группы базы K^n, то число связных компонент слоя Z не более, чем $h+1$.

Доказательство. Непосредственно следует из утверждения 4.2 и замечаний к нему.

Замечание 5.1. Утверждения этого раздела справедливы и для неголономных, систем. В таких случаях к первым интегралам движения следует добавлять и сами неголономные связи.

3. Несколько примеров.

В данном разделе мы рассмотрим несколько простых примеров. Первые два примера – это системы с двумя степенями свободы, имеющие, кроме интеграла энергии, ещё один первый интеграл. В соответствии с теоремой Лиувилля, в обоих случаях многообразие уровня этих интегралов является двухмерным тором. Однако условие кинематической независимости выполняется только в одном из них.

6.1. Тяжёлая точка на сфере. Рассмотрим движение тяжёлой точки массы $m=1$ по гладкой сфере радиуса $R=1$. Ускорение силы тяжести также будем считать единичным. В данной задаче существуют два первых интеграла – энергии и вертикального момента количества движения. Исследуем их кинематическую независимость. В сферических координатах (φ,θ) указанные интегралы записываются следующим образом

$$\begin{aligned} f_1(\varphi,\theta) &= \frac{1}{2}(\cos^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + \sin\theta = c_1 \\ f_2(\varphi,\theta) &= \cos^2\theta\dot{\varphi} = c_2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Заметим, что для того, чтобы область возможного движения не была пустой, необходимо, чтобы было $c_1 \ge -1$. Введём якобиеву матрицу G этих интегралов по скоростям обобщённых координат $G = \begin{Vmatrix} \cos^2\theta\dot{\varphi}, & \dot{\theta} \\ \cos^2\theta\,, & 0 \end{Vmatrix}$. В соответствии с утверждением 5.1, условие кинематической независимости выглядит следующим образом $\det G = -\cos^2\theta\dot{\theta} \ne 0$

(6.2)

Рассмотрим случай $c_2 \neq 0$. Тогда из второго уравнения (6.1) имеем $\cos^2\theta \neq 0$, и условие (6.2) эквивалентно условию $\dot{\theta} \neq 0$. Известно (см., например, [11]), что в этом случае движение точки происходит между двумя горизонтальными параллелями, при выходе на которые $\dot{\theta} = 0$. Таким образом, условие кинематической независимости нарушается. Пусть теперь $c_2 = 0$. Тогда несложно убедиться, что движение происходит в вертикальной плоскости (т.е. в каждый момент времени $\dot{\varphi} = 0$). При этом точка обязательно будет проходить через нижний полюс сферы, где $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ и $\cos\theta = 0$. И, значит, условие кинематической независимости (6.2) также нарушается.

Таким образом, в данной задаче при любых значениях констант интегралов движения, условие кинематической независимости не выполняется.

6.2. Тяжёлая точка на горизонтальном торе. Рассмотрим движение тяжелой материальной точки единичной массы по гладкому горизонтально лежащему тору. Радиус осевой окружности обозначим $R > 1$, а радиус окружности поперечного сечения будем считать равным единице. Ускорение силы тяжести также будем считать единичным. В данной задаче существуют два первых интеграла – энергии и вертикального момента количества движения. Исследуем их кинематическую независимость. Пусть ψ – угловая координата на осевой (горизонтальной) окружности, а θ – угловая координата на окружности поперечного сечения, отсчитываемая от внешней горизонтали. Будем считать, что тор расположен симметрично в абсолютной системе координат $Oxyz$ и декартовы координаты точки на торе задаются следующими соотношениями

$$x = (R + \cos\theta)\cos\psi, \quad y = (R + \cos\theta)\sin\psi, \quad z = \sin\theta$$

В выбранных координатах интегралы энергии и вертикального момента количества движения записываются следующим образом

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\dot{\psi}^2(R+\cos\theta)^2 + \dot{\theta}^2) + \sin\theta = c_1 \\ &(R+\cos\theta)^2\dot{\psi} = c_2 \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Заметим, что для того, чтобы область возможного движения не была пустой, необходимо, чтобы было $c_1 \geq -1$. Введём якобиеву матрицу G этих интегралов по скоростям обобщённых координат $G = \begin{Vmatrix} (R+\cos\theta)^2\dot{\psi}, & \dot{\theta} \\ (R+\cos\theta)^2, & 0 \end{Vmatrix}$. В соответствии с утверждением 5.1, условие кинематической независимости выглядит следующим образом $\det G = -(R+\cos\theta)^2\dot{\theta} \neq 0$ (6.4)

Поскольку $R > 1$, то $R + \cos\theta \neq 0$, и условие (6.4) эквивалентно условию $\dot{\theta} \neq 0$. Для достаточно больших значений константы энергии c_1, это выполняется

всегда. В самом деле, из второго уравнения (6.3) находим $\dot\psi = \dfrac{c_2}{(R+\cos\theta)^2}$.
Подставив это в первое уравнение (6.3) получаем

$$\dot\theta^2 = 2(c_1 - \sin\theta) - \frac{c_2^2}{(R+\cos\theta)^2} \geq 2(c_1 - 1) - \frac{c_2^2}{(R-1)^2} \qquad (6.5)$$

откуда сразу следует требуемое.

Таким образом, в данной задаче, при достаточно больших значениях константы интеграла энергии $c_1 > 1 + \dfrac{c_2^2}{2(R-1)^2}$, условие кинематической независимости выполняется и, поэтому инвариантное многообразие уровня (6.3) является конечнолистным накрытием конфигурационного многообразия (т.е. двухмерного тора T^2). Поскольку фундаментальная группа двухмерного тора имеет две образующие, то число листов накрытия не более чем два. Впрочем, поскольку (6.5) имеет ровно два решения, то накрытие является двулистным.

6.3. Многообразие уровня интеграла энергии. Рассмотрим натуральную консервативную механическую систему с компактным конфигурационным многообразием K^n. Пусть в обобщенных координатах $q \in R^n$ интеграл энергии имеет вид $f_1(q,\dot q) = \dfrac{1}{2}(A(q)\dot q, \dot q) + U(q) = h$ (6.6)

Здесь $T = \dfrac{1}{2}(A(q)\dot q, \dot q)$ – кинетическая, а $U(q)$ – потенциальная энергии, $A(q)$ – невырожденная положительно определённая $n \times n$ матрица. Все функции предполагаем гладкими. В соответствии с утверждением 5.3, условие кинематической невырожденности интеграла (6.6) выглядит следующим образом.

$$rank\frac{\partial f_1}{\partial \dot q} = rank A(q)\dot q = 1, \text{ или } A(q)\dot q \neq 0$$

Поскольку $A(q)$ невырождена, то последнее условие эквивалентно тому, что $\dot q \neq 0$. Поскольку конфигурационное многообразие компактно, то потенциальная энергия на нём достигает своего максимума $h_0 \geq U(q)$, $\forall q \in K^n$. Если константа h интеграла энергии достаточно велика ($h > h_0$), то на многообразии уровня интеграла энергии (6.6) везде $\dot q \neq 0$ и, вследствие утверждения 5.4, любая связная компонента этого многообразия представляет собой расслоённое пространство с базой K^n и некоторым слоем Z, который является гладким компактным многообразием размерности $n-1$. В соответствии с замечанием 4.3, число связных компонент слоя не превышает числа образующих фундаментальной группы конфигурационного многообразия. При заданной точке $q \in K^n$ слой Z определяется уравнением (6.6), т.е. представляет собой $(n-1)$-мерную сферу S^{n-1}.

6.4. Тяжёлое твёрдое тело с неподвижной точкой и любым гладким потенциалом. Интеграл энергии, при достаточно больших своих значениях высекает многообразие уровня, являющееся гладким расслоением с базой $SO(3)$ и двухмерным слоем. Поскольку Z_2 – фундаментальная группа $SO(3)$ имеет одну образующую, то, в соответствии с замечанием 4.3, число связных компонент слоя не более чем две. В соответствии с примером 6.3, слой представляет собой двухмерную сферу S^2

Если потенциал имеет вертикальную круговую симметрию, то интеграл энергии, при достаточно больших своих значениях, совместно с интегралом площадей, высекает многообразие уровня, являющееся гладким расслоением с базой $SO(3)$ и одномерным слоем. Одномерный слой, в силу компактности, является семейством не более чем двух окружностей. Поскольку двухмерный слой – это S^2, то линейный по скоростям интеграл высекает из неё ровно одну окружность, из которой и состоит одномерный слой.

6.5. Волчок Эйлера. Возьмём теперь волчок Эйлера, рассмотренный нами в первом разделе, и исследуем многообразие уровня его первых интегралов, используя утверждения доказанные выше. В данной задаче имеются три первых интеграла – проекции момента количества движения на оси абсолютной системы координат $Oxyz$. Неявно эти интегралы можно записать следующим образом $\quad K_i(\varphi,\psi,\theta,\dot\varphi,\dot\psi,\dot\theta)=c_i,\ i=x,y,z$

(6.7)

где $\varphi,\ \psi,\ \theta$ – углы Эйлера. Прежде всего, отметим, что многообразие уровня (6.7) является ограниченным и, следовательно, компактным, поскольку неограниченный рост какой-либо компоненты угловой скорости $\dot\varphi,\ \dot\psi$ или $\dot\theta$ ведёт к неограниченному росту вектора момента количества движения $K=(K_x,K_y,K_z)$. Пусть $G=\left\|\dfrac{\partial(K_x,K_y,K_z)}{\partial(\dot\varphi,\dot\psi,\dot\theta)}\right\|$ – якобиева матрица этого вектора по скоростям. В соответствии с утверждением 5.1, условие кинематической независимости здесь выглядит следующим образом: $\det G \neq 0$.

Пусть $\Lambda(\varphi,\psi,\theta)$ – матрица перехода от подвижных осей твёрдого тела к неподвижным. Тогда $K=\Lambda\sigma$, где σ – вектор момента количества движения в проекции на подвижные оси. Взяв в качестве подвижных осей – главные оси инерции, будем иметь $\sigma=J\omega$, где $J=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix}$ – матрица тензора инерции, а $\omega=(p,q,r)$ – вектор мгновенной угловой скорости твердого тела в проекции на подвижные оси. Тогда $K = \Lambda J\omega$ и $G = \Lambda J \dfrac{\partial \omega}{\partial(\dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta)}$. Поскольку $\det \Lambda \neq 0$ и $\det J \neq 0$, то условие кинематической независимости (как это следует из кинематических формул Эйлера) превращается в следующее

$$\det\left\| \frac{\partial \omega}{\partial(\dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta)} \right\| = \det\begin{pmatrix} \sin\psi\sin\theta & 0 & \cos\psi \\ -\cos\psi\sin\theta & 0 & \sin\psi \\ \cos\theta & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\sin\theta \neq 0$$

Поскольку абсолютные оси можно сориентировать произвольным образом, то условие кинематической независимости выполняется всегда. Поэтому инвариантное многообразие уровня (6.7) является конечнолистным накрытием конфигурационного многообразия (т.е. $SO(3)$).

Поскольку $\omega = J^{-1}\Lambda^{-1}K$, то угловые скорости однозначно определяются по константам интегралов (6.7). Это означает, что число листов накрытия равно единице и, вследствие замечания 3.1, инвариантное многообразие уровня (6.7) диффеоморфно конфигурационному многообразию $SO(3)$.

1. Волчок Эйлера с эксцентриком.

Возьмём волчок Эйлера, т.е. твёрдое тело с неподвижной точкой, в отсутствии моментов силы тяжести. Добавим к нему эксцентрик – материальную точку массы m, вращающуюся вокруг первой главной оси инерции тела на расстоянии a от неё в плоскости, и отстоящей от начала координат на расстоянии b. Конфигурационное многообразие нашей системы – это $SO(3)\times S^1$. Помимо углов Эйлера φ, ψ, θ, определяющих ориентацию твердого тела, введём также угол γ, задающий положение точки эксцентрика (ξ,η,ζ) в подвижной системе координат: $\xi = b$, $\eta = a\cos\gamma$, $\zeta = a\sin\gamma$

(7.1)

Пусть $\Lambda(\varphi,\psi,\theta)$ – матрица перехода от подвижных осей твёрдого тела к неподвижным. Тогда $K = \Lambda\sigma$ (7.2)

где σ – вектор момента количества движения в проекции на подвижные оси. Он представляет собой сумму момента количества движения твердого тела и момента количества движения точки эксцентрика:

$$\sigma = J_0\omega + J_1(e_1\dot{\gamma} + \omega) \tag{7.3}$$

здесь $\omega = (p,q,r)$ – вектор мгновенной угловой скорости твердого тела в проекции на подвижные оси, $e_1 = (1,0,0)$ – направляющий вектор первой главной оси инерции твёрдого тела в подвижных осях, $\omega_1 = e_1\dot{\gamma} + \omega$ – вектор мгновенной угловой скорости вращения эксцентрика в проекции на подвижные оси, J_0 и J_1 – матрицы тензоров инерции твёрдого тела и эксцентрика в подвижных осях

$$J_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad J_1 = m\begin{pmatrix} a^2 & -ab\cos\gamma & -ab\sin\gamma \\ -ab\cos\gamma & b^2 + a^2\sin^2\gamma & -a^2\cos\gamma\sin\gamma \\ -ab\sin\gamma & -a^2\cos\gamma\sin\gamma & b^2 + a^2\cos^2\gamma \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Кинетическая энергия системы также представляет собой сумму кинетических энергий твёрдого тела и точки эксцентрика:

$$T = \frac{1}{2}(J_0\omega,\omega) + \frac{1}{2}(J_1(e_1\dot{\gamma} + \omega),(e_1\dot{\gamma} + \omega)) \tag{7.5}$$

Система допускает четыре первых интеграла движения

$$K = K_0,\ T = T_0 \tag{7.6}$$

Исследуем вид четырёхмерного многообразия уровней этих интегралов. Поскольку в число интегралов движения входит интеграл энергии, представляющий собой положительно определённую квадратичную форму по скоростям, то это многообразие компактно. Условие кинематической независимости, как и в примере волчка Эйлера 6.5, будем рассматривать относительно угловых скоростей в проекции на подвижные оси. Пусть G – якобиева матрица интегралов (7.6) по угловым скоростям

$$G = \left\| \frac{\partial(K,T)}{\partial(\omega,\dot\gamma)} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial \omega} & \frac{\partial K}{\partial \dot\gamma} \\ \frac{\partial T}{\partial \omega} & \frac{\partial T}{\partial \dot\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(J_0 + J_1), & \Lambda J_1 e_1 \\ \sigma, & (J_1(e_1\dot\gamma + \omega), e_1) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Условием кинематической независимости интегралов (7.6) является условие $\det G \neq 0$. Ввиду громоздкости формул мы проанализируем его, используя геометрические соображения.

Пусть у нас есть какое-либо положение твердого тела и эксцентрика $(\varphi,\psi,\theta,\gamma)$, и какие-то мгновенные угловые скорости $(\omega,\dot\gamma)$. Интегралы (7.6) кинематически независимы в точке $(\varphi,\psi,\theta,\gamma,\omega,\dot\gamma)$ фазового пространства, если бесконечно малыми изменениями мгновенных угловых скоростей $(\delta\omega,\delta\dot\gamma)$ можно добиться любого бесконечно малого изменения момента количества движения и кинетической энергии $(\delta K,\delta T)$. Поскольку $\delta K = \Lambda\delta\sigma$ и $\det\Lambda = 1$, то, эквивалентным образом, мы будем добиваться любого бесконечно малого изменения $(\delta\sigma,\delta T)$. Рассмотрим сначала случай $K_0 = 0$, $T_0 > 0$. Тогда $\sigma = 0$ и из (7.3) имеем $J_1(e_1\dot\gamma + \omega) = -J_0\omega$. Подставив это в (7.5) получим

$$T = \frac{1}{2}(J_0\omega, -e_1\dot\gamma) = -\frac{1}{2}A\omega_1\dot\gamma = T_0 > 0 \quad (7.8)$$

Отсюда и из (7.7) имеем

$$\delta\sigma = (J_0 + J_1)\delta\omega + J_1 e_1 \delta\dot\gamma, \quad \delta T = -\frac{1}{2}A(\dot\gamma\delta\omega_1 + \omega_1\delta\dot\gamma) \quad (7.9)$$

Из (7.8) следует, что на всём многообразии уровня интегралов $K = 0$, $T = T_0 > 0$ выполнено $\omega_1 \neq 0$, $\dot\gamma \neq 0$. А поскольку это многообразие компактно, то эти величины ограничены снизу и сверху

$$0 < \varepsilon_1 < |\omega_1|, |\dot\gamma| < \varepsilon_2 \quad (7.10)$$

Поэтому, из второго уравнения (7.9) находим

$$\delta\dot\gamma = -\frac{2\delta T + A\dot\gamma\delta\omega_1}{A\omega_1} \quad (7.11)$$

и из первого уравнения (7.9)

$$\delta\sigma = (J_0 + J_1)\delta\omega - J_1 e_1 \frac{2\delta T + A\dot\gamma\delta\omega_1}{A\omega_1} \quad (7.12)$$

Поскольку $J_0 + J_1$ представляет собой матрицу инерции совокупной системы тела и эксцентрика, то $\det(J_0 + J_1) \neq 0$. Поскольку выполнено (7.10), то при достаточно малом модуле матрицы J_1 второй член в (7.12) также достаточно мал и не нарушает невырожденности системы (7.12). Это означает, что, при достаточно малых значениях $|J_1|$, система (7.12) всегда имеет решение относительно $\delta\omega$. Таким образом, при достаточно малых значениях массы эксцентрика, система интегралов $K = 0$, $T = T_0 > 0$ кинематически независима. (Модуль матрицы оценивается неравенством $|J_1| < m(a^2 + b^2)$). В силу компактности многообразия уровня, кинематическая независимость сохранится и при ненулевых, но достаточно малых значениях кинетического момента K_0.

Таким образом, при указанных условиях, многообразие уровня интегралов (7.6) является конечнолистным накрытием конфигурационного многообразия $SO(3)\times S^1$. Оценим число листов и их связность. Равенство $T=T_0$ является квадратным уравнением относительно $\dot\gamma$ и может допускать два решения. Система равенств $K=K_0$ является линейной относительно ω при заданном значении $\dot\gamma$ и имеет не более одного решения при заданном значении $\dot\gamma$. Поэтому число листов накрытия не более чем два. Из (7.8) видно, что при малых значениях момента количества движения мы всегда имеем два решения (т.е. два листа), соответствующие двум комбинациям знаков: $\omega_1>0$, $\dot\gamma<0$ и $\omega_1<0$, $\dot\gamma>0$. Поскольку ω_1 и $\dot\gamma$ не могут обращаться в ноль, то каждый лист представляет собой связную компоненту.

Окончательно получаем следующее утверждение. При достаточно малом значении массы эксцентрика и, при достаточно малом значении констант интегралов момента количества движения, многообразие уровня этих интегралов и интеграла энергии разбивается на две связные компоненты, каждая из которых диффеоморфна конфигурационному многообразию $SO(3)\times S^1$.

Замечание 7.1. Следует обратить внимание на то, что, воспользовавшись (7.8), мы заменили интеграл (7.5) другой функцией, хотя и совпадающей с (7.5) при $\sigma=0$, но являющейся только лишь частным интегралом уравнений движения. Однако многообразие уровня при этом не меняется, а в используемых утверждениях из предыдущих разделов не требовалось, чтобы функции, уровни которых высекают многообразие, были первыми интегралами движения. При малых шевелениях компактного многообразия, естественно кинематическая независимость сохраняется.

Замечание 7.2. К системе можно добавить потенциальные силы с 2π-периодический силовой функцией $U(\gamma)$. Если константа интеграла энергии достаточно велика, то все рассуждения, приведённые выше, останутся верными.

2. Неголономная система.

В данном разделе мы рассмотрим пример неголономной системы.

Тяжёлый круговой конёк на горизонтальном торе. Рассмотрим движение однородного круглого плоского диска, центр которого касается поверхности гладкого, горизонтально лежащего двухмерного тора T^2. Радиус осевой окружности тора обозначим $R>1$, а радиус окружности поперечного сечения будем считать равным единице. Массу диска и ускорение силы тяжести также будем считать единичными. Свяжем с диском сопутствующую систему

координат с началом в центре диска и направляющими векторами e_1, e_2, e_3. Вектора e_1 и e_2 лежат в плоскости диска, а вектор e_3 совпадает с внешней нормалью к тору T^2. В силу симметрии, оси сопутствующей системы является главными центральными осями инерции диска. Главные моменты инерции диска обозначим $(A,\ A,\ C)$. Рассматриваемая система имеет три степени свободы. Её конфигурационное пространство представляет собой трёхмерный тор T^3. Введём на нём естественные угловые координаты (φ,ψ,θ). Где φ – угол собственного вращения диска, отсчитываемый от горизонтальной параллели тора T^2, на которой находится центр диска до вектора e_1, ψ – угловая координата на осевой (горизонтальной) окружности тора T^2, а θ – угловая координата на окружности его поперечного сечения, отсчитываемая от внешней горизонтали. Будем считать, что тор расположен симметрично в абсолютной системе координат $Oxyz$, и декартовы координаты точки на торе задаются следующими соотношениями
$$\begin{cases} x=(R+\cos\theta)\cos\psi \\ y=(R+\cos\theta)\sin\psi \\ z=\sin\theta \end{cases} \qquad (8.1)$$
Найдём координаты сопутствующих ортов e_1, e_2, e_3 в абсолютной системе. Вектор ξ, касательный к горизонтальной параллели тора T^2 направлен по $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\psi}$ и равен $\xi=(-\sin\psi,\cos\psi,0)$ (8.2)

Вектор η, касательный к меридиану тора T^2 направлен по $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\theta}$ и равен
$$\eta=(-\sin\theta\cos\psi,-\sin\theta\sin\psi,\cos\theta) \qquad (8.3)$$
Вектор e_3 внешней нормали к тору T^2 равен вектору $\xi\times\eta$:
$$e_3=(\cos\psi\cos\theta,\sin\psi\cos\theta,\sin\theta) \qquad (8.4)$$
Вектора e_1 и e_2 получаются из ξ и η поворотом на угол φ в плоскости (ξ,η):
$$e_1=\cos\varphi\xi+\sin\varphi\eta,\ e_2=-\sin\varphi\xi+\cos\varphi\eta \qquad (8.5)$$
или
$$e_1=\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\theta\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\sin\theta\cos\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\theta\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix} (8.6)$$

На движение диска наложена следующая дополнительная неголономная связь. Поместим в центр диска конёк, который двигается по поверхности тора T^2. Мы будем считать, что линия скольжения конька направлена по e_1. Условие скольжения состоит в том, что скорость центра диска V должна быть направлена по линии скольжения e_1, т.е., должно быть выполнено $(V,e_2)=0$ и $(V,e_3)=0$. В силу уравнений (8.1), последнее равенство выполняется автоматически, поэтому остаётся только условие $(V,e_2)=0$. Выразим его в обобщенных координатах (φ,ψ,θ). Из (8.1) находим

$$V=\begin{cases}\dot x=-(R+\cos\theta)\sin\psi\dot\psi-\sin\theta\cos\psi\dot\theta\\ \dot y=(R+\cos\theta)\cos\psi\dot\psi-\sin\theta\sin\psi\dot\theta\\ \dot z=\cos\theta\dot\theta\end{cases}\qquad(8.7)$$

Подставив V из (8.7) и e_2 из (8.6) в уравнение неголономной связи $(V,e_2)=0$, и, приведя подобные члены, получаем

$$f_3=\dot\psi(R+\cos\theta)\sin\varphi-\dot\theta\cos\varphi=0\qquad(8.8)$$

Система допускает интеграл энергии $T+z=c_1$, где T – кинетическая, а z – потенциальные энергия системы (напоминаем, что масса диска и ускорение силы тяжести равны единице). Выразим кинетическую энергию в обобщенных координатах. По теореме Кёнига

$$T=\frac{1}{2}V^2+\frac{1}{2}(A(p^2+q^2)+Cr^2)\qquad(8.9)$$

где первое слагаемое – это кинетическая энергия центра масс. В примере 6.2 мы уже находили его: $\frac{1}{2}V^2=\frac{1}{2}(\dot\psi^2(R+\cos\theta)^2+\dot\theta^2)$ (8.10)

Второе слагаемое в (8.9) – это кинетическая энергия вращения диска вокруг центра масс. В нём A и C – главные моменты инерции диска, а $\omega=(p,q,r)$ – его мгновенная угловая скорость в проекции на подвижные оси. Вектор ω можно представить в виде суммы $\omega=\omega_\varphi+\omega_\psi+\omega_\theta$ трёх мгновенных угловых скоростей, возникающих при поворотах по углам φ, ψ и θ. Несложно убедиться в том, что $\omega_\varphi=\dot\varphi e_3$, $\omega_\psi=\dot\psi e_z$, $\omega_\theta=-\dot\theta\xi$, где e_3 – третий вектор подвижных осей, e_z – вертикальный вектор абсолютной системы, ξ – вектор, касательный к горизонтальной параллели тора T^2 (см. 8.2). В абсолютной системе координат $e_z=(0,0,1)$, а ξ задаётся формулами (8.2). Воспользовавшись (8.4, 8.6) получим в проекции на подвижные оси

$$e_3=(0,0,1),\ e_z=(\sin\varphi\cos\theta,\cos\varphi\cos\theta,\sin\theta),\ \xi=(\cos\varphi,-\sin\varphi,0)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}p&=\dot\psi\sin\varphi\cos\theta+\dot\theta\cos\varphi\\ q&=\dot\psi\cos\varphi\cos\theta-\dot\theta\sin\varphi\\ r&=\dot\varphi+\dot\psi\sin\theta\end{aligned}\qquad(8.11)$$

Теперь можно выписать интеграл энергии в обобщённых координатах

$$\begin{aligned}f_1=&\frac{1}{2}(\dot\psi^2(R+\cos\theta)^2+\dot\theta^2)+\\ &+\frac{1}{2}(A(\dot\psi^2\cos^2\theta+\dot\theta^2)+C(\dot\varphi+\dot\psi\sin\theta)^2+\sin\theta=c_1\end{aligned}\qquad(8.12)$$

Координата φ является циклической, т.к. она не входит в кинетическую и потенциальную энергии, а её скорость не входит в уравнение неголономной связи. Ей соответствует циклический интеграл момента собственного вращения

$$f_2 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta = c_2 \qquad (8.13)$$

Исследуем вид трёхмерного многообразия уровней интегралов (8.12, 8.13, 8.8). Поскольку в число интегралов движения входит интеграл энергии, представляющий собой положительно определённую квадратичную форму по скоростям, то это многообразие компактно.

Исследуем кинематическую независимость интегралов. Сначала подставим (8.13) в (8.12) и получим более простое выражение для интеграла энергии

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{2}(\dot{\psi}^2(R+\cos\theta)^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}(A(\dot{\psi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2) + \sin\theta = \tilde{c}_1 \quad (8.14)$$

Пусть G – якобиева матрица интегралов (8.14, 8.13, 8.8) по угловым скоростям:

$$G = \left\| \frac{\partial(\tilde{f}_1, f_2, f_3)}{\partial(\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi}(A\cos^2\theta + (R+\cos\theta)^2) & (A+1)\dot{\theta} \\ 1 & \sin\theta & 0 \\ 0 & (R+\cos\theta)\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} (8.15)$$

Отсюда $\det G = \dot{\psi}(A\cos^2\theta + (R+\cos\theta)^2)\cos\varphi + \dot{\theta}(A+1)(R+\cos\theta)\sin\varphi$ (8.16)

Условием кинематической независимости наших интегралов является условие $\det G \neq 0$. Исследуем обращение в ноль $\det G$. Возьмём достаточно большую константу интеграла энергии $\tilde{c}_1 > 1$. Тогда из (8.14) следует, что всегда либо $\dot{\psi} \neq 0$, либо $\dot{\theta} \neq 0$.

Рассмотрим случай $\dot{\theta} = 0$. Тогда $\dot{\psi} \neq 0$ и из (8.8), и того, что $R > 1$, получаем $\sin\varphi = 0$. Отсюда $\det G = \dot{\psi}(A\cos^2\theta + (R+\cos\theta)^2) \neq 0$.

Рассмотрим случай $\dot{\psi} = 0$. Тогда $\dot{\theta} \neq 0$ и из (8.8) получаем $\cos\varphi = 0$. Отсюда и того, что $R > 1$ имеем $\det G = \dot{\theta}(A+1)(R+\cos\theta) \neq 0$.

Теперь проанализируем случай $\dot{\psi} \neq 0$ и $\dot{\theta} \neq 0$.

Пусть $\cos\varphi = 0$. Тогда $\det G = \dot{\theta}(A+1)(R+\cos\theta) \neq 0$.

Пусть $\sin\varphi = 0$. Тогда $\det G = \dot{\psi}(A\cos^2\theta + (R+\cos\theta)^2) \neq 0$.

Осталось рассмотреть случай $\dot{\psi} \neq 0$, $\dot{\theta} \neq 0$, $\cos\varphi \neq 0$, $\sin\varphi \neq 0$. Из (8.8) находим $\dot{\theta} = \dfrac{\dot{\psi}(R+\cos\theta)\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Подставив это в (8.16) получим

$$\det G = \frac{\dot{\psi}}{\cos\varphi}[(A\cos^2\theta + (R+\cos\theta)^2)\cos^2\varphi + (R+\cos\theta)^2\sin^2\varphi(A+1)] \neq 0$$

Таким образом, при достаточно большом значении константы интеграла энергии $\tilde{c}_1 > 1$, система интегралов (8.12, 8.13, 8.8) кинематически независима.

Поэтому при указанных условиях многообразие уровня этих интегралов является компактным конечнолистным накрытием конфигурационного многообразия T^3. Оценим число листов и их связность. Равенство $\tilde{f}_1 = \tilde{c}_1$ является квадратным уравнением относительно $\dot{\theta}$ или относительно $\dot{\psi}$ и всегда допускает два решения. Система равенств (8.13, 8.8) является линейной относительно $\dot{\varphi},\ \dot{\psi},\ \dot{\theta}$ и, при заданном значении $\dot{\psi}$ или $\dot{\theta}$ имеет не более одного решения. Поэтому число листов накрытия – два.

3. Эквивалентность инвариантных многообразий.

Рассмотрим нашу механическую систему в гамильтоновом формализме. Пусть у нас опять есть семейство функционально независимых первых интегралов движения $F = \{f_i\},\ i = 1,2,...,k$. И пусть M_c – связная компактная компонента многообразия уровня этих интегралов. Её размерность обозначим $r = 2n - k$. Поскольку первые интегралы функционально независимы, то, в соответствии с утверждением 2.1, в некоторой ее открытой окрестности нет других точек этого многообразия, и существует некоторое $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $a \in R^n$, таких, что $\|a - c\| < \varepsilon$ множество M_a уровня системы интегралов F представляет собой замкнутое компактное подмногообразие диффеоморфное M_c. Объединение всех M_a образует открытую окрестность M_c.

Пусть система первых интегралов F функционально замкнута относительно канонической скобки Пуассона в фазовом пространстве, т.е. $(f_i, f_j) = \varphi_{ij}(f_1, f_2,..., f_k)$, где φ_{ij} – некоторые гладкие функции. Пусть Φ – система всех первых интегралов из F, пополненная линейными (или функциональными) операциями и коммутированием до алгебры Ли. Тогда гамильтоновы векторные поля системы Φ образуют алгебру Ли, которую мы обозначим Ψ.

Утверждение 9.1. Возьмем какое-нибудь векторное поле $V \in \Psi$. Оно порождает локальную однопараметрическую группу $g^s(V)$ диффеоморфизмов фазового пространства. Тогда локально эта группа диффеоморфно переводит каждое многообразие M_a в некоторое многообразие M_b, сохраняя при этом исходный фазовый поток.

Доказательство. В самом деле, возьмем какой-нибудь первый интеграл $f \in \Phi$, порождающий $V \in \Psi$. Тогда по построению Φ имеем $f = \varphi(f_1, f_2,..., f_k)$, где φ - некоторая гладкая функция. Пусть V_i – гамильтоновы векторные поля, порождаемые интегралами f_i. Тогда

$$V = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial f_j} V_j\text{, и}$$

$$df_i(V)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\varphi}{\partial f_j}df_i(V_j)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\varphi}{\partial f_j}\varphi_{ij}(f_1,f_2,...,f_k)=\psi_i(f_1,f_2,...,f_k) \quad (9.1)$$

где ψ_i – гладкие функции. Фактически (9.1) означает, что для всех точек M_c при движении по векторному полю V скорость изменения константы c_i одна и та же. Если обозначить s – групповой параметр сдвига вдоль поля V, то

$$\frac{dc_i}{ds}=\psi_i(c_1,c_2,...,c_k) \quad (9.2)$$

Значит, каждая поверхность уровня $\{f_i=const\}$ переходит в себя и, следовательно, то же происходит и с M_c.

Осталось доказать, что диффеоморфизм $g^s(V)$ сохраняет гамильтонов поток. Но это следует из того, что все функции f_i, будучи первыми интегралами движения, коммутируют с гамильтонианом. Значит и $f=\varphi(f_1,f_2,...,f_k)$ также коммутирует с ним.

В каждой точке M_c векторные поля из алгебры Ψ образуют линейное пространство некоторой размерности m. Разность $w=m-r$ назовём корангом алгебры векторных полей Ψ в данной точке M_c. Минимальное значение w будем называть корангом Ψ на M_c. На самом деле при определении коранга достаточно брать не все векторные поля из Ψ, а только систему гамильтоновых векторных полей V_i, порождаемых интегралами f_i, поскольку на M_c все поля из Ψ являются линейными комбинациями полей V_i с коэффициентами постоянными на M_c.

Утверждение 9.2. Пусть w – коранг Ψ на M_c. Тогда в окрестности M_c существует w-параметрическое семейство инвариантных многообразий диффеоморфных M_c, и движение на которых эквивалентно движению на нём.

Доказательство. Возьмём какую-либо точку на M_c и найдём систему w линейно независимых векторов $W_i=\sum_{j=1}^{j=k}\lambda_j V_j$ (9.3)

не касающихся M_c. Тогда и в любой другой точке M_c вектора, вычисленные по (9.3) будут линейно независимыми и трансверсальными M_c. Это следует из (9.2). Таким образом, мы получаем систему w независимых векторных полей трансверсальных M_c, и сохраняющих M_c и гамильтонов поток на нём при сдвиге вдоль этих полей. Сдвиги вдоль этих полей (хотя и не коммутирующие) образуют искомое w-параметрическое семейство диффеоморфизмов.

Пример 9.1. В первом разделе мы рассматривали инвариантное многообразие интегралов моментов количества движения. Коранг алгебры векторных полей здесь равен двум (если вектор момента не равен нулю).

Замечание 9.1. Если гамильтоновы векторные поля V_i, порождаемые интегралами f_i, не коммутируют, то распределение порождаемое ими неинволютивно. Это означает, фактическая размерность семейства инвариантных многообразий диффеоморфных M_c может оказаться выше, чем та, которая объявлена в утверждении 9.2. Так, в примере 9.1 интегралы момента количества движения не коммутируют, и поэтому все многообразия в окрестности M_c, при заданном уровне энергии эквивалентны ему.

4. Интегралы, линейные по скоростям.

В этом разделе мы исследуем вопрос о кинематической независимости первых интегралов линейных по скоростям. Известно, что локально такие интегралы являются циклическими [5]. Сначала повторим рассуждения примера 6.3. Рассмотрим натуральную консервативную механическую систему с компактным конфигурационным многообразием K^n. Пусть в обобщенных координатах $q \in R^n$ интеграл энергии имеет вид

$$f_0(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q},\dot{q}) + U(q) = h \tag{10.1}$$

Здесь $T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q},\dot{q})$ – кинетическая, а $U(q)$ – потенциальная энергии, $A(q)$ – невырожденная положительно определённая $n \times n$ матрица. Все функции предполагаем гладкими. В соответствии с утверждением 5.3, условие кинематической невырожденности интеграла (10.1) выглядит следующим образом: $rank\frac{\partial f_0}{\partial \dot{q}} = rank A(q)\dot{q} = 1$, или $A(q)\dot{q} \neq 0$. Поскольку $A(q)$ невырождена, то последнее условие эквивалентно тому, что $\dot{q} \neq 0$. Поскольку конфигурационное многообразие компактно, то потенциальная энергия на нём достигает своего максимума $h_0 \geq U(q)$, $\forall q \in K^n$. Если константа h интеграла энергии достаточно велика ($h > h_0$), то на многообразии уровня интеграла энергии (10.1) везде $\dot{q} \neq 0$ и, вследствие утверждения 5.4, любая связная компонента этого многообразия представляет собой расслоённое пространство с базой K^n и некоторым слоем Z, который является гладким компактным многообразием размерности $n-1$. При заданной точке $q \in K^n$ слой Z определяется уравнением (10.6), т.е. представляет собой $(n-1)$-мерную сферу S^{n-1}.

Допустим, что у системы есть w первых интегралов линейных по скоростям. Локально, в любой координатной окрестности они имеют вид

$$f_i = b_i(q)\dot{q} = c_i,\ i = 1,2,...,w \tag{10.2}$$

где $b_i \in R^n$ – гладкие вектор-функция, самосогласованные в точках пересечения различных координатных окрестностей. Пусть эти интегралы являются невырожденными, т.е. всюду на конфигурационном многообразии $b_i(q) \neq 0$. Пусть, также, они независимы, т.е. всюду на конфигурационном многообразии вектора $b_i(q) \neq 0$ линейно независимы. Заметим, что из независимости следует невырожденность. Если взять векторное поле $v_i(q) = A(q)b_i(q)$, то $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} v_i = (A\dot{q}, v_i) = b_i \dot{q}$, т.е. интегралы (10.2) являются Нётеровыми для полей симметрии v_i. Независимость интегралов, линейных по скоростям, эквивалентна независимости соответствующих полей симметрии.

Рассмотрим случай $c_i = 0$, $i = 1,2,...,w$. Покажем, что система интегралов (10.1, 10.2) кинематически независима. Пусть G – якобиева матрица интегралов (10.1, 10.2) по скоростям $G = \begin{pmatrix} A\dot{q} \\ B \end{pmatrix}$, где B – матрица, строками которой являются вектора b_i, $i = 1,2,...,w$. Условием кинематической независимости является условие $rank G = w + 1$. Пусть в какой-либо точке $\tilde{q}$ конфигурационного многообразия условие кинематической независимости нарушается. Тогда найдётся такая скорость $\tilde{\dot{q}}$ и числа $\lambda_i(\tilde{q})$, $i = 0,1,2,...,w$ не все равные нулю, что

$$\lambda_0 A(\tilde{q})\tilde{\dot{q}} + \lambda_1 b_1(\tilde{q}) + \lambda_2 b_2(\tilde{q}) + ... + \lambda_w b_w(\tilde{q}) = 0$$

Поскольку b_i линейно независимы, то $\lambda_0 \neq 0$ (10.3)

Напомним, что на всём многообразии уровня интеграла энергии $\dot{q} \neq 0$ и, значит

$\tilde{\dot{q}} \neq 0$ и $\tilde{T} = \frac{1}{2}(A(\tilde{q})\tilde{\dot{q}}, \tilde{\dot{q}}) > 0$ (10.4)

Домножив обе части этого равенства справа на $\tilde{\dot{q}}$, получим

$$\lambda_0 (A(\tilde{q})\tilde{\dot{q}}, \tilde{\dot{q}}) + \lambda_1 b_1(\tilde{q})\tilde{\dot{q}} + \lambda_2 b_2(\tilde{q})\tilde{\dot{q}} + ... + \lambda_w b_w(\tilde{q})\tilde{\dot{q}} = 0$$

или $\lambda_0 2\tilde{T} + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + ... + \lambda_w c_w = 0$. Поскольку $c_i = 0$, $i = 1,2,...,w$, то $\lambda_0 2\tilde{T} = 0$, и мы входим в противоречие с (10.3, 10.4).

Таким образом, интегралы (10.1, 10.2) кинематически независимы при достаточно больших значениях константы интеграла энергии и нулевых значениях констант интегралов, линейных по скоростям.

<u>*Замечание 10.1.*</u> Поскольку конфигурационное многообразие компактно, то кинематическая независимость сохранится и при не слишком больших ненулевых значениях констант интегралов, линейных по скоростям. В силу однородности по скоростям кинетической энергии и линейных интегралов возможна замена времени, что эквивалентно масштабированию констант линейных интегралов. Это означает, что при формулировании достаточных условий кинематической независимости можно ограничиться просто условием, что константа интеграла энергии является достаточно большой. Тем самым, мы можем сформулировать следующее утверждение.

<u>*Утверждение 10.1.*</u> Если натуральная система с компактным конфигурационным многообразием K^n имеет w независимых первых интегралов линейных по скоростям, то, для достаточно больших значений константы интеграла энергии, многообразие совместного уровня этих

интегралов и интеграла энергии представляет собой гладкое расслоение с базой K^n и слоем S^{n-w-1}.

Доказательство. В силу замечания 10.1 нам надо только отметить, что слой представляет собой совместное решение уравнений (10.1) и (10.2) в пространстве скоростей. Т.е. слой – это сечение сферы S^{n-1}(точнее, эллипсоида) независимыми гиперплоскостями (10.2) в количестве w экземпляров. Это, очевидно, сфера S^{n-w-1} (эллипсоид).

Замечание 10.2. Рассмотрим теперь специальный случай, когда число первых интегралов, линейных по скоростям на единицу меньше размерности конфигурационного пространства, т.е. $w=n-1$. В этом случае слой представляет собой две точки (пересечение окружности и прямой), и многообразие уровня является двулистным накрытием конфигурационного многообразия K^n. Если же конфигурационное пространство односвязно, то многообразие уровня представляет собой два его экземпляра, т.е. $K^n \bigcup K^n$.

Замечание 10.2. Сказанное в данном разделе справедливо для систем с числом степеней свободы большим единицы $(n>1)$. Для одномерных систем из равенства нулю линейного интеграла следует, что скорость также равна нулю, и, значит, равна нулю кинетическая энергия, т.е. при достаточно больших значениях интеграла энергии многообразие уровня становится пустым.

Замечание 10.3. Практическая значимость полученных здесь результатов состоит в том, что для систем, включающих только интеграл энергии и интегралы, линейные по скоростям, (при достаточно больших значениях интеграла энергии) вместо проверки кинематической независимости полной системы интегралов можно ограничиться проверкой независимости линейных интегралов или соответствующих им полей симметрии.

Например, в задаче о движении твёрдого тела с неподвижной точкой в осесимметричном потенциальном поле сил, интеграл площадей всегда будет невырожден, поскольку поле поворотов вокруг постоянной оси в $SO(3)$ невырождено. Другой пример – волчок Эйлера с эксцентриком (раздел 7). Тут независимость линейных интегралов эквивалентна невырожденности отображения (7.3): $\sigma = J_0\omega + J_1(e_1\dot{\gamma}+\omega) = (J_0+J_1)\omega + J_1 e_1\dot{\gamma}$. Очевидно, это всегда имеет место. То же можно сказать и о других примерах, приведённых в данной работе.

Замечание 10.4. Из сказанного выше вытекает одно геометрическое свойство. На n-мерном компактном односвязном гладком многообразии K^n никакая риманова метрика не может иметь $n-1$ гладких попарно коммутирующих свободно действующих однопараметрических групп симметрий. В самом деле, допустим противное, и обозначим порождаемые указанными группами векторные поля V_i, $i=1,2,...,n-1$. Введём натуральную механическую систему с матрицей кинетической энергии совпадающей с соответствующей матрицей римановой метрики. Поля V_i, $i=1,2,...,n-1$

являются нётеровыми для нашей системы, и порождают $n-1$ коммутирующих первых интегралов, которые, совместно с интегралом энергии высекают $n-$мерный инвариантный тор в фазовом пространстве. В силу же односвязности K^n, при малых значениях констант нётеровых интегралов этот тор должен быть диффеоморфен K^n. Мы пришли к противоречию. В качестве примера – на S^n не следует ожидать линейно интегрируемых систем, у которых интегралы линейные по скоростям нигде не вырождаются.

ЛИТЕРАТУРА

[1]Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., Эдиториал УРСС, 2000 – 408с. ***[2]***Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем. Функциональный анализ, 1978, т. 12, вып. 2, с. 46-56. ***[3]***Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрирование гамильтоноовых систем с некоммутативными симметриями. В кн: Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 20, М., МГУ, 1980, с. 5-54. ***[4]***Фоменко А.Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. М., МГУ, 1983 – 217с. ***[5]***Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, Изд-во УдГУ, 1995 – 432с. ***[6]***Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., Мир, 1971 – 343с. ***[7]***Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Эдиториал УРСС, 1998, т.1 – 333с., т.2 – 278с. ***[8]***Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М., Эдиториал УРСС, 2002 – 416с. ***[9]***Милнор Дж. Теория Морса. М., Мир, 1971. ***[10]***Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1965 – 431с. ***[11]***Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. т. 2, ч. 1, М., Иностранная литература, 1951 – 435с.