ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В.КЕЛДЫША РАН

А.В. Ворожцов

# Цепные дроби, сложность рациональных чисел и языки описания с бесконечным алфавитом

Москва
2001

# Цепные дроби, сложность рациональных чисел и языки описания с бесконечным алфавитом

Аннотация В данной работе предлагается рассматривать цепные дроби как *язык описания в алфавите натуральных чисел* $\mathbb{N}$. Этот язык интересен тем, что его алфавит – счётное множество и стандартное (по Колмогорову) определение сложности не подойдёт. Требуется новые определения сложности элемента и эффективности языка. Здесь, для полноты картины, изложены некоторые известные результаты о цепных дробях, а также несколько новых, связанных с этим подходом.

# Continuous fractions,complexity of rational nubmbers and languages with infinite alphabet

Abstract In this paper continuous fractions are treated as description language of rational numbers. Alphabet of the language is natural numbers $\mathbb{N}$ — infinite set. So standard definition of complexity (â la A.N. Kolmogorov) is not applicable. New approach is needed. Here you find one natural way to define complexity in the case of infinite countable languages.

Besides, some known results about continuous fractions and some new, drawing from this new approach are stated. There are new tasks related with the complexity distributions and efficiency of a description language.

# Содержание

**1 Введение** **3**

**2 Вспомним некоторые факты** **4**
2.1 Квадратичные иррациональности и число $e$ . . . . . 5
2.2 Распределение на натуральных числах . . . . . 6
2.3 Эффективность рациональных приближений. . . . . 8

**3 Цепные дроби как язык описания** **11**
3.1 Алфавит цепных дробей - целые числа . . . . . 13
3.2 Что такое эффективность языка описания? . . . . . 15

# 1 Введение

Полагают, что про цепные дроби знал ещё Архимед, — он использовал их при поиске наилучших рациональных приближений числа $\pi$. Интерес к этим объектам не утих до сих пор. В частности, корпорация Intel собирается выпустить процессор, который работал бы с числами, представленными в виде цепных дробей.

В этом рассказе мы ограничимся рассмотрением цепных дробей на множестве действительных чисел и обратим особое внимание на рациональные числа, – их разложение в цепную дробь конечно, а потому цепную дробь можно рассматривать как *язык описания* и ставить классическую задачу теории вычислений о сложности описания. Термин “язык описания” можно употребить в отношении многих других известных алгебраических конструкций — язык описания группы перестановок посредством алфавита всех транспозиций, или язык описания $2\pi$-периодических функций в алфавите действительных чисел при помощи фурье-коэффициентов. В последнем случае интересен вопрос об наипростейшем описании с $\varepsilon$-точностью. Можно также ввести естественные языки на различных множествах линейных операторов. Язык описания на множестве булевых функций в алфавите $\mathbf{B} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ x\}$ позволяет определить одну из многочисленных вычислительных сложностей. Во всех этих случаях исследование функции сложности элемента и распределения по сложности даёт довольно интересные результаты. $\diamondsuit$

## 2 Вспомним некоторые факты

Каждое число может быть представлено в виде конечной или бесконечной цепной дроби. Ниже приведён пример разложения числа $e = 2.71828...$.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

Чтобы не занимать много места, мы будем записывать это равенство так:

$$[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots] \mapsto e$$

Вот ещё примеры разложений:

$$[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] \mapsto \sqrt{3}$$

$$[1, 1, 9, 3, 1, 1, 3, 1, 9, 3, 1, 1, 3, 1, 9, 3, 1, 1, 3, 1, 9, 3, 1, 1, 3 \dots] \mapsto \sqrt{5} - 1/3$$

$$[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, \dots] \mapsto \pi$$

$$[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1 \dots] \mapsto e$$

$$[7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 9, 42, 11, 1, 1, 12, 54, \dots] \mapsto e^2$$

Каждой последовательности *натуральных чисел* (конечной или бесконечной) $a_0$, $a_1$, ... можно поставить в соответствие положительное действительное число по следующему правилу

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}} \tag{1}$$

Строго говоря, в случае бесконечной последовательности, в этой формуле следует написать предел дробных выражений. А раз так, то необходимо сформулировать условия существования этого предела.

**Утверждение** *Для любой (бесконечной) последовательности натуральных чисел $a_i$ предел в формуле 1 существует.*

Мы будем рассматривать только натуральнозначные $a_i$ и считать, что конечные последовательности не могут заканчиваться на единицу (заметим, что $x = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},1] = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1}+1]$). Тогда рассмотренное отображение взаимооднозначно, и $a_i$ могут быть вычислены по следующей рекурентной формуле:

$$\begin{aligned} a_i &= \left[\tfrac{1}{x_i}\right] \\ x_{i+1} &= \left\{\tfrac{1}{x_i}\right\} \\ x_0 &= x. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\{x\}$ и $[x]$ обозначают соответственно дробную и целую часть положительного числа $x$.

**Утверждение** *Отображение $\alpha : [a_0, a_1, a_2, \ldots] \mapsto x$, определяемое формулой 1, взаимооднозначно, и обратное отображение задаётся формулой 3. Образом рациональных чисел $\alpha(\mathbb{Q})$ служат все конечные последовательности натуральных чисел, для которых последнее $a_L \neq 1$.*

Доказательства этих утверждений известны и они просты. Перейдём к более интересным вопросам.

### 2.1 Квадратичные иррациональности и число $e$

В разложении чисел $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5} - 1/3$ явно прослеживается периодичность. Оказывается верно следующее общее утверждение:

**Утверждение 1** *Всякое положительное действительное число вида $r_1 + \sqrt{r_2}$, где $r_1$ $r_2$ – рациональные числа, представляется в виде конечной (если $\sqrt{r_2}$ рационально) или периодической цепной дроби, возможно с некоторым предпериодом.*

Докозательство этого утверждения можно найти в [1, §7] и [2].

В разложениях чисел $e$, $e^2$ тоже прослеживается некоторая закономерность. Вероятно, верно следующее

**Утверждение 2** *Разложение всякого положительного действительного числа вида $\frac{m_1+m_2 e}{n_3+n_2 e}$, $\frac{m_1+m_2 e^2}{n_3+n_2 e^2}$ или $\frac{m_1+m_2\sqrt{e}}{n_3+n_2\sqrt{e}}$, где $m_i$ и $n_i$ – рациональные числа, в цепную дробь представляет собой совокупность арифметических прогрессий. И наоборот, всякая цепная дробь, для которой $a_i$ есть набор арифметических прогрессий, может быть записана в таком виде.*

Видимо, это утверждение верно, по крайней мере первая её часть. Понятие "совокупность арифметических прогрессий" достаточно расплывчато. Поясним это примере чисел $\frac{1}{e-1}$ и $e^2+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{e-1} \leftrightarrow$[0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10,. . . ]

$e^2+\frac{1}{2} \leftrightarrow$[7, 1, 8, 73, (1), 2, 1, 1, 1, 1, $\boxed{120}$, 2, 7, 1, 1, 1, 1, $\underline{41}$, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 53, 1, 1, 3, 7, 1, 3, 264, (4), 2, 1, 1, 1, 4, $\boxed{312}$, 5, 7, 1, 4, 1, 1, $\underline{89}$, 1, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 101, 1, 1, 6, 7, 1, 6, 456, (7), 2, 1, 1, 1, 7,$\boxed{504}$, 8, 7, 1, 7, 1, 1, $\underline{137}$, 1, 1, 8, 2, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 149, 1, 1, 9, 7, 1, 9, 648,. . . ]

Здесь различными средствами выделены арифметические прогрессии. В первом случае закономерность очевидна:

$$\{a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}\} = \{2n, 1, 1\}.$$

Для $e^2+\frac{1}{2}$ получаем более длинное выражение аналогичного вида

$$\{a_{32n}, a_{32n+1}, \ldots, a_{32n+31}\} = \{7, 1, 3n, 72+192n, 1+3n, \ldots\}.$$

Эта формула не верна в случае $a_2 = 8$, то есть имеется некоторый предпериод. А для числа $e^2+e$ такой закономерности, видимо, не существует:

$e^2+e \leftrightarrow$[10, 9, 3, 6, 4, 1, 1, 1, 1, 18, 1, 3, 1, 9, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 2, 2, 1, 10, 3, 4, 2, 1, 2, 5, 33, 1, 3, 1, 8, 9, 1, 7, 3, 2, 1, 11, 1, 2, 6, 1, 2, 2, 3, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 15, 1, 4, 10, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 7, 8, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 4, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 3, 13, 2, 5, 3, 7, 1, 6, 6, 14, 4, 6, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 15, 4, 1, 1, 10, 9, 5, 5, 1, 6, 3, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 2, 1, 8, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 83, 19, 1, 3, 33, 1, 29, 1, 4, 1, 2, 23, 1, 71, 1, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 6, 1, 1, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 4, 1, 123, 1, 11, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 7, 64, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 15, 1, 3, 6, 9, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 15, 3, 2, 5, 1, 1, 1, 2, . . . ]

**Задача 1** *Найти значение предела* $x = [1, 2, 3, 4, \ldots]$.

### 2.2 Распределение на натуральных числах

Среди чисел $a_i$ в приведённых примерах много единиц, несколько меньше двоек, – чем больше число, тем реже оно встречается в разложении. Естественно попытаться ответить на следующий вопрос:

? | Пусть $x$ – случайная величина, равномернораспределённая на отрезке $[0,\ 1]$. Тогда величины $a_i$ также становятся случайными. Есть ли предел распределений $a_i$ при $i \to \infty$?

Нетрудно понять, что положительный ответ на этот вопрос эквивалентнен существованию предельного инвариантного распределения для динами-

ческой системы

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \left\{\frac{1}{x_i}\right\} \\ x_0 &= x,\ x_i \in [0,1]. \end{aligned} \tag{3}$$

Эту систему придумал и исследовал Гаусс. Её инвариантное распределение – одна из его гениальных догадок. Оно равно $\rho(x)dx = \frac{1}{\ln 2}\frac{dx}{1+x}$, и это довольно просто проверить. Но следует отметить, что до сих пор универсальных методов вычисления инвариантного распределения не найдено.

**Утверждение 3** *Динамическая система 3 эргодична, и* $\rho(x)dx = \frac{1}{\ln 2}\frac{dx}{1+x}$ *является её предельным распределением.*

$\triangleright$ Здесь мы докажем только инвариантность. Пусть $A$ – некоторое измеримое множество на отрезке, $\mu$ – вероятностная мера определяемая этим распределением. Нам нужно проверить

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)),$$

где $f(y) = \left\{\frac{1}{y}\right\}$. Это соответствует следующему уравнению на $\rho$:

$$\rho(x) = \sum_{y:f(y)=x} \rho(y)|f'(y)| = \sum_{n=1}^{\infty} \rho\left(\frac{1}{x+n}\right)\left(\frac{1}{x+n}\right)^2$$

Это равносильно

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x+n}}\left(\frac{1}{x+n}\right)^2 \text{ или}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

Последнее равенство следует из формулы

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots+\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{n}{(x+1)(x+n+1)},$$

которая доказывается методом математической индукции по $n$. $\triangleleft$

Из утверждения последней задачи легко получить ответ на сформулированный выше вопрос: вероятность того, что случайная величина $a_i$ равна $n$, при $i \to \infty$ стремится к

$$p_n = \int_{1/n+1}^{1/n} \rho(x)\,dx = -\log_2\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Энтропия этой случайной величины

$$H = \sum_{i=1}^{i=\infty} p_n \ln p_n \approx 2.378.$$

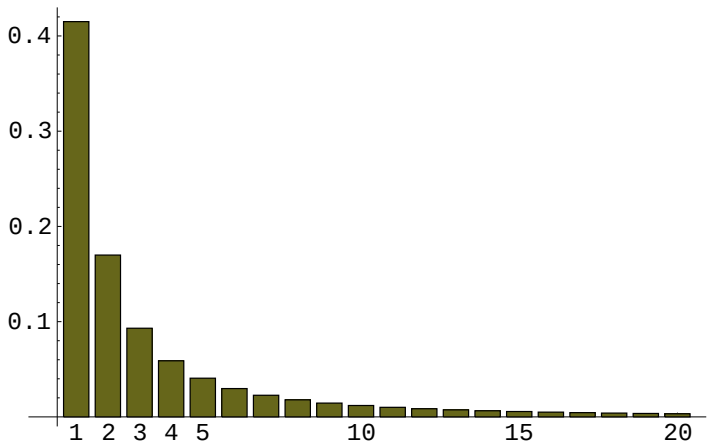


Рис. 1: Предельное распределение $p_n$ на множестве натуральных чисел как алфавите цепных дробей.

Это число, а точнее её экспонента $e^H \approx 10.79$, как станет ясно из дальнейшего, соответствует эффективной длине алфавита $\mathbf{B} = \mathbb{N}$ при описании чисел цепными дробями.

**Задача 2** *Найти точное значение $H$.*

Далее следует параграф, где коротко изложены классические разультаты об эффективном приближении действительных чисел рациональными. Цепные дроби играют там ключевую роль. А затем в части 3 мы рассмотрим цепные дроби как язык описания с бесконечным алфавитом.

### 2.3 Эффективность рациональных приближений.

Есть целый ряд утверждений, связанных с эффективностью приближений действительных цепными дробями. Для начала дадим определения.

**Определение 1** *Пусть $\mathbb{Q}_n$ множество всех рациональных чисел с знаменателем меньшим, чем $n$, то есть $\mathbb{Q}_n = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ \in \mathbb{N}, b \leqslant n \right\}$. Назовём рациональное число $x = \frac{p}{q}$* **хорошим приближением** *действительного числа $r$, если для любого другого числа $x' = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}_q$ верно неравенство*

$$\left| \frac{p}{q} - r \right| < \left| \frac{p'}{q'} - r \right|,$$

**очень хорошим приближением**, *если*

$$q\left|\frac{p}{q}-r\right| < q'\left|\frac{p'}{q'}-r\right|$$

*и* **очень-очень хорошим приближением**, *если*

$$q^2\left|\frac{p}{q}-r\right| < q'^2\left|\frac{p'}{q'}-r\right|.$$

Очевидно, что очень-очень хорошие приближения есть подмножество очень хороших, а те, в свою очередь, подмножество хороших.

**Определение 2** *Рациональные числа* $r_0 = a_0$, $r_1 \leftrightarrow [a_0,\ a_1]$, $r_2 \leftrightarrow [a_0,\ a_1,\ a_2]$, $\ldots$, $r_k \leftrightarrow [a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_k]$ *называются* **подходящими** *приближениями действительного числа* $r \leftrightarrow [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$

ПРИМЕР: $r = \pi$
Подходящие дроби: $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \frac{833719}{265381}, \ldots.$
Хорошие приближения: $3, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{52163}{16604}, \ldots$
Очень хорошие приближения: $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \frac{833719}{265381}, \ldots.$
Очень-очень хорошие приближения: $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \ldots$(?)

**Утверждение 4'** *Очень хорошие приближения совпадают с подходящими дробями.*

Доказательство данного утверждения можно найти в лекциях В.В. Прасолова "Диофантовы уравнения" [2, лекции 3-5], которые он читал в Московском Независимом Университете, и в [1].

Это очень важное свойство, его можно проинтерпретировать следующим образом. Введём обозначения:
$Q(x)$ — знаменатель несократимой дроби рационального числа $x = p/q$.
$\rho(x, x') = |x - x'|$ для $x, x' \in \mathbb{R}$.

**Утверждение 4** *Рациональное число* $x' = p/q$ *есть подходяя дробь числа* $x$ *равносильно тому, что при каком то* $C$ *на* $x'$ *достигается минимум произведения*

$$Q(x')\rho(x, x'),\quad x' \in \mathbb{Q},\quad Q(x') < C.$$

То есть произведение точности приближения действительного числа рациональным на "сложность" этого рационального числа есть величина характеризующая качество приближения. И подходящие дроби дают все "качественные" приближения.

Очень-очень хорошие приближения не так явно связаны с цепными дробями. Свойства величины $Q^2(x)\rho(x,x')$ исследовались Борелем, Лежандром, Л. Дирихле, Гурвицем, Лагранжем и А.А. Марковым. Ниже приведены некоторые их результаты.

**Утверждение 5 (Лежандр)** *Если дробь $p/q$ удовлетворяет неравенству*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

*то она является подходящей дробью числа $\alpha$*

**Утверждение 6 (Борель, Гурвиц, А.А.Марков)** *Для любого $\alpha$ найдётся бесконечно много таких дробей $p/q$, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

**Утверждение 7** *Для $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ найдётся лишь конечное число таких дробей $p/q$, что*

$$\left|\varphi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{c}{q^2}$$

**Определение 3** *Функция Маркова -Лагранжа. Для иррациональнъного числа $\alpha$ обозначим через $\mu(\alpha)$ такое число, что при любом $\nu < \mu(\alpha)$ имеется лишь конечное число дробей $p/q$ удовлетворяющих неравенству $|\alpha - p/q| < \nu/q^2$, а при любом $\nu > \mu(\alpha)$ – бесконечное.*

**Утверждение 8**
*1. $\mu(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$,*
*2. для неквадратного натурального $N$ $\mu(\sqrt{N}) = \frac{1}{2\sqrt{N}}$,*
*3. Для любого натурального $n$ $\mu(\frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}) = \frac{1}{n^2+4n}$*

Понятно, что если значение $\mu(\alpha)$ не достигается на числах $q^2|\alpha - p/q|$, то число $\alpha$ имеет бесконечное число очень-очень хороших приближений. Это верно, например, для $\varphi$ и квадратичных иррациональностей.

**Задача 3** *Конечно или бесконечно множество очень-очень хороших приближений числа $\pi$?*

Эта задача относится к нерешённым. Известно что, существуют числа как с конечным, так и бесконечным набором очень-очень хороших приближений.

# 3 Цепные дроби как язык описания

**Определение 4 Язык описания** *объектов множества* **X** *– это сюръективное отображение множества конечных слов некоторого алфавита* **B** *на множество* **X**.

ПРИМЕРЫ:

- Русский язык. Алфавит $\mathbf{B} = \{$а,б,. . . , ю,я$\}$.
- Все объекты в памяти компьютера описываются в бинарном алфавите $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ посредством бинарных слов.
- Мы привыкли описывать числа в десятичном алфавите $\mathbf{B} = \{0, 1, \ldots, 9\}$ (ещё знак "$-$" и точка) посредством десятичной записи числа. Но не все числа имеют конечное "десятичное" описание. Только целые и некоторые рациональные числа имеют конечные десятичные записи.

Сюръективность в этом определении означает лишь то, что каждый элемент описываемого множества должен иметь хотя бы одно описание. Их может быть несколько: например, один и тот же алгоритм можно реализовать на компьютере разными способами, или, другими словами, один алгоритм имеет несколько описаний.

Вернёмся к нашим дробям:

**Утверждение** *Цепная дробь (то есть отображение $\alpha$ определяемое формулой 1) есть язык описания рациональных чисел в алфавите натуральных чисел.*

Особенностью этого языка описания является то, что его *алфавит – счётное множество.*

Сложность вычислительной задачи обычно понимается как минимальная длина протокола вычислений программы, которая решает эту вычислительную задачу. Эта сложность зависит от устройства машины и ассемблера, который мы выберем для записи программ. Интересно, что цепную дробь можно понимать как решение некоторой вычислительной задачи.

Машина, вычисляющая цепные дроби, имеет ячейку памяти, в которой может хранится произвольное положительное рациональное число $x$, и ассемблер, состоящий из таких операций: 1) обращение числа $x$ (замена $x$ на $1/x$); 2) вычитание из $x$ произвольного натурального числа, которое меньше либо равно ему. Задача формулируется так: за минимальное число опрераций

обращения получить нужное число $x$ при условии, что изначально в памяти находится 0. Этот минимум можно называть сложностью рационального числа $L(x)$. Например $L(1) = 0$, $L(1/2) = 1$, $L(3/4) = 2$, $L(13/21) = 6$. $L(x)$ равно длине цепной дроби (количеству этажей), а именно $L(x) = L$, если $x \to [a_0, \ldots, a_L]$ и $a_L \neq 1$.

Рассмотрим все числа вида $\frac{p}{q}$ для фиксированного $q$ и построим диаграмму сложности. Ниже приведены эти диаграммы для $q = 5,\ 7,\ 13,\ 29$.

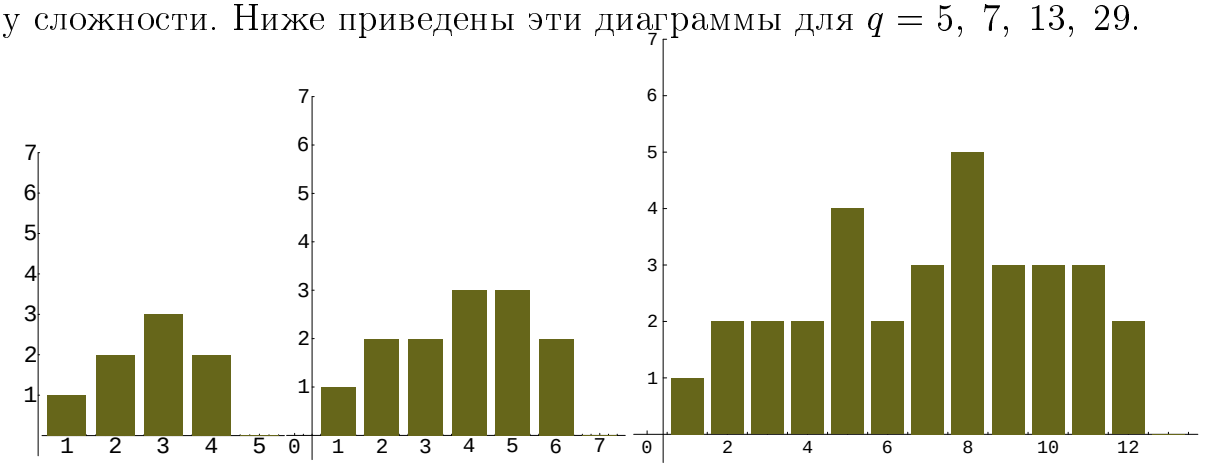


Рис. 2: “Пароходы” с номерами 5, 7, 13

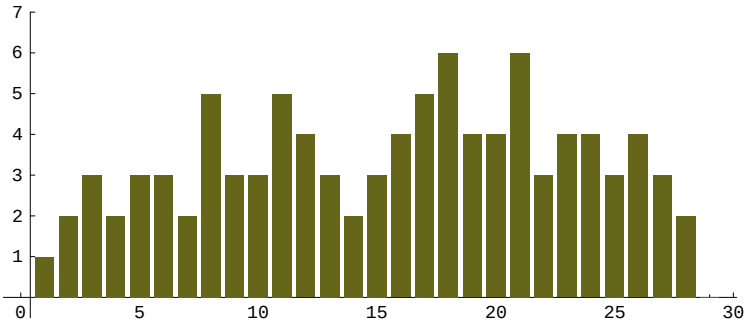


Рис. 3: “Пароход” с номером 29

Изучая эти “пароходы” можно обнаружить множество закономерностей. Вот несколько из них, связанных с числами Фибоначчи и золотым сечением. Если посмотреть на “пароходы” с большими $q$, то заметно, что самая высокая труба парохода делит пароход примерно в золотом сечении. Кроме того, новый этаж появляется, когда знаменвтель равен числу Фиббоначчи, а именно $x = F_{n-1}/F_n$.

**Утверждение** *Введём числа* $q_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$, *где* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $\ldots$ — *числа Фибоначчи. Тогда* $L(q_n) = n$, *и* $q_n \leftrightarrow [0,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 2]$

Это доказывается методом математической индукции по $n$:

$$q_{k+1} = \frac{F_k}{F_{k+1}} = \frac{F_k}{F_k + F_{k-1}} = \frac{1}{1 + \frac{F_{k-1}}{F_k}} = \frac{1}{1 + q_k},$$

поэтому, если $L(q_k) = k$, то $L(q_{k+1}) = k + 1$.

Аналогичным образом можно доказать более общее утверждение.

**Утверждение 9** *Рассмотрим число* $x = \frac{p}{q}$. *Если верно хотя бы одно из следующих утверждений:*

$$1)\ p \leqslant F_{n-1}$$
$$2)\ q \leqslant F_n,$$

*то* $L(q) \leqslant n$. *Если в обоих случаях имеет место равенство, то* $L(q) = n$.

### 3.1 Алфавит цепных дробей - целые числа

Положим теперь, что $a_i$ – целые числа. Тогда отображение $\alpha : [a_0, \ldots, a_L] \mapsto x$ будет невзаимооднозначным, например $[1, -2] = [0, 2] = 1/2$. Более того, в некоторых точках оно неопределено. Например не существует чисел $[1, -1, 5, 1, -1, 5, \ldots]$ и $[0, -1, 2, -1, 2, -1, 2, -1, \ldots]$. Заметим, что если обычная цепная дробь есть не что иное как **алгоритм Евклида**, то цепные дроби в алфавите целых чисел соответствуют **обобщённому алгоритму Евклида**, когда мы можем выбирать как положительные, так и отрицательные остатки от деления. На каждом шаге (на каждом этаже цепной дроби) у нас появляется выбор из двух вариантов — взять положительный либо отрицательный остаток. Разложение в цепную дробь, в котором на каждом шаге берётся минимальный по модулю остаток назовём **сжатой цепной дробью**. Её длину обозначим как $L_0(x)$

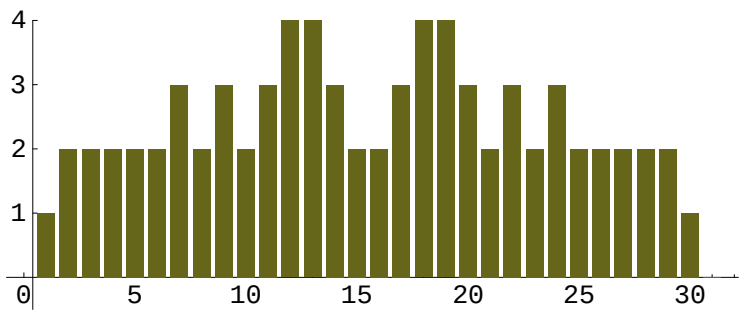


Рис. 4: “Пароход” с номером 31 в алфавите целых чисел.

**Утверждение 10** *Одно из кратчайших представлений рационального числа* $x$ *в виде цепной дроби в алфавите целых чисел задаётся сжатой цепной дробью, которую можно получить по формуле*

$$\begin{aligned} a_i &= \left\langle \tfrac{1}{x_i} \right\rangle \\ x_{i+1} &= \tfrac{1}{x_i} - a_i \\ x_0 &= x,\ x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}], \end{aligned} \tag{4}$$

*где под* $\langle x \rangle$ *понимается ближайшее к* $x$ *целое число.*

Итак сжатые разложения имеют минимальную длину из всех возможных представлений в алфавите целых чисел.

По формуле 4 можно получать сжатые цепные разложения для произвольных действительных чисел. Вот примеры некоторых сжатых разложений:

$\pi \leftrightarrow [3,\ 7,\ 16,\ -294,\ 3,\ -4,\ 5,\ -15,\ -3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ -85,\ -3,\ 2,\ 15,\ 3,$
$14,\ -5,\ -2,\ -6,\ -6,\ -100,\ 3,\ 2,\ 6,\ 3,\ 6,\ -2,\ -6,\ -9,\ 9,\ -3,\ -3,\ -8,$
$4,\ -2,\ -13,\ \ldots]$

$e \leftrightarrow [3,\ -4,\ 2,\ 5,\ -2,\ -7,\ 2,\ 9,\ -2,\ -11,\ 2,\ 13,\ -2,\ \ldots]$

$\frac{1}{\sqrt{e}} \leftrightarrow [1,\ -3,\ 2,\ 6,\ -2,\ -10,\ 2,\ 14,\ -2,\ -18,\ 2,\ 22,\ -2,\ \ldots]$

**Задача 4** *Найдите предельное распределение на алфавите целых чисел для сжатых цепных дробей и вычислите её энтропию.*

Для сжатых цепных дробей роль чисел Фибоначчи играют числа 1, 2, 5, 12, ..., задаваемые формулой $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$, $G_0 = 0$, $G_1 = 1$.

Итак, у нас есть две функции описывающие сложность рационального числа $x$: $L(x)$ — длина обычной, $L_0(x)$ — длина сжатой цепной дроби.

**Утверждение 11 (Кронекер)** $L_0(x) < L(x)$

**Утверждение 12 (Ламе)** *Пусть* $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2,\ x = a/b,\ a, b \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$L(x) \leqslant [\log_\varphi(\sqrt{5}(min(a,b) + \frac{1}{2}))] - 1$$

*и равенство достигается при* $b = F_n,\ a = F_{n-1}$.

▷ Это утверждение непосредственно следует из 9 и следующей леммы:

$$F_n \leqslant m \Leftrightarrow n \leqslant [\log_\varphi(\sqrt{5}(m + 1/2))] \triangleleft$$

**Утверждение 13 (Дюпре)** *Пусть* $\alpha = \sqrt{2} + 1,\ x = a/b,\ a, b \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$L_0(x) \leqslant \min\left([\log_\alpha(2\sqrt{2}min(a,b) + \sqrt{2})], [\log_\alpha(2\sqrt{2}(a+b) + \sqrt{2})] - 1\right)$$

*и равенство достигается при* $b = G_n,\ a = G_n + G_{n-1}$.

Доказывается аналогично предыдущему утверждению.

**Утверждение 14 (Д.А.Маслов)** *Минимум отношения* $\frac{L_0(x)}{L(x)}$ *равен* $\frac{1}{2}$ *и он достигается на* $\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}$.

Подробное рассмотрение этих утверждений можно найти в книжке “Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений.” [1, §§7,8]

### 3.2 Что такое эффективность языка описания?

Настал момент, когда следует поговорить об эффективности различных языков описания и о роли энтропии алфавита. В данной работе мы рассмотрели два способа описания рациональных чисел посредством цепных дробей – в алфавите натуральных и целых чисел, и ещё упомянули о стандартном способе описания — десятичной записи. Для полноты картины запишем динамическую систему соответствующую этому, третьему способу.

$$\begin{aligned} a_i &= [10 \cdot x_i] \\ x_{i+1} &= \{10 \cdot x_i\} \\ x_0 &= x,\ x \in [0,1]. \end{aligned} \tag{5}$$

Равномерное распределение инвариантно для этой системы. Предельное распределение $a_i$ – равномерное распределение на множестве цыфр $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Энтропия этого распределения равна $H = \ln 10$. Если мы подсчитаем сколько чисел на интервале $(0,\ 1)$ имеет $N$ или меньше знаков после запятой, то получим $D(N) = 10^N - 1$. Это значит, что

$$\ln D(N) \approx \ln 10 \cdot N = H \cdot N. \tag{6}$$

Для того, чтобы записать эту идею в общем случае, нам понадобится ввести понятие сложности слова – обобщённой длины слова в алфавите $\mathbf{B}$, на котором задано распределение.

**Определение 5** *Пусть у нас имеется язык описания в алфавите* $\mathbf{B}$*, и вероятностное распределение* $p(b)$*,* $b \in \mathbf{B}$*, на этом алфавите. Тогда* **сложностью слова** $\mathbf{a} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_m}$*,* $a_i \in \mathbf{B}$*, назовём величину*

$$l(\mathbf{a}) = -\ln(p(a_1) \cdot p(a_2) \cdot \ \cdots \cdot p(a_N))$$

Нетрудно видеть, что для предыдущего примера $l = \ln 10 \cdot N$.

**Определение 6** *Сложностью элемента* $x \in \mathbf{A}$ *из описываемого множества* $\mathbf{A}$ *назовём величину*

$$\mathcal{C}^*(x) = \min_{\mathbf{a} \mapsto x} l(\mathbf{a})$$

Теперь формулу 6 удобнее записать в более общем виде

$$\lim \frac{\ln D^*(C)}{C} = 1, \text{ при } C \to \infty$$

где $D^*(C)$ – количество элементов $x$, чья сложность меньше либо равна $C$. Это равенство выполнено для трёх рассмотренных случаев. Если для какого либо языка описания существует предел $\lim \frac{D^*(C)}{C} = p$ при $C \to \infty$,

то он заведомо меньше либо равен 1. Величина $(1-p)$ соответствует *мере избыточности* языка.

**Определение 7** *Назовём язык описания эффективным, если*

$$\lim_{C\to\infty}\frac{\ln D^*(C)}{C}=1. \tag{7}$$

И утверждение которое мы в конечном итоге хотим доказать

**Утверждение 15** *Язык описания рациональных чисел посредством цепных дробей является эффективным. То есть для* $p_k=-\log_2\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$ *выполнено 7.*

Из этого утверждения следует, что количество рациональных чисел со сложностью $C<C(x)<C+\delta C$ пропорционально $e^C\delta C$.

Докажем 7 сначала для простых случаев.

Пример 1. Для десятичной записи (динамическая система 5) имеем $p_0=p_1=\cdots=p_9=\frac{1}{10}$ и $D^*(\ln 10\cdot n)=10^n-1$, – количество натуральных чисел, чьи десятичные записи состоят из $n$ или менее цыфр ($C=\ln 10\cdot n$). Очевидно

$$\frac{\ln D^*(\ln 10\cdot n)}{\ln 10\cdot n}\to 1.$$

Пример 2. Рассмотрим случай, когда $p_k=\frac{1}{2^k}$, $k=1,2,\ldots$. Тогда любые произведения $p_a\cdot p_b\cdot\cdots\cdot p_d$ имеют вид $\frac{1}{2^n}$. Количество произведений равных $\frac{1}{2^n}$ есть количество представлений числа $n$ в виде упорядоченной суммы натуральных слагаемых и равно $2^{n-1}$. Поэтому

$$D^*(-\ln\frac{1}{2^n})=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}.$$

Откуда

$$\frac{\ln D^*(\ln 2\cdot n)}{\ln 2\cdot n}\to 1.$$

Формула такая же, хотя рассмотренные примеры существенно различны: в первом случае алфавит конеченый, а во втором счётный. В обоих случаях взаимооднозначность отображения $\mathbf{B}^*\to X$ гарантирует оптимальность языка.

Пример 3. Пусть теперь алфавит конечный $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$, а распределение на нём произвольное: $P(b_i)=p_i,\ i=1,\ldots,n$. Рассмотрим два различных пути доказательства оптимальности языка описания в этом случае:

Способ I. Функция $D^*(C)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$D^*(C) = D^*(C + \ln p_1) + D^*(C + \ln p_2) + \cdots + D^*(C + \ln p_n) \qquad (8)$$

Суть этого уравнения простая — выберем какой-нибудь символ, например $b_s$, тогда множество слов, которые начинаются на символ $b_s$ и имеют сложность $< C$ равно количеству слов, со сложностью $< C + \ln p_s$. Перебирая все возможные начальные символы, получаем уравнение 8 на $D^*(C)$. Это уравнение линейно. Оно позволяет вычислять $D^*(C)$ "рекурентно". Его спектр есть образ корней уравнения

$$1 = p_1^z + p_2^z + \cdots + p_n^z \qquad (9)$$

при отображении $e^z$. Корни последнего имеют действительную часть $\leqslant 1$, так как, если $Re(z) > 1$, то сумма модулей слагаемых в правой части $<1$, и значит сумма слагаемых не может равняться 1. Таким образом, спектр уравнения 8 состоит из чисел по модулю $\leqslant e$. При этом действительное число $e$ принадлежит этому спектру, так как 1 является корнем уравнения 9. Основываясь на этом, можно показать, что $D^*(C) \approx e^C$ при $C \to \infty$. Заметим, что в предыдущих примерах, все корни имеют действительную часть $Re = 1$.

Способ II. Есть другой, комбинаторный путь: Пусть слово $\mathbf{a}$, состоит из $m_i$ символов $b_i$. Количество таких слов равно $C_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ – полиномиальному коэффициенту Бернулли. Сложность слова $\mathbf{a}$ равна

$$l(\mathbf{a}) = -\sum_{i=1}^{n} m_k \ln p_k.$$

Таким образом нам нужно найти

$$D^*(C) = \sum_{-\sum m_i \ln p_i < C} C_{m_1 m_2 \ldots m_n} \qquad (10)$$

Оказывается, достаточно оценить максимальное слагаемое в этой сумме. Учитывая, что $C_{m_1 m_2 \ldots m_n} \approx e^{MH(\frac{m_1}{M}, \ldots, \frac{m_n}{M})}$, где $M = m_1 + \cdots + m_n$ а $H(q_1, \ldots, q_n) = \sum q_i \ln q_i$, получаем следующую функцию Лагранжа:

$$L(M, m_1, \ldots, m_n) = \sum m_i \ln \frac{m_i}{M} - \lambda_1 (\sum_{i=1}^{n} m_k \ln p_k - C) - \lambda_2 (\sum m_i - M)$$

С помощью этой функции находим, что максимальное слагаемое в сумме 10 имеет $m_i$ пропорциональные $p_i$. А значит

$$D^*(C) \approx C_{m_1 m_2 \ldots m_n} \approx e^{MH(\frac{m_1}{M}, \ldots, \frac{m_n}{M})} = e^{MH(p_1, \ldots, p_n)}.$$

Осталось только заметить, что для этих $m_i$ сложность

$$C = -\sum_{i=1}^{n} m_k \ln p_k = -M \sum_{i=1}^{n} p_k \ln p_k = MH(p_1, \ldots, p_n).$$

Получаем, что $\ln D * (C)/C \to 1$.

Пример 4. Теперь можно рассмотреть наш случай, когда распределение равно $p_k = -\log_2 \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$. Доказательство того, что предел 7 равен 1, видимо, можно провести, распространяя приведённые выше рассуждения на бесконечный случай. Автор провёл численные расчёты и получил, что $D^*(n)$=$\{1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 38,\ 113,\ 283,\ 807, \ldots\}$. Ниже представлен их результат: график функции $\ln D^*(n)$. Как и следовало ожидать, он очень похож на прямую. Наилучшее линейное приближение есть $-0.906 + 0.997x$. Если существует предел 7 равный 1, то коэффициент при $x$ в пределе должен обратиться в 1.

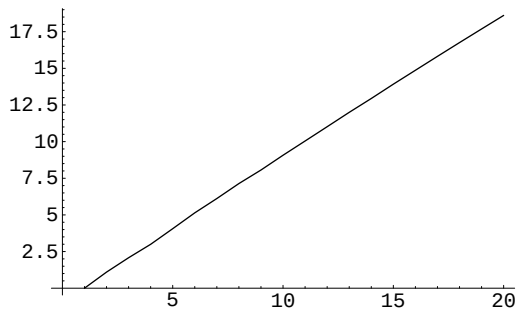


Рис. 5: График функции $\ln D^*(n)$.

Таким образом утверждение 15 проверено числено и, можно сказать, доказано, если суметь обобщить приведённое в примере 3 доказательство на бесконечный случай.

Если положить $p_k = \frac{1}{k^2}$, то $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{\pi^2}{6}$. И значит $p_k$ не является вероятностным распределением. Но предел 7 будет существовать. В этом случае функция $D^*(n)$ равна количеству упорядоченных наборов натуральных чисел $> 1$, чьё произведение меньше чем $\sqrt{n}$.

Пусть $K(n)$ – количество упорядоченных наборов натуральных чисел $> 1$, чьё произведение равно $n$. Значения этой функции в точках 1, 2, 3, ... равны 0, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 3 ... соответственно. Предел 7 можно заменить другим пределом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} K(k)}{2 \ln n} \tag{11}$$

Его численное значение равно примерно 0.864.

**Задача 5** *Найти точное значение предела 11.*

$\triangleright$ Аналог уравнения 9 в данном случае есть уравнение

$$1 = \zeta(2z),$$

где $\zeta(z)$ - дзетта-функция Римана. Поэтому, для решения поставленной задачи необходимо найти минимальное значение действительной части корней этого уравнения. То есть предел равен $\frac{\zeta^{-1}(1)}{2} = 0.864323619...\triangleleft$

## 4 Заключение

Итак, для конечного алфавита или алфавита с распределением $\frac{1}{2^i}$, доказана оптимальность языка. Необходимо изучить оставшиеся случаи.

Языки описания с бесконечными алфавитами не редкое явление. Всякий раз, когда объект описывается одним рациональным / целым числом или набором чисел мы, по сути, имеем дело с бесконечным алфавитом.

В данной работе были рассмотрены четыре функции рационального числа $x$ — $Q(x)$, $L(x)$, $L_0(x)$, $\mathcal{C}^*(x)$ — описывающих его *сложность*. Основные связывающие их отношения содержаться в утверждениях 4, 5, 11, 12 13, 14, 15. В частности указана связь $Q(x)$ и $L(x)$ с метрикой на действительных числах, и свойство распределения рациональных чисел по сложности $\mathcal{C}^*(x)$. Но среди этих утверждений нет таких, которые бы связывали вместе $\mathcal{C}^*(x)$, $L(x)$ и $Q(x)$. Это вопрос ещё совсем не изучен.

В данной работе совсем не упоминалась величина $M(x)$, равная сумме $a_0 + a_1 + \cdots + a_L$, где $[a_0, \ldots, a_L] \to x$, а также величина $R(x)$ равная сложности реализации сопротивления $x$ с помощью единичных сопротивлений (минимальное число единичных резисторов в схеме с двумя концами с сопротивлением $x$).

Заметим, что задачи 1,2,3,4 ещё не решены.

## Список литературы

[1] С. Б. Гашков, В. И. Чубариков *Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений.* – М.:Высш.шк., 2000.

[2] В. В. Прасолов, *Диофантовы уравнения.* МК НМУ. 1993.

[3] А. Н. Колмогоров, *Три подхода к определению понятия "количество информации".* – Проблемы передачи информации, 1969, т.5, № 3.