

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша
Российской Академии Наук

Е.И. Кугушев, О.В. Сорокина

Закономерности движения
механических систем с односторонними связями.

Москва 2002

Аннотация. Рассматриваются механические системы с голономными односторонними связями. На основе обобщенных уравнений Лагранжа 1-го и 2-го рода формулируются теоремы об изменении количества движений системы и его момента, теоремы Аппеля, Рауса, Нётер.

Ключевые слова: механические системы с ударами, уравнения движения

Abstract. Mechanics systems with one sided realations are studied. On the base of generalized Lagrange equations of motion the theorems of pulse and pulse moment, the theorems of Appel, Routh, Noether are proved.

Key words: Mechanical systems with impacts, law of motion

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-01-00508, 02-01-00352 и 02-07-90027).

Содержание

Введение	3
1. Принцип Даламбера-Лагранжа.....	4
2. Теорема Аппеля.....	11
3. Теоремы Карно и непрерывность кинетической энергии.	13
4. Теорема об изменении количества движения.	Ошибка! Закладка не определена.
5. Теорема об изменении момента количества движения. ..	Ошибка! Закладка не определена.
6. Циклические интегралы и теорема Рауса.....	Ошибка! Закладка не определена.
7. Преобразование координат.	Ошибка! Закладка не определена.
8. Теорема Нётер.	Ошибка! Закладка не определена.
9. Несколько примеров.	Ошибка! Закладка не определена.
ЛИТЕРАТУРА	Ошибка! Закладка не определена.

Введение

В работе рассматриваются механические системы с односторонними связями. Обзор работ по данной тематике можно найти в [1,2].

В публикации [3] был рассмотрен обобщённый принцип Даламбера-Лагранжа и уравнения движения для систем с идеальными односторонними связями в форме уравнений Лагранжа первого и второго рода с импульсными правыми частями. В данной работе, на основе этого принципа, основные законы движения механических систем с идеальными односторонними связями (законы изменения полного импульса системы и его момента) распространяются на системы с идеальными голономными односторонними связями. Формулируются в общем виде теоремы Аппеля и Карно. Помимо этого на системы с идеальными голономными односторонними связями распространяется действие теорем Рауса и Нётер о существовании и использовании циклических интегралов.

Опишем кратко содержание работы. В первом разделе следуя [3] мы формулируем обобщённый принцип Даламбера-Лагранжа и уравнения движения для механических систем с односторонними связями. Это нам понадобится в дальнейшем для вывода основных закономерностей движения таких систем. В локальной формулировке принцип Даламбера-Лагранжа для систем с односторонними связями известен уже давно [4]. Однако, исходя из него затруднительно получать уравнения движения справедливые на всем отрезке движения, поскольку в его формулировке присутствуют ускорения точек системы, которые могут быть неопределёнными в моменты выхода на границу односторонних связей (т.е. в точках удара). В данном разделе мы даём интегральную формулировку принципа Даламбера-Лагранжа, которая позволяет избавиться от этих трудностей.

Второй раздел работы посвящен рассмотрению теоремы Аппеля для систем с односторонними связями о сохранении обобщенных импульсов в касательной плоскости поверхности удара. Здесь мы обосновываем ее, основываясь на обобщенных уравнениях Лагранжа первого рода. Третий раздел работы посвящен теоремам Карно, в которых рассматривается поведение кинетической энергии в точках скачка скорости (точках удара). Кроме того, обосновывается, что при абсолютно упругом ударе кинетическая энергия является непрерывной функцией и, при обычных условиях, выполняется закон сохранения энергии.

В следующих двух разделах рассматриваются теоремы, которые для систем с идеальными удерживающими связями относятся к числу основных законов движения. В четвёртом разделе работы для систем с идеальными односторонними связями формулируются теоремы об изменении количества движения системы и о движении ее центра масс. В пятом разделе для систем с идеальными односторонними связями формулируются теоремы об изменении момента количества движения.

Следует заметить, что известны формулировки этих законов для систем с односторонними связями [4]. Они выводятся из локального принципа Даламбера-Лагранжа. Однако, использующиеся при этом рассуждения справедливы только для тех участков траектории, где скорость движения, по крайней мере, непрерывна (т.е. можно вычислить ускорения). Поэтому для законов сохранения в точках разрыва скоростей не гарантируется сохранение констант соответствующих интегралов движения. Приводимые в данной работе доказательства основаны на обобщенных уравнениях Лагранжа первого рода и лишены указанных недостатков.

В шестом разделе показывается, что теория Рауса о понижении порядка лагранжевой системы при наличии циклических координат справедлива и для систем с идеальными односторонними связями. Известно, что уравнения Лагранжа второго рода инвариантны относительно замены координат. В седьмом разделе мы показываем, что это остается справедливым и при наличии идеальных односторонних связей. В восьмом разделе мы показываем, что теорема Нётер о существовании первых интегралов лагранжевых систем справедлива и при наличии идеальных односторонних связей. Как и в предыдущих разделах, наши рассуждения почти дословно повторяют традиционные.

В заключительном разделе, не давая подробного анализа, мы приводим несколько примеров механических систем с односторонними связями, для которых применимы результаты, изложенные в данной работе.

1. Принцип Даламбера-Лагранжа.

В данном разделе, следуя [3] мы сформулируем обобщенный принцип Даламбера-Лагранжа для механических систем с односторонними связями. Это нам понадобится в дальнейшем для вывода основных закономерностей движения таких систем.

В качестве аппарата, пригодного для описания движения систем с односторонними связями на любых участках траектории, предлагается использовать теорию функций с ограниченной вариацией (или, говоря иначе, мер Лебега-Стилтьеса). Остановимся на мотивах именно такого выбора. В классической механике систем с идеальными удерживающими связями движение механической системы представляет собой достаточно гладкую кривую в конфигурационном пространстве. При наложении односторонних связей скорость движения может уже претерпевать скачки. В большинстве случаев её представляют в виде гладкой функции, к которой добавляется кусочно-постоянная функция, называемая функцией скачков. Таким образом, реальное движение систем с односторонними связями можно было бы описывать в пространстве функций, которые представимы в виде такой суммы. Однако такое пространство не является удобным для исследования свойств движения аналитическими средствами. Например, в нем затруднительно решать вопрос о корректности систем обыкновенных дифференциальных

уравнений, описывающих движение. Удачным пространством было бы, например, какое-либо банахово, т.е. полное метрическое пространство функций. В самом деле, когда (при исследовании систем с удерживающими связями) мы берем в качестве пространства возможных скоростей движения банахово пространство непрерывных функций с естественной метрикой, то оказывается, что решения дифференциальных уравнений (т.е. траектории) существуют и, даже, являются гладкими.

Здесь уместно поставить вопрос о том, каково минимальное пространство функций, которое объемлет гладкие функции и функции скачков и при этом является банаховым. Естественной метрикой в пространстве функций скачков является полная вариация. И минимальным подходящим для нас банаховым пространством с этой метрикой является пространство функций с ограниченной вариацией. Именно поэтому удобным представляется выбор пространства возможных траекторий систем с односторонними связями в виде пространства таких функций, производная (скорость) которых является функцией с ограниченной вариацией. Сами траектории при этом, по крайней мере, являются абсолютно непрерывными функциями.

При таком описании движения реакции связей также описываются как меры Лебега-Стилтьеса. Уравнения движения в этом случае представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие импульсные члены в правой части.

Обсудим теперь кратко вопрос о том, как понимать обыкновенные дифференциальные уравнения с импульсной правой частью. Рассмотрим сначала уравнение

$$\dot{x} = f(x, t) + h(t) \frac{d\mu}{dt}$$

Запишем его немного иначе

$$dx = f(x, t)dt + h(t)d\mu \quad (1.1)$$

где $x, f, h \in R^n$. Пусть $f(x, t)$ и $h(t)$ – непрерывные вектор-функции, а $d\mu(t)$ – одномерная мера Лебега-Стилтьеса. Естественно предположить, что решение этого уравнения мы ищем в классе вектор-функций $x(t)$ с ограниченной вариацией. В этом случае и в левой и в правой частях уравнения стоят векторные меры Лебега-Стилтьеса, и само уравнение надо понимать как их совпадение.

Дадим теперь строгое определение. Пусть на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ задана вектор-функция $x(t)$ с ограниченной вариацией. Она является решением указанного уравнения с начальными условиями x_0 , если $x(t_0 - 0) = x_0$ и для любой непрерывной вектор-функции $v(t)$, заданной на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ выполнено

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dx(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) f(x(t), t) dt + \int_{t_0}^{t_1} v(t) h(t) d\mu(t)$$

Это условие эквивалентно выполнению для каждого t следующего уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(t), t) dt + \int_{t_0}^t h(t) d\mu(t)$$

Интеграл здесь понимается как интеграл Стильеса на отрезке $[t_0, t]$.

В данной работе нас будут интересовать несколько более сложные импульсные дифференциальные уравнения. В общем виде их можно записать следующим образом.

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, t) \\ \dot{y} = f_2(x, y, t) + h(x(t), t) \frac{d\mu}{dt} \end{cases}$$

где $x, y, f_1, f_2, h \in R^n$. Пусть $f_i(x, t)$ и $h(t)$ – непрерывные вектор-функции, а $d\mu(t)$ – одномерная мера Лебега-Стилтьеса. Оно рассматривается совершенно аналогично.

Дадим строгое определение решения. Пусть на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ задана абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$ и функция с ограниченной вариацией $y(t)$. Они являются решением приведенной выше системы уравнений с начальными условиями (x_0, y_0) , если $x(t_0) = x_0$, $y(t_0 - 0) = y_0$ и для любого t на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ выполнено

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f_1(x(t), y(t), t) dt \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f_2(x(t), y(t), t) dt + \int_{t_0}^t h(x(t), t) d\mu(t) \end{aligned}$$

В частном случае, когда $f_1(x, y, t) = y$, эта система может быть записана более кратко следующим образом

$$d\dot{y} = f_2(x, y, t) dt + h(x(t), t) d\mu$$

Перейдем теперь собственно к принципу Даламбера-Лагранжа. Рассмотрим систему из N материальных точек, перемещающихся в пространстве под действием приложенных к ним сил. Координаты точек объединим в один вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, где $n = 3N$. В отсутствие связей движение системы описывается вторым законом Ньютона

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

где $m_i > 0$ – массы точек, а $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ – вектор сил, действующих на точки системы.

Наложим на систему семейство k линейных идеальных удерживающих связей:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)\dot{x}_j + b_i(x,t) = 0, \quad i=1,2,\dots,k \quad (1.2)$$

где $k < n$ – число связей. Запишем (1.2) в матричной форме.

$$A(x,t)\dot{x} + b = 0 \quad (1.3)$$

где A – матрица $n \times k$, $b \in R^k$.

Независимость связей. Удерживающие связи независимы, если $\text{rank } A(x,t) = k$ всюду.

Наложим на нашу систему семейство односторонних голономных связей

$$g_i(x,t) \leq 0, \quad i=1,2,\dots,m \quad (1.4)$$

Конфигурационное пространство. Множество точек (x,t) , удовлетворяющих связям (1.3, 1.4) будем называть расширенным конфигурационным пространством или, иногда, для краткости просто конфигурационным пространством.

Внутренностью конфигурационного пространства будем называть множество точек (x,t) , в которых

$$g_i(x,t) < 0, \quad i=1,2,\dots,m \quad (1.5)$$

Границей конфигурационного пространства или поверхностью удара будем называть множество точек (x,t) удовлетворяющих хотя бы одному уравнению

$$g_i(x,t) = 0, \quad i=1,2,\dots,m \quad (1.6)$$

Мы будем предполагать, что удерживающие и односторонние связи являются непрерывными по (x,t) , а односторонние связи являются гладкими по x – первого класса гладкости, так, что в каждой точке (x,t) конфигурационного пространства можно определить пространство возможных перемещений.

Возможным перемещением удерживающих связей в точке (x,t) называется любой вектор $\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n) \in R^n$, удовлетворяющий условию

$$A(x,t)\delta x = 0. \quad (1.7)$$

Эти возможные перемещения образуют линейное пространство $L_0(x,t)$ возможных перемещений удерживающих связей (размерности $n-k$, если связи независимы).

Возможные перемещения. Пространство возможных перемещений в точке (x,t) обозначается $L(x,t)$. Для точек, лежащих внутри области (1.4) оно определяется как пространство $L_0(x,t)$ возможных перемещений удерживающих связей. Для точек, лежащих на границе области (1.4), мы требуем также, чтобы вектор возможного перемещения δx касался этой границы, т.е. чтобы вдобавок к (1.7) выполнялось следующее условие:

$$\left(\frac{\partial g_i(x,t)}{\partial x}, \delta x \right) = 0 \quad \text{для тех } i, \text{ для которых } g_i(x,t) = 0 \quad (1.8)$$

здесь (a, b) означает обычное скалярное произведение векторов a и b .

Конус допустимых направлений. Мы также будем предполагать, что в каждой точке поверхности удара можно определить конус $K(x, t)$ допустимых направлений. Он представляет собой замыкание конуса возможных перемещений, сдвигаясь вдоль которых мы попадаем внутрь области, допустимой связями (1.4). Формально конус допустимых направлений, в добавление к условиям (1.7), определяется системой неравенств

$$\left(\frac{\partial g_i(x, t)}{\partial x}, \delta x \right) \leq 0 \text{ для тех } i, \text{ для которых } g_i(x, t) = 0 \quad (1.9)$$

Также мы будем считать, что односторонние связи являются непротиворечивыми, т.е. что конус допустимых направлений не пуст и содержит в себе пространство возможных перемещений. Для внутренних точек конфигурационного пространства конус $K(x, t)$ допустимых направлений будем полагать совпадающим с пространством возможных перемещений $L(x, t)$.

Мы будем рассматривать движение на некотором отрезке времени $t \in [t_0, t_1]$.

Вариацией кривой $x(t)$ будем называть непрерывную вектор-функцию $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$.

Возможные вариации Вариацию $v(t)$ кривой $x(t)$ будем называть возможной, если $v(t) \in L(x(t), t)$ для всех t , т.е. вектор $v(t)$ является возможным перемещением в точке $(x(t), t)$. Отличие от определения возможной вариации для случая только удерживающих связей состоит в том, что во всех точках t , в которых кривая $x(t)$ выходит на границу односторонних связей, вектор $v(t)$ касается границы односторонних связей.

Допустимые вариации. Вариацию $v(t)$ кривой $x(t)$ будем называть допустимой, если $v(t) \in K(x(t), t)$ для всех t , т.е. вектор $v(t)$ является допустимым перемещением в точке $(x(t), t)$. Отличие от определения возможной вариации состоит в том, что во всех точках t , в которых кривая $x(t)$ выходит на границу односторонних связей, вектор $v(t)$ лежит в конусе допустимых направлений $K(x(t), t)$. Поскольку конус допустимых перемещений содержит пространство возможных перемещений, то любая возможная вариация является допустимой.

Уравнения движения мы будем строить исходя из следующих принципов.

Принцип освобождения от связей. Пусть $x(t)$ – траектория движения системы со связями (1.3, 1.4). Тогда систему можно освободить от связей и добавить некую силу – реакцию связей $R(t) = \{R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t)\}$ таким образом, что кривая $x(t)$ останется траекторией освобожденной системы. При этом компоненты реакции связей представляют собой меры Лебега-Стилтьеса

$R_i(t) = d\rho_i(t)$, имеющие особенности, сосредоточенные на множестве тех моментов времени, в которые траектория $x(t)$ выходит на односторонние ограничения.

Траектория системы представляет собой такую дифференцируемую функцию $x(t)$, производная которой, $\dot{x}(t)$ является функцией с ограниченной вариацией. При этом будут справедливы следующие уравнения.

$$m_i d\dot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t)dt + d\rho_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.10)$$

Идеальность связей (полная). Связи (1.3, 1.4) называются (вполне) идеальными, если для любой траектории системы $x(t)$, для любой ее допустимой вариации $v(t)$ интегральная элементарная работа сил реакции связей неотрицательна, т.е.

$$\int_{t_0}^{t_1} (v(t), d\rho(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n v_i(t) d\rho_i(t) \geq 0 \quad (1.11)$$

Это условие означает, что при выходе действительной траектории системы на границу удерживающих связей реакция связей направлена внутрь области, допустимой этими связями.

Двусторонняя идеальность связей. Связи называются двусторонне идеальными, если для любой траектории движения системы $x(t)$ для любой ее возможной вариации $v(t)$ интегральная элементарная работа сил реакции односторонних связей равна нулю, т.е.

$$\int_{t_0}^{t_1} (v(t), d\rho(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n v_i(t) d\rho_i(t) = 0 \quad (1.12)$$

Из полной идеальности связей вытекает их двусторонняя идеальность. В самом деле, допустим противное, что связи являются вполне, но не двусторонне идеальными. Тогда существует возможная (и, следовательно,

допустимая) вариация $v(t)$ такая, что $\int_{t_0}^{t_1} (v(t), d\rho(t)) > 0$. Взяв возможную (и,

следовательно, допустимую) вариацию $\tilde{v}(t) = -v(t)$ получим $\int_{t_0}^{t_1} (\tilde{v}(t), d\rho(t)) < 0$,

что противоречит (1.11). Доказательство завершено.

Найдя $d\rho_i(t)$ из (1.10) и подставив в (1.11) получим эквивалентную форму записи условия идеальности связей. Для любой допустимой вариации $v(t)$ должно выполняться

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n (m_i d\dot{x}_i - F_i(x, \dot{x}, t)dt) v_i(t) \geq 0 \quad (1.13)$$

Аналогично для условия двусторонней идеальности связей (1.12). Для любой возможной вариации $v(t)$ должно выполняться

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n (m_i d\dot{x}_i - F_i(x, \dot{x}, t) dt) v_i(t) = 0 \quad (1.14)$$

Принцип Даламбера-Лагранжа. Пусть непрерывная кривая $x(t)$ удовлетворяет уравнениям связей (1.3, 1.4), а ее производная существует почти всюду и является функцией ограниченной вариации. Кривая $x(t)$ является траекторией движения системы с идеальными связями (1.3, 1.4) тогда и только тогда, когда для любой допустимой вариации $v(t)$ выполнены соотношения (1.13) и, следовательно, для любой возможной вариации, соотношения (1.14).

Исходя из этого принципа в [3] были получены уравнения Лагранжа первого рода.

Уравнения Лагранжа первого рода. Принцип Даламбера-Лагранжа эквивалентен следующим уравнениям Лагранжа первого рода. Пусть непрерывная кривая $x(t)$ удовлетворяет уравнениям связей (1.3, 1.4), а ее производная существует почти всюду и является функцией ограниченной вариации. Кривая $x(t)$ является траекторией движения системы с идеальными связями (1.3, 1.4) тогда и только тогда, когда найдутся такие векторные меры Лебега-Стилтьеса $d\eta(t) = (d\eta_1(t), d\eta_2(t), \dots, d\eta_k(t))$ и $d\mu(t) = (d\mu_1(t), d\mu_2(t), \dots, d\mu_m(t))$, что

$$m_i d\dot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t) dt + \sum_{j=1}^k a_{ji}(x(t), t) d\eta_j - \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j(x(t), t)}{\partial x_i} d\mu_j \quad (1.15)$$

При этом каждая мера $d\mu_i(t)$ неотрицательна и сосредоточена на множестве моментов времени, в которые $g_i(x(t), t) = 0$.

Для безударных движений, когда траектории являются гладкими (скорости непрерывны по времени), эти уравнения совпадают с обычными уравнениями Лагранжа первого рода.

Матричная форма уравнений. Пусть $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$ – диагональная матрица, с элементами m_i на диагонали, $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ – сводный вектор сил, A' – транспонированная матрица A из (1.3), G' – транспонированная матрица Якоби

$$G = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right\| \quad (1.16)$$

Тогда уравнения (1.15) можно записать в более компактной форме

$$M d\dot{x} = F dt + A' d\eta - G' d\mu \quad (1.17)$$

Замечание о скачках. Любая функция ограниченной вариации есть сумма непрерывной функции и функции скачков представляющей собой ступенчатую функцию с не более чем счетным числом ступеней. В точках скачка функций $\eta(t)$ и $\mu(t)$ (и только в них) траекторная скорость $\dot{x}$ также может иметь скачок.

Обозначим эти скачки соответственно $\Delta\eta$, $\Delta\mu$ и $\Delta\dot{x}$. В силу (1.15), они связаны следующим соотношением

$$m_i \Delta\dot{x}_i = \sum_{j=1}^k a_{ji}(x(t), t) \Delta\eta_j - \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j(x(t), t)}{\partial x_i} \Delta\mu_j \quad (1.18)$$

или, более кратко

$$M\Delta\dot{x} = A'\Delta\eta - G'\Delta\mu \quad (1.19)$$

Поскольку во все время движения выполнены уравнения удерживающих связей (1.3), то $A\Delta\dot{x} = 0$ и из (1.19) получаем

$$AM^{-1}(A'\Delta\eta - G'\Delta\mu) = 0 \quad (1.20)$$

Таким образом, скачки $\Delta\eta$ и $\Delta\mu$ не являются независимыми. Они связаны системой k линейных соотношений.

2. Теорема Аппеля.

Для систем с удерживающими связями известна теорема Аппеля о сохранении обобщенных импульсов в касательной плоскости поверхности удара [5, 6]. Мы сформулируем ее, основываясь на уравнениях Лагранжа первого рода.

“Кинетическая метрика”. Кинетической метрикой будем называть Риманову метрику, порождаемую матрицей масс M . В этой метрике кинетическая энергия системы T выражается формулой $T = \frac{1}{2}(M\dot{x}, \dot{x})$. Это половина квадрата нормы вектора скорости системы. Термин “кинетическая метрика” не является общепринятым, но мы будем им пользоваться для краткости.

Вектор импульса системы. Вектором импульса механической системы называется сводный вектор импульсов всех ее точек $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, где $p_i = m_i \dot{x}_i$. Кратко это можно записать следующим образом

$$P = M\dot{x} \quad (2.1)$$

При движении системы вектор импульса представляет собой вектор-функцию ограниченной вариации. Ее можно представить в виде суммы двух составляющих $P(t) = c(t) + h(t)$, где $c(t)$ – непрерывная функция, а $h(t)$ – функция скачков (кусочно-постоянная вектор-функция с не более чем счетным числом точек разрыва).

Пусть система двигается по траектории $x(t)$ и $\tilde{t}$ – точка скачка вектора импульса. Будем называть ее точкой удара. Обозначим

$$\begin{aligned} V^- &= \dot{x}(\tilde{t} - 0), \quad P^- = P(\tilde{t} - 0) = MV^- \\ V^+ &= \dot{x}(\tilde{t} + 0), \quad P^+ = P(\tilde{t} + 0) = MV^+ \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для функции с ограниченной вариацией эти величины всегда определены. Точка $x(\tilde{t})$ лежит на границе односторонних связей, т.е. $g_i(x(\tilde{t}), \tilde{t}) = 0$ для

некоторых $i = 1, 2, \dots, m$. Условие скачка скорости в точке удара (1.19) в терминах импульса системы выглядит следующим образом

$$P^+ - P^- = A' \Delta \eta - G' \Delta \mu \quad (2.3)$$

Касательной плоскостью удара $\Pi(x(\tilde{t}))$ (или просто плоскостью удара) назовем линейное пространство возможных перемещений в точке удара $x(\tilde{t})$.

Это множество векторов $v \in R^n$, касающихся удерживающих связей и тех односторонних связей, которые вышли на ограничение, т.е. векторов, для которых выполнено

$$A(x(\tilde{t}), \tilde{t})v = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_i(x(\tilde{t}), \tilde{t})}{\partial x} v = 0, \quad (2.4)$$

для тех i , для которых $g_i(x, t) = 0$.

Не нарушая общности, для краткости записи, будем считать, что в точке удара все односторонние связи выходят на ограничение. Тогда плоскость удара Π задается системой соотношений

$$A(x(\tilde{t}), \tilde{t})v = 0, \quad G(x(\tilde{t}), t)v = 0 \quad (2.5)$$

где G – матрица Якоби односторонних связей (1.16).

Теорема Анпеля. Возьмем $u \in \Pi$ – любой вектор в плоскости удара. Тогда из (2.3, 2.5) имеем $(P^+, u) = (P^-, u)$. Т.е. сохраняются проекции вектора импульса системы на плоскость касательную поверхности удара. По-другому это равенство можно записать следующим образом

$$(MV^+, u) = (MV^-, u) \quad (2.6)$$

Оно означает, что в кинетической метрике сохраняются проекции скорости системы на плоскость удара.

Введем вектора

$$\partial g_i = M^{-1} \frac{\partial g_i(x(\tilde{t}), \tilde{t})}{\partial x}$$

Это “градиенты односторонних связей” в кинетической метрике.

Нормальная плоскость удара. Плоскостью $\Pi^\perp$, нормальной к плоскости удара Π будем называть линейное пространство, натянутое на вектора ∂g_i в пересечении с линейным пространством L_0 возможных перемещений удерживающих связей (1.7).

$$\Pi^\perp = \{u \in R^n : u = M^{-1}G'a, \forall a \in R^m, Au = 0\} \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что Π и $\Pi^\perp$ взаимно ортогональны в кинетической метрике и их линейная оболочка совпадает с L_0 . Таким образом, L_0 есть прямая сумма касательной и нормальной плоскостей $L_0 = \Pi \oplus \Pi^\perp$. В соответствии с этим скорости V^- и V^+ однозначно раскладываются на касательную V_0 и нормальную $V_\perp$ составляющие.

$$\begin{aligned} V^- &= V_0^- + V_\perp^-, \quad (MV_0^-, V_\perp^-) = 0, \\ V^+ &= V_0^+ + V_\perp^+, \quad (MV_0^+, V_\perp^+) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Причем

$$(MV_\perp^+, u) = (MV_\perp^-, u) = 0 \quad (2.9)$$

для любого вектора $u \in \Pi$ из касательной плоскости удара. Тогда из (2.6, 2.8) получаем

$$(MV_0^-, u) = (MV_0^+, u) \quad (2.10)$$

т.е. теорема Аппеля означает, что сохраняется проекция скорости на касательную плоскость удара в кинетической метрике.

$$MV_0^- = MV_0^+, \quad V_0^- = V_0^+ \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что

$$V^+ - V^- = V_\perp^+ - V_\perp^- \in \Pi_\perp \quad (2.12)$$

Замена координат. Естественно, все указанные соотношения сохраняются при замене координат и, в частности, при интегрировании части связей и переходе к обобщенным координатам. Вектор импульса при этом определяется соотношением

$$P = MV = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$$

3. Теоремы Карно и непрерывность кинетической энергии.

В теоремах Карно (см., например, [6]) рассматривается поведение кинетической энергии в точках скачка скорости (точках удара). При этом используются следующие термины.

Потерянные скорости – это компоненты вектора приращения скорости при ударе

$$\Delta V = V^- - V^+ \quad (3.1)$$

Из (2.11) следует, что $\Delta V \in \Pi_\perp$, т.е. что вектор потерянных скоростей лежит в нормальной плоскости удара.

Кинетическая энергия потерянных скоростей – это кинетическая энергия системы, которую она имела бы, двигаясь с потерянной скоростью

$$T^* = \frac{1}{2} (M \Delta V, \Delta V) \quad (3.2)$$

Из (2.8, 2.11) следует, что

$$T^* = \frac{1}{2} (M (V_\perp^- - V_\perp^+), (V_\perp^- - V_\perp^+)) \quad (3.3)$$

Потерянная кинетическая энергия определяется как разность кинетических энергий до и после удара

$$\Delta T = T^- - T^+ = \frac{1}{2} (MV^-, V^-) - \frac{1}{2} (MV^+, V^+) \quad (3.4)$$

Из (2.8, 2.11) следует, что

$$\Delta T = \frac{1}{2}(MV_{\perp}^{-}, V_{\perp}^{-}) - \frac{1}{2}(MV_{\perp}^{+}, V_{\perp}^{+}) \quad (3.5)$$

Первая теорема Карно обычно формулируется как явление, происходящее при внезапном наложении удерживающих связей. В нашей терминологии она звучит следующим образом. Если сразу после удара траектория касается границы удерживающих связей (т.е. $V_{\perp}^{+} = 0$), то потерянная при ударе кинетическая энергия равна кинетической энергии потерянных скоростей (т.е. $\Delta T = T^{*}$). Это утверждение сразу вытекает из (3.3, 3.5).

Вторая теорема Карно обычно формулируется как явление, происходящее при внезапном снятии удерживающих связей. При этом потерянные скорости и энергия называются приобретенными. В нашей терминологии она звучит следующим образом. Если в точности перед ударом траектория касалась границы удерживающих связей (т.е. $V_{\perp}^{-} = 0$), то приобретенная при ударе кинетическая энергия равна кинетической энергии приобретенных скоростей (т.е. $-\Delta T = T^{*}$). Это утверждение сразу вытекает из (3.3, 3.5).

Коэффициент восстановления. Нормальная составляющая скорости $V_{\perp}$ не обязана сохраняться при ударе. Для определения ее изменения необходимы дополнительные предположения о природе связей наложенных на систему. Если связи не зависят от времени, одна из возможных моделей – это линейная взаимозависимость величин нормальной составляющей скорости до и после удара, задаваемая т.н. коэффициентом восстановления. Более подробную информацию об этом можно найти в [2].

Коэффициентом восстановления W называется неотрицательная величина, определяемая следующим образом

$$(MV_{\perp}^{+}, V_{\perp}^{+}) = W^2 (MV_{\perp}^{-}, V_{\perp}^{-}) \quad (3.6)$$

Если $(MV_{\perp}^{-}, V_{\perp}^{-}) \neq 0$, то W – это отношение модуля нормальной составляющей скорости $V_{\perp}^{-}$ (до удара) к модулю нормальной составляющей скорости $V_{\perp}^{+}$ (после удара) в кинетической метрике. Задание коэффициента восстановления позволяет определить $V_{\perp}^{+}$ по $V_{\perp}^{-}$, если удар не является кратным, т.е. мы вышли на ограничение ровно одной односторонней связи. В этом случае $\Pi_{\perp}$ представляет собой одномерное пространство.

Типы связей. Заметим, что, из физических соображений, при стационарности связей энергия в момент удара не должна возрастать. Поскольку активные силы не совершают мгновенной работы, то это фактически означает, что не возрастает кинетическая энергия системы. Отсюда следует, что $0 \leq W \leq 1$. Если $W = 1$, то говорят, что в системе происходят абсолютно упругие соударения. Если $W = 0$, то говорят, что в системе

происходят абсолютно неупругие соударения. Если же $0 < W < 1$, то говорят, что в системе происходят просто неупругие соударения.

Третья теорема Карно. Рассмотрим теперь более подробно случай, когда удар не является кратным, т.е. траектория выходит на ограничение ровно одной односторонней связи. В этом случае $\Pi_{\perp}$ представляет собой одномерное пространство и поэтому.

$$V_{\perp}^{+} = -WV_{\perp}^{-} \quad (3.7)$$

В самом деле, если $V_{\perp}^{-} = 0$, или $W = 0$, то (3.7) следует из (3.6). Если $V_{\perp}^{-} \neq 0$ и $W \neq 0$, то из (3.6) следует, что, либо выполнено (3.7), либо $V_{\perp}^{+} = WV_{\perp}^{-}$. Но если бы было выполнено последнее, то это означало бы, что траектория находится за пределами области, определяемой односторонними связями – либо при подходе к точке удара, либо при отходе от нее, что невозможно.

Итак, выполнено соотношение (3.7).

Формулировка теоремы. Третья теорема Карно формулируется следующим образом [6]. Потерянная кинетическая энергия не может быть отрицательной. Она равна доле кинетической энергии потерянных скоростей, вычисляемой по формуле

$$\Delta T = \frac{1-W}{1+W} T^{*} \quad (3.8)$$

Доказательство. Подставив (3.7) в (3.3) получим

$$T^{*} = \frac{(1+W)^2}{2} (MV_{\perp}^{-}, V_{\perp}^{-})$$

Подставив (3.7) в (3.5) получим

$$\Delta T = \frac{1-W^2}{2} (MV_{\perp}^{-}, V_{\perp}^{-})$$

Отсюда сразу следует (3.8). Поскольку $T^{*} \geq 0$, то и $\Delta T \geq 0$. Доказательство закончено.

Абсолютно упругий удар. Остановимся более подробно на случае абсолютно упругих соударений ($W = 1$). В этом случае $(MV_{\perp}^{-}, V_{\perp}^{-}) = (MV_{\perp}^{+}, V_{\perp}^{+})$ и из (2.8) следует, что кинетическая энергия сохраняется, несмотря на скачок скорости.

$$\begin{aligned} T^{-} &= \frac{1}{2} (MV^{-}, V^{-}) = \frac{1}{2} (MV_0^{-}, V_0^{-}) + \frac{1}{2} (MV_{\perp}^{-}, V_{\perp}^{-}) = \\ &= \frac{1}{2} (MV_0^{+}, V_0^{+}) + \frac{1}{2} (MV_{\perp}^{-}, V_{\perp}^{+}) = \frac{1}{2} (MV^{+}, V^{+}) = T^{+} \end{aligned}$$

Приведенные рассуждения можно резюмировать в следующем утверждении.

Непрерывность кинетической энергии. В случае абсолютно упругих соударений кинетическая энергия системы является непрерывной функцией времени. Если связи гладкие (класса два), то, как было показано в [3], скорость является суммой абсолютно непрерывной составляющей и функции скачков

(непрерывная сингулярная составляющая отсутствует). Тогда из непрерывности кинетической энергии следует ее абсолютная непрерывность.

Закон сохранения энергии. Если связи стационарны, и силы потенциальны, то непрерывность кинетической энергии немедленно влечет за собой закон сохранения энергии. В самом деле, пусть $U(x)$ – силовая функция. Тогда полная энергия $T - U$ – это непрерывная функция. На каждом открытом отрезке, не содержащем скачков она постоянна в силу обычных законов сохранения для удерживающих связей (на участках, когда траектория выходит на границу односторонних ограничений, их можно рассматривать как удерживающие). Но поскольку множество скачков не более чем счетно, то полная энергия постоянна на всем отрезке времени.

1. Теорема об изменении количества движения.

Для систем с идеальными удерживающими связями среди основных законов динамики формулируются теоремы об изменении количества движения системы и о движении ее центра масс (см., например, [7]). Эти теоремы верны и при наличии идеальных односторонних связей.

Количество движения системы. Это трехмерный вектор Q равный сумме количеств движения всех составляющих систему точек. Количество движения материальной точки – это трехмерный вектор $M\bar{V}$, где M – масса точки, а $\bar{V}$ – трехмерный вектор ее скорости.

$$Q = \sum_{i=1}^N M_i \bar{V}_i \quad (4.1)$$

Выше мы использовали сводный вектор координат точек системы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и сводный вектор сил $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, $n = 3N$. И в этих терминах были выписаны уравнения Лагранжа первого рода (1.17). Кроме того, мы ввели вектор импульса системы $P \in R^n$ (2.1). В этих обозначениях $Q = XP$, где $X = (E_3, E_3, \dots, E_3)$ – матрица $3 \times n$, составленная из N экземпляров трехмерных единичных матриц E_3 . Мы будем использовать и то и другое описание, понимая, что они эквивалентны.

Теорема об изменении количества движения. Если удерживающие и односторонние связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поступательный сдвиг всех точек системы как твердого тела вдоль какого-нибудь направления $u \in R^3$ постоянного во времени, то проекция количества движения системы на это направление $Q_u = (Q, u)$ является абсолютно непрерывной функцией и скорость ее изменения равна $F_u = (XF, u)$, т.е. равна суммарной проекции на это направление вектора активных сил.

$$\frac{dQ_u}{dt} = F_u \quad (4.2)$$

Эта теорема непосредственно вытекает из аналогичного утверждения для сводных векторов системы.

Теорема об изменении вектора импульса. Если удерживающие и односторонние связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поступательный сдвиг всех точек системы как твердого тела вдоль какого-нибудь направления $v \in R^n$ постоянного во времени, то проекция вектора импульса на это направление $P_v = (P, v)$ является абсолютно непрерывной функцией и скорость ее изменения равна $F_v = (F, v)$, т.е. равна проекции на это направление сводного вектора активных сил

$$\frac{dP_v}{dt} = F_v \quad (4.3)$$

Доказательство. Возьмем какую-либо траекторию движения системы $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Для нее выполнены уравнения Лагранжа первого рода (1.17).

Используя вектор импульса системы P их можно переписать следующим образом

$$dP = Fdt + A'd\eta - G'd\mu \quad (4.4)$$

Условие теоремы означает, что в каждой точке конфигурационного пространства вектор v является возможным перемещением, т.е. $Av = 0$ во все время движения и $Gv = 0$ в тех точках траектории, которые расположены на границе односторонних связей, т.е. в тех точках, в которых сосредоточена мера $d\mu$. Отсюда следует, что во все время движения $(A'd\eta, v) = 0$ и $(G'd\mu, v) = 0$. Заметим, что эти равенства, как и (4.4), надо понимать как равенство мер Лебега-Стилтьеса. Домножив обе части (4.4) на v , получаем

$$dP_v = F_v dt \quad (4.5)$$

Поскольку $F_v(x(t), \dot{x}(t), t)$ есть функция ограниченной вариации, то $P_v(t)$ является абсолютно непрерывной функцией и выполнено (4.3). Доказательство закончено.

Возьмем $V = (u, u, \dots, u)$, т.е. составим вектор $V \in R^n$ из N экземпляров вектора $u \in R^3$. Если домножить теперь (4.5) слева на X , то получим (4.3). Что доказывает теорему об изменении количества движения.

Обычными рассуждениями из теоремы об изменении количества движения выводятся следующие утверждения.

Закон сохранения количества движения. Пусть выполняются указанные выше предположения о связях. Если суммарная проекция всех активных сил на направление u равна нулю, то во все время движения сохраняется значение проекции количества движения системы на это направление.

Теорема о движении центра масс. Пусть выполняются указанные выше предположения о связях. Тогда движение центра масс системы в проекции на эту ось совпадает с движением свободной от связей точки, масса которой равна суммарной массе всех точек системы, и к которой приложена сила равная сумме всех активных сил, действующих на точки системы.

Следствие. Пусть выполняются указанные выше предположения о связях. Если суммарная проекция всех активных сил на направление u равна нулю, то центр масс системы в проекции на эту ось движется с постоянной скоростью.

2. Теорема об изменении момента количества движения.

Для систем с идеальными удерживающими связями помимо теорем об изменении количества движения формулируются теоремы об изменении момента количества движения (см., например, [7]). Эти теоремы верны и при наличии идеальных односторонних связей.

Не нарушая общности, мы будем рассматривать случай, когда все оси проходят через начало системы координат и все моменты вычисляются также относительно начала координат.

Момент количества движения системы относительно начала координат – это трехмерный вектор K равный сумме моментов количества движения

всех составляющих систему точек. Момент количества движения материальной точки i относительно начала координат – это трехмерный вектор $\bar{r}_i \times M_i \bar{V}_i$, где M_i – масса точки, а $\bar{r}_i$ и $\bar{V}_i$ – ее трехмерный радиус-вектор, и вектор скорости.

$$K = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times M_i \bar{V}_i \quad (5.1)$$

Момент сил системы относительно начала координат – это трехмерный вектор N равный сумме моментов всех активных сил системы. Момент силы $\bar{f}$ относительно начала координат – это трехмерный вектор $\bar{r} \times \bar{f}$, где $\bar{r}$ – трехмерный радиус-вектор точки системы, к которой приложена сила.

$$N = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{f}_i \quad (5.2)$$

Так же, как и выше мы будем использовать сводные вектора координат точек системы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, сил $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, $n = 3N$, импульса системы P и т.п.

Вектор момента импульса. Введем сводный вектор $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ моментов количества движения системы (или моментов импульса) относительно начала координат следующим образом. Координаты вектора Ψ естественным образом разбиваются на тройки $(\psi_{3j-2}, \psi_{3j-1}, \psi_{3j})$, $j = 1, 2, \dots, N$. Каждая тройка соответствует материальной точке j системы. Координаты ее момента количества движения $\bar{r}_j \times M_j \bar{V}_j$ и есть значения координат в тройке $(\psi_{3j-2}, \psi_{3j-1}, \psi_{3j})$.

Вектор моментов сил. Аналогично вводится сводный вектор $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ моментов сил системы относительно начала координат. каждая тройка его координат равна тройке координат момента силы $\bar{r}_j \times \bar{f}_j$.

В этих терминах

$$K = X\Psi, \quad N = X\Theta$$

где $X = (E_3, E_3, \dots, E_3)$ – матрица $3 \times n$, составленная из N экземпляров трехмерных единичных матриц E_3 .

Сводным векторным произведением векторов $a, b \in R^n$ будем называть вектор $c \in R^n$, определяемый по следующему правилу. Пусть $\alpha_j = (a_{3j-2}, a_{3j-1}, a_{3j})$, $\beta_j = (b_{3j-2}, b_{3j-1}, b_{3j})$, $\gamma_j = (c_{3j-2}, c_{3j-1}, c_{3j})$ – трехмерные вектора, составленные из троек координат векторов a, b и c , как и выше. Тогда $\gamma_j = \alpha_j \times \beta_j$, где “ $\times$ ” означает обычное векторное произведение. Сводное векторное произведение будем обозначать знаком “ $\otimes$ ”. Таким образом, $c = a \otimes b$.

Заметим, что для сводного векторного произведения справедливы те же утверждения, что и для обычного векторного произведения в трехмерном пространстве, в частности, верна формула смешанного произведения: $(a, b \otimes c) = (c, a \otimes b)$.

Во введенных обозначениях можно записать

$$\Psi = x \otimes P, \quad \Theta = x \otimes F \quad (5.3)$$

Теорема об изменении момента количества движения. Если удерживающие и односторонние связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поворот всех точек системы как твердого тела вокруг какой-нибудь постоянной оси с направляющим вектором $u \in R^3$ и проходящей через начало координат, то проекция момента количества движения системы на эту ось $K_u = (K, u)$ является абсолютно непрерывной функцией и скорость ее изменения равна $N_u = (N, u)$, т.е. равна суммарной проекции на это направление векторов моментов активных сил.

$$\frac{dK_u}{dt} = N_u \quad (5.4)$$

Эта теорема непосредственно вытекает из аналогичного утверждения для сводных векторов системы.

Поворот. Поворотом сводного пространства R^n координат точек системы вокруг оси с направляющим вектором $v \in R^n$ и проходящей через начало координат будем называть однопараметрическую группу ортогональных преобразований R^n с собственным вектором v . При этом каждая естественная тройка координат одной материальной точки системы преобразуется ортогонально опять в естественную тройку координат той же точки. Это означает, что соответствующие ортогональные матрицы преобразований пространства R^n являются блочными диагональными матрицами. На диагонали расположены ортогональные матрицы 3×3 , у которых собственным вектором является вектор, координаты которого являются соответствующей тройкой координат направляющего вектора v .

Пусть у нас есть поворот в исходном трехмерном пространстве всех точек системы как твердого тела вокруг какой-нибудь постоянной оси с направляющим вектором $u \in R^3$ и проходящей через начало координат. Ему соответствует поворот в сводном пространстве координат точек системы $x \in R^n$ с направляющим вектором $v = (u, u, \dots, u) \in R^n$, координаты которого составлены из N экземпляров координат вектора $u \in R^3$.

Теорема об изменении вектора моментов импульса. Если удерживающие и односторонние связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поворот всех точек системы как твердого тела вокруг какой-нибудь постоянной оси с направляющим вектором $v \in R^n$ и проходящей через начало координат, то проекция сводного вектора моментов импульса системы на эту ось $\Psi_v = (\Psi, v)$ является абсолютно непрерывной функцией и скорость ее изменения равна $\Theta_v = (\Theta, v) = (x \otimes F, v)$, т.е. равна проекции на это направление сводного вектора моментов активных сил.

$$\frac{d\Psi_v}{dt} = (x \otimes F)_v \quad (5.5)$$

Доказательство. Возьмем какую-либо траекторию движения системы $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Для нее выполнены уравнения Лагранжа первого рода (4.4).

$$dP = Fdt + A'd\eta - G'd\mu \quad (5.6)$$

Условие теоремы означает, что в каждой точке конфигурационного пространства возможным перемещением является вектор $v \otimes x$, т.е. $A(v \otimes x) = 0$ во все время движения и $G(v \otimes x) = 0$ в тех точках траектории, которые расположены на границе односторонних связей, т.е. в тех точках, в которых сосредоточена мера $d\mu$. Отсюда следует, что во все время движения $(A'd\eta, (v \otimes x)) = 0$ и $(G'd\mu, (v \otimes x)) = 0$. Эти равенства надо понимать как равенства мер Лебега-Стилтьеса. Домножив обе части (5.6) на $v \otimes x$, получаем

$$(dP, (v \otimes x)) = (F, (v \otimes x))dt$$

или

$$(v, (x \otimes dP)) = (v, (x \otimes F))dt \quad (5.7)$$

Поскольку $x(t)$ – абсолютно непрерывна, то применима формула Лейбница для мер Лебега-Стилтьеса (см. [3]). Поэтому $x \otimes dP = d(x \otimes P) - (\dot{x} \otimes P)dt$. Но $P = M\dot{x}$ и M диагональная матрица масс размером $n \times n$, у которой на диагонали расположены тройки одинаковых чисел (массы соответствующих точек системы). Поэтому $\dot{x} \otimes P = \dot{x} \otimes M\dot{x} = M(\dot{x} \otimes \dot{x}) = 0$ и, значит $x \otimes dP = d(x \otimes P)$. Тогда из (5.7)

$$d(v, (x \otimes P)) = (v, (x \otimes F))dt$$

или

$$d\Psi_v = (x \otimes F)_v dt$$

Поскольку $(x \otimes F)_v = (v, (x \otimes F))$ есть функция ограниченной вариации, то Ψ_v является абсолютно непрерывной функцией и выполнено (5.5). Доказательство закончено.

Обычными рассуждениями из теоремы об изменении момента количества движения выводится следующее утверждение.

Закон сохранения момента количества движения. Пусть выполняются указанные выше предположения о связях. Если суммарная проекция на направление u векторов моментов активных сил равна нулю, то во все время движения сохраняется значение проекции момента количества движения системы на это направление.

3. Циклические интегралы и теорема Рауса.

В этом разделе мы покажем, что теория Рауса игнорирования циклических координат справедлива и при наличии идеальных односторонних связей.

В [3] мы вывели уравнения Лагранжа второго рода для систем с голономными удерживающими и односторонними связями. Пусть $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ обобщенные координаты нашей системы тогда

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

Мы считаем, что функции x_i имеют, по крайней мере, второй класс гладкости. Тогда траектория движения $q(t)$ – это абсолютно непрерывная вектор-функция, производная которой, $\dot{q}(t)$ является функцией ограниченной вариации.

Односторонние связи в обобщенных координатах задаются системой неравенств

$$g_i(q, t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.2)$$

Если силы потенциальны и имеют силовую функцию $U(q, t)$, то введем, как обычно, функцию Лагранжа $L(q, \dot{q}, t) = T + U$, где $T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}(\dot{x}, M\dot{x})$ – кинетическая энергия системы. Тогда уравнения движения будут иметь следующий вид

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} dt = - \sum_{j=1}^m d\mu_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial q} \quad (6.3)$$

Здесь везде $d\mu_j(t)$ – неотрицательные меры Лебега-Стилтьеса, каждая из которых сосредоточена на множестве моментов времени, в которые траектория движения выходит на границу соответствующего одностороннего ограничения $g_j(q(t), t) = 0$.

Заметим, что по форме уравнения (6.3) совпадают с уравнениями Аппеля для систем с непроинтегрированными связями.

Далее рассуждаем по обычной схеме.

Циклические координаты. Обобщенная координата q_i называется циклической, если она не входит явно в функцию Лагранжа L и в неравенства односторонних связей, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (6.4)$$

Не циклические координаты называются позиционными.

Циклические интегралы. В силу уравнений (6.3) и условий (6.4) для циклической координаты q_i выполнено $d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$. Значит, величина $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ остается постоянной, т.е. является первым интегралом уравнений движения, который называется циклическим интегралом.

Функция Рауса. Пусть координаты $q_r, q_{r+1}, \dots, q_s$ являются циклическими. Им соответствуют циклические интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \beta_i, \quad i = r, r+1, \dots, s \quad (6.5)$$

где β_i – константы интегралов. Циклические координаты в эти уравнения не входят. Будем считать, что уравнения (6.5) функционально независимы и, следовательно, разрешимы относительно циклических скоростей, и мы можем

их найти как функции позиционных координат $q_{\Pi} = (q_1, q_2, \dots, q_{r-1})$, позиционных скоростей $\dot{q}_{\Pi} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{r-1})$, констант циклических интегралов $\beta = (\beta_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_s)$ и времени:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_{\Pi}, \dot{q}_{\Pi}, \beta, t), \quad i = r, r+1, \dots, s \quad (6.6)$$

Составим функцию Рауса

$$R(q_{\Pi}, \dot{q}_{\Pi}, \beta, t) = L - \sum_{i=r}^s \dot{q}_i \beta_i \quad (6.7)$$

Здесь всюду вместо циклических скоростей подставлены их выражения (6.6).

Теорема Рауса. Пусть $q(t)$ – траектория движения нашей системы, тогда для позиционных координат выполнены уравнения Лагранжа второго рода, в которых в качестве функции Лагранжа берется функция Рауса (6.7).

$$d\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\Pi}}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_{\Pi}} dt = - \sum_{j=1}^m d\mu_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial q_{\Pi}} \quad (6.8)$$

Доказательство. Для краткости записи введем вектор циклических скоростей $\dot{q}_C = (\dot{q}_r, \dot{q}_{r+1}, \dots, \dot{q}_s)$. Тогда

$$R(q_{\Pi}, \dot{q}_{\Pi}, \beta, t) = L - \dot{q}_C \beta \quad (6.9)$$

Рассматривая R , L и $\dot{q}_C$ как гладкие функции от независимых переменных q_{Π} , $\dot{q}_{\Pi}$, β , t мы можем выписать следующие соотношения между дифференциальными формами. Дифференцируя левую часть (6.7) получаем

$$dR = \frac{\partial R}{\partial q_{\Pi}} dq_{\Pi} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\Pi}} d\dot{q}_{\Pi} + \frac{\partial R}{\partial t} dt + \frac{\partial R}{\partial \beta} d\beta \quad (6.10)$$

Дифференцируя правую часть (6.9) получаем

$$dR = \frac{\partial L}{\partial q_{\Pi}} dq_{\Pi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\Pi}} d\dot{q}_{\Pi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_C} d\dot{q}_C + \frac{\partial L}{\partial t} dt - \dot{q}_C d\beta - \beta d\dot{q}_C \quad (6.11)$$

Возьмем любую точку $(q_{\Pi}, \dot{q}_{\Pi}, \beta, t)$ на траектории движения, тогда выполнены (6.5) и, следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_C} d\dot{q}_C - \beta d\dot{q}_C \equiv 0.$$

Поэтому (6.11) в этой точке выглядит следующим образом

$$dR = \frac{\partial L}{\partial q_{\Pi}} dq_{\Pi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\Pi}} d\dot{q}_{\Pi} + \frac{\partial L}{\partial t} dt - \dot{q}_C d\beta \quad (6.12)$$

Формы (6.10) и (6.12) совпадают во всех точках траектории движения, поэтому в этих точках выполняются соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial q_{\Pi}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\Pi}}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\Pi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\Pi}}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta} = -\dot{q}_C \quad (6.13)$$

Подставляя (6.13) в уравнения (6.3) получаем для позиционных координат уравнения (6.8). Доказательство закончено.

4. Преобразование координат.

Известно, что уравнения Лагранжа второго рода инвариантны относительно замены координат. В данном разделе мы покажем, что это остается справедливым и при наличии голономных односторонних связей.

Рассмотрим голономную механическую систему, которая в локальных координатах $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ описывается лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$. Пусть на систему наложены односторонние голономные связи

$$g_i(q, t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.1)$$

Пусть $q(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ – траектория движения нашей системы. Тогда для нее выполнены уравнения Лагранжа второго рода [3]. А именно, найдутся такие неотрицательные меры Лебега-Стилтьеса $d\mu_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, сосредоточенные в тех точках, где $g_i(q(t), t) = 0$ (т.е. там, где траектория выходит на границу односторонних связей (7.1)), что будут выполнены уравнения

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} dt = - \sum_{j=1}^m d\mu_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial q} \quad (7.2)$$

Пусть мы переходим от старых координат $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ к новым $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$, причем функции перехода $Q = Q(q)$ и $q = q(Q)$ принадлежат второму классу гладкости и преобразование невырожденное, т.е.

$$\det\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) \neq 0 \quad (7.3)$$

В тех точках, где существует $\dot{q}$, также существует и $\dot{Q}$, причём выполнены соотношения

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} \quad \text{и} \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} \quad (7.4)$$

а также

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial q^2} \dot{q} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right) = \frac{\partial^2 q}{\partial Q^2} \dot{Q} \quad (7.5)$$

Рассматривая $(q, \dot{q})$ и $(Q, \dot{Q})$ как пары независимых переменных, выводим из (7.4), что

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial Q}{\partial q} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial q}{\partial Q} \quad (7.6)$$

а также

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial q} = \frac{\partial^2 Q}{\partial q^2} \dot{q} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} = \frac{\partial^2 q}{\partial Q^2} \dot{Q} \quad (7.7)$$

Для краткости записи введем векторные обозначения $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$, $d\mu = (d\mu_1, d\mu_2, \dots, d\mu_m)$. Тогда (7.2) можно переписать следующим образом

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} dt = - \left(\frac{\partial g}{\partial q}\right)' d\mu \quad (7.8)$$

Кроме того, обозначим

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(q(t)), \quad \tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q), \dot{q}(Q, \dot{Q}), t), \\ \tilde{g}(Q, t) &= g(q(Q), t) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ясно, что

$$\tilde{g}_i(Q(t), t) \leq 0 \quad (7.10)$$

Наша цель – показать, что, для $Q(t)$, будут выполнены уравнения

$$d\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} dt = -\left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q}\right)' d\mu \quad (7.11)$$

Из определения (7.9) функции $\tilde{g}$ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (7.12)$$

Пользуясь (7.4) получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}}\right)' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} \quad (7.13)$$

где знак $()'$ означает транспонирование матриц.

Поскольку на траекториях движения $\frac{\partial Q}{\partial q}$ – абсолютно непрерывная функция, то на траектории $q(t)$

применима формула Лейбница для мер Лебега-Стилтьеса [3]. Тогда из (7.13)

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' d\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}}\right) + d\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} \quad (7.14)$$

и, кроме того, используя (7.7) получаем

$$d\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) dt = \frac{\partial^2 Q}{\partial q^2} \dot{q} dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial q}\right) dt = d\left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial q}\right) \quad (7.15)$$

Также на этой траектории можем написать

$$\frac{\partial L}{\partial q} dt = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} dt + \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} dt \quad (7.16)$$

Подставив (7.12-7.16) в (7.8) получим

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' \left(d\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} dt\right) = -\left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q}\right)' d\mu$$

Поскольку преобразование координат невырождено (7.3), то получаем отсюда требуемые уравнения (7.11).

1. Теорема Нётер.

В этом разделе мы покажем, что теорема Нётер о существовании первых интегралов лагранжевых систем справедлива и при наличии односторонних связей. Как и в предыдущих разделах, наши рассуждения почти дословно повторяют традиционные (см., например, [8]). Мы будем проводить их в локальных координатах, понимая, что значение нётерова интеграла не зависит от выбора последних [9].

Рассмотрим голономную механическую систему, которая в локальных координатах $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ описывается лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$. Пусть на систему наложены односторонние голономные связи

$$g_i(q, t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8.1)$$

Рассмотрим однопараметрическую группу H диффеоморфизмов нашего конфигурационного пространства. Локально действие групп из этого семейства можно описать векторным полем $u(q) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Пусть s – групповой параметр, а $h(s) \in H$ соответствующее ему преобразование. Будем считать, что значение $s = 0$ соответствует тождественному преобразованию. Действие группы H можно описать функционально $h(s): q \rightarrow q(s)$. При этом функции $q(s)$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{dq}{ds} = u(q) \quad (8.2)$$

Мы будем требовать, чтобы в рассматриваемой координатной окрестности действие группы было свободным, т.е., чтобы $u(q) \neq 0$.

Пусть $\tilde{q}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ – траектория движения нашей системы. Тогда для нее выполнены уравнения Лагранжа второго рода [3]. А именно, найдутся такие неотрицательные меры Лебега-Стилтьеса $d\mu_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, сосредоточенные в тех точках, где $g_i(\tilde{q}(t), t) = 0$ (т.е. там, где траектория выходит на границу односторонних связей (8.1)), что

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} dt = - \sum_{j=1}^m d\mu_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial q} \quad (8.3)$$

Пусть $q^*(t)$ любая гладкая кривая. применив к ней преобразования $h(s)$, мы получим однопараметрическое семейство кривых $q(t, s)$. При этом $q(t, 0) = q^*(t)$. Обозначим $\dot{q}(t, s) = \frac{\partial q}{\partial t}$. Тогда $\dot{q}(t, 0) = \dot{q}^*(t)$.

Инвариантность лагранжиана. Будем говорить, что лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$ инвариантен относительно действия группы H , если для любой гладкой кривой $q^*(t)$ и любых s и t выполнено

$$L(q^*(t), \dot{q}^*(t), t) = L(q(t, s), \dot{q}(t, s), t) \quad (8.4)$$

Инвариантность односторонних связей. Будем говорить, что односторонние голономные связи (8.1) инвариантны относительно действия

группы H , если в любой момент времени инвариантна их граница, т.е. выполнено

$$\left(\frac{\partial g_i(q,t)}{\partial q}, u \right) = 0, \text{ для любых } i = 1, 2, \dots, m \text{ таких, что } g_i(q,t) = 0$$

Теорема Нётер. Пусть лагранжиан нашей системы и односторонние связи инвариантны относительно гладкого (класса два) свободного действия группы H , определённой выше, тогда для любой траектории движения системы $\tilde{q}(t)$ выполнено

$$d \left(\frac{\partial L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t)}{\partial \dot{\tilde{q}}} u(\tilde{q}) \right) = 0 \quad (8.5)$$

т.е. система допускает первый интеграл движения

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} u \quad (8.6)$$

Доказательство. Возьмем любую точку траектории $\tilde{q}$. В соответствии с теоремой о выпрямлении для обыкновенных дифференциальных уравнений [10], в некоторой окрестности этой точки систему (8.2) можно “выпрямить”. Это означает, что существует такое (класса два) преобразование от старых координат $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ к новым $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$. При котором уравнения действия группы (8.2) примут простейший вид

$$\frac{dQ}{ds} = e \quad (8.7)$$

где $e = (1, 0, 0, \dots, 0)$ – постоянный единичный вектор.

Несложно убедиться в том, что

$$e = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{dq}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial q} u \quad (8.8)$$

Как было показано в предыдущем разделе, в новой системе координат траектории движения нашей системы будут удовлетворять уравнениям Лагранжа второго рода для нового лагранжиана $\tilde{L}$, получающегося из старого подстановкой координатных функций. При этом

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} = \left(\frac{\partial q}{\partial Q} \right)' \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (8.9)$$

Инвариантность лагранжиана и односторонних связей при действии группы H сохранится и в новой системе координат. Однако в новой системе координат эти условия инвариантности становятся очень простыми. Они означают, что координата Q_1 является циклической, и выполняются условия теоремы Рауса (п. 6). Значит величина

$$\tilde{I} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_1} = \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q}, e \right) \quad (8.10)$$

является первым интегралом движения. Подставив сюда (8.8, 8.9) и сравнив с (8.6) убеждаемся, что $\tilde{I} = I$. Теорема доказана.

2. Несколько примеров.

В этом разделе, не давая подробного анализа, мы приведем несколько примеров механических систем с односторонними связями, для которых применимы результаты, изложенные в данной работе.

Пример 1. Плоское тяжелое тело произвольной формы в вертикальной плоскости. Движение ограничено горизонтальной прямой. Это система с тремя степенями свободы. Здесь существует циклический интеграл сохранения горизонтальной составляющей количества движения системы. Исключение циклической координаты по Раусу приводит к системе с двумя степенями свободы, а именно, к плоскому бильярду в силовом поле. Вид поля и форма области бильярда определяется формой тела.

Пример 2. Плоское тело произвольной формы в горизонтальной плоскости. Движение ограничено круговой областью. Это система с тремя степенями свободы. Здесь существует циклический интеграл сохранения вертикальной составляющей момента количества движения системы. Исключение циклической координаты по Раусу приводит к системе с двумя степенями свободы, а именно, к плоскому бильярду в силовом поле. Вид поля и форма области бильярда определяется формой тела.

Пример 3. Плоское тело, свободно вращающееся вокруг вертикальной оси. В полости тела, имеющей любую форму, свободно движется материальная точка. Здесь существует циклический интеграл сохранения вертикальной составляющей момента количества движения системы. Исключение циклической координаты по Раусу приводит к системе с двумя степенями свободы, а именно, к плоскому бильярду в силовом поле, вид которого (как и форма области бильярда) определяется формой полости. Если полость заменить отрезком кривой, по которой может перемещаться точка, то задача будет сводиться уже к одномерному бильярду в силовом поле на отрезке.

Пример 4. Свободный волчок Лагранжа, поверхность которого является поверхностью вращения вокруг оси динамической симметрии. Движение тела ограничено горизонтальной плоскостью ($z \geq 0$). Это система с шестью степенями свободы. Здесь существует два циклических интеграла сохранения горизонтальной составляющей количества движения системы. И два циклических интеграла, имеющих место для волчка Лагранжа. Исключение циклических координат по Раусу приводит к системе с двумя степенями свободы, а именно, к плоскому бильярду в силовом поле, вид которого (как и форма области бильярда) определяется формой тела.

Пример 5. Волчок Лагранжа с вертикальным люфтом точки подвеса. Отличие этой системы от обычного волчка Лагранжа состоит в том, что точка подвеса твердого тела может свободно перемещаться в пределах вертикального отрезка $\{x=0, y=0, a \leq z \leq b\}$. Здесь существует два циклических интеграла, имеющих место для волчка Лагранжа. Исключение циклических координат по

Раусу приводит к системе с двумя степенями свободы, а именно, к плоскому бильярду в силовом поле.

Пример 6. Волчок Лагранжа с радиальным люфтом точки подвеса. Отличие этой системы от обычного волчка Лагранжа состоит в том, что точка подвеса твердого тела может свободно перемещаться в пределах некоторого отрезка расположенного на оси динамической симметрии твердого тела. Здесь существует два циклических интеграла, имеющих место для волчка Лагранжа. Исключение циклических координат по Раусу приводит к системе с двумя степенями свободы, а именно, к плоскому бильярду в силовом поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М., МГУ, 1991 – 168с.
2. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М., “Международная программа образования”, 1997 – 336с.
3. Кугушев Е.И., Сорокина О.В. Принцип Даламбера-Лагранжа в механических системах с односторонними связями. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002 – 32с.
4. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. М., Гостехиздат, 1950 – 811с.
5. Appel' П. Теоретическая механика. т. 2, М., Физматгиз, 1960 – 487с.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика. “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999 – 569с.
7. Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. М., МГУ, 1974 – 646с.
8. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М., МГУ, 2000 – 719с.
9. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., Эдиториал УРСС, 2000 – 408с.
10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1984 – 272с.