ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Имени М.В.Келдыша

Российской Академии наук

Ю. А. Садов

ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ ГИБКОГО ТРОСА В ПЛОСКОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ. 0- И 1-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА.

Препринт N за 2001 год

Москва

Ю.А.Садов. Формы равновесия гибкого троса в плоскости круговой орбиты. 0- и 1- параметрические семейства.

В работе исследуются формы равновесия в орбитальной системе координат гибкого нерастяжимого троса, движущегося в плоскости круговой орбиты. Учитываются силы гравитационного градиента, аэродинамические, электромагнитные и инерционные. Задача не включает условий равновесия системы в целом, которые должны удовлетворяться за счет соответствующего выбора сил натяжения троса на его концах. Изучены симметрии системы, для разных сочетанмй параметров указаны первые интегралы. В 11 случаях, когда отличны от нуля не более двух из учитываемых силовых факторов, все возможные формы троса найдены в явном виде. Показано, что если гравитационно-градиентные силы пренебрежимо малы, то для заданного набора остальных силовых факторов существует только конечное число равновесных форм троса с точностью до трансляций и гомотетий.

Sadov Yu.A. Equilibrium Forms of Flexible Tether In the Plane of Circular Orbit. 0- and 1-parametric families.

Equilibrium forms in the orbital frame of a flexible inextendible tether moving in the plane of circular orbit are considered. Gravity-gradient, aerodynamical, electromagnetic and inertial forces are taken into account. The problem does not include equilibria conditions of the whole system, which must be satisfied by the corresponding choice of the tether tension forces upon its ends. Analysis of symmetries of the equation system which describes the equilibrium tether forms made it possible to diminish the investigated set of the curves. It was shown particularly that if gravity-gradient force may be ignored then there exists for given forces only finite set of essentially different equilibrium forms of the tether (which cannot be reduced to each other by similarity transformations and translations). The possibility of analitic description of the equilibrium forms was explored. Detailed analysis of the forms was performed in 11 cases with incomplete set of force factors.

Введение

Изучение равновесных форм троса на орбите является необходимым этапом для нахождения равновесных конфигураций орбитальной тросовой системы (ОТС) в целом, что является обычно первой задачей динамики. Равновесные формы определяются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия гибкого троса, не включающими условий равновесия концевых тел. Эти решения дают не только геометрическую форму троса, но и силу натяжения в любой его точке. Каждый участок полученной кривой может представлять конфигурацию троса в ОТС, если концевые тела находятся в равновесии под действием приложенных к ним внешних сил и натяжения троса. Поэтому кривая в целом дает полезную информацию о всех возможных таких конфигурациях для данной системы действующих на трос распределенных сил.

Указанный подход к исследованию равновесных форм троса предложен в известной монографии [1] и используется в ней для получения форм равновесия под действием различных силовых факторов. Пример нахождения равновесных конфигураций системы в целом с учетом условий равновесия концевых тел, содержится в [2], (см. также [3], [4]). Эти примеры показывают, что для успешного анализа таких задач очень полезно иметь аналитическое выражение для формы троса. В книге [1] такие выражения приведены лишь для двух случаев; весомого троса в гравитационом поле и невесомого троса с током. Равновесные формы невесомого троса при наличии сопротивления атмосферы получены в [2]. В данной работе приводится систематический обзор различных комбинаций возмущений четырех видов: гравитационных, аэродинамических, электромагнитных и инерционных и выделены все случаи, в которых уравнения приводятся к интегрируемым с помощью известных первых интегралов.

Получено полное решение задачи во всех случаях, когда действует только один из перечисленных силовых факторов, и для всех сочетаний двух силовых факторов, не включающих силы гравитационного градиента. Оказывается, что в этих случаях при заданных величинах действующих сил имеется или конечное с точностью до преобразований сдвига и растяжения число различных форм троса (0-параметрическое семейство), или формы троса образуют однопараметрическое семейство.

Часть представленных здесь результатов излагалась в докладе [5].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 00-01-00174 и 01-01-00508), Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант 00-15-96036) и INTAS (грант 99-01096).

1. Постановка задачи.

1.1. Уравнения равновесия. Рассматриваются формы равновесия абсолютно гибкой, то-есть не имеющей жесткости на изгиб, нерастяжимой нити (троса) под действием внешних распределенных сил. Задача решается в плоской постановке — предполагается, что как все внешние силы, так и сама нить расположены в одной плоскости, в которой введем прямоугольные координаты x и y. Каждая точка нити идентифицируется координатой s — длиной (со знаком) участка нити до этой точки от некоторой выделенной точки нити, для которой $s = 0$. Тогда форма нити описывается двумя функциями $(x(s), y(s))$, задающими координаты (x, y) точки s. Физические свойства нити, такие как ее диаметр d, линейная плотность σ_T, а также направленная в сторону возрастания s сила натяжения P, действующая на участок нити с меньшими значениями s со стороны участка с большими s, также являются функциями координаты s. Нетрудно записать уравнения равновесия такой нити

$$\frac{d}{ds}\left(P\frac{dx}{ds}\right) = -F_x, \qquad \frac{d}{ds}\left(P\frac{dy}{ds}\right) = -F_y. \tag{1.1}$$

Здесь F_x, F_y — компоненты внешней распределенной силы, действующей на участок нити единичной длины. Дополнив эти уравнения условием нерастяжимости

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \tag{1.2}$$

получаем полный набор соотношений, описывающих формы равновесия гибкой нити, в виде системы двух дифференциальных уравнений второго порядка (1) для трех неизвестных функций $(x(s), y(s), P(s))$ с дополнительным алгебраическим соотношением (2).

Для вычислений и исследования удобнее исключить это соотношение и записать (1)–(2) в виде системы уравнений первого порядка. Сделать это можно по-разному. Мы приведем здесь два вида таких систем, которые оказываются полезными в разных случаях.

Пусть α – угол наклона касательной к тросу к оси x. Тогда легко получаются уравнения для переменных (x, y, P, α):

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha,\\ &\frac{dP}{ds} = -F_x\cos\alpha - F_y\sin\alpha,\\ &P\frac{d\alpha}{ds} = F_x\sin\alpha - F_y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Введем другие фазовые переменные (x, y, p, q), где

$$p = P\frac{dx}{ds}, \qquad q = P\frac{dy}{ds}. \tag{1.4}$$

В этих переменных соотношение нерастяжимости имеет вид

$$P^2 = p^2 + q^2, \tag{1.5}$$

и уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= -F_x, & \frac{dq}{ds} &= -F_y,\\ \frac{dx}{ds} &= \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, & \frac{dy}{ds} &= \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Полезно заметить, что если распределенная сила $\mathbf{F}$ потенциальна, так что

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{1.7}$$

то уравнения (6) принимают гамильтонову форму

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{dq}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial y},\\ \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p}, & \frac{dy}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial q}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$H = \sqrt{p^2+q^2} + U(x, y). \tag{1.9}$$

1.2. Внешние силы. В рассматриваемом в данной работе случае орбитальной тросовой системы равновесной формой троса называется его неизменная при действии определенных внешних сил форма в некоторой связанной с тросом декартовой системе координат. Начало такой системы O совмещено с фиксированной точкой троса, где $s = 0$. Движение ее рассматривается относительно круговой кеплеровой орбиты, ось Ox

которой направлена вдоль радиуса-вектора от центра Земли, ось Oy — по касательной к траектории точки O в сторону движения, угловая скорость вращения ω_0. В качестве внешних распределенных сил, действующих на трос, будем рассматривать следующие четыре основные силы, которые позволяют при определенных условиях получить равновесные формы троса, лежащие в плоскости орбиты.

1. Гравитационная сила.

$$F_{g,x} = 3\sigma_T \omega_0^2 x, \qquad\qquad F_{g,y} = 0. \tag{1.10}$$

Эта сила вызвана совместным действием градиента гравитационного поля и центробежной силы вследствие вращения рассматриваемой системы координат по орбите. Здесь σ_T — линейная плотность троса, которая считается постоянной. Выписанное выражение получается в линейном приближении по x, то-есть при условии, что более высокими степенями отношения характерного размера системы к расстоянию ее от центра Земли можно пренебречь. Заметим, что гравитационная сила потенциальна и

$$U_g(x,y) = \frac{3}{2}\sigma_T \omega_0^2 x^2. \tag{1.11}$$

2. Сила сопротивления атмосферы.

Для силы сопротивления атмосферы примем простейшую модель, согласно которой на участок троса единичной длины действует сила торможения пропорциональная длине проекции этого участка на плоскость, перпендикулярную направлению движения. Тогда

$$F_{a,x} = 0, \qquad F_{a,y} = -\frac{1}{2} C \rho_a(x) V_0^2 d\,|\cos\alpha|. \tag{1.12}$$

Здесь $\rho_a(x)$ — плотность атмосферы, которая может зависеть от высоты, то-есть, от координаты x, V_0 — скорость движения по орбите, d — диаметр троса. Если пренебречь вращением атмосферы, то в этой модели при любом наклонении орбиты существуют равновесные формы троса, лежащие в плоскости орбиты.

3. Электромагнитная сила.

Электромагнитная (амперова) сила возникает при движении в магнтном поле Земли троса, по которому течет ток. Направление этой силы перпендикулярно силовым линиям напряженности магнитного поля и вектору тока. В дипольной модели геомагнитного поля на экваториальной орбите амперова сила лежит в плоскости орбиты и не зависит от положения системы на орбите

$$F_{e,x} = IB_z \sin\alpha, \qquad F_{e,y} = -IB_z \cos\alpha. \tag{1.13}$$

I — сила тока, текущего по тросу, B_z — нормальная к плоскости орбиты компонента вектора индукции геомагнитного поля.

4. Инерционная сила.

Кроме перечисленных выше сил, вызываемых силовыми факторами околоземного космического пространства, введем в рассмотрение инерционную силу, возникающую вследствие возможного ускоренного движения связанной с нитью системы координат относительно введенной орбитальной системы координат

$$F_{i,x} = -\sigma_T a_x, \qquad\qquad F_{i,y} = -\sigma_T a_y, \tag{1.14}$$

где a_x, a_y — ускорения системы по осям x и y. Эти ускорения вызываются нескомпенсированной равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему, за исключением центральной гравитационной силы, обусловливающей движение по заданной орбите. Введенная таким образом инерционная сила, как и гравитационная, потенциальна и

$$U_i(x,y) = -\sigma_T a_x x - \sigma_T a_y y. \tag{1.15}$$

При учете приведенных выше факторов полная распределенная сила равна сумме всех перечисленных сил

$$\begin{aligned} F_x &= F_{g,x} + F_{a,x} + F_{e,x} + F_{i,x}, \\ F_y &= F_{g,y} + F_{a,y} + F_{e,y} + F_{i,y}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Итак, полученная математическая модель включает в себя две эквивалентные формы системы ОДУ 4-го порядка, зависящей от ряда параметров. Задача состоит в том, чтобы изучить насколько это возможно разнообразие описываемых этой моделью геометрических форм троса, то-есть проекций четырехмерных фазовых траекторий системы на плоскость (x, y), и проанализировать возможность получения аналитического представления этих форм.

2. Симметрии задачи, упрощение системы.

2.1. Введение безразмерных параметров. Наиболее простым и обычным способом уменьшения числа параметров задачи является приведение системы к безразмерному виду, которое проводится обычным образом. Выберем в качестве характерной (масштабной) длины некоторую длину L, и примем некоторую величину Q с размерностью силы в качестве масштаба сил. Выполняя затем переход к безразмерным величинам по схеме

$$\begin{gathered} x \longrightarrow Lx, \quad y \longrightarrow Ly, \quad s \longrightarrow Ls, \quad P \longrightarrow QP, \\ F_x \longrightarrow QF_x/L, \quad F_y \longrightarrow QF_y/L, \end{gathered} \tag{2.1}$$

находим, что вид уравнений (1.1, 1.3, 1.6, 1.8) не изменится, а выражения для сил несколько упростятся

$$\begin{aligned} F_{g,x} &= f_g x, & F_{g,y} &= 0, \\ F_{a,x} &= 0, & F_{a,y} &= -\sigma f_a(x)\cos\alpha, \\ F_{e,x} &= f_e \sin\alpha, & F_{e,y} &= -f_e \cos\alpha, \\ F_{i,x} &= -f_x, & F_{i,y} &= -f_y, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered} f_g = \frac{3\sigma_T \omega_0^2 L^2}{Q}, \qquad f_a(x) = \frac{C\rho_a(x) V_0^2 dL}{2Q}, \\ f_e = \frac{IB_z}{Q}, \qquad f_x = \frac{\sigma_T a_x L}{Q}, \qquad f_y = \frac{\sigma_T a_y L}{Q}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Введенная в (2) величина σ

$$\sigma = \mathrm{sign}(cos\alpha) = \pm 1 \tag{2.4}$$

позволяет исключить из записи уравнений знак модуля. Ее удобно рассматривать как разрывно меняющуюся на решениях системы переменную.

Итак, в полученной форме уравнения движения содержат 5 безразмерных коэффициентов $(f_g, f_a, f_e, f_x, f_y)$, причем, если учитывать переменность плотности атмосферы в разных точках троса, то коэффициент f_a является функциональным. Последнее обстоятельство сильно затрудняет исследование в общем случае, поэтому здесь, как правило, будет рассматриваться случай однородной атмосферы, когда f_a - константа. Результаты, полученные для случая, когда f_a переменная, будут выделены отдельно.

Так как каждая система ОДУ четвертого порядка определяет в фазовом пространстве одно или несколько четырехпараметрических семейств траекторий, то с учетом пяти коэффициентов задачи полное множество возможных форм троса образует семейство (или несколько семейств), непрерывно зависящее от девяти параметров.

Уменьшить объем исследований позволяет изучение симметрий системы, то-есть преобразований в расширенном пространстве фазовых переменных и параметров, сохраняющих вид уравнений.

Для нахождения таких симметрий запишем еще раз уравнения (1.6) с учетом полученных выражений для сил (1.16), (2)

$$\begin{gathered}\frac{dp}{ds} = -f_g x - f_e \sin\alpha + f_x,\\ \frac{dq}{ds} = \sigma f_a \cos\alpha + f_e \cos\alpha + f_y,\\ \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha,\\ \sin\alpha = q/P, \quad \cos\alpha = p/P, \quad P = \sqrt{p^2+q^2}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Легко увидеть следующие однопараметрические симметрии (в квадратных скобках за номером симметрии указан параметр):

$$\begin{array}{llllll} 1. & [a] & y = y' + a; & & \\ 2. & [b] & x = x' + b, & f_x = f'_x + f_g b; & \\ 3. & [k] & P = kP', & f_g = kf'_g, & f_a = kf'_a, \\ & & f_e = kf'_e, & f_x = kf'_x, & f_y = kf'_y; \\ 4. & [m] & s = ms', & x = mx', & y = my', \\ & & P = mP', & f_g = f'_g/m. & \end{array} \tag{2.6}$$

Добавляя сюда еще сдвиг τ независимой переменной (так как уравнения автономны) получаем следующую пятипараметрическую группу симметрий рассматриваемой задачи в расширенном пространстве фазовых переменных и коэффициентов системы:

$$\begin{array}{lllll} s = ms' + \tau, & x = mx' + b, & y = my' + a, & P = kmP', & \alpha = \alpha'; \\ f_g = \frac{k}{m} f'_g, & f_a = kf'_a, & f_e = kf'_e, & f_x = kf'_x + \frac{k}{m} f'_g b, & f_y = kf'_y. \end{array} \tag{2.7}$$

Благодаря этим симметриям можно, вообще говоря, понизить размерность множества изучаемых траекторий до четырех. Практически, интересно выделить среди всех преобразований те, которые сохраняют коэффициенты уравнений и затем рассматривать симметрии в фазовом пространстве.

Так, если $f_g \neq 0$ и отличен от нуля хотя бы один из коэффициентов f_a, f_e, f_y, то коэффициенты сохраняются только при $k = 1, m = 1, b = 0$. Группа симметрий фазового пространства $(x, y, P, \alpha) \longrightarrow (x', y', P', \alpha')$ содержит только два свободных параметра τ, a. Распоряжаясь этими параметрами, можно свести задачу изучения множества траекторий при данном выборе коэффициентов к двумерной.

Пусть теперь $f_g \neq 0$, а $f_a = f_e = f_y = 0$. Тогда тождественное отображение в пространстве коэффициентов получается при $k = m$ и $kf_x + bf_g = f_x$, то-есть $b = (1-k)f_x/f_g$. Параметр m при этом остается свободным и может быть использован для дополнительного понижения размерности задачи в фазовом пространстве до одномерной.

При $f_g = 0$ получаем единственное условие $k = 1$ для тождественности преобразования коэффициентов. Оставшиеся свободные параметры τ, a, b, m позволяют провести редукцию семейства траекторий по начальным значениям в фазовом пространстве к нульмерному, то-есть ограничиться изучением дискретного (на самом деле, конечного) множества траекторий.

Заметим, что преобразования переменных x, y, определяемые параметрами a, b, m, представляют собой комбинацию трансляции (параллельного переноса) и гомотетии (растяжения). Поэтому полученные с помощью указанных редукций семейства кривых пониженной размерности будут представлять все возможные кривые с точностью до этих преобразований.

Преобразования (7), изменяющие коэффициенты системы, полезны для уменьшения размерности совокупности рассматриваемых систем. Так, например, выбор параметра k позволяет пропорционально увеличить или уменьшить все силовые коэффициенты, не изменяя переменных x, y. Это означает, что вид кривых $x(s), y(s)$, отображающих геометрическую форму троса зависит по существу не от пяти коэффициентов

$(f_g, f_a, f_e, f_x, f_y)$, а от четырех их отношений. Мы этим будем пользоваться в дальнейшем, выбирая для определенности значения этих коэффициентов, как точку на единичной четырехмерной сфере

$$ {f_g}^2 + {f_a}^2 + {f_e}^2 + {f_x}^2 + {f_y}^2 = 1. \tag{2.8} $$

Далее, если при $f_g \neq 0$ положить $b = f_x/f_g$, то $f'_x = 0$. Поэтому системы с $f_x \neq 0$ можно исключить из рассмотрения, а соответствующие им формы троса получаются из форм при $f_x = 0$ некоторым сдвигом по оси x. Это дает возможность при $f_g \neq 0$ еще на единицу уменьшить размерность множества рассматриваемых систем и довести ее до трех. Поскольку при $f_g = 0$ это множество с учетом (8) уже трехмерно, то полный обзор всего множества возможных форм равновесия троса сводится к изучению двух систем вида (5) с трехмерным множеством коэффициентов каждая:

$$ \begin{array}{lll} A: & f_x = 0, & {f_g}^2 + {f_a}^2 + {f_e}^2 + {f_y}^2 = 1, \\ B: & f_g = 0, & {f_a}^2 + {f_e}^2 + {f_x}^2 + {f_y}^2 = 1. \end{array} \tag{2.8$'$} $$

Кроме симметрий, непрерывно зависящих от параметров, могут существовать дискретные симметрии, то-есть дискретные группы преобразований, сохраняющих вид уравнений. Для данной системы (5) с учетом того, что величины f_g и f_a по физическому смыслу неотрицательны, можно указать одно такое преобразование

$$ x = -x', \quad p = -p', \quad f_e = -f'_e, \quad f_x = -f'_x, \tag{2.9} $$

все остальные переменные и параметры не меняются. Это преобразование означает, что у систем, отличающихся знаками параметров f_e, f_x, формы троса отличаются симметрией относительно оси x. Это дает возможность рассматривать без потери общности только неотрицательные значения f_e.

Итак, с точки зрения анализа возможных форм равновесия троса значительно различаются случаи, когда гравитационно-градиентные силы являются существенными для задачи и когда их действием можно пренебречь. Второй случай, вообще говоря, заметно проще, но в первом можно не учитывать компоненту инерционной силы по оси x, так как ее учет не приводит к появлению новых форм троса.

3. Первые интегралы. Обзор интегрируемых случаев.

Изучение симметрий задачи позволяет упростить обзор возможных траекторий даже в случае численного исследования и упростить их качественный анализ. Но все же аналитическая интегрируемость открывает гораздо большие возможности, как для исследования самой системы, так и для анализа возможных возмущений.

Принципиальная возможность проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений основывается на существовании у нее определенного количества первых интегралов. Для интегрирования общей системы уравнений $n-$ого порядка необходимо иметь n независимых первых интегралов, некоторые из которых содержат независимую переменную. Если система автономна, то она может быть проинтегрирована при наличии $n-1$ интегралов, зависящих только от фазовых (но не от независимой) переменных. Гамильтонова система с n степенями свободы (порядка $2n$) интегрируется при наличии n независимых интегралов в инволюции. Здесь мы проанализируем с этой точки зрения возможность проинтегрировать уравнения (2.5) в частных случаях, когда часть силовых факторов отсутствует, то-есть некоторые из параметров f_g, f_a, f_e, f_x, f_y равны нулю. С учетом возможности указанной в предыдущем разделе редукции можно найти 23 таких случая. Ниже перечислены эти случаи и найденные для них первые интегралы. В большинстве случаев эти интегралы линейно зависят от силы натяжения P или ее компонент p, q. Для каждого из перечисленных случаев выписаны параметры системы, которые полагаются равными нулю, в скобках указаны не обращающиеся, вообще говоря, в нуль параметры.

1) Общий случай; (f_g, f_a, f_e, f_y). В общем случае в уравнениях выделяется независимая подсистема третьего порядка, куда не входит уравнение для y. Для возможности интегрирования этой системы нужно найти два интеграла, не включающих независимую переменную и y или три интеграла, содержащие s, но не y. Однако, из (2.5) удается найти только один интеграл

$$q - \sigma f_a x - f_e x - f_y s = c_1, \tag{3.1}$$

где c_1 - константа интеграла. Так как σ разрывная функция, то это соотношение выполняется только локально, пока сохраняется знак косинуса α. При перемене знака константа в (1) может измениться. Это замечание следует учитывать и в дальнейшем. Единственный интеграл (1) не дает возможности проинтегрировать систему в общем случае.

2) $f_g = 0$; (f_a, f_e, f_x, f_y). Этот случай несколько выделяется среди остальных и с физической и с математической точек зрения. С физической точки зрения мы не имеем возможности управлять гравитационными силами, поэтому отсутствие в уравнениях соответствующего члена означает, что эти силы пренебрежимо малы, что имеет, например, место в идеализации невесомого троса. Однако, последовательное проведение такой идеализации означало бы одновременное отсутствие и инерционных сил. Если последнее не предполагается, то это может означать, что величина ускорений центра масс a_x, a_y значительно превышает ускорения, вызываемые градиентом гравитационного поля. Данный случай и соответствует такому предположению.

С точки зрения математической этот случай выделяется тем, что здесь нельзя сдвигом вдоль оси x уничтожить параметр f_x, поэтому в отличие от других случаев он присутствует в списке рассматриваемых силовых факторов. Другая особенность состоит в том, что при $f_g = 0$ из правых частей уравнений исключается зависимость от x и в системе (2.5) отделяются в качестве независимой подсистемы первые два уравнения. Для интегрирования этой подсистемы достаточно найти только одно интегральное соотношение между p и q или два таких соотношения, если они включают еще и s.

Действительно, еще один интеграл в этом случае находится

$$p + f_e y - f_x s = c_2, \tag{3.2}$$

но он зависит как от y, так и от s, и даже вместе с (1) не обеспечивает интегрируемости системы при рассматриваемом в этом пункте наборе сил.

Оказывается, что в этом случае можно найти еще одно интегрируемое соотношение. Для этого нужно записать уравнения вида (1.3) для переменных P и α. Искомый интеграл получается из равенства

$$\frac{dP}{P} = \frac{\sigma f_a \sin\alpha\cos\alpha + f_x\cos\alpha + f_y\sin\alpha}{f_e + \sigma f_a\cos^2\alpha - f_x\sin\alpha + f_y\cos\alpha}d\alpha. \tag{3.3}$$

После его вычисления задача сводится к квадратурам, хотя явный вид решения получить непросто.

3) $f_a = 0$; (f_g, f_e, f_y). Здесь нетрудно найти новый интеграл

$$P + \frac{1}{2}f_g x^2 - f_y y = c_3. \tag{3.4}$$

Все же интегралов (1) и (4) недостаточно, чтобы до конца проинтегрировать систему.

4) $f_e = 0$; (f_g, f_a, f_y).

5) $f_y = 0$; (f_g, f_a, f_e). В этих двух случаях новых интегралов не видно, интеграл (1) несколько упрощается, но проинтегрировать систему не удается.

6) $f_g = 0, f_a = 0$; (f_e, f_x, f_y). В этом случае имеются все полученные до сих пор интегралы (1) – (4), что позволяет провести интегрирование до конца.

7) $f_g = 0, f_e = 0$; (f_a, f_x, f_y). Имеются интегралы (1), (2), (3). Можно записать решение в квадратурах, но фактически выполнить интегрирование трудно.

8) $f_g = 0, f_x = 0$; (f_a, f_e, f_y).

9) $f_g = 0, f_y = 0$; (f_a, f_e, f_x). Эти два случая в области, где сохраняется знак $\cos\alpha$, приводятся друг к другу заменой $p \longrightarrow q, q \longrightarrow p$. Есть интегралы (1), (2), (3). Решение доводится до квадратур.

10) $f_a = 0, f_e = 0$; (f_g, f_y). Имеются два интеграла (1) и (4), уравнения (2.5) выглядят очень просто, но довести решение до квадратур не удается.

11) $f_a = 0, f_y = 0$; (f_g, f_e). Интегралы (1) и (4) не содержат ни y, ни s. Форма троса выражается эллиптической квадратурой.

12) $f_e = 0, f_y = 0$; (f_g, f_a). Имеется только один первый интеграл (1) и, хотя он не содержит y и s, проинтегрировать уравнения не удается.

13) $f_g = 0, f_a = 0, f_e = 0$; (f_x, f_y). Здесь имеются все найденные интегралы (1) – (4) и задача интегрируется.

14) $f_g = 0, f_a = 0, f_x = 0$; (f_e, f_y). Интегралы (1) – (4). Интегрируемый случай.

15) $f_g = 0, f_a = 0, f_y = 0$; (f_e, f_x). Интегралы (1) – (4). Интегрируемый случай.

16) $f_g = 0, f_e = 0, f_x = 0$; (f_a, f_y). Здесь только три интеграла (1) – (3), но (2) имеет очень простой вид и уравнения интегрируются.

17) $f_g = 0, f_e = 0, f_y = 0$; (f_a, f_x). В отличие от 16) те же три интеграла приводят к сложным квадратурам.

18) $f_g = 0, f_x = 0, f_y = 0$; (f_a, f_e). Здесь кроме трех известных интегралов (1) – (3) имеется еще один

$$(\sigma f_a + f_e)p^2 + f_e q^2 = c_4,$$

который позволяет найти полное решение без дальнейших квадратур.

19) $f_a = 0, f_e = 0, f_y = 0$; (f_g).

20) $f_g = 0, f_a = 0, f_e = 0, f_x = 0$; (f_y).

21) $f_g = 0, f_a = 0, f_e = 0, f_y = 0$; (f_x).

22) $f_g = 0, f_a = 0, f_x = 0, f_y = 0$; (f_e).

23) $f_g = 0, f_e = 0, f_x = 0, f_y = 0$; (f_a).

В последних пяти случаях от нуля отлична только одна из составляющих внешней силы. Соответствующие задачи представляют собой частные случаи интегрируемых вариантов 11), 15) и 16), поэтому здесь имеется достаточное число интегралов и уравнения интегрируются.

4. Результаты интегрирования. Исследование равновесных форм.

Полученные в предыдущем разделе результаты показывают, что в 17 из перечисленных 23 случаев уравнения имеют достаточное для интегрируемости число первых интегралов. Но завершение интегрирования и получение явных формул для равновесных форм троса требует в различных случаях разных усилий и не всегда просто. Рассмотрим для этого отдельные случаи, начиная с более простых.

Наиболее простыми являются случаи, когда отлична от нуля только одна из рассматриваемых сил. Все эти случаи интегрируемые.

Случай 19), $f_g \neq 0$.

Два не зависящих от y и s интеграла вида (3.1) и (3.4)

$$q = q_0 = P_0 \sin\alpha_0, \qquad P + \frac{1}{2} f_g x^2 = P_0,$$

где P_0 и α_0 значения P и α при $x = 0$, позволяют найти форму троса из уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q} = \frac{1}{P_0 \sin\alpha_0} \sqrt{\left(P_0 - \frac{1}{2} f_g x^2\right)^2 - P_0^2 \sin^2\alpha_0}.$$

Получающиеся формы троса могут быть представлены с точностью до подобия и сдвигов однопараметрическим семейством кривых — графиков эллиптического синуса

$$x' = x'_{\max} \operatorname{sn}\left(\sqrt{{x'_{\max}}^2 + 2}\, y', \sqrt{\frac{{x'_{\max}}^2}{{x'_{\max}}^2 + 2}}\right). \tag{4.1}$$

Параметр $x'_{\max}$ этого семейства определяет амплитуду и длину волны этой периодической кривой. Координаты x, y выражаются через приведенные величины x', y' следующим образом:

$$x = x' \sqrt{a|\sin\alpha_0|}, \qquad y = y' \sqrt{a|\sin\alpha_0|}, \qquad a = 2P_0/f_g > 0.$$

Угол наклона касательной к кривой при $x = 0$ связан с параметром $x'_{\max}$

$$\sin\alpha_0 = \pm \frac{1}{1 + {x'_{\max}}^2}$$

и может быть использован для построения другой параметризации семейства кривых (1).

Рис. 1. Формы троса при $f_g \neq 0$.

Прямолинейная форма $x = 0$ получается при $\alpha_0 = \pm\pi/2$. Особый случай имеем при $\alpha_0 = 0$. В этом случае $q_0 = 0$, трос представляет собой сложенную вдоль вертикали (оси x) нить, отдельные участки которой идут $x = -\sqrt{a}$ до $x = \sqrt{a}$ и обратно.

Приведенные здесь результаты получены В.В.Белецким и Е.М. Левиным в 1980 году [6] и подробно описаны в [1].

Отметим еще, что этот случай, согласно результатам раздела 2, является единственым, где формы троса образуют однопараметрическое семейство.

Случай 23), $f_a \neq 0$.

Этот случай соответствует невесомой нити достаточной толщины, чтобы испытывать заметное сопротивление атмосферы. Это единственный случай, в котором удается найти равновесную форму троса при учете неоднородности атмосферы, когда f_a зависит от x, поэтому в данном пункте мы будем учитывать эту зависимость. Интеграл (3.1) при этом сохраняется, но имеет вид:

$$q - \sigma g(x) = q_0, \qquad \text{где} \quad g(x) = \int\limits_0^x f_a(\xi)\, d\xi. \tag{3.1$'$}$$

Вместе с интегралом (3.2) $p = P\cos\alpha = p_0$ это дает возможность найти форму троса в виде простой квадратуры

$$p_0(y - y_0) = q_0 x + \sigma \int\limits_0^x g(\xi)\, d\xi. \tag{4.2}$$

Заметим, что из условия сохранения p следует, что при $p_0 \neq 0$ $\cos\alpha$ не меняет знака, поэтому σ является константой и может быть вынесена из-под знака интеграла в (2). В частности, для однородной атмосферы ($f_a = \mathrm{const}$) уравнение (2) определяет обычную квадратичную параболу. Если $p_0 = 0$, то либо $P = 0$, либо $\cos\alpha = 0$, причем в каждой точке троса

Рис. 2. Формы троса при $f_a \neq 0$.
1 - однородная атмосфера;
2 - экспоненциальная атмосфера.

должно выполняться хотя бы одно из этих равенств (не обязательно одно и то же для всех точек троса). Трос при этом располагается горизонтально ($x = x_0$); если $P \equiv 0$, то он может состоять из как угодно сложенных горизонтальных отрезков, в противном случае он представляет собой единственный горизонтальный отрезок прямой.

Этот случай подробно рассматривался в [3] (см. также [2]).

Случай 22), $f_e \neq 0$.

Этот случай является наиболее простым. Три первых интеграла, получающихся из (3.1), (3.2), (3.4)

$$q - f_e x = q_0, \qquad p + f_e y = p_0, \qquad P = P_0,$$

позволяют найти форму троса без дальнейших квадратур:

$$\left(x + \frac{q_0}{f_e}\right)^2 + \left(y - \frac{p_0}{f_e}\right)^2 = \frac{P_0^2}{f_e^2}. \tag{4.3}$$

Форма троса — окружность. Этот довольно очевидный результат известен, по-видимому, давно. В явном виде он приведен в [1] и подробно исследован с учетом наличия конечных масс в [4].

Случай 21), $f_x \neq 0$.

Инерционная сила эквивалентна однородному полю тяжести. Форма равновесия гибкой нити в таком поле была найдена еще Якобом Бернулли и известна, как цепная линия.

Здесь имеем интегралы (3.1), (3.2) и (3.4):

$$q = q_0, \qquad p - f_x s = p_0, \qquad P - f_x x = P_0.$$

Отсюда получаем соотношение

$$\left(x + \frac{P_0}{f_x}\right)^2 - \left(s + \frac{p_0}{f_x}\right)^2 = \frac{q_0^2}{f_x^2},$$

которое позволяет выразить правую часть уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q} = \frac{p_0 + f_x s}{q_0}$$

через x и проинтегрировать это уравнение. В результате имеем уравнение цепной линии (графика гиперболического косинуса)

$$x' = \operatorname{ch} y', \tag{4.4}$$

где

$$x' = \frac{f_x}{q_0}\left(x + \frac{P_0}{f_x}\right), \qquad y' = \frac{f_x}{q_0}(y - y_0) \qquad q_0 \neq 0.$$

Таким образом, любая интегральная кривая, выделяемая значениями констант $P_0, q_0 \neq 0, y_0$, получается из единственной кривой (4) трансляциями и изменением масштаба. При $q_0 = 0$ цепная линия вырождается в дважды сложенную прямую

$$y = y_0, \qquad x \geq -\frac{P_0}{f_x}.$$

Случай 20), $f_y \neq 0$.

Этот случай отличается от предыдущего только тем, что инерционная сила действует в направлении оси y, а не x, и приводится к этому случаю соответствующим поворотом осей. В результате имеем уравнение формы троса в приведенных координатах

$$y' = \operatorname{ch} x', \tag{4.5}$$

Все другие формы получаются из (5) трансляцией и гомотетией. Аналогично 21) при $p_0 = 0$ получаем вырожденную форму — сложенный вдвое вдоль прямой $x = x_0$ трос.

Рис. 3. Формы троса при $f_x \neq 0$. Рис. 4. Формы троса при $f_x \neq 0$, $f_y \neq 0$.

Из случаев, когда отличны от нуля два силовых фактора, рассмотрим далее только более простые, когда $f_g = 0$. При этом для каждой выбранной пары коэффициентов уравнений (2.5) имеется только конечное число (с точностью до трансляций и растяжений) различных форм троса.

Случай 13), $f_x \neq 0, f_y \neq 0$.

Здесь инерционная сила имеет компоненты, как по оси x, так и по оси y, а так как других действующих сил нет, задача сводится к рассмотренным выше случаям 20), 21) с измененным направлением действия силы инерции. Действительно, пусть

$$f_x = f\cos\varphi_0, \qquad f_y = f\sin\varphi_0.$$

Тогда замена переменных

$$\begin{array}{ll} x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 \longrightarrow x, & -x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0 \longrightarrow y, \\ p\cos\varphi_0 + q\sin\varphi_0 \longrightarrow p, & -p\sin\varphi_0 + q\cos\varphi_0 \longrightarrow q, \quad f \longrightarrow f_x \end{array}$$

приводит этот случай к случаю 21). Связь между x и y в приведенных координатах x', y' имеет вид

$$x'\cos\varphi_0 + y'\sin\varphi_0 = \operatorname{ch}(-x'\sin\varphi_0 + y'\cos\varphi_0). \tag{4.6}$$

Форма троса — цепная линия, ось которой наклонена к вертикали на угол φ_0. В вырожденном случае трос сложен вдвое вдоль полупрямой с тем же углом наклона.

Случай 14), $f_e \neq 0, f_y \neq 0$.

Здесь имеем три интеграла (3.1), (3.2), (3.4):

$$q - f_e x - f_y s = q_0, \quad p + f_e y = p_0, \quad P - f_y y = P_0.$$

Первый интеграл содержит s и поэтому мало полезен в данном случае. Исключая y из двух последних, находим:

$$\begin{array}{c} Pf + p = c, \quad \text{где} \quad f = \frac{f_e}{f_y}, \\ \text{или} \quad P(f + \cos\alpha) = c, \\ c = P_0 f + p_0 \text{— константа интегрирования.} \end{array}$$

Используя еще соотношение между P и y из третьего интеграла, находим

$$f_y \frac{dx}{dP} = \frac{c - fP}{\sqrt{P^2 - (c - fP)^2}}. \tag{4.7}$$

Это уравнение совместно с третьим из приведенных выше интегралов определяет форму троса в параметрическом виде (параметр P).

Существенно различаются следующие случаи:

A). $|f| > 1$.

В этом случае переменная P, а также y, изменяяются в ограниченных пределах

$$\frac{|c|}{|f|+1} \leq P \leq \frac{|c|}{|f|-1}, \quad y_{\max} - y_{\min} = \frac{2|c|}{|f_y|(f^2-1)}.$$

Для вычисления явного вида кривой введем вместо P новый параметр φ:

$$P = \frac{c(f+\sin\varphi)}{f^2-1}$$

В результате получаем уравнение кривой циклоидального типа

$$x' = \frac{f\cos\varphi - \varphi}{\sqrt{f^2-1}}, \quad y' = \sin\varphi. \tag{4.8}$$

При возвращении к исходным переменным x и y координаты x' и y' умножаются на $c/(f_y(f^2-1))$.

B). $|f| < 1$.

В данном случае величины P и y ограничены только с одной стороны:

$$\text{при } c > 0 \quad P > \frac{c}{1+f}, \qquad \text{при } c < 0 \quad P > \frac{|c|}{1-f}$$

и для параметризации формы троса параметр φ вводится формулой

$$P = \frac{|c|(\operatorname{ch}\varphi \mp f)}{1-f^2}$$

Вычисляя интеграл, находим следующие параметрические выражения для искомых кривых в приведенных координатах:

$$x' = \frac{\varphi \mp f\operatorname{sh}\varphi}{\sqrt{1-f^2}}, \qquad y' = \pm\operatorname{ch}\varphi. \tag{4.8$'$}$$

В формулах (8') верхний знак выбирается при $c > 0$, нижний — при $c < 0$. Коэффициент пропорциональности при переходе к переменным x, y равен $c/(f_y(1-f^2))$.

Рис. 5. Формы троса при $f_e \neq 0, f_y \neq 0$.
1. $|f_e| > |f_y|$; 2. $|f_e| < |f_y|$; 3. $|f_e| = |f_y|$.

Если $c = 0$, то имеем

$$\cos\alpha = -f, \sin\alpha = \pm\sqrt{1-f^2}.$$

С учетом условия $P > 0$ трос представляет собой ломаную линию

$$y - y_0 = \frac{\sqrt{1-f^2}}{f}|x - x_0| \operatorname{sign} f_e. \tag{4.8''}$$

Таким образом при $|f| < 1$ для каждого f в зависимости от знака c имеются три негомотетичные равновесные формы троса, выражаемые формулами $(8', 8'')$. Заметим, что асимптотические направления кривых $(8', 8'')$ во всех трех случаях $(c > 0, c < 0, c = 0)$ совпадают.

Случай 15), $f_e \neq 0, f_x \neq 0$.

Этот случай отличается от предыдущего направлением действия инерционной силы. Но так как токовая сила не имеет выделенного направления в орбитальных осях, то он по существу совпадает с 14). Действительно, замена переменных по схеме

$$x \longrightarrow y, \quad y \longrightarrow -x, \quad \alpha \longrightarrow \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad p \longrightarrow q, \quad q \longrightarrow -p, \quad f_y \longrightarrow -f_x$$

приводит уравнения данного случая к случаю 14). Уравнения кривых получаются из $(8, 8', 8'')$ этой же заменой переменных.

Случай 18), $f_a \neq 0, f_e \neq 0$.

Рассмотрим сначала этот случай, как более простой из тех, в которых $f_a \neq 0$. Здесь, наряду с интегралами (3.1), (3.2), которые не содержат s в данном случае, существует еще один квадратичный интеграл:

$$q - (\sigma f_a + f_e)x = c_1, \quad p + f_e y = c_2, \quad (f_e + \sigma f_a)p^2 + f_e q^2 = c_3.$$

Это дает возможность исследовать этот случай без дальнейших квадратур.

Исключая из третьего интеграла p и q с помощью двух первых, вводя параметр $f = f_a/f_e$ и переходя к приведенным переменным $x' = f_e x$, $y' = f_e y$, запишем эти интегралы в виде:

$$q = (1+\sigma f)(x' - x'_c), \quad p = y'_c - y, \quad (1+\sigma f)(x' - x'_c)^2 + (y' - y'_c)^2 = C. \tag{4.9}$$

Здесь x'_c, y'_c, C — новые константы интегрирования.

Последнее из уравнений (9) сразу определяет форму равновесия, как кривую второго порядка — эллипс или гиперболу в зависимости от знака $(1+\sigma f)$, с центром в точке (x'_c, y'_c) [1].

На самом деле, однако, такие простые формы имеют место, вообще говоря, только локально, на отдельных дугах кривых. Дело в том, что величина $\sigma = |\cos\alpha|$ сохраняет свое значение только, пока α — угол наклона касательной к кривой — не переходит через значения $\pm\pi/2$. Если же такой переход произошел, то σ скачком изменяет знак. В результате в целом формы равновесия троса в этом случае оказываются более разнообразными и на первый взгляд вовсе непохожими на конические сечения.

[1] Автор благодарен С.Ю.Чебукову, который указал ему на это свойство в 1994 году.

Существенно различаются следующие варианты.

A). $|f| > 1$.

В этом варианте при одном знаке σ получаем дугу эллипса, при другом — гиперболы.

Пусть в гиперболическом случае ($\sigma f < -1$) константа $C > 0$. Тогда действительная ось гиперболы совпадает с осью y', кривая не содержит точек, где $y' - y'_c = 0$ и, следовательно, в силу второго интеграла (9) нигде не обращается в нуль $p = P\cos\alpha$, поэтому $\cos\alpha$ сохраняет знак, σ не меняется и кривая равновесия представляет собой целую ветвь гиперболы, на которой $\sigma(y' - y'_c) < 0$.

Если $C < 0$, то получаем ветвь гиперболы, действительная ось которой совпадает с осью x'. При этом выбранному значению σ отвечает только половина этой ветви, где $\sigma(y' - y'_c) \leq 0$. В вершине гиперболы $y' - y'_c = 0$ знак σ меняется (начальное значение σ будем обозначать σ_0, а новое $\sigma_1 = -\sigma_0$) и при $\sigma_0(y' - y'_c) > 0$ кривая представляет собой половину эллипса, малая полуось которого совпадает с осью x'. В конечной точки этой дуги эллипса происходит еще одна перемена знака σ, в результате которой кривая по дуге гиперболы, симметричной исходной относительно оси y', уходит в бесконечность. В целом форма равновесия представляется самопересекающейся кривой с одной точкой самопересечения и уходящими в бесконечность ветвями с асимптотическими направлениями $\operatorname{tg}\alpha_a = \pm\sqrt{|f| - 1}$.

Случай $C = 0$ является промежуточным. Равновесной формой является ломаная $y' - y'_c = -\sigma\sqrt{|f| - 1}\,|x' - x'_c|$.

B). $|f| < 1$.

Здесь при любом знаке σ третий интеграл в (9) определяет эллипс. Вдоль дуги эллипса угол α изменяется монотонно и неизбежно проходит значения $\pm\pi/2$, где знак σ меняется и начинается дуга другого эллипса, которая заканчивается в точке, противоположной началу, когда происходит новая смена знака. Таким образом, полная кривая представляет собой последовательность полуэллипсов, сопрягающихся в точках, где их общая касательная горизонтальна, то-есть $\cos\alpha = 0$, а следовательно, и $p = 0$.

Назовем дугу эллипса, соответствующего $\sigma = 1$, положительной дугой, а дугу при $\sigma = -1$ — отрицательной дугой. Значения констант x'_c, y'_c, C на положительной дуге будем снабжать дополнительным нижним индексом "$+$ а на отрицательной дуге — индексом "$-$". Рассмотрим переход от положительной дуги к отрицательной. Пусть в этой точке $x' = x'_0, y' = y'_0, q = q_0$. p в этой точке равно нулю, и из второго уравнения (9) следует, что $y'_{c+} - y'_0 = y'_{c-} - y'_0 = 0$, то-есть $y'_{c+} = y'_{c-} = y'_0$. Таким образом, координата y' для центров соседних положительной и отрицательной дуг одинакова, следовательно, центры всех эллипсов, из которых состоит рассматриваемая кривая, лежат на одной прямой, параллельной оси x'. На этой же прямой лежат точки сопряжения различных дуг. Далее, из третьего уравнения (9) следует, что значения величины $x' - x'_c$ на концах одной дуги отличаются знаком, поэтому в силу первого уравнения (9) значения q в последовательных точках сопряжения совпадают по абсолютной величине, но отличаются знаками. Тогда из первого и третьего уравнений (9) заключаем, что величины полуосей всех положительных дуг одинаковы и равны

$$\frac{|q|}{1 - f} \quad \text{вдоль оси } x', \qquad \frac{|q|}{\sqrt{1 - f}} \quad \text{вдоль оси } y'.$$

Аналогично, для всех отрицательных дуг имеем величины полуосей

$$\frac{|q|}{1 + f} \quad \text{вдоль оси } x', \qquad \frac{|q|}{\sqrt{1 + f}} \quad \text{вдоль оси } y'.$$

Кривая в целом имеет вид спирали или удлиненной циклоиды, вытянутой вдоль оси x'.

Рис. 6. Формы троса при $f_a \neq 0, f_e \neq 0$.
1. $|f_a| < |f_e|$; 2. $|f_a| > |f_e|$; 3. $|f_a| = |f_e|$.

C). $|f| = 1$.

В этом граничном случае получаем, как и в предыдущих, кривую, составленную из дуг конических сечений, одним из которых является эллипс. Дуга этого эллипса, заканчивающаяся в точках, где $\cos\alpha = 0$, затем продолжается двумя симметричными относительно оси y' половинами парабол, образуя в целом кривую с одним самопересечением, не имеющую асимптот в виде прямых.

Заметим, что в этом случае при $\sigma = -1$, когда аэродинамическая и электромагнитная сила направлены в разные стороны, получаем случай полной компенсации аэродинамического торможения. При этом

$$y = \text{const}, \quad \text{p} = \text{const}, \quad \text{q} = 0, \tag{4.9$'$}$$

то-есть трос вытянут вдоль прямой, параллельной радиусу-вектору.

Случай 1б), $f_a \neq 0, f_y \neq 0$.

Очень простой вид имеет интеграл (3.2)

$$p = P\cos\alpha = p_0.$$

Отссюда сразу следует, что $\cos\alpha$ сохраняет знак, следовательно σ остается постоянной и совпадает со знаком p_0. Кроме того P определяется как функция от α, что дает возможность записать уравнения формы троса, используя α как параметр:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= \frac{p_0}{f_y}\frac{1}{\cos\alpha(\sigma f\cos\alpha + 1)} \\ \frac{dy}{d\alpha} &= \frac{p_0}{f_y}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha(\sigma f\cos\alpha + 1)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь $f = f_a/f_y$. Хотя уравнения (10) интегрируются в элементарных функциях, необходимые качественные выводы о свойствах интегральных кривых можно сделать, не выписывая довольно громоздких выражений.

Видно, во-первых, что при одних и тех же параметрах задачи f_a, f_y все кривые, получающиеся при одном и том же выборе начального значения α и произвольных константах интегрирования p_0, x_0, y_0, различаются только сдвигом и растяжением, то-есть с точностью до этих преобразований имеется только конечное число различных форм троса. Заметим далее, что уравнения (10) не изменяются, если изменить одновременно знаки переменных α и x. Отсюда следует, что интегральные кривые симметричны относительно оси y. Видно также, что существенно различаются случаи $f > -1$ и $f < -1$.

A). $f < -1$.

В этом случае знаменатели правых частей уравнений (10) обращаются в нуль также внутри интервала $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ при $\alpha = \pm\alpha_*$, где α_* — принадлежащий интервалу $(0, \pi/2)$ корень уравнения $\cos\alpha = -1/f$. В этом случае имеем три гладкие дуги интегральной кривой и, соответственно, три разные формы троса.

При $-\alpha_* < \alpha < \alpha_*$ имеем похожую на гиперболу кривую с экстремумом по оси y и асимптотическими направлениями $\alpha = \pm\alpha_*$.

При $-\pi/2 < \alpha < -\alpha_*$ кривая монотонна как по x, так и по y. Приведенная переменная $y' = f_y y/p_0$ монотонно уменьшается и имеет асимптотические направления $-\pi/2$ и $-\alpha_*$. При $\alpha_* < \alpha < \pi/2$ получаем симметричную ветвь кривой.

Особыми формами в этом случае являются сложенная вдвое горизонтальная форма троса ($\alpha = \pm\pi/2$) и две прямолинейные наклонные формы ($\alpha = \pm\alpha_*$).

Рис. 7. Формы троса при $f_a \neq 0, f_y \neq 0$.
1. $f < -1$. 2. $f > -1$. 3. $f = -1$.

B). $f > -1$.

Учитывая, что $0 \leq \sigma\cos\alpha \leq 1$, находим, что в этом случае выражение в скобках в знаменателях правых частей уравнений (10) всегда больше нуля, и каждая гладкая дуга описываемых ими кривых соответствует интервалу α, в котором не обращается в нуль $\cos\alpha$, то-есть или $(-\pi/2, \pi/2)$ или $(\pi/2, 3\pi/2)$. Оказывается, впрочем, что кривые, соответствующие этим двум интервалам, совпадают, так как сдвиг значений α на π не меняет вида уравнений (надо учитывать, что при таком сдвиге меняются также знаки p_0 и σ). Переменная x в этом случае изменяется монотонно в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а y имеет один экстремум при $\sin\alpha = 0$. Предельные значения dy/dx бесконечны. В целом кривая напоминает цепную линию.

Если начальное значение α равно 0 или π, то кривая вырождается в дважды проходимую полупрямую, то-есть складывается вдвое.

C). $f = -1$.

В этом граничном случае знаменатели в уравнениях (10) внутри интервала $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$) имеют только один корень $\alpha = 0$. Соответственно, интегральные кривые состоят из двух отдельных симметричных друг другу компонент, каждая из которых имеет в одном направлении горизонтальную ($\alpha = \pm\pi/2$) асимптоту, а в другом ведет себя, как логарифмическая кривая ($y' = -2\ln x'$).

Здесь также возможны особые формы троса: сложенная вдвое горизонтальная ($\alpha = \pm\pi/2$) и прямая вертикальная ($\alpha = 0$).

Случай 17), $f_a \neq 0, f_x \neq 0$.

В данном случае интегралы (3.1) и (3.2), имеющие вид

$$q = q_0 + \sigma f_a x, \quad p = p_0 + f_x s,$$

мало помогают изучению форм троса. Более полезным оказывается использование соотношения (3.3)

$$\frac{dP}{P} = \frac{(\sigma\sin\alpha + f)\cos\alpha}{\sigma\cos^2\alpha - f\sin\alpha}d\alpha, \qquad f = \frac{f_x}{f_a}. \tag{4.11}$$

Рассмотрим предварительно уравнение для α

$$\frac{P}{f_a}\frac{d\alpha}{ds} = \sigma\cos^2\alpha - f\sin\alpha = (\xi_1 + \sigma\sin\alpha)(\sigma\xi_2 - \sin\alpha), \tag{4.12}$$

где

$$\xi_1 = \frac{f + \sqrt{4+f^2}\,\mathrm{sign}(f)}{2}, \quad \xi_2 = \frac{-f + \sqrt{4+f^2}\,\mathrm{sign}(f)}{2},$$

Заметим, что $|\xi_1| > 1, \quad |\xi_2| < 1$. Тогда из (12) с учетом того, что P всюду положительно, следует, что функция $\alpha(s)$ имеет предельными значениями α_* и $\pi + \alpha_*$, где $\alpha_* \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\sin\alpha_* = \xi_2$. Более точно, на интервале $s \in (-\infty, \infty)$ $\alpha(s)$ возрастает от α_* до $\pi + \alpha_*$ при $f_x < 0$ и убывает от $\pi + \alpha_*$ до α_* при $f_x > 0$. Уже эти результаты позволяют заключить, что кривая $(x(s), y(s))$ представляет собой незамкнутую кривую с монотонно изменяющимся направлением касательной и двумя антипараллельными асимптотическими направлениями (α_* и $\pi + \alpha_*$). Она напоминает параболу, но несимметричную. Эта "парабола"имеет максимум по x при $f_x < 0$ и минимум по x при $f_x > 0$. В точке экстремума x во всех случаях $\alpha = \pi/2$.

Для того чтобы получить более полное суждение о форме кривых равновесия, проинтегрируем уравнение (11).

$$P = \frac{C}{|\sin\alpha + \sigma\xi_1|^a|\sin\alpha - \sigma\xi_2|^b}, \tag{4.13}$$

где

$$a = \frac{1-\rho}{2}, \quad b = \frac{1+\rho}{2}, \quad \rho = \frac{|f|}{\sqrt{4+f^2}}.$$

Заметим, что, так как $0 < \rho < 1$, то $0 < a < 0.5, \quad 0.5 < b < 1$.

Вспомним теперь, что $\sigma = \pm 1$ — разрывная функция от α и поэтому (13) определяет два разных выражения при $\alpha_* < \alpha < \pi/2$ и $\pi/2 < \alpha < \pi + \alpha_*$. Для того чтобы функция $P(\alpha)$ не имела разрыва при $\alpha = \pi/2$, константа интегрирования C в (13) должна иметь разные значения на этих интервалах. Доопределяя ее в соответствии с этим, получим окончательное выражение для P:

$$P = P_0\left|\frac{1+\sigma\xi_1}{\sin\alpha + \sigma\xi_1}\right|^a\left|\frac{1-\sigma\xi_2}{\sin\alpha - \sigma\xi_2}\right|^b. \tag{4.14}$$

Здесь P_0 — сила натяжения троса при $\alpha = \pi/2$, то-есть в точке, где касательная к тросу горизонтальна.

Теперь форма троса, то-есть связь между x и y, может быть выражена через параметр α с помощью квадратур:

$$f_a \frac{dx}{d\alpha} = \frac{P(\alpha)\cos\alpha}{\sigma\cos^2\alpha - f\sin\alpha}, \qquad f_a \frac{dy}{d\alpha} = \frac{P(\alpha)\sin\alpha}{\sigma\cos^2\alpha - f\sin\alpha}, \qquad . \tag{4.15}$$

Впрочем, выражение для $x(\alpha)$ может быть получено непосредственно с помощью первого из выписанных в начале этого пункта интегралов:

$$x(\alpha) - x_0 = \frac{\sigma}{f_a}(P(\alpha)\sin\alpha - P_0).$$

Уравнение для y проинтегрировать труднее, но некоторые свойства описываемой уравнениями (15) кривой можно получить непосредственно из этих уравнений. Покажем, в частности, что кривая $(x(s), y(s))$ содержится в полосе конечной ширины. Введем для этого переменную u

$$u = -x\sin\alpha_* + y\cos\alpha_*.$$

Изменение этой переменной соответствует сдвигу в направлении, нормальном к асимптотическому. Подсчитаем ее изменение на всей кривой $(x(s), y(s))$, то-есть при изменении α от α_* до $\alpha_* + \pi$.

$$f_a \Delta\, u = \int_{\alpha_*}^{\pi+\alpha_*} \frac{P(\alpha)\sin(\alpha - \alpha_*)}{\sigma\cos^2\alpha - f\sin\alpha} d\alpha.$$

Подинтегральное выражение в этой формуле не ограничено при $\alpha \to \alpha_*$ и $\pi + \alpha_*$. Однако, учитывая формулу (14) для $P(\alpha)$, легко показать, что главный член подинтегрального выражения в окрестности предельных значений содержит знаменатель $|\sin\alpha - \sigma\xi_2|$ в степени $b < 1$, и поэтому интеграл сходится. Таким образом, величина $\Delta\, u$, то-есть ширина кривой в направлении, нормальном асимптотическому, конечна. На рис. 8 показаны несколько кривых, соответствующих равновесным формам троса при одном значении параметров f_a, f_x и $f_x > 0$. Разумеется, эти кривые гомотетичны.

Рис. 8. Формы троса при $f_a \neq 0, f_x \neq 0$.

Литература

[1] В.В.Белецкий, Е.М.Левин. Динамика космических тросовых систем. М: Наука, 1990.

[2] Ю.А.Садов. Равновесные конфигурации орбитальной тросовой системы с учетом сопротивления атмосферы. – Космические исследования, т. 34, N 1, 1996, 73-80.

[3] Ю.А.Садов. Равновесные конфигурации орбитальной тросовой системы с учетом сопротивления атмосферы. – Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, N 112, 1992, 28 с.

[4] Ю.А.Садов, С.Ю.Чебуков. О динамике орбитальной тросовой системы с током в плоскости круговой орбиты. – Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, N 77, 1992, 24 с.

[5] Ю.А.Садов. Формы равновесия гибкого троса в плоскости круговой орбиты. – XXIII научные чтения по космонавтике. Тезисы докладов. М.: Война и мир, 1999, с.92.

[6] В.В.Белецкий, Е.М.Левин. Механика орбитальной тросовой системы. – Космические исследования, т. 18, N 5, 1980, 678-688.