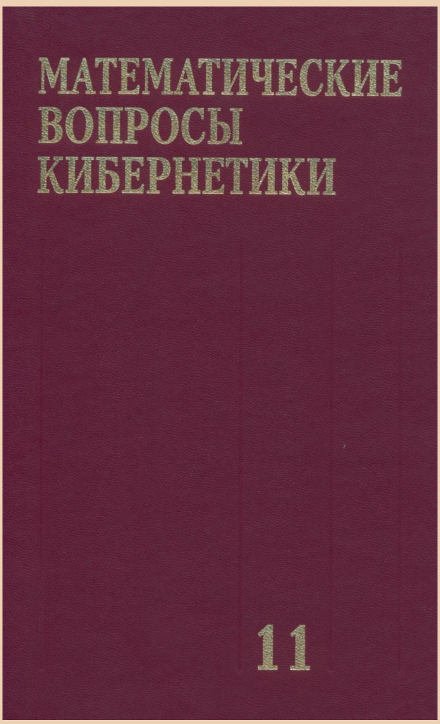

В. Н. Латышев

Алгоритмическое распознавание полиномиальных тождеств

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Латышев В. Н. Алгоритмическое распознавание полиномиальных тождеств // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 5–14. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2002-5

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВ

В. Н. ЛАТЫШЕВ

(МОСКВА)

Наиболее общим способом задания алгебраических объектов является их задание *копредставлением*, т. е. образующими и определяющими соотношениями. Так, в классе всех полугрупп конечно определенная полугруппа задается ассоциативным исчислением Туэ. В классе всех ассоциативных алгебр конечно определенная алгебра представляется в виде фактор-алгебры свободной ассоциативной алгебры. Однако такое задание вряд ли может быть полезным для эффективных вычислений. Дело в том, что при таком способе задания *проблема равенства слов* и *проблема вхождения в идеал* оказываются алгоритмически неразрешимыми. После этого трудно ожидать, что какие-либо разумные свойства алгебраических объектов будут эффективно распознаваемы. Действительно, известны *марковские свойства*, алгоритмическая нераспознаваемость которых доказана. К их числу относятся: свойство иметь конечное число элементов (конечную размерность), коммутативность и др.

В тех случаях, когда универсальный объект рассматриваемого класса алгебр обладает теорией стандартных базисов (базисов Гребнера), имеется выход. Если конгруэнция обладает конечным стандартным базисом (полные системы правил переписывания в полугруппах, базисы Гребнера идеалов соотношений в алгебрах), то проблема различения классов эквивалентности алгоритмически разрешима. Тем самым алгоритмически разрешимым оказывается широкий набор алгебраических свойств. Например, в классе коммутативных алгебр универсальным объектом является алгебра полиномов, в которой идеалы обладают конечным базисом Гребнера в силу нетеровости. Именно этим объясняется тот факт, что классическая алгебра изобилует алгоритмами.

В предлагаемой работе мы излагаем общую концепцию алгоритмического распознавания алгебраических свойств и сосредотачиваем свое внимание на классе алгебр, универсальным объектом которого является универсальная обертывающая конечномерной алгебры Ли. Распознаванию подвергается свойство алгебры удовлетворять полиномиальному тождеству определенного вида.

1. Концепция распознавания алгебраических свойств

1.1. Строгие фильтрации и стандартные базисы. Пусть A ассоциативная алгебра над полем k. Будем говорить, что на алгебре A задана строгая фильтрация (с.ф.), если выполнены следующие условия.

(i) Фиксирован линейно упорядоченный моноид Λ с единицей в качестве наименьшего элемента и удовлетворяющий условию обрыва убывающих цепочек элементов.

(ii) В линейном пространстве алгебры A выделен базис $E=\{e_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$, элементы которого снабжены индексами из Λ.

Если элемент $a\in A$ выражен через базис E, то в его *суппорте* (множестве элементов базиса, участвующих в записи a) можно выбрать *старший базисный вектор*, который мы обозначим через $\bar{a}$. Через $^\circ a$ мы обозначаем результат деления элемента a на его старший коэффициент. Сравниваются элементы базиса E по их индексам из Λ.

(iii) Выполнено *условие типа фильтрации*: $\overline{e_\alpha e_\beta}\leqslant e_{\alpha\beta}$. Если для любой пары базисных векторов $e_\alpha, e_\beta\in E$ справедливо равенство $e_\alpha e_\beta=\lambda e_{\alpha\beta}$, $\lambda\in k$, то (iii) называется *условием типа градуировки*. Соответственно, алгебра A называется строго *фильтрованной алгеброй* (с.ф.а.) или *строго градуированной алгеброй* (с.г.а.). С.ф.а. называется *алгеброй полиномиального типа*, если для любой пары базисных векторов выполняется равенство $\overline{e_\alpha e_\beta}=e_{\alpha\beta}$.

Со всякой с.ф.а. можно связать *присоединенную* с.г.а. grA по следующему правилу. Как линейные пространства A и grA совпадают. Умножение $\circ$ в grA определяется так:

$$e_\alpha e_\beta=\lambda e_{\alpha\beta}+\ldots\Longrightarrow\begin{cases} e_\alpha\circ e_\beta=\lambda e_{\alpha\beta}, \text{если } \lambda\neq 0,\\ e_\alpha\circ e_\beta=0, \text{если } \lambda=0.\end{cases}$$

Со всяким идеалом $I\lhd A$ можно связать *идеал старших частей* $\bar{I}=S_{pan}\{\bar{a}|a\in A\}\lhd grA$, являющийся линейной оболочкой старших базисных векторов элементов из I.

Предположим, что идеал $I\lhd A$ порожден элементами $G=\{g_i|\ i\in N\}\subseteq I$, обозначение: $I=(G)$. Тогда $\bar{G}=\{\bar{g}_i|\ i\in N\}\subseteq\bar{I}\lhd grA$. Система порождающих G идеала $I\lhd A$ называется его *стандартным базисом* (базисом Гребнера в другой терминологии), если идеал старших частей $\bar{I}\lhd grA$ порождается старшими векторами $\bar{G}$ порождающих G, в обозначениях: $\bar{I}=(\bar{G})$. Произведение базисных векторов $e_\alpha, e_\beta\in E$ называется *существенным*, если $\overline{e_\alpha e_\beta}=e_{\alpha\beta}$. Произведение произвольных элементов из A называется существенным, если их старшие базисные векторы перемножаются существенным образом. Тот факт, что G является стандартным базисом идеала I, просто означает, что для любого элемента $a\in I$ найдутся число $i\in N$ и базисные векторы e_α, $e_\beta\in E$, для которых справедливо по крайней мере одно из равенств $\overline{e_\alpha g_i}=\bar{a}$, $\overline{g_i e_\beta}=\bar{a}$ или $\overline{e_\alpha g_i e_\beta}=\bar{a}$, при этом все произведения, участвующие в равенствах, существенные.

Базисные векторы из E, являющиеся старшими в элементах идеала I, называются *редуцируемыми* (относительно I), а остальные базисные векторы — *нормальными* (относительно I). Предположим, что произведение $e_\alpha g_i e_\beta$ существенное и $\overline{e_\alpha g_i e_\beta}=e_\gamma$. Линейный оператор $r_{\alpha,i,\beta}$: r_γ: $A\to A$ пространства A, $r_{\alpha,i,\beta}$: $e_\gamma\longmapsto e_\gamma-{}^\circ(e_\alpha g_i e_\beta)$, $r_{\alpha,i,\beta}$: $e_\delta\longmapsto e_\delta$, $\delta\neq\gamma$, называется *редукцией*. Аналогично определяются редукции $r_{\alpha,i,1}(e_\gamma)=e_\gamma-{}^\circ(e_\alpha g_i)$, $\overline{e_\alpha g_i}=e_\gamma$, и $r_{1,i,\beta}(e_\gamma)=e_\gamma-{}^\circ(g_i e_\beta)$, $\overline{g_i e_\beta}=e_\gamma$. В силу условия обрыва убывающих цепочек базисных векторов элемент алгебры A принадлежит идеалу в том и только том случае, когда он конечной последовательностью редукций приводится к нулевому элементу (редуцируется к нулю).

В конструктивных вычислениях рассматриваются лишь конечно порожденные и *эффективные* алгебры, т. е. все операции в них осуществляются с помощью алгоритмов. В с.ф.а. допускаются к рассмотрению лишь идеалы, заданные стандартными базисами, состоящими из конечного числа элементов, и предполагается, что все редукции строятся эффективно. Такие идеалы коротко называются *допустимыми*. Во всем дальнейшем мы будем придерживаться рамок конструктивных представлений.

Пусть K — некоторый фиксированный класс с.ф.а. Свойство P алгебры или ее элементов называется *распознаваемым* в K, если существует алгоритм, позволяющий распознать справедливость P для любой фактор-алгебры A/I, где $A \in K$ и $I \triangleleft A$ — допустимый идеал в A.

Например, пусть K — класс всех с.ф.а. Тогда свойство элемента алгебры «быть равным нулю» распознаваемо в K. В самом деле, смежный класс $a+I \in A/I$, $a \in A$, нулевой лишь в случае, когда $a \in I$, но *вхождение в идеал* равносильно редуцируемости элемента a к нулю.

1.2. Пример. Полугрупповые алгебры. Пусть Λ — линейно упорядоченный моноид с условием отрыва убывающих цепочек и единицей в качестве наименьшего элемента, k-поле. Полугрупповая алгебра $A = k < \Lambda >$ допускает каноническую строгую градуировку, если в качестве индексирующего моноида и выделенного базиса взять моноид $\Lambda \subseteq A$. Тогда условие строгой градуировки будет автоматически выполняться, более того, алгебра $A = k < \Lambda >$ окажется алгеброй полиномиального типа. Нас будут интересовать два важнейших частных случая.

1.2.1. Свободная ассоциативная алгебра. В качестве основного моноида возьмем свободный моноид $\Lambda =< X >$, порожденный алфавитом $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, конечным или бесконечным. Упорядочим переменные по типу натурального ряда, например, по их индексам, а на $< X >$ определим смешанный порядок: из двух слов u, v из $< X >$ большим считается то, которое имеет большую длину (степень), а слова одинаковой длины сравниваются лексикографически. Полугрупповая алгебра $A = k < X >$ называется *свободной ассоциативной алгеброй*, *алгеброй некоммутативных полиномов* (при этом слова из $< X >$ называются *некоммутативными мономами*) или *тензорной алгеброй*.

Если алфавит X конечен, идеал $I = (g_1, \ldots, g_r) \triangleleft k < X >$ порожден конечным числом полиномов $g_i \in k < X >$, то фактор-алгебра $B = k < X > /I$ называется *конечно определенной* (к.о.). На классе всех к.о. алгебр проблема равенства элемента нулю (проблема вхождения в идеал) алгоритмически не разрешима, поэтому на этом классе алгебр трудно ожидать распознаваемость каких-либо свойств. По этой причине рассматривается более узкий класс алгебр, в котором проблема равенства элемента нулю алгоритмически разрешима. А именно, фактор-алгебра $B = k < X > /I$ называется *стандартно конечно определенной* (с.к.о.), если идеал определяющих соотношений $I = (g_1, \ldots, g_r)$ порожден конечным базисом Гребнера $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$. Свойство ассоциативных алгебр называется *распознаваемым*, если оно алгоритмически распознаваемо на классе всех с.к.о. алгебр (см. [9]).

Заметим, что часто в ряде вопросов удобно рассматривать свободную ассоциативную алгебру без единицы, т. е. под $< X >$ понимать не свободный моноид, порожденный алфавитом X, а свободную полугруппу. В качестве выделенного базиса в пространстве алгебры $k < X >$ мы рассматривали некоммутативные мономы. Однако, для дальнейшего нам потребуются еще два базиса.

Индукцией по длине m определим *длинный коммутатор*: $[x_{i_1}, x_{i_2}] = x_{i1}, x_{i2} - x_{i2}x_{i1}$, $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}] = [[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m-1}}], x_{im}]$, $m \geqslant 3$. Элементы линейной оболочки длинных коммутаторов относительно коммутирования в качестве умножения образуют алгебру Ли $k < X >^{(-)}$, для которой свободная ассоциативная алгебра $k < X >$ является универсальной обертывающей. Элементы из $k < X >^{(-)}$ называются *лиевыми элементами* алгебры $k < X >$. В частности, порождающие x_i считаются коммутаторами длины 1 и потому входят в множество лиевых элементов.

Произведение длинных коммутаторов называется *коммутаторным одночленом*, а их линейные комбинации — *собственными элементами* алгебры $k < X >$. Это в точности те элементы, которые аннулируются при формальном частном дифференцировании по переменным x_i. Элемент свободной алгебры называется *полилинейным*, точнее n-линейным, если он линеен по каждой переменной из некоторого набора n букв алфавита X, т. е. он является линейной комбинацией мономов степени n, являющихся произведениями всех выбранных букв, взятых в некотором порядке. Обозначим через $P^{(n)}$ пространство всех n-линейных форм от набора переменных $x_1, \ldots, x_n \in X$, а через $\Gamma^{(n)}$, $\Gamma^{(n)} \subseteq P^{(n)}$, — подпространство всех собственных n-линейных форм.

Приступим к построению двух базисов пространства $P^{(n)}$, необходимых в дальнейшем.

Полилинейный длинный коммутатор $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$ называется *правильным*, если $i_1 < i_r$, $r > 1$. Полилинейное произведение коммутаторов $u = u_1 \cdots u_k$ из $\Gamma^{(n)}$ называется *правильным*, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) все множители u_i — правильные коммутаторы; 2) степени множителей u_i не возрастают слева направо; 3) номера начальных переменных в коммутаторах u_i одинаковой длины возрастают слева направо.

В [9] доказано (с использованием комбинаторных вычислений), что правильные коммутаторные одночлены образуют в $\Gamma^{(n)}$ базис этого пространства. В [1] автор вывел это утверждение из простых соображений, связанных с универсальными обертывающими алгебр Ли. Эти же соображения позволяют утверждать, что элементы из $P^{(n)}$ вида $ux_{i_1} \cdots x_{i_k}$, где u — правильное произведение коммутаторов и $i_1 < i_2 < \cdots i_k$, образуют базис пространства $P^{(n)}$. Для краткости мы его будем называть *базой Шпехта.* Произведение коммутаторов u будем называть *головой*, а произведение переменных $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ — *хвостом* базисного элемента. В частности, в элементе $x_1 x_2 \cdots x_n$ отсутствует голова, а у всех элементов из $\Gamma^{(n)}$ отсутствуют хвосты. Комбинаторный смысл базы Шпехта состоит в том, что если мы выражаем через нее произведение коммутаторов и переменных, содержащее в качестве множителя коммутатор степени r, то в окончательном выражении каждый элемент базы Шпехта содержит коммутатор степени не менее r. Грубо говоря, представление через базу Шпехта «не понижает степени коммутатора».

Теперь выберем в пространстве n-линейных форм $P^{(n)}$ другой базис. Полилинейный длинный коммутатор $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}]$ называется *каноническим*, если $i_1 < i_r$, $r = 2, \ldots, m$ и $i_3 < \cdots < i_m$. В упомянутой выше работе автора [1] доказывается, что всевозможные n-линейные произведения канонических коммутаторов образуют базис в пространстве собственных n-линейных форм $\Gamma^{(n)}$. В пространстве всех n-линейных форм $P^{(n)}$ базис образуют элементы вида $ux_{i_1} \cdot sx_{i_m}$, где u — произведение канонических коммутаторов и $i_1 < \cdots < i_m$. Этот базис пространства $P^{(n)}$ будем называть *канонической базой.* Как и в случае базы Шпехта, в элементах канонической базы выделяется голова u и хвост $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$. Комбинаторный смысл канонической базы состоит в том, что если мы выражаем через нее произведение r коммутаторов и какого-то количества переменных, то в окончательном выражении каждый элемент канонической базы содержит в «головной части» не менее r коммутаторов. Таким образом, представление через каноническую базу не понижает количества множителей, являющихся коммутаторами.

1.2.2. Пример. Алгебра полиномов. В качестве основного моноида берется свободный коммутативный моноид $\Lambda = [X]$, порожденный алфавитом $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Его элементами являются коммутативные мономы $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$. Существует бесконечно много допустимых упорядоченностей моноида $[X]$, но «рабочими» являются две: смешанная, которая была определена и для некоммутативных мономов, а также чистая лексикографическая, наследующая порядок, определенный на переменных X. Полугрупповая алгебра $k[X]$ совпадает с обычной алгеброй полиномов. Исторически впервые алгоритмические исследования, связанные со стандартными базисами идеалов, касались именно алгебры полиномов.

1.3. Пример. Универсальная обертывающая алгебры Ли. Пусть L — конечномерная алгебра Ли с базисом $e_1, \ldots, e_n$ над полем k, U — ее универсальная обертывающая алгебра. Коммутативные мономы от базисных векторов алгебры Ли L, имеющие вид $e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n}$, образуют выделенный базис универсальной обертывающей U. В качестве индексирующего моноида можно взять свободный коммутативный моноид $[x_1, \ldots, x_n]$ от n порождающих со смешанной упорядоченностью. Так, указанному базисному вектору алгебры U приписывается индекс $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in [X]$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда все условия, определяющие строгую фильтрацию, окажутся выполненными. Некоторые подробности можно найти в [2, 8]. Заметим, что вообще говоря, чистая лексикографическая упорядоченность свободного коммутативного моноида $[X]$ не определяет строгой фильтрации на универсальной обертывающей U. Если L — абелева алгебра Ли, то U совпадает с алгеброй многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$.

2. Постановка задачи о распознавании полиномиального тождества

Пусть k — поле, $Y = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ — счетный алфавит, $\mathfrak{A} = k\langle Y\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра с порождающими Y над полем k, A — ассоциативная алгебра над полем k. Элемент $f(y_1, \ldots, y_m) \in k\langle Y\rangle$ называется *полиномиальным тождеством* алгебры A, если $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$ для любого набора элементов $a_1, \ldots, a_m \in A$. Все тождества алгебры A образуют в $\mathfrak{A}$ вполне характеристический идеал (т. е. идеал, инвариантный относительно всех эндоморфизмов). Такие идеалы коротко называются *T-идеалами* (от англ. Total characteristic ideal). Алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству, называется *PI-алгеброй. Все следствия* данного тождества $f \in \mathfrak{A}$ образуют в $\mathfrak{A}$ T-идеал, обозначаемый T_f. Он совпадает с минимальным по включению T-идеалом, содержащим f.

Если PI-алгебра A содержит единицу, то целесообразно свободную алгебру $\mathfrak{A} = k\langle Y\rangle$, в которой «живут» тождества, рассматривать с единичным элементом. Это обстоятельство существенно сказывается на строении T-идеалов. Так, теперь T-идеал T_f может содержать элементы степени меньшей, чем f, даже в случае, когда все мономы, входящие в запись f, имеют один и тот же состав относительно переменных Y. В случае, когда свободная алгебра $\mathfrak{A} = k\langle Y\rangle$ имеет единицу, будем говорить, что тождества рассматриваются *с сигнатурной единицей.* Если основное поле k имеет нулевую характеристику, то все тождества алгебры являются следствиями ее полилинейных тождеств, а при наличии сигнатурной единицы — следствиями ее собственных полилинейных тождеств.

Рассмотрим класс алгебр со строгой фильтрацией K над полем k и элемент f, $f \in \mathfrak{A} = k\langle Y\rangle$. Задача распознавания тождества f в классе алгебр K состоит в построении алгоритма, устанавливающего выполнимость тождества f в фактор-алгебрах A/I, где $A \in K$ и $I \triangleleft A$ — идеал алгебры A, заданный конечным стандартным базисом. Конечно, странно надеяться, что такой алгоритм существует для классов алгебр и тождеств достаточно общего вида. Поэтому рассматриваются частные случаи классов K и тождеств f, интересные по тем или иным причинам. Всюду ниже мы будем предполагать, что основное поле k имеет нулевую характеристику и потому все рассматриваемые тождества полилинейны, а при наличии сигнатурной единицы они к тому же и собственные. В качестве K мы рассматриваем два класса алгебр: свободные ассоциативные алгебры с конечным числом порождающих и универсальные обертывающие конечномерных алгебр Ли, причем в последнем случае дополнительные ограничения накладываются и на алгебры Ли.

Сложность полиномиального тождества характеризуется параметром, называемым его *полиномиальной степенью*. Именно, полиномиальная степень тождества f равна n, если n является максимальным среди натуральных чисел r таких, что алгебра матриц $M_r(k)$ порядка $r \times r$ над полем k удовлетворяет f. Тождества полиномиальной степени 1 называются *нематричными*, поскольку алгебра матриц второго порядка им не удовлетворяет. Строение нематричных полилинейных тождеств в значительной степени определяется полиномами двух типов, в комбинаторном смысле являющимися антиподами: лиева нильпотентность — полилинейный длинный коммутатор и полилинейное произведение s коммутаторов второго порядка, которое порождает идеал тождеств алгебры верхнеугольных матриц порядка $s \times s$. В настоящей работе строятся алгоритмы распознавания полиномиальных тождеств, являющихся полиномами этих двух типов. Хотя, при некоторых ограничениях, исследуется распознаваемость нематричных тождеств более общего вида.

3. Распознавание лиевой нильпотентности

Здесь мы приводим результат, доказанный в предположении сигнатурной единицы в [9]. Мы отказываемся от этого предположения и указываем другие алгоритмы. В качестве основного класса алгебр K рассматриваем все конечно порожденные ассоциативные алгебры над полем нулевой характеристики k, а в качестве распознаваемого тождества берется полином лиевой нильпотентности $f(x_1, \dots, x_m) = [x_1, \dots, x_m]$. Сначала сформулируем утверждение, являющееся простым замечанием.

Лемма 3.1. *В счетно порожденной свободной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A} = k\langle y_1, \dots, y_n, \dots\rangle$ T-идеал T_g, порожденный собственной полилинейной формой $g(y_1, \dots, y_r)$, не зависит от предположения о существовании сигнатурной единицы.*

Доказательство. Очевидно, T-идеал T_g совпадает с линейной оболочкой полилинейных элементов вида $g(u_1, \dots, u_r)$, где u_i — мономы. Но если хотя бы один из мономов u_i равен 1, то $g(y_1, \dots, y_r) = 0$. Лемма доказана.

Идеал свободной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A} = k\langle Y\rangle$ называется S-идеалом, если он инвариантен относительно всех линейных подстановок переменных. В [7] Н. Г. Наджаряном доказана довольно сложная теорема: *T-идеал свободной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A} = k\langle Y\rangle$, порожденный полилинейным длинным коммутатором, является конечно порожденным S-идеалом*. Правда, она доказана в предположении сигнатурной единицы, но в силу леммы 3.1 это предположение можно опустить.

Теорема 3.2. *Тождество лиевой нильпотентности распознаваемо в классе всех ассоциативных алгебр.*

Доказательство. Пусть $A = k\langle x_1, \dots, x_r\rangle / I$ — стандартно конечно определенная алгебра, т. е. идеал I задан своим конечным стандартным базисом. Нам необходимо построить алгоритм, распознающий включение $[u_1, \dots, u_m] \in I$, где u_i — произвольные мономы от переменных

$X=\{x_1,\ldots,x_r\}$. Для этого нам потребуется найти конечное число элементов T-идеала T_f, $f=[y_1,\ldots,y_m]$, свободной алгебры $\mathfrak{A}=k\langle Y\rangle$, порождающих его как S-идеал. По упомянутой теореме Н. Г. Наджаряна они существуют. Доказательство, приведенное им в [7], конструктивно и позволяет после большого количества вычислительных процедур построить искомые порождающие. Далее, тождество $f=[y_1,\ldots,y_m]$ выполняется в алгебре A тогда и только тогда, когда все специализации переменных y_i в найденных порождающих переменными x_j принадлежат идеалу I. Но таких специализаций конечное число, а проблема вхождения в идеал I алгоритмически разрешима, поскольку он задан конечным стандартным базисом.

4. Распознавание полиномиальных тождеств в факторах универсальных обертывающих алгебр Ли

Изучаемый в этом пункте класс строго фильтрованных алгебр K состоит из универсальных обертывающих конечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики k, заданных своим базисом. Универсальная обертывающая U конечномерной алгебры Ли L нетерова и потому каждый идеал $I\lhd U$ в U обладает конечным стандартным базисом. Если известны порождающие идеала, то его стандартный базис может быть построен хорошо известным алгоритмом Бухбергера (см. [2, 3, 8]). Самая общая формулировка решаемой задачи состоит в следующем: найти алгоритм, распознающий выполнение полилилнейного тождества $f(y_1,\ldots,y_n)$ в фактор-алгебре $A=U/I$, где U — универсальная обертывающая конечномерной алгебры Ли L, заданной базисом, и $I\lhd U$ — идеал алгебры U, заданный конечной системой порождающих. Основная теорема параграфа содержит четыре утверждения, из которых первое содержится в [6], второе является новым, а два последних анонсированы автором в [4] и [5]. Начнем с доказательства вспомогательных утверждений.

Пусть $T\trianglelefteq k\langle Y\rangle$ — T-идеал свободной ассоциативной алгебры $k\langle Y\rangle$ и A — произвольная ассоциативная алгебра над полем k. Тогда специализации переменных Y элементами алгебры A переводят T в множество элементов $T(A)\subseteq A$, являющиеся идеалом алгебры A, называемым *вербальным идеалом*, порожденным T. Всякий элемент T-идеала T оказывается полилилнейным тождеством фактор-алгебры $A/T(A)$. Линейное подпространство $V\subseteq k\langle Y\rangle$ пространства свободной ассоциативной алгебры называется *T-пространством*, если оно инвариантно относительно всех эндоморфизмов $k\langle Y\rangle$.

Лемма 4.1. *Пусть $f(y_1,\ldots,y_n)\in k\langle Y\rangle$ n-линейный полином свободной ассоциативной алгебры с множеством свободных порождающих $Y=\{y_1,\ldots,y_m,\ldots\}$ над полем k и $V_f\subseteq k\langle Y\rangle$ T-пространство, порожденное элементом f. Тогда V_f инвариантно относительно всех дифференцирований алгебры $k\langle Y\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\partial\in\mathrm{Der}\,k\langle Y\rangle$ — дифференцирование алгебры $k\langle Y\rangle$ и $f=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\lambda_\sigma y_{\sigma(1)}\cdots y_{\sigma(n)}$, $\lambda_\sigma\in k$. Очевидно, T-пространство V_f натянуто на элементы вида $f(u_1,\ldots,u_n)=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\lambda_\sigma u_{\sigma(1)}\cdots u_{\sigma(n)}$, где u_i — мономы. Имеем

$$\partial f(u_1,\ldots,u_n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\lambda_\sigma u_{\sigma(1)}\cdots\partial u_{\sigma(j)}\cdots u_{\sigma(n)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}f(u_1,\ldots,\partial u_j,\ldots,u_n)\in V_f.$$

Рассмотрим T-пространство $V \subseteq k\langle Y\rangle$ и алгебру A над полем k. По аналогии с вербальным идеалом определим *вербальное подпространство* $V(A) \subseteq A$, совпадающее с множеством элементов алгебры A, получающихся специализациями элементов из V элементами алгебры A.

Следствие 4.2. *Пусть U — универсальная обертывающая алгебры Ли L с базисом $e_1, \ldots, e_r, \ldots$ над полем k и $f(y_1, \ldots, y_n) \in k\langle Y\rangle$ — n-линейный лиев полином свободной ассоциативной алгебры $k\langle Y\rangle$, не являющейся тождеством алгебры Ли L, $V_f \subseteq k < Y >$ — T-пространство, порожденное полиномом f. Тогда вербальное подпространство $V_f(U) \subseteq U$ содержит ненулевой идеал алгебры Ли L.*

Доказательство. Вербальное подпространство $V_f(U)$ содержит линейную оболочку $V_f(L)$ элементов вида $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$. Так как f лиев полином, то $V_f(L) \subseteq L \cap V_f(U)$, но f не тождество алгебры Ли L и поэтому $V_f(L) \neq \{0\}$. По лемме 4.1, $[f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}), e_{i_{n+1}}] \in V_f(L)$, поскольку коммутирование является дифференцированием и $[f(y_1, \ldots, y_n), y_{n+1}] \in V_f$. Следовательно, $V_f(L)$ ненулевой идеал алгебры Ли L, содержащийся в вербальном подпространстве $V_f(U)$.

Как и ранее, рассмотрим свободную ассоциативную алгебру $\mathfrak{A} = k\langle Y\rangle$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots\}$, над полем нулевой характеристики k и n-линейный собственный полином $f(y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{A}$. Тогда T-идеал $T_f \triangleleft \mathfrak{A}$, порожденный полиномом f как идеал, порождается специализациями полилиннейных элементов вида $f(u_1, \ldots, u_n)$, u_i — мономы, в *множестве переменных* Y. Выражая полилинейный элемент вида $f(u_1, \ldots, u_n)$, u_i — мономы, через базу Шпехта или каноническую базу и объединяя слагаемые с одинаковыми хвостами, мы получаем представление вида

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{r} w_i v_i,$$

где w_i — собственные полилинейные элементы и v_i — *различные* хвосты, являющиеся произведениями переменных. Разумеется, слагаемые в правой части — полилинейные элементы. В зависимости от того, какая база использовалась, Шпехта или каноническая, совокупность элементов w_i будем называть соответственно *головными элементами Шпехта* или *каноническими головными элементами* полинома f.

Лемма 4.3. *Головные элементы полилинейного собственного полинома f принадлежат порожденному им T-идеалу T_f.*

Доказательство. Несмотря на то, что существование сигнатурной единицы не предполагается, подстановка вместо переменных единицы в обеих частях равенства (1) имеет смысл. При этом левая часть равенства (1) будет оставаться в T-идеале T_f. В правой части (1) выберем слагаемое с самым длинным хвостом. Таких слагаемых, конечно, может быть несколько, для определенности предположим, что первое слагаемое находится среди них. Подстановка единицы вместо всех переменных хвоста U_1 «убивает» (обращает в нуль) все слагаемые правой части (1), кроме первого, переходящего в w_1, откуда $w_1 \in T_f$. Теперь рассматриваем равенство

$$f(u_1, \ldots, u_n) - w_1 v_1 = \sum_{i=2}^{r} w_i v_i,$$

левая часть которого снова при подстановке вместо переменных единицы остается в T-идеале T_f, поэтому рассуждение можно повторить и т. д. На r-м шаге мы получим, что $w_i \in T_f$, $i = 1, \ldots, r$.

Следствие 4.4. *Головные элементы собственного полилинейного полинома $f \in k\langle Y\rangle$ порождают его T-идеал T_f как идеал.*

Доказательство. Из леммы 4.3. следует, что головные элементы полинома f порождают T-идеал T_f как правый идеал.

Следствие 4.5. *Пусть $f \in k\langle Y\rangle$ собственный полилинейный элемент и $A = k\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ алгебра над полем k, порожденная элементами a_i. Тогда вербальный идеал $T_f(A) \lhd A$ порождается как идеал специализациями переменных в головных элементах полинома f порождающими a_i алгебры A.*

Теорема 4.6. *Пусть U — универсальная обертывающая алгебра (без единицы) конечномерной алгебры Ли L над полем k нулевой характеристики с базисом $E = \{e_1, \ldots, e_r\}$, $I \lhd U$ идеал, заданный конечной системой порождающих, $f(y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{A} = k\langle Y\rangle$ — полилинейный элемент счетнопорожденной свободной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда выполнение тождества f в фактор-алгебре $A = U/I$ алгоритмически распознаваемо в следующих случаях.*

(i) *L простая алгебра Ли и $f = f_1 \cdots f_s$ является произведением лиевых элементов f_i, причем f_i, $i = 1, \ldots, s$, — не тождество L.*

(ii) *L простая алгебра Ли, f — нематричный полином.*

(iii) *L — нильпотентая алгебра Ли, f — нематричный полином.*

(iv) *$f = [y_1, y_2]\cdots[y_{2m-1}, y_{2m}]$ является произведением коммутаторов второго порядка.*

Доказательство. Во всех случаях необходимо установить включение $T_f(U) \subseteq I$.

(i) Покажем, что в рассматриваемом случае имеет место равенство $T_f(U) = U^s$.

Действительно, включение $T_f(U) \subseteq U^s$ очевидно. Докажем обратное включение $U^s \subseteq T_f(U)$. По следствию 4.2. линейное пространство $V_{f_i}(L) \subseteq L$, $i = 1, \ldots, s$, содержит ненулевой идеал алгебры Ли L. Так как L простая алгебра, то $V_{f_i}(L) = L$, $i = 1, \ldots, s$. Далее, имеем цепочку включений

$$T_f(U) \supseteq V_f(U) \supseteq V_f(L) \supseteq V_{f_1}(L) \cdots V_{f_s}(L) \supseteq L^s \Longrightarrow T_f(U) \supseteq U^s.$$

Проверка включения $U^s \subseteq I$ состоит в установлении вхождения конечного числа элементов вида $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ в идеал I. Но проблема вхождения в идеал I алгоритмически решается с помощью стандартного базиса I.

(ii) Из теории PI-алгебр хорошо известно, что существует натуральное число $s = s(f, n)$, удовлетворяющее следующему условию: в любой n-порожденной алгебре B над полем k с тождеством f идеал $[B, B]$, порожденный коммутаторами («коммутаторный» идеал), нильпотентен индекса не более s. Дело в том, что полиномиальная степень тождества f равна 1 и по известной теореме Амицура коммутаторный идеал алгебры B является нильидеалом. Коммутаторы образующих элементов порождают коммутаторный идеал, а по уже ставшей классической теореме А. И. Ширшова «о высоте» конечно порожденный нильидеал в алгебре с конечным числом образующих нильпотентен.

Сказанное означает, что в свободной алгебре с n порождающими многообразия алгебр, определенного тождеством f, выполняется следствие тождества f вида $g(y_1, \ldots, y_{2s}) = [y_1, y_2]\cdots[y_{2s-1}, y_{2s}]$. Процедура нахождения тождества g, а, стало быть, и числа S вполне эффективна и сводится к решению нескольких систем линейных уравнений. Таким образом, в силу простоты алгебры Ли L имеем: $L = [L, L] \subseteq [U, U] \Longrightarrow U = [U, U]$. Поэтому, если фактор-алгебра $A = U/I$ удовлетворяет тождеству f, то $[U, U]^s = U^s \subseteq I$, где $s = s(f, r)$. Включение $U^s \subseteq I$ проверяется эффективно, поскольку конечное число включений $e_{i_1} \ldots, e_{i_s} \in I$ может быть установлено с помощью стандартного базиса идеала I. Алгебра A нильпотентна индекса не более s и потому конечномерна. Ее базис состоит из «нормальных» относительно I

коммутативных мономов от e_i, степень которых не более s. Имеется ввиду представление алгебры A как алгебры «нормальных элементов». Тождество f выполняется в A, если все специализации переменных в f базисными элементами алгебры A равны нулю. Таких специализаций конечное число.

(iii) В этом пункте нам удобно предположить, что первые базисные векторы $e_1, \ldots e_q$, $q < r$, алгебры L являются базисом ее лиева квадрата $[L, L]$, $\dim[L, L] = q$. Если исходный базис не таков, то переход к нужному нам базису логически прост и эффективен.

Обозначим через $d \geqslant 3$ индекс нильпотентности алгебры L и найдем число $s = s(f, r)$, опредленное в предыдущем пункте. Если фактор-алгебра $A = U/I$ удовлетворяет тождеству f, то произведение базисных векторов $e_1, \ldots e_q$ степени S лежат в идеале I. Таких произведений конечное число и их вхождение в идеал I проверяется с помощью стандартного базиса. Предположим, что эти вхождения установлены. Рассмотрим головные элементы тождества f одного из двух типов (Шпехта или канонические). Тождество f выполнено в алгебре A, если специализации переменных в головных элементах базисными векторами e_i алгебры Ли L лежат в идеале I. Если степень головного элемента не менее $M = s(d-1)$, то такая специализация лежит в I. Действительно, рассматриваемый головной элемент является линейной комбинацией коммутаторных одночленов, имеющих множителем либо коммутатор степени не меньше d, либо произведение s коммутаторов. В первом случае специализация коммутаторного одночлена просто равна нулю, так как L нильпотентная алгебра Ли индекса d, а во втором она лежит в I по нашему предположению. Осталось проверить вхождение в I конечного числа специализаций головных элементов степени не более M.

(iv) Как и в предыдущем пункте будем предполагать, что $e_1, \ldots, e_q$ составляют базис лиева квадрата $[L, L]$ алгебры Ли L. Если тождество f выполняется в фактор-алгебре $A = U/I$, то все произведения векторов e_i, $i = 1, \ldots, q$, степени s лежат в I. Предположим, что этот факт уже установлен. Воспользуемся каноническими головными элементами тождества f. Все они являются линейными комбинациями коммутаторных одночленов, каждый из которых содержит в качестве множителей не менее s коммутаторов. Специализация переменных в этих коммутаторных одночленах базисными векторами e_i по предположению лежит в идеале I.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Латышев В. Н. Частично упорядоченные множества и нематричные многообразия ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 1. — С. 53–70.
2. Латышев В. Н. Комбинаторная теория колец, стандартные базисы. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
3. Латышев В. Н. Об алгоритме равенства в лиево нильпотентных ассоциативных алгебрах // изд. Киевского университета, Математика и Механика, 27. — 1985. — Киев: Высшая школа. — С. 67–69.
4. Латышев В. Н. Распознавание тождеств в факторах универсальных обертывающих алгебр Ли // Междунар. Алг. Семинар, Тезисы докладов. — 1999. — М.: Изд-во МГУ. — С. 37.
5. Латышев В. Н. Распознавание нематричных тождеств в факторах универсальных обертывающих алгебр Ли // Матем. методы и приложения, Труды МГСУ. — 2000, Москва. — С. 68.
6. Лукоянова Е. В. Распознавание тождеств в факторах универсальных обертывающих алгебр // Фунд. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, № 2, — С. 625 –630.
7. Наджарян Н. Г. Комбинаторные соотношения в алгебрах с полиномиальными тождествами // Кандид. Диссертация, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 1985.
8. Apel J., Lassner W. An Extension of Buchberger's algorithm and calculations in enveloping fields of Lie algebras // Jour. Symb. Comput. — 1988. — 6. — P. 361–370.
9. Gateva-Ivanova T. and Latyshev V. On recognizable propreties of associative algebras // J. Simb. Comp. — 1988. — 6. — P. 371–388.

Поступило в редакцию 11 IX 2001