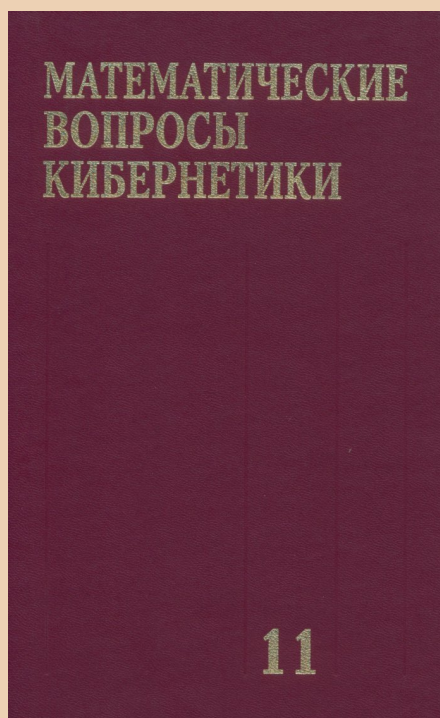




Е. В. Дебрев

**О различении графов
из некоторых семейств
посредством
безусловных
реберных тестов**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Дебрев Е. В. О различении графов из некоторых семейств посредством безусловных реберных тестов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 177–192. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2002-177>

О РАЗЛИЧЕНИИ ГРАФОВ ИЗ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ПОСРЕДСТВОМ БЕЗУСЛОВНЫХ РЕБЕРНЫХ ТЕСТОВ*)

Е. В. ДЕБРЕВ

(МОСКВА)

§ 1. Введение

Будем рассматривать неориентированные графы без петель и кратных ребер, построенные на множестве V_n из $n \geq 2$ нумерованных вершин. Предположим, что требуется найти некоторый неизвестный граф X ; для этого разрешается выбирать произвольные ребра и для каждого выбранного ребра uv , где $u, v \in V_n$, задать вопрос «принадлежит ли ребро uv графу X ?»

Требуется однозначно определить граф X , задав как можно меньшее число таких вопросов.

Ясно, что если искомым граф X может а priori оказаться любым графом на вершинах V_n , то необходимо задать вопрос о каждом из $n(n-1)/2$ ребер на n вершинах. Если же известно, что искомым граф X принадлежит некоторому заранее фиксированному семейству $\mathcal{G}$, то в зависимости от семейства, искомого графа и выбранного алгоритма может потребоваться различное количество реберных проверок.

Если в алгоритме поиска графа X выбор проверяемого ребра зависит от результатов предыдущих проверок, то такой алгоритм также называется *условным тестом*. Построение условных тестов для некоторых семейств графов можно найти в [4, раздел 3.5], где получено минимальное число реберных проверок в условных тестах для семейства всех деревьев на n вершинах, семейства всех полных звезд на n вершинах и для семейства всех максимальных паросочетаний на n вершинах, а также построенная нижняя оценка этого числа для семейства всех гамильтоновых циклов на n вершинах.

Построение условных тестов, различающих графы из заданного семейства, для более общих, по сравнению с односторонними, моделей проверок было проведено в [5] (см. также [6, глава 2]). В указанных работах рассматриваются такие модели тестов, в которых единичная проверка устанавливает, содержит ли данная клика хотя бы одно общее с искомым графом ребро; также рассмотрены модели тестов, в которых единичная проверка устанавливает количество ребер, общих для некоторой клики и искомого графа. Для таких моделей в [5] получены оценки минимального числа проверок, точные по порядку величины.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00985 и 00-15-96103).

В данной работе, напротив, рассматриваются *безусловные тесты*, т. е. алгоритмы, в которых набор проверяемых ребер фиксирован заранее.

Построение безусловных тестов, содержащих наименьшее число проверок (ребер), для семейства всех гамильтоновых циклов на n вершинах составляет предмет работы [1]. В указанной работе при каждом $n \geq 3$ для семейства всех гамильтоновых циклов на n вершинах получено точное значение объема теста, равное $n(n-3)/2 - \lfloor n/3 \rfloor + 1$, и охарактеризованы все тесты.

В данной работе будут рассматриваться семейства графов, отвечающих разбиениям множества n вершин на два класса эквивалентности; при этом вершины, находящиеся в отношении эквивалентности, соединены ребрами, и, таким образом, классам эквивалентности соответствуют клики графа.

Далее будут использоваться обозначения, в основном следующие [2].

Множество вершин, на которых задан граф G , будет обозначаться $V(G)$; множество ребер графа G будет обозначаться $E(G)$. Множество всех неориентированных ребер на вершинах V_n обозначим E_n . Из определения следует, что $|V_n| = n$ и $|E_n| = n(n-1)/2$.

Пусть G_1 и G_2 — два различных графа на множестве вершин V_n . Будем говорить, что ребро $r \in E_n$ *различает графы G_1 и G_2* , если r принадлежит ровно одному из этих графов.

Граф R на вершинах V_n будем называть *различающим для семейства графов $\mathcal{G}$* , заданных на множестве вершин V_n , если для любых двух различных графов $G_1 \in \mathcal{G}$ и $G_2 \in \mathcal{G}$ найдется ребро $r \in E(R)$, различающее G_1 и G_2 .

Рассмотрим некоторое семейство графов $\mathcal{G}$ и граф R , заданные на множестве вершин V_n . Занумеруем ребра графа R произвольным фиксированным образом, и всякому графу $G \in \mathcal{G}$ поставим в соответствие двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины $|E(R)|$ по следующему правилу: $\sigma_i = 1$, если i -е ребро графа R содержится в G , в противном случае $\sigma_i = 0$.

Как нетрудно видеть, граф R является различающим тогда и только тогда, когда для любых двух различных графов $G_1 \in \mathcal{G}$ и $G_2 \in \mathcal{G}$ соответствующие им наборы различаются в разряде, отвечающем ребру, различающему G_1 и G_2 . Отсюда следует, что граф R является различающим тогда и только тогда, когда все наборы, поставленные в соответствие графам семейства $\mathcal{G}$, различны.

Таким образом, для всякого семейства $\mathcal{G}$ набор ребер любого его различающего графа R является безусловным тестом, позволяющим найти любой заранее неизвестный граф $X \in \mathcal{G}$, и обратно, граф, образованный набором ребер безусловного теста, является различающим.

Итак, задача приобретает следующую формулировку: для данного семейства $\mathcal{G}$ графов на множестве вершин V_n построить различающий граф с наименьшим числом ребер. Такой различающий граф мы будем называть *минимальным*, а число ребер в нем (одинаковое для всех минимальных различающих графов для $\mathcal{G}$) будем обозначать $L(\mathcal{G})$.

Пусть G_1 и G_2 — два графа на общем множестве вершин V_n . Под их *симметрической разностью* будем понимать граф на множестве вершин V_n с множеством ребер, равным симметрической разности $E(G_1) \Delta E(G_2)$, который будет обозначаться $G_1 \Delta G_2$. Иными словами, ребро $r \in E_n$ принадлежит графу $G_1 \Delta G_2$ тогда и только тогда, когда r принадлежит ровно одному из графов G_1, G_2 .

Отметим, что задача построения различающего графа для заданного семейства $\mathcal{G}$ допускает выражение в терминах табличных тестов (см. [3]). Действительно, рассмотрим прямоугольную таблицу, строкам которой поставлены в соответствие графы из $\mathcal{G}$, а столбцам — ребра из множества E_n . В каждой клетке таблицы стоит 1 или 0, в зависимости от принадлежности соответствующего ребра соответствующему графу. В таком случае,

различающему графу сопоставляется такое подмножество столбцов, называемое тестом, что любые две строки различаются хотя бы в одном из них. Задача же построения минимального различающего графа, переформулированная в терминах табличных тестов, состоит в нахождении наименьшего по количеству столбцов теста.

В дальнейшем язык табличных тестов использоваться не будет.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим произвольное разбиение множества V_n на непересекающиеся непустые подмножества:

$$\begin{aligned} V_n &= U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_t, & 1 \leq t \leq n; \\ U_i \cap U_j &= \emptyset, & 1 \leq i < j \leq t. \end{aligned}$$

Построим теперь на множестве вершин V_n граф, соединив ребрами всевозможные пары вершин в каждом из множеств U_k , $1 \leq k \leq t$.

Получившееся объединение клик можно интерпретировать как граф, отвечающий отношению эквивалентности, которое разбивает множество всех вершин V_n на классы эквивалентности U_k , $1 \leq k \leq t$. При этом, две различные вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они находятся в отношении эквивалентности, а каждому классу эквивалентности отвечает клика, т. е. множество вершин, соединенных попарно друг с другом ребрами.

Предположим теперь, что требуется найти некоторое заранее неизвестное отношение эквивалентности T на V_n , имея возможность для любой пары вершин $u, v \in V_n$ установить значение uTv . Нетрудно видеть, что задача о нахождении неизвестного отношения эквивалентности T при помощи таких проверок относительно пар вершин есть в точности задача о нахождении графа, соответствующего отношению T , при помощи реберных проверок.

В данной работе рассматривается задача о нахождении неизвестного отношения эквивалентности, в котором число классов эквивалентности ограничено двумя.

Уточним, о каких семействах графов далее пойдет речь. Будем рассматривать следующие семейства, для которых рассматривается задача построения различающих графов.

Семейство $\mathcal{K}_{p, n-p}$ состоит из графов, отвечающих всевозможным разбиениям V_n на два класса, один из которых содержит ровно p , а другой — $n-p$ вершин ($n \geq 2$, $1 \leq p \leq n/2$).

Каждый граф из семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$ есть объединение двух непересекающихся клик размеров p и $n-p$. Очевидно, что при данных n и p все графы семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$ попарно изоморфны.

Семейство $\mathcal{K}^2$ состоит из графов, отвечающих всевозможным разбиениям V_n на два непустых класса ($n \geq 2$). Иначе говоря,

$$\mathcal{K}^2 = \bigcup_{p=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{K}_{p, n-p}.$$

Семейство $\mathcal{K}_0^2$ состоит из графов, отвечающих всевозможным разбиениям V_n на не более чем два класса ($n \geq 2$).

Семейство $\mathcal{K}_0^2$ включает в себя все графы $\mathcal{K}^2$ и добавляет к ним крайний случай, когда один из классов разбиения пуст, а другой, следовательно, содержит все вершины, чему соответствует K_n — полный граф (клика) на n вершинах:

$$\mathcal{K}_0^2 = \mathcal{K}^2 \cup \{K_n\}.$$

Далее нам понадобится описывать графы, принадлежащие перечисленным выше семействам, явно указывая множества вершин, на которых располагаются клики. Введем для этого специальное обозначение.

Пусть множество вершин V_n разбито на два непересекающихся подмножества A и B . Граф на вершинах V_n , состоящий из двух клик — одна на множестве вершин A , а другая на множестве вершин B , — будем обозначать $K(A, B)$. Обозначение $K(B, A)$, таким образом, задает тот же граф.

Мы не будем исключать и случая, когда одно из двух подмножеств пусто; граф $K(V_n, \emptyset)$ есть полный граф на вершинах V_n .

Утверждение следующей леммы является простой переформулировкой понятия различающего графа, однако в таком виде это понятие оказывается удобным в некоторых из дальнейших рассуждений.

Лемма 1. Граф R является различающим для семейства $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда для любых двух различных графов из $\mathcal{G}$ граф R не содержится целиком в дополнении их симметрической разности.

Доказательство. По определению, граф R является различающим для семейства $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда для любых двух различных графов $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ граф R содержит хотя бы одно ребро, различающее G_1 и G_2 , т. е. R имеет хотя бы одно общее ребро с симметрической разностью $G_1 \triangle G_2$, что равносильно тому, что граф R не содержится в дополнении графа $G_1 \triangle G_2$.

Лемма доказана.

§ 3. Семейства $\mathcal{K}^2$ и $\mathcal{K}_0^2$

В этом параграфе изучается задача о различении графов семейств $\mathcal{K}^2$ и $\mathcal{K}_0^2$. При этом удастся получить точные значения для числа ребер в минимальном различающем графе при всех $n \geq 2$.

Рассмотрим задачу распознавания графа из семейства $\mathcal{K}_0^2$. Пусть дан искомым граф из этого семейства, обозначим его через X .

Опишем содержательно, как информация, полученная от единичных реберных проверок, может быть использована для восстановления искомого графа или его части.

Рассмотрим произвольное ребро $uv \in E_n$ и результат соответствующей проверки в отношении графа X . Если на ребре uv дан ответ «да», т. е. $uv \in E(X)$, то вершины u и v лежат в одной клике графа X . Если же дан ответ «нет», т. е. $uv \notin E(X)$, то u и v лежат в разных кликах графа X .

Рассмотрим теперь третью вершину w (отличную от u, v) и ребро uw . Так же, как и в случае с ребром uv , результат проверки на ребре uw однозначно определяет, лежат ли вершины u и w в одной клике графа X , или в разных.

Нетрудно видеть, что результаты проверок для ребер uv и uw однозначно определяют результат проверки на ребре vw , и поэтому это последнее ребро включать в тест не нужно, коль скоро в нем уже есть ребра uv и uw .

В общем случае, для того, чтобы определить, находятся ли две данные вершины в одной клике искомого графа, достаточно иметь результаты реберных проверок для какой угодно цепи, соединяющей эти вершины.

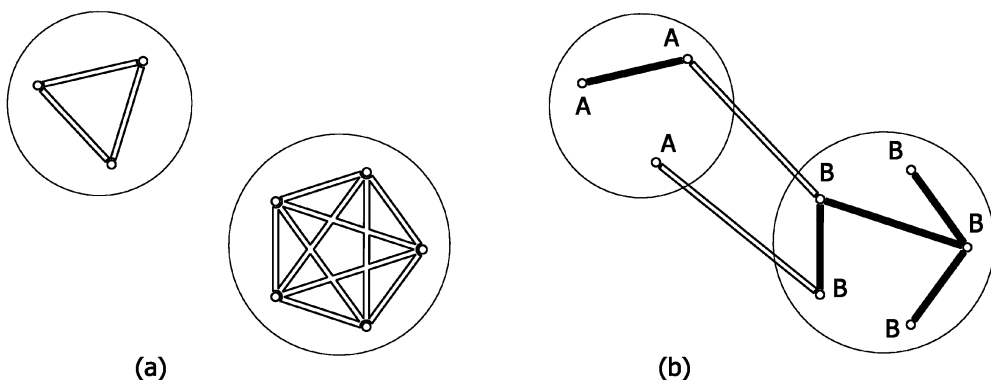


Рис. 1. Восстановление графа из $\mathcal{K}_{3,5}$

Восстановление графа из семейства $\mathcal{K}_{3,5}$ по результатам реберных проверок схематично изображено на рис. 1. На рис. 1(a) представлен искомым граф, а на рис. 1(b) — различающий граф и результаты реберных проверок. В черный цвет окрашены ребра, результат проверки на которых есть «да» (ребро принадлежит искомому графу из $\mathcal{K}_{3,5}$); ребра, на которых получен ответ «нет», изображены белым цветом. Отправляясь от любой вершины, можно, таким образом, разделить все вершины на два множества A и B , содержащиеся в различных кликах.

Очевидным обобщением приведенных выше рассуждений является следующая лемма.

Лемма 2. Пусть R — различающий граф для семейства $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_0^2$. Тогда остовный лес *) графа R также является различающим графом для $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть R — различающий граф для семейства $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_0^2$.

Рассмотрим в R любую связную компоненту C и выделим в ней произвольным образом остовное дерево D . Будем рассматривать результаты реберных проверок для (неизвестного) графа $X \in \mathcal{K}$.

Для любых двух различных вершин u, v связной компоненты C в дереве D имеется лишь один соединяющий их путь. Нетрудно видеть, что вершины этого пути по результатам реберных проверок можно однозначно разбить на два подмножества: находящиеся с u в одной клике и находящиеся с u в разных кликах (графа X).

Действительно, рассмотрим обход вершин этого пути в направлении от u до v . Каждую вершину будем относить к одному из множеств A, B . Вершину u отнесем к множеству A . Каждую следующую вершину по порядку обхода будем относить к тому же множеству, что и предыдущую, если на соединяющем их ребре значение проверки есть «да» (ребро принадлежит X), в противном случае предыдущая и следующая вершины будут помещены в разные множества.

Нетрудно видеть, что таким образом, для всякого пути в графе R по результатам реберных проверок можно разбить множество вершин пути на подмножества, лежащие каждое в своей клике. Следовательно, для

*) Остовным лесом графа R здесь и далее называется всякий подграф R , являющийся объединением остовных деревьев связных компонент графа R . Отметим, что остовное дерево изолированной вершины есть сама эта вершина.

каждой пары различных вершин u, v дерева D по набору значений проверок на ребрах D соответствующее значение на ребре uv определяется однозначно.

Из сказанного следует, что если граф R различает любые два графа $G_1, G_2 \in \mathcal{K}$, то и остовный лес T графа R также различает любые два графа из $\mathcal{K}$ и, следовательно, является различающим графом для $\mathcal{K}$.

Действительно*) , каково бы ни было ребро r , принадлежащее R , но не принадлежащее T , для всякой пары графов $G_1, G_2 \in \mathcal{K}$, различаемых ребром r , в силу сказанного выше существует ребро r' , принадлежащее лесу T , на котором результаты реберных проверок для графов G_1 и G_2 различаются. Следовательно, граф, полученный выбрасыванием ребра r из R по-прежнему будет различающим для семейства $\mathcal{K}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого семейства $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_0^2$ всякий минимальный различающий граф является лесом.*

Утверждение леммы прямо вытекает из леммы 2.

Лемма 4. *Всякий различающий граф для $\mathcal{K}_0^2$ связан.*

Доказательство. Предположим, что R — несвязный различающий граф для $\mathcal{K}_0^2$. Тогда n вершин графа R можно разбить на непустые подмножества A и B так, что в R нет ребра с одним концом в A , а другим в B . Например, к множеству A можно отнести вершины одной из связных компонент R , а к B — все остальные вершины.

Нетрудно видеть, что графы $G_1 = K(A, B)$ и $G_2 = K(A \cup B, \emptyset)$ не различаются посредством R . Действительно, графы G_1 и G_2 различаются только ребрами, соединяющими вершины из множества A с вершинами из B ; все такие ребра принадлежат графу G_2 , и ни одно — графу G_1 .

Но граф R не содержит ни одного ребра, соединяющего какую-либо вершину из множества A с какой-либо вершиной из B .

Нетрудно видеть, что по лемме 1 граф R не является различающим для всякого семейства, содержащего графы G_1 и G_2 , а семейство $\mathcal{K}_0^2$ таковым является.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Минимальные различающие графы для $\mathcal{K}_0^2$ — это в точности деревья на n вершинах.*

Утверждение теоремы следует из лемм 4 и 2.

Отметим, что количество ребер в минимальных различающих графах для $\mathcal{K}_0^2$ совпадает с оценкой, которая получается из информационных соображений: число графов в семействе не может превышать число двоичных наборов длины, равной числу ребер в различающем графе.

Действительно, подсчитаем количество графов в $\mathcal{K}_0^2$. Очевидно, графы указанного семейства находятся во взаимно-однозначном соответствии с разбиениями множества V_n на два подмножества, одно из которых может быть и пустым, т. е. с парами взаимно-дополнительных подмножеств множества V_n , и, следовательно, $|\mathcal{K}_0^2| = 2^n / 2 = 2^{n-1}$.

В то же время, для всякого графа с l ребрами возможно не более 2^l наборов значений реберных проверок, и такой граф может быть различающим только для семейства, содержащего не более 2^l графов. Любое дерево на n вершинах состоит из $n - 1$ ребер, поэтому оно различает не более 2^{n-1} графов.

Мы видим, что семейство $\mathcal{K}_0^2$ содержит максимальное число графов, которое дерево на n вершинах способно различить, или, что то же самое,

*) Вообще говоря, этот абзац является переформулировкой простейшего факта теории табличных тестов, который заключается в том, что для минимальности теста необходимо и достаточно, чтобы для любого столбца (признака) существовала пара строк (различаемых объектов), которые различаются только в этом столбце.

для семейства $\mathcal{K}_0^2$ дерево на n вершинах имеет минимально возможное, исходя из информационных соображений, количество ребер.

Семейство $\mathcal{K}^2$ отличается от семейства $\mathcal{K}_0^2$ лишь одним графом, поэтому результаты, полученные для $\mathcal{K}_0^2$ без труда переносятся на случай класса $\mathcal{K}^2$.

Теорема 2. *При всех $n \geq 3$ выполнено*

$$L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{K}_0^2) = n - 1.$$

Доказательство. Очевидно, различающий граф для какого-либо семейства $\mathcal{K}$ является различающим и для всех подсемейств $\mathcal{K}$. Поэтому всякий различающий граф для $\mathcal{K}_0^2$ является различающим и для $\mathcal{K}^2$. Следовательно, $L(\mathcal{K}^2) \leq L(\mathcal{K}_0^2)$.

Докажем, что при $n \geq 3$ верно и обратное неравенство.

Пусть R — произвольный различающий граф для $\mathcal{K}^2$. Ясно, что $|\mathcal{K}^2| = 2^{n-1} - 1$, а количество ребер в любом различающем графе не может быть меньше, чем $\log_2 |\mathcal{K}^2|$, следовательно,

$$|E(R)| \geq \log_2(2^{n-1} - 1) > \log_2 2^{n-2} = n - 2,$$

откуда, в силу целочисленности величины $|E(R)|$, имеем $|E(R)| \geq n - 1$.

Теорема доказана.

§ 4. Семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$

Займемся теперь рассмотрением семейств $\mathcal{K}_{p, n-p}$. Для того, чтобы охарактеризовать различающие графы этих семейств, изучим симметрические разности пар графов в $\mathcal{K}_{p, n-p}$ при каждом $n \geq 2$, $1 \leq p \leq n/2$. Для этого докажем следующие две леммы.

Лемма 5. *Симметрическая разность любых двух (не обязательно различных) графов из $\mathcal{K}_{p, n-p}$, где $n \geq 2$, $1 \leq p \leq n/2$, является полным двудольным графом на n вершинах, одна из долей которого имеет четное число вершин, не превосходящее $2p$.*

Доказательство. Пусть даны графы $G_1 = K(A_1, B_1) \in \mathcal{K}_{p, n-p}$ и $G_2 = K(A_2, B_2) \in \mathcal{K}_{p, n-p}$.

Рассмотрим множество вершин $A_1 \cap A_2$: эти вершины попарно смежны как в графе G_1 , так и в G_2 . Следовательно, в симметрической разности $G_1 \Delta G_2$ никакие две вершины из множества $A_1 \cap A_2$ не смежны. Аналогично, попарно несмежны вершины в множествах $A_1 \cap B_2$, $B_1 \cap A_2$ и $B_1 \cap B_2$.

Далее, между любой вершиной из $A_1 \cap A_2$ и любой вершиной из $A_1 \cap B_2$ в симметрической разности $G_1 \Delta G_2$ имеется ребро, поскольку эта пара вершин была смежной в G_1 , но не была таковой в G_2 . Граф $G_1 \Delta G_2$ также содержит все ребра, соединяющие вершины из $A_1 \cap B_2$ с вершинами из $B_1 \cap B_2$, вершины из $B_1 \cap B_2$ с вершинами из $B_1 \cap A_2$ и вершины из $B_1 \cap A_2$ с вершинами из $A_1 \cap A_2$.

Напротив, все ребра, соединяющие попарно вершины из $A_1 \cap A_2$ с вершинами из $B_1 \cap B_2$, в симметрической разности отсутствуют, поскольку они отсутствуют и в G_1 , и в G_2 . То же верно в отношении пары множеств $A_1 \cap B_2$ и $B_1 \cap A_2$.

Итак, в симметрической разности $G_1 \Delta G_2$ каждая вершина из множества $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$ соединена ребром с каждой вершиной из множества $(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)$; других ребер в $G_1 \Delta G_2$ нет. Множества $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap B_2$, $B_1 \cap A_2$ и $B_1 \cap B_2$ в совокупности содержат все n вершин. Таким

образом, доказано, что граф $G_1 \triangle G_2$ является полным двудольным графом, содержащим все вершины.

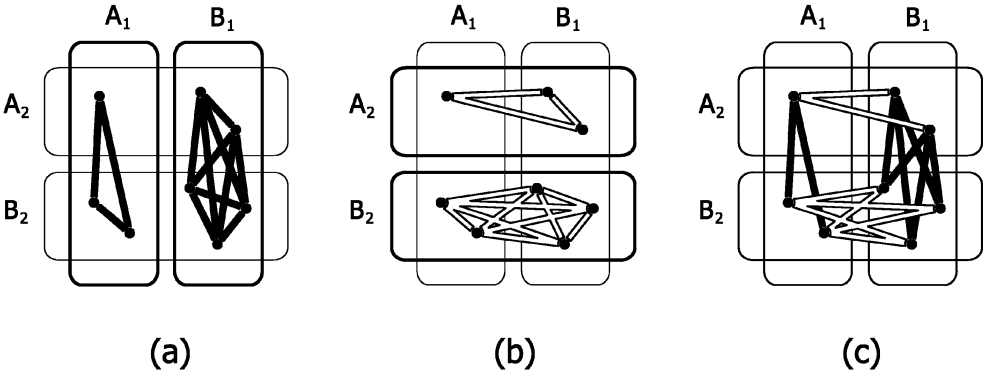


Рис. 2. К доказательству леммы 5

Приведенные выше рассуждения схематично представлены на рис. 2, где строится симметрическая разность двух графов из семейства $\mathcal{H}_{3,5}$. На рис. 2(а) представлен один из графов, его ребра отмечены черным цветом, на рис. 2(б) — другой граф, его ребра отмечены белым цветом. На рис. 2(с) изображена симметрическая разность этих графов.

Докажем теперь утверждение о количестве вершин в одной из долей.

В каждом из графов G_1 и G_2 одна из клик имеет размер p , пусть для определенности это клики на множествах вершин A_1 и A_2 соответственно.

Множества $A_1 \cap B_2$ и $B_1 \cap A_2$ тогда имеют одинаковое число вершин, равное $p - |A_1 \cap A_2|$, поскольку в каждом из множеств $(A_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap A_2) = A_1$ и $(B_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2) = A_2$ содержится по p вершин. Следовательно, множество $(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)$ содержит четное число $2(p - |A_1 \cap A_2|) \leq 2p$ вершин.

Лемма доказана.

В условии леммы 5 специально выделено, что графы из $\mathcal{H}_{p, n-p}$, симметрическая разность которых описывается как полный двудольный граф, не обязательно различны.

Нетрудно видеть, что если графы G_1 и G_2 в доказательстве леммы 5 различны, то хотя бы одно из множеств $A_1 \cap A_2$ и $B_1 \cap B_2$ является непустым, также непусто хотя бы одно из множеств $A_1 \cap B_2$ и $B_1 \cap A_2$. Таким образом, в случае $G_1 \neq G_2$ обе доли двудольного графа непусты.

Если же $G_1 = G_2$, то либо $A_1 \cap B_2 = B_1 \cap A_2 = \emptyset$, либо $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$. В этом случае одна из долей двудольного графа пуста, а другая содержит все вершины. Симметрическая разность в этом случае не содержит ни одного ребра.

Лемма 6. При всяких n и p , где $n \geq 2$, $1 \leq p \leq n/2$, для любого полного двудольного графа G на n вершинах, одна из долей которого имеет четное число вершин, не превосходящее $2p$ (случай пустой доли не исключается), в $\mathcal{H}_{p, n-p}$ существует пара графов, симметрическая разность которых равна G .

Доказательство. Пусть граф G является полным двудольным графом на n вершинах с долями A и B , причем $|A| = 2k \leq 2p$. Построим пару графов, принадлежащих семейству $\mathcal{H}_{p, n-p}$, с симметрической разностью равной G .

Разобьем множество вершин A произвольным образом на два подмножества по k вершин в каждом, обозначим эти подмножества A_1 и A_2 .

Множество B содержит ровно $n - 2k$ вершин, разобьем его на подмножества B_1 и B_2 , имеющие $p - k$ и $n - k - p$ вершин соответственно, — также произвольным образом. Эти разбиения осуществимы, так как $n \geq 2p \geq 2k$.

Образует следующие два графа:

$$G_1 = K(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2),$$

$$G_2 = K(A_2 \cup B_1, A_1 \cup B_2).$$

Если множество A пусто, то множества A_1 и A_2 также окажутся пустыми, и графы G_1 и G_2 совпадут.

Нетрудно видеть, что множества A_1, A_2, B_1, B_2 попарно не пересекаются, и их объединение содержит все вершины. Оба графа принадлежат семейству $\mathcal{K}_{p, n-p}$, поскольку $|A_1 \cup B_1| = |A_2 \cup B_1| = p$ и $|A_2 \cup B_2| = |A_1 \cup B_2| = n - p$. Также нетрудно убедиться, что симметрическая разность предъявленных графов G_1 и G_2 совпадает с G .

Лемма доказана.

Леммы 5 и 6 вместе характеризуют все симметрические разности графов из $\mathcal{K}_{p, n-p}$, не исключая случая совпадающих графов. Симметрическая разность графа с самим собой есть пустой граф, т. е. полный двудольный граф, у которого одна доля содержит n вершин, а вторая пуста.

Таким образом, симметрическая разность двух различных графов из $\mathcal{K}_{p, n-p}$ всегда является полным двудольным графом на n вершинах, у которого обе доли непусты, и одна из них имеет четное число вершин, не превосходящее $2p$.

Следующая теорема характеризует различающие графы для семейств $\mathcal{K}_{p, n-p}$. В ее формулировке и доказательстве, как и в следующих далее утверждениях, существенную роль играет анализ связных компонент различающих графов.

Число вершин в связной компоненте графа будем для краткости называть *размером* связной компоненты, компоненты четного размера будем называть *четными* компонентами, а содержащие нечетное число вершин — *нечетными* компонентами.

Теорема 3. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq p \leq n/2$. Если граф R является различающим для семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$, то в зависимости от числа связных компонент R выполнено одно из следующих трех утверждений.

1. Граф R содержит ровно одну связную компоненту (R связан).

2. Граф R содержит ровно две связных компоненты и выполнено условие

(а) среди связных компонент R нет четной размера, не превосходящего $2p$.

3. Граф R содержит не менее трех связных компонент и выполнены условие (а) и условие

(б) среди связных компонент R нет двух различных нечетных компонент, сумма размеров которых не превышает $2p$.

Обратно, если выполнено одно из утверждений 1–3, то граф R является различающим для семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$.

Доказательство. Согласно леммам 5 и 6, симметрическая разность любых двух различных графов из $\mathcal{K}_{p, n-p}$ есть полный двудольный граф на n вершинах, и обратно, всякий полный двудольный граф (с непустыми долями) есть симметрическая разность двух различных графов из $\mathcal{K}_{p, n-p}$.

По лемме 1, граф R является различающим тогда и только тогда, когда для любых двух различных графов $G_1, G_2 \in \mathcal{K}_{p, n-p}$ граф R не содержится в дополнении множества $G_1 \triangle G_2$.

Дополнение полного двудольного графа на n вершинах с непустыми долями — это граф, принадлежащий одному из семейств $\mathcal{K}_{2k, n-2k}$, где $1 \leq k \leq p$.

Итак, граф R является различающим тогда и только тогда, когда он не содержится ни в каком графе, принадлежащем одному из семейств $\mathcal{K}_{2k, n-2k}$, $1 \leq k \leq p$.

Рассмотрим различные случаи, в зависимости от числа связных компонент R .

Пусть R содержит ровно одну связную компоненту. Тогда R является различающим для $\mathcal{K}_0^2$ и, следовательно, для любого из семейств $\mathcal{K}_{p, n-p}$.

Пусть R содержит ровно две связные компоненты. Очевидно, $R \subseteq G$, $G \in \mathcal{K}_{2k, n-2k}$ тогда и только тогда, когда одна из связных компонент R содержится в клике размера $2k$, а вторая — в клике размера $n-2k$. Но тогда та связная компонента R , что содержится в $2k$ -клике графа G , сама имеет размер $2k$, что противоречит условию (а).

Обратно, если условие (а) не выполнено, то в силу леммы 6 в $\mathcal{K}_{p, n-p}$ существует пара графов, чья симметрическая разность есть в точности полный двудольный граф с долями размеров $2k$ и $n-2k$, и дополнение этой симметрической разности содержит R .

Таким образом, граф R , состоящий из двух связных компонент, является различающим для $\mathcal{K}_{p, n-p}$ тогда и только тогда, когда ни одна из его компонент не имеет размер $2k$, $0 < 2k \leq 2p$.

Пусть R содержит не менее трех связных компонент. Граф R содержится в некотором графе $G \in \mathcal{K}_{2k, n-2k}$, $k \leq p$, тогда и только тогда, когда каждая из его связных компонент целиком содержится в одной из клик G . Рассмотрим $2k$ -клику графа G ; очевидно, если $R \subseteq G$, то либо одна из содержащихся в $2k$ -клике связных компонент графа R имеет четный размер, что противоречит условию (а), либо в $2k$ -клике содержится, в силу ее четности, по меньшей мере две нечетные связные компоненты графа R , что противоречит условию (б).

Обратно, если одно из условий (а), (б) нарушено, то в силу леммы 6 в $\mathcal{K}_{p, n-p}$ существует пара графов, дополнение симметрической разности которых включает в себе граф R : либо четная клика в дополнении симметрической разности совпадает с четной кликой графа R (если нарушено условие (а)), либо множество ее вершин совпадает с объединением множеств вершин нечетных клик (если нарушено условие (б)).

Теорема доказана.

Полученная теорема позволяет установить точное значение числа ребер в минимальном различающем графе при всяких n и p , где $n \geq 2$, $1 \leq p \leq n/2$.

Согласно лемме 3 всякий минимальный различающий граф для семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$, как и для любого подсемейства $\mathcal{K}_0^2$, является лесом. Число ребер в таком графе есть $n - k$, где k — число компонент связности. Теорема 3 дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы граф был различающим для семейства $\mathcal{K}_{p, n-p}$, причем эти условия сформулированы в виде ограничений на размеры связных компонент.

Таким образом, задача построения минимальных различающих графов может быть сформулирована как задача построения наборов положительных целых чисел, представляющих размеры связных компонент. Минимальные различающие графы соответствуют наборам максимальной длины $k_{\max}$, и число ребер во всяком минимальном различающем графе равно $n - k_{\max}$.

Введем следующее обозначение: через $k(n, p)$ будем обозначать наибольшее из таких чисел k , что при данных n и p существует лес, состоящий из k деревьев, удовлетворяющий условиям теоремы 3. Иными словами, при

всяких n и p , где $n \geq 2$, $1 \leq p \leq n/2$, значение функции $k(n, p)$ равно максимальной длине набора из положительных целых чисел, сумма которых равна n , и которые удовлетворяют следующим условиям:

- (а') если в наборе по крайней мере два элемента, то среди них нет четного числа, не превосходящего $2p$;
- (б') если в наборе по крайней мере три элемента, то среди них нет двух различных нечетных, сумма которых не превосходит $2p$.

Из определения функции $k(n, p)$ и предшествующих ему рассуждений следует, что

$$L(\mathcal{K}_{p, n-p}) = n - k(n, p).$$

Установим некоторые простейшие факты, верные для всех различающих графов для $\mathcal{K}_{p, n-p}$.

Лемма 7. Пусть различающий граф R имеет по крайней мере три связные компоненты. Тогда сумма размеров любых двух компонент не меньше $2p + 2$.

Доказательство. Рассмотрим две произвольные компоненты различающего графа R . Если одна из этих компонент имеет четное число вершин, то, поскольку R является различающим, по теореме 3 она имеет размер не менее $2p + 1$, а в силу четности — и не менее $2p + 2$. Если же обе компоненты нечетны, то по той же теореме 3 суммарное количество вершин не может быть меньше $2p + 1$, но сумма двух нечетных чисел четна, и, следовательно, она не меньше $2p + 2$.

Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть различающий граф R имеет k связных компонент, причем $k \geq 3$. Тогда $n \geq k(p + 1)$.

Доказательство. Пусть граф R состоит из связных компонент размеров $c_1, c_2, \dots, c_k$, где $k \geq 3$. Тогда $c_1 + c_2 + \dots + c_k = n$.

Без ограничения общности можно считать, что размеры связных компонент упорядочены:

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k.$$

Из леммы 7 следует, что $c_1 + c_2 \geq 2p + 2$. Максимальное из двух чисел c_1, c_2 не меньше половины их суммы: $c_2 \geq p + 1$. Следовательно, $c_i \geq p + 1$ при всяком $i \geq 3$. Таким образом, для числа n имеем

$$n = (c_1 + c_2) + c_3 + \dots + c_k \geq k(p + 1).$$

Лемма доказана.

Исследование функции $k(n, p)$ будем проводить следующим образом. При каждом значении $p = 1, 2, \dots$ рассмотрим все возможные значения n , а именно $2p, 2p + 1, \dots$; область изменения n далее разобьем на три отрезка

- 1) $2p \leq n \leq 3p + 2$,
- 2) $3p + 3 \leq n \leq 4p + 2$,
- 3) $4p + 3 \leq n$,

которые исследуем по отдельности.

Лемма 9. Если $2p \leq n \leq 3p + 2$, то

$$k(n, p) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2p + 1, \\ 2 & \text{при других значениях } n. \end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что в указанном интервале изменения n значение $k(n, p)$ не превышает двух.

Согласно лемме 8, если различающий граф R имеет k компонент связности, где $k \geq 3$, то выполнено неравенство $n \geq k(n+1)$, откуда, $n \geq 3p+3$, но по условию леммы $n \leq 3p+2$. Таким образом, граф R имеет не более двух компонент связности.

Теперь покажем, что при $n = 2p$ существует лес, состоящий из двух деревьев, удовлетворяющий условию теоремы 3. Действительно, лес, состоящий из изолированной вершины (дерева размера 1) и дерева размера $n-1 = 2p-1$ будет различающим, поскольку оба числа нечетны.

При $n \geq 2p+2$ также нетрудно предъявить различающий граф, состоящий из двух компонент связности: снова рассмотрим лес, состоящий из деревьев размера 1 и $n-1$. Второе из этих чисел не меньше $2p+1$ и, следовательно, условия теоремы 3 выполнены.

Осталось заметить, что при $n = 2p+1$ различающий граф не может содержать две связные компоненты. Действительно, одно из двух положительных целых чисел, сумма которых равна $2p+1$, является четным и не превосходит $2p$.

Лемма доказана.

Л е м м а 10. Если $3p+3 \leq n \leq 4p+2$, то

$$k(n, p) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 3, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в указанном интервале изменения n величина $k(n, p)$ не принимает иных значений, кроме 2 и 3.

Предъявим некоторый различающий граф, состоящий из двух компонент связности, например, пару деревьев: одно, состоящее из одной вершины, и другое, содержащее остальные $n-1 \geq 3p+2 \geq 2p+1$ вершин. По теореме 3 такой граф будет различающим. Таким образом, минимальный различающий граф не может состоять менее чем из двух компонент связности.

Теперь покажем, что число связных компонент различающего графа не превышает трех. Предположим, что некоторый различающий граф R содержит по крайней мере 4 компоненты связности. Тогда по лемме 8 имеем $n \geq 4p+4$, что противоречит условию $n \leq 4p+2$.

Покажем, что при четных n различающий граф не может иметь три связные компоненты, и таким образом, с учетом доказанного ранее, их две.

Действительно, предположим, что в различающем графе R три связные компоненты. Число n четно, поэтому хотя бы одна из компонент четная. По теореме 3 такая компонента содержит не менее $2p+2$ вершин. Следовательно, оставшиеся две компоненты содержат вместе не более $(4p+2) - (2p+2) = 2p$ вершин. Но тогда по лемме 7 граф R не является различающим. Полученное противоречие показывает, что при четных n различающий граф не может содержать более двух связных компонент, и следовательно, их ровно две.

Рассмотрим теперь случай нечетных n . Покажем, что в этом случае существует различающий граф с тремя связными компонентами.

В случае четного p таким графом будет лес, состоящий из деревьев размеров $p+1$, $p+1$, $n-2(p+1)$. Все три числа не меньше $p+1$ и все три нечетны, следовательно, по теореме 3 предъявленный граф является различающим.

В случае нечетного p рассмотрим лес, состоящий из деревьев размеров p , $p+2$, $n-(2p+2)$. По условию леммы $n \geq 3p+3$, но заметим, что при нечетном p число $3p+3$ является четным. Мы рассматриваем случай нечетных n и, следовательно, $n \geq 3p+4$. Поэтому $n - (2p+2) \geq p+2$ и условия теоремы 3 вновь выполнены.

Итак, в случае нечетных n из интервала $3p + 3 \leq n \leq 4p + 2$ всегда существует различающий граф с тремя связными компонентами.

Лемма доказана.

Лемма 11. Если $n \geq 4p + 3$, то $k(n, p) \geq 3$.

Доказательство. Требуется показать, что при всяком $n \geq 4p + 3$ существует различающий граф с тремя связными компонентами.

Построение требуемого графа будем проводить по-разному, в зависимости от четности p .

При четном p рассмотрим лес, состоящий из трех деревьев размеров $p+1$, $p+1$ и $n - (2p+2)$. Первые два из этих чисел нечетны, а последнее — не меньше $4p + 3 - (2p + 2) = 2p + 1$. Сумма любых двух из них не меньше $2p+2$. По теореме 3 полученный граф является различающим.

При нечетном p составим лес из деревьев размеров p , $p+2$, $n - (2p+2)$. Снова первые два из этих чисел нечетны, последнее не меньше $4p + 3 - (2p+2) = 2p + 1$, и сумма любых двух не меньше $2p+2$.

Лемма доказана.

Поскольку леммой 11 установлено, что при всех $n \geq 4p + 3$ существуют различающие графы с тремя компонентами связности, далее при изучении минимальных различающих графов можно ограничиться графами с не менее чем тремя связными компонентами.

Как уже говорилось ранее, задача описания минимальных различающих графов может быть выражена как задача описания наборов положительных целых чисел, отвечающих размерам компонент связности.

Рассмотрим набор положительных целых чисел $c_1, c_2, \dots, c_k$, где $k \geq 3$, удовлетворяющий следующим условиям.

$$(1) \quad c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k,$$

$$(2) \quad c_1 + c_2 + \dots + c_k = n,$$

$$(3) \quad \text{Если при некотором } i \text{ число } c_i \text{ четно, то } c_i \geq 2p+2.$$

$$(4) \quad \text{Если при некоторых } i, j \ (i \neq j) \text{ числа } c_i, c_j \text{ нечетны, то } c_i + c_j \geq 2p+2.$$

Нетрудно видеть, что по теореме 3 лес, состоящий из деревьев размеров $c_1, c_2, \dots, c_k$, является различающим графом для $\mathcal{H}_{p, n-p}$. И наоборот, если число связных компонент в различающем графе не меньше трех (что выполнено при $n \geq 4p + 3$ в силу леммы 11), то, упорядочив набор размеров компонент по неубыванию, мы получим набор чисел, удовлетворяющий условиям (1)–(4).

Условимся называть набор положительных целых чисел $c_1, c_2, \dots, c_k$, где $k \geq 3$, удовлетворяющий условиям (1)–(4), *правильным* набором.

Поскольку установлено соответствие между различающими графами, имеющими не менее трех компонент, и правильными наборами, рассмотрим задачу построения при всяком p и всяком $n \geq 4p + 3$ правильного набора максимальной длины, который отвечает минимальным различающим графам.

Оказывается, что при этом достаточно ограничиться изучением наборов специального вида, которые являются прямыми обобщениями тех, что были использованы при доказательстве леммы 11.

Рассмотрим для каждого p и каждого $n \geq 4p + 3$ набор из s чисел одного из следующих видов, в зависимости от четности p . При четных p это набор

$$p+1, \quad p+1, \quad \dots, \quad p+1, \quad n - (s-1)(p+1), \quad (1)$$

а при нечетных

$$p, \quad p+2, \quad p+2, \quad \dots, \quad p+2, \quad n - (s-1)(p+2) + 2. \quad (2)$$

Как показано в доказательстве леммы 11, указанные наборы чисел при $s = 3$ являются правильными наборами — это как раз те наборы размеров

связных компонент, что были нами использованы. Также видно, что с ростом s наборы перестают быть правильными, так как последний их член неограниченно уменьшается.

Если при некотором s набор (1) или набор (2) — в зависимости от четности p — является правильным набором, то будем называть такой набор чисел *каноническим*.

Лемма 12. Пусть $n \geq 4p + 3$ и при некотором $k \geq 3$ существует правильный набор длины k . Тогда существует и канонический набор той же длины k .

Доказательство. Пусть дан правильный набор $c_1, c_2, \dots, c_k$, отвечающий параметрам n и p . Будем последовательно его преобразовывать, не меняя длины и переходя каждый раз к правильному набору (с теми же n и p), так чтобы в итоге получить канонический набор.

Чтобы отмечать шаги этого процесса, введем в обозначение чисел в наборе верхний индекс, обозначив $c_1^1 = c_1, c_2^1 = c_2, \dots, c_k^1 = c_k$. Кроме того, для наборов $c_1^i, c_2^i, \dots, c_k^i$ будем использовать сокращенное обозначение $\tilde{c}^i$.

Рассмотрим два случая в зависимости от четности p .

Пусть p четно. Преобразуем набор $\tilde{c}^1$ в набор $\tilde{c}^2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c_1^2 &= p + 1, \\ c_2^2 &= p + 1, \\ c_3^2 &= c_3^1, \\ &\dots \\ c_{k-1}^2 &= c_{k-1}^1, \\ c_k^2 &= c_k^1 + (c_1^1 + c_2^1 - 2(p + 1)). \end{aligned}$$

Полученный набор $\tilde{c}^2$ имеет ту же длину, что и набор $\tilde{c}^1$. Покажем, что он является правильным, проверив условия (1)–(4).

(1) В силу леммы 7 выполнено неравенство $c_1^1 + c_2^1 \geq 2p + 2$, откуда следует, что $c_2^1 \geq p + 1$ и далее $c_3^1 \geq p + 1$. Также очевидно, что $c_1^1 + c_2^1 - 2(p + 1) \geq 0$. Отсюда видно, что числа в наборе $\tilde{c}^2$ упорядочены по неубыванию.

(2) Набор $\tilde{c}^2$ отличается от $\tilde{c}^1$ только первыми двумя и последним членами. Проверка того, что $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2 = n$ производится непосредственно.

(3) Числа c_1^2 и c_2^2 нечетны, а относительно чисел c_i^2 при $3 \leq i \leq k - 1$ условие выполнено, так как они взяты из правильного набора $\tilde{c}^1$.

Остается рассмотреть число c_k^2 . Чтобы это число было четным, необходимо, чтобы хотя бы одно из чисел c_k^1, c_1^1, c_2^1 было таковым. Но в этом случае очевидно, что $c_k^1 \geq 2p + 2$, а вместе с ним и $c_k^2 \geq 2p + 2$.

(4) Поскольку все числа в наборе $\tilde{c}^2$ не меньше $p + 1$, условие, очевидно, выполнено.

Если длина наборов $k = 3$, то после первого шага мы получили канонический набор $\tilde{c}^2$. Если же $k > 3$, то будем продолжать процесс следующим образом.

На втором шаге преобразуем набор $\tilde{c}^2$ в набор $\tilde{c}^3$, заменив третью компоненту на $p + 1$, а последнюю — на $c_k^2 + c_3^2 - (p + 1)$. Нетрудно видеть, что условия (1)–(4) вновь оказываются выполненными, на этот раз для набора $\tilde{c}^3$.

Для преобразования набора $\tilde{c}^1$ длины k мы, таким образом, сделаем ровно $k - 2$ шагов, заменяя последовательно элементы набора на $p + 1$ и прибавляя разницу к последнему члену. Легко видеть, что набор $\tilde{c}^{k-1}$ является каноническим.

Случай четного p разобран.

Случай нечетного p разбирается аналогично. Набор $\tilde{c}^1$ преобразовывается в набор $\tilde{c}^2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c_1^2 &= p, \\ c_2^2 &= p+2, \\ c_3^2 &= c_3^1, \\ &\dots \\ c_{k-1}^2 &= c_{k-1}^1, \\ c_k^2 &= c_k^1 + (c_1^1 + c_2^1 - (2p+2)). \end{aligned}$$

Условия (1)–(4) проверяются аналогично случаю четного p .

Далее на i -м шаге набор $\tilde{c}^i$ преобразуется в набор $\tilde{c}^{i+1}$ заменой i -й компоненты на $p+2$ и добавлением разницы $c_i^i - (p+2)$ к последнему члену.

Набор $\tilde{c}^{k-1}$ является, таким образом, каноническим.

Лемма доказана.

Лемма 12 позволяет свести вопрос о существовании правильного набора длины k к вопросу о существовании канонического набора той же длины, т. е. о том, будет ли правильным набор специального вида.

Действительно, если существует канонический набор длины k , то он по определению является правильным. Если же при данном k существует какой-то правильный набор, то, по лемме 12, существует и канонический.

Л е м м а 13. Если $n \geq 4p+3$, p четно и

$$n = (p+1)q + r, \quad 0 \leq r < p+1,$$

то

$$k(n, p) = \begin{cases} q, & \text{если } r \text{ четно,} \\ q-1, & \text{если } r \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Если $n \geq 4p+3$, p нечетно и

$$n+2 = (p+2)q + r, \quad 0 \leq r < p+2,$$

то

$$k(n, p) = \begin{cases} q, & \text{если } r \text{ четно или } r \geq p, \\ q-1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. В силу леммы 12 величина $k(n, p)$ равна максимальной длине канонического набора при данных n и p .

Пусть p четно и

$$n = (p+1)q + r, \quad 0 \leq r < p+1.$$

Заметим, что не существует правильного набора длины большей чем q , так как в таком наборе нашлись бы два элемента, сумма которых меньше $2p+2$, что противоречит лемме 7.

Случай $q=3$ возможен лишь при $n=4p+3$, но тогда $r=p$ и утверждение теоремы верно (следует из леммы 11 и предыдущих рассуждений).

Если же $q \geq 4$, то существует канонический набор длины $q-1$. Действительно, последний член такого набора равен $n - (p+1)(q-2) = 2(p+1) + r \geq 2p+2$.

Выясним теперь, когда существует канонический набор длины q . Последний член такого набора равен $p+1+r$. Для того чтобы данный набор

был правильным, необходимо и достаточно, чтобы число $p + 1 + r$ было нечетным или не меньшим, чем $2p + 2$. Поскольку $p + 1$ нечетно, это выполнено в точности при четных r .

Случай четного p разобран.

Случай нечетного p разбирается аналогично, с учетом следующего изменения.

Последний член канонического набора длины q равен $p + 2 + r$, где $0 \leq r < p + 2$. Таким образом, канонический набор длины q существует тогда и только тогда, когда r четно или $r \geq p$.

Лемма доказана.

Теорема 4. При всяких p, n , где $n \geq 2p$, выполнено $L(\mathcal{K}_{p, n-p}) = n - k(n, p)$, где $k(n, p)$ определяется следующим образом.

1. Если $2p \leq n \leq 3p + 2$, то

$$k(n, p) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2p + 1, \\ 2 & \text{при других значениях } n. \end{cases}$$

2. Если $3p + 3 \leq n \leq 4p + 2$, то

$$k(n, p) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 3, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

3. Если $n \geq 4p + 3$ и p четно, то

$$k(n, p) = \begin{cases} q, & \text{если } r \text{ четно,} \\ q - 1, & \text{если } r \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где q и r определяются равенством

$$n = (p + 1)q + r, \quad 0 \leq r < p + 1.$$

4. Если $n \geq 4p + 3$ и p нечетно, то

$$k(n, p) = \begin{cases} q, & \text{если } r \text{ четно или } r \geq p, \\ q - 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где q и r определяются равенством

$$n + 2 = (p + 2)q + r, \quad 0 \leq r < p + 2.$$

Доказательство следует из лемм 9, 10 и 13.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дебрев Е. В. Об одной задаче комбинаторного поиска // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14, вып. 3. — С. 8–17.
2. Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1980.
3. Соловьев Н. А. Тесты (теория, построение, применение). — Новосибирск: Наука, 1978.
4. Aigner M. Combinatorial Search. — Stuttgart: Teubner; Chichester et al.: Wiley, 1988.
5. Grebinski V., Kuchero G. Optimal query bounds for reconstructing a Hamiltonian cycle in complete graphs // Proceedings of 5th Israeli Symposium on Theory of Computing and Systems (June 1997). IEEE Press. — P. 166–173.
6. Grebinski V. Recherche combinatoire: problèmes de pesage, reconstruction de graphes et applications. — Diplôme de doctorat de l'Université Henri Poincaré, 1998.