Ордена Ленина Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша

УДК 519.63

М.П. Галанин, Е.Б. Савенков

О СВЯЗИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ ФЕДОРЕНКО И ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Москва, 2001

Аннотация

Представлены результаты по обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко. Предложено вариационное уравнение, непосредственная аппроксимация которого подходящим проекционно - сеточным методом приводит к МКСЭ. При построении уравнения использованы операторы Пуанкаре - Стеклова. Вариационное уравнение позволяет рассматривать целый класс методов конечных суперэлементов на основе его аппроксимации с помощью различных методов. Получены оценки ошибки решения для одного варианта метода.

M.P. Galanin, E.B. Savenkov

On concerning of the Fedorenko Finite Superelements Method and projectional methods

Abstract

In this paper we consider some results in the theoretical analysis of the Fedorenko Finite Superelements Method (FSEM). We introduce the variational equation which natural finite-dimensional approximations leads to the FSEM. For construction of the variational equation Poincare-Steklov operators were used. Using pointed variational equation one can construct whole class of its approximations with suitable projectional methods.

Содержание

Существует широкий класс задач, решение которых содержит резкие неоднородности, проявляющиеся на мелких по отношению к размеру области пространственных масштабах. Численное решение таких задач сеточными методами требует специальных сеток для разрешения особенностей. Для этого необходимо использовать либо адаптивные к решению сетки, сгущающиеся в окрестности особенностей, либо достаточно мелкие сетки с шагом h и огромным количеством точек. Первый вариант требует применения специальных алгоритмов, второй – соответствующей памяти ЭВМ. В то же время проявления особенностей зачастую являются локальными, сосредоточенными в мелкомасштабных подобластях. Подтверждением тому является характерный вид функций Грина ([1]) и типичных решений многих задач математической физики ([2]), а также физические эффекты, такие, как принцип Сен-Венана в теории упругости ([3]) и другие. Наличие областей сосредоточения неоднородностей позволяет ввести сетку с характерным размером $H \gg h$, узлы и соединяющие линии которой проходят по участкам относительной гладкости решения. При этом сетка размером H заведомо не позволит разрешить особенности при использовании обычных численных методов, но зато число ее узлов достаточно мало.

Для решения подобных задач на сетках размером H в работах Л.Г. Страховской и Р.П. Федоренко ([4]-[7]) был предложен метод конечных суперэлементов (МКСЭ). Метод появился более 25 лет назад и использовался при решении ряда сложных задач диффузии, теории упругости, кинетики ядерных реакторов и других. Несмотря на свой возраст, теоретически метод исследован слабо. Обоснование одного варианта метода было предложено в работах ([8],[9]).

Метод конечных элементов (МКЭ) основан на представлении решения задачи в виде разложения по системе базисных функций, имеющих конечный носитель. При этом мера таких носителей предполагается малой виде функций сравнительно простой структуры, как правило, полиномиальной. МКСЭ также основан на представлении решения задачи в виде разложения по системе базисных функций, имеющих конечный носитель. Однако в случае МКСЭ мера таких носителей (сетка H) не предполагается стремящейся к нулю и столь велика, что она заведомо не позволяет (при использовании МКЭ) передать особенности решения. Другое отличие касается построения базисных функций. В МКСЭ базисные функции строятся для данной рассматриваемой задачи специальным образом так, чтобы в них самих содержалась значительная информация о решении задачи. Именно специальный, под задачу, выбор базисных функций и позволяет с помощью очень грубого разбиения исходной области получить хорошее численное решение.

В данной работе представлены некоторые результаты, полученные в ходе работ по обоснованию метода конечных суперэлементов. Основой работы является использование граничных операторов Пуанкаре - Стеклова и идея замены исходной краевой задачи эквивалентной ей задачей для определения следов неизвестного решения на границах суперэлементов. На основе граничных операторов Пуанкаре - Стеклова построена обобщенная постановка задачи определения следов решения исходной задачи. Тем самым получено вариационное уравнение, непосредственная аппроксимация которого подходящим проекционно - сеточным методом приводит к МКСЭ, а методом Галеркина-Петрова – дает расчетную схему МКСЭ Федоренко. Фактически метод конечных суперэлементов рассмотрен как проекционный метод решения операторного уравнения для определения следов решения исходной краевой задачи на границах подобластей – суперэлементов. Вариационное уравнение позволяет строить и единообразно рассматривать целый класс методов конечных суперэлементов на основе его аппроксимации с помощью различных проекционно - сеточных методов. С помощью полученного уравнения выявлена связь МКСЭ со сходными с ним методами разделения (декомпозиции) областвующими им обобщенными постановками краевых задач. В результате оказывается возможным применять хорошо развитую теорию проекционных и проекционно - сеточных методов ([10]-[14]). для исследования МКСЭ. Это позволяет, в частности, получить оценку ошибки одного из вариантов метода. Итерационные методы решения вариационного уравнения приводят к методам декомпозиции области ([15]-[19]). В последнее время активно развиваются методы численного решения задач на основе представления решения в виде разложения по системе базисных функций, в свою очередь являющихся решениями специальных вспомогательных задач для исходного оператора (RFB - методы на элементах с нулевой невязкой) ([20]-[23]). Очевидно их родство с МКСЭ. Сходными являются и методы исследования.

В работе рассмотрен МКСЭ для решения уравнения Лапласа в несвязной области, но все полученные результаты верны и для уравнения с произвольным положительно определенным эллиптическим дивергентным оператором второго порядка.

Метод конечных суперэлементов входит в класс методов, в которых решение исходной задачи сводится к решению серии более простых задач, например, задач в областях более простой формы. Методы данного класса, например, методы разделения области, активно исследуются в настоящее время в связи с появлением эффективных алгоритмов решения краевых задач в областях простой формы и возможностью эффективной реализации алгоритмов этих методов на многопроцессорных и параллельных ЭВМ. Теоретической основой построения и исследования подобных методов является теория операторов Пуанкаре-Стеклова, которая была построена и развита с начала 1980 - х годов преимущественно в работах В.И. Агошкова и В.И. Лебедева как эффективное средство построения и исследования алгоритмов разделения области ([15]-[19]). В настоящее время данный математический аппарат является общепринятым при исследовании подобных методов; он был использован и в данной разделения области и метод конечных суперэлементов представляют собой соответственно итерационные и проекционно-сеточный метод решения одного и того же операторного уравнения в пространстве следов. Таким образом, построенная обобщенная постановка представляет интерес в рамках исследования и построения алгоритмов данного класса.

Авторы благодарят М.С. Аграновича, В.С. Рябенького, Л.Г. Страховскую и Р.П. Федоренко за советы и полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 00-01-00169 и 01-01-06265).

2 Основные обозначения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – открытая область,

$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} f \subset \Omega\}$, $C_0^1(\Omega) = \{f \in C^1(\Omega) : \operatorname{supp} f \subset \Omega\}$,

$L_2(\Omega)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом в области Ω, $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ – пространство Соболева функций, имеющих в области Ω суммируемые с квадратом первые производные, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$, $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ – пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $W_2^1(\Omega)$, $W_2^{-1/2}(\partial\Omega) = \left(W_2^{1/2}(\partial\Omega)\right)'$, $W_2^{-1}(\Omega) = \left(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)'$, $(\cdot,\cdot)_\Omega$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ или отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^{-1}(\Omega)$, порожденное скалярным произведением в $L_2(\Omega)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$ – скалярное произведение в $L_2(\partial\Omega)$ или отношение двойственности между $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ и $W_2^{-1/2}(\partial\Omega)$, порожденное скалярным произведением в $L_2(\partial\Omega)$.

Для какого-либо пространства F через F' будем обозначать двойственное к нему пространство.

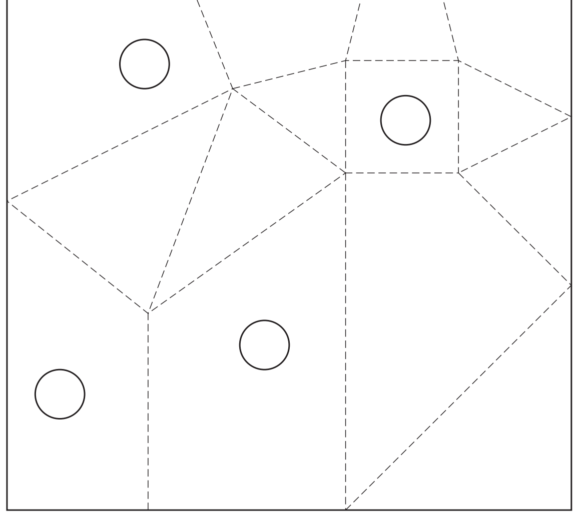

Рис. 1. Область и суперэлементы

3 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\textit{определить } u \in W_2^1(\Omega, -\Delta):$$

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = g, \tag{2}$$

$$f \in L_2(\Omega), \quad g \in W_2^{1/2}(\partial\Omega),$$

$$W_2^1(\Omega, -\Delta) = \left\{u : u \in W_2^1(\Omega),\, -\Delta u \in L_2(\Omega)\right\}. \tag{3}$$

Будем предполагать, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – открытая многосвязная многоугольная область, полученная из открытой односвязной многоугольной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ удалением некоторого количества непересекающихся замкнутых кругов $\{\overline{S}_i\}$ («скважин») (Рис. 1), $\underset{i}{\cup}\overline{S}_i \subset \Omega_0$, $\Omega = \Omega_0 \setminus \underset{i=1}{\cup}\overline{S}_i$.

Обозначим через $\Gamma_0 = \partial\overline{\Omega}_0$, $\Gamma_i = \partial\overline{S}_i$ соответственно внешнюю и внутренние границы области Ω, тогда $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Gamma \equiv \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \left(\underset{i}{\cup}\partial\overline{S}_i\right)$. Краевое условие I рода (2) задает след искомого решения на всей несвязной границе области Ω.

Отметим, что такая задача служит широко распространенным тестом при разработке нестандартных методов численного решения. Она иссле-

4 Слабые постановки задачи

4.1 Формула Грина

Основным средством построения и исследования обобщенных постановок краевых задач является формула Грина в пространстве $W_2^1(\Omega)$, которая является следствием абстрактной формулы Грина ([10], с.188) и формулируется следующим образом: существует единственный оператор $\delta : W_2^1(\Omega, -\Delta) \to W_2^{-1/2}(\partial\Omega)$, такой, что

$$a(u,v) = (-\Delta u, v)_\Omega + \langle \delta u, \gamma v \rangle_{\partial\Omega}, \qquad \forall u \in W_2^1(\Omega, -\Delta),\ v \in W_2^1(\Omega),$$

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega.$$

Здесь $\gamma : W_2^1(\Omega) \to W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ – оператор взятия следа.

Если $u \in W_2^2(\Omega)$ и граница $\partial\Omega$ области Ω такова, что имеет почти всюду внешнюю нормаль $\vec{n}$, то

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \quad \langle \delta u, \gamma v \rangle_{\partial\Omega} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, v \, d\gamma.$$

4.2 Классическая слабая постановка

Классическая слабая постановка краевой задачи (1)–(2) имеет следующий вид ([10]):

$$\textit{определить } u \in W_2^1(\Omega):$$

$$u|_{\partial\Omega} = g, \quad g \in W_2^{1/2}(\partial\Omega), \tag{4}$$

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega); \quad f \in L_2(\Omega). \tag{5}$$

Известно, ([10], глава 6), что задачи (1)-(2) и (4)-(5) эквивалентны.

Постановка (4)-(5) будет иметь смысл и при $f \in W_2^{-1}(\Omega)$, но в этом случае она уже не будет эквивалентна постановке (1)-(2).

Предположим, что область $\overline{\Omega}_0$ можно представить в виде объединения K подобластей $\{\overline{\Omega}_{0,k}\}_{k=1}^{K}$,

$$\overline{\Omega}_0 = \bigcup_{k=1}^{K} \overline{\Omega}_{0,k}, \quad \overline{\Omega}_{0,k} = \Omega_{0,k} \cup \Gamma_{0,k}, \quad \Gamma_{0,k} = \partial\overline{\Omega}_{0,k},$$

таким образом, что каждая из областей $\overline{S}_i$ является строго внутренней подобластью одной из областей $\Omega_{0,k}$ и каждая область $\Omega_{0,k}$ содержит не более одной области S_i. Будем считать, что области $\Omega_{0,k}$ – многоугольники, образующие правильное разбиение области Ω_0 (т.е. любые два многоугольника либо не пересекаются, либо имеют общее ребро, либо имеют общую вершину). Пусть $\Omega_k = \Omega \cap \Omega_{0,k}$. Тогда $\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{K} \overline{\Omega}_k$.

Границу $\partial\Omega_k$ области Ω_k представим в виде $\partial\Omega_k = \gamma_{0,k} \cup \gamma_k$, где $\gamma_{0,k} = \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$, $\gamma_k = \partial\Omega_k \setminus \gamma_{0,k}$.

Области Ω_k будем называть суперэлементами. Пример разбиения области на суперэлементы приведен на Рис. 1

Т.к. все участвующие в рассмотрении области являются многоугольниками, то на их границе почти всюду существует внешняя нормаль.

Определим пространства $\tilde{W}_2^1(\Omega_k)$ следующим образом:

$$\tilde{W}_2^1(\Omega_k) = \begin{cases} W_2^1(\Omega_k), & \text{если } \gamma_{0,k} = \emptyset, \\ \left\{ v \in W_2^1(\Omega_k) : v|_{\gamma_{0,k}} = g|_{\gamma_{0,k}} \right\}, & \text{если } \gamma_{0,k} \neq \emptyset\ . \end{cases} \tag{6}$$

При произвольной фиксированой функции g пространство $\tilde{W}_2^1(\Omega_k)$ не является линейным пространством, но является метрическим пространством. Отметим, что $\tilde{W}_2^1(\Omega_k) \subset W_2^1(\Omega_k), \quad k = \overline{1, K}$.

Пусть $W = \prod_{k=1}^{K} W_2^1(\Omega_k)$, $\tilde{W} = \prod_{k=1}^{K} \tilde{W}_2^1(\Omega_k)$. Элемент $v \in W$ представляет собой набор из K функций v_k, $v = \{v_1, \dots, v_K\} \equiv \{v_k\}_{k=1}^{K}$, $v_k \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = \overline{1, K}$.

Существует каноническое вложение пространства $W_2^1(\Omega)$ в пространство W:

$$v \in W_2^1(\Omega) \longmapsto \{v_k\}_{k=1}^{K} \in W, \quad v_k = v|_{\Omega_k} \in W_2^1(\Omega_k), \quad k = \overline{1, K},$$

$$W_2^1(\Omega) \subset W \subset L_2(\Omega). \tag{7}$$

Утверждения, сходные с приведенным ниже, часто цитируются и применяются при построении и исследовании слабых постановок краевых задач. Мы будем использовать приведенный ниже вариант указанного утверждения, которое приведем с доказательством.

Лемма 4.1. *Функция $v \in W$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда*

$$-\sum_{k=1}^{K} \langle v, \mu \rangle_{\partial\Omega_k} = 0, \quad \forall \mu \in M, \tag{8}$$

$$M = \Bigg\{ \mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{K} \in \prod_{k=1}^{K} W_2^{-1/2}(\partial\Omega_k) : \\ \exists\, \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ \mu_k = \vec{\psi} \cdot \vec{n}_k,\ k = \overline{1, K} \Bigg\},$$

$\vec{n}_k$ – *внешняя нормаль к границе $\partial\Omega_k$ области Ω_k,*

Доказательство. Из (7) следует, что необходимо только доказать, что любая функция $u \in W$ и удовлетворяющая (8), имеет в области Ω суммируемые с квадратом первые производные $\partial u / \partial x_i$, $i = 1, 2$, т.е. ([25], с.46) существуют такие функции $\varphi_i \in L_2(\Omega), i = 1, 2$, что справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \varphi_i \psi d\Omega, \quad \forall \psi \in C_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

При этом, по определению, $\partial u / \partial x_i = \varphi_i$.

Равенства (9) эквивалентны следующему:

$$\int\limits_{\Omega} u \operatorname{div} \vec{\psi} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\psi} d\Omega, \quad \forall \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in C_0^1(\Omega) \times C_0^1(\Omega), \tag{10}$$

при этом $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2) = (\varphi_1, \varphi_2) = \vec{\varphi}$.

ций $u \in W$. Учитывая, что $u_k = u|_{\Omega_k} \in W_2^1(\Omega_k)$, преобразуем ее:

$$\int\limits_{\Omega} u \operatorname{div} \vec{\psi} d\Omega = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Omega_k} u_k \operatorname{div} \vec{\psi}\, d\Omega_k =$$
$$= -\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Omega_k} \nabla u_k \cdot \vec{\psi}\, d\Omega_k + \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Omega_k} \operatorname{div}(u_k \vec{\psi})\, d\Omega_k =$$
$$= -\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Omega_k} \nabla u_k \cdot \vec{\psi}\, d\Omega_k + \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\partial\Omega_k} u_k\, (\vec{\psi} \cdot \vec{n}_k)\, dl_k.$$

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{\tilde{\varphi}} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, определенную следующим образом: $\vec{\tilde{\varphi}} = \{\vec{\tilde{\varphi}}_k\}_{k=1}^{K}$, $\vec{\tilde{\varphi}}|_{\Omega_k} := \nabla u_k$. Эта функция определена всюду в области Ω за исключением множества $\bigcup\limits_{k=1}^{K} \gamma_k$ меры нуль, представляющего собой объединение частей границ подобластей Ω_k. Функция $\vec{\tilde{\varphi}}$ – градиент почти всюду функции $u \in W$. Заметим (см.[25], с.47), что существование производной почти всюду в области Ω не влечет существования обобщенной производной в этой же области. В отличие от обобщенного градиента, вектор-функция $\vec{\tilde{\varphi}} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ определена для любого элемента $u \in W$.

Продолжив преобразования, получим:

$$\int\limits_{\Omega} u \operatorname{div} \vec{\psi} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \vec{\tilde{\varphi}} \cdot \vec{\psi}\, d\Omega_k + \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\partial\Omega_k} u_k\, (\vec{\psi} \cdot \vec{n}_k)\, dl_k.$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (10), получаем, что градиент почти всюду $\vec{\tilde{\varphi}}$ будет являться обобщенным градиентом функции $u \in W$ только в том случае, если

$$\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\partial\Omega_k} u_k\, (\vec{\psi} \cdot \vec{n}_k)\, dl_k = 0, \quad \forall \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in C_0^1(\Omega) \times C_0^1(\Omega). \qquad (11)$$

Мы показали, что если выполняется условие (11), то функция $u \in W$ имеет в Ω обобщенный градиент ∇u, который совпадает с градиентом почти всюду.

ных производных ([25], с.46-56): (i) если обобщенная производная существует, то она единственна; (ii) если λ, φ – две заданные в области Ω функции, суммируемые по любой ограниченной области G такой, что $\overline{G} \subset \Omega$, и λ – обобщенная производная от φ в Ω, то λ – обобщенная производная от φ в любой части области Ω (свойство независимости обобщенной производной от области).

По определению обобщенной производной равенство (11) должно выполняться для всех $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in C_0^1(\Omega) \times C_0^1(\Omega)$. Это требование можно ослабить: равенство (11) должно выполняться для всех $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\big($ это следует из плотности пространства $C_0^1(\Omega)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\big)$.

Помимо этого, в равенство (9) входят только плотности потоков $\vec{\psi} \cdot \vec{n}_k$ вектор-функций $\vec{\psi}$ через границы областей Ω_k. Учитывая, что функция $\mu_k = \vec{\psi} \cdot \vec{n}_k$ корректно определена как элемент пространства $W_2^{-1/2}(\partial\Omega_k)$, окончательно убеждаемся в справедливости леммы. $\square$

В дальнейшем понадобится следующая обобщенная постановка задачи (1)-(2):

$$\textit{определить} \quad u = \{u_k\}_{k=1}^K \in \tilde{W} = \prod_{k=1}^K \tilde{W}_2^1(\Omega_k): \tag{12}$$

$$-\sum_{k=1}^K \langle u_k, \mu \rangle_{\partial\Omega_k} = 0, \quad \forall \mu \in M, \tag{13}$$

$$a_{\Omega_k}(u_k, v) = (f_k, v)_{\Omega_k}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_k), \quad k = \overline{1, K}, \tag{14}$$

$$-\sum_{k=1}^K \langle \delta_k u_k, v \rangle_{\partial\Omega_k} = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{15}$$

Здесь

$$a_{\Omega_k}(u, v) = \int\limits_{\Omega_k} \nabla u \nabla v d\Omega_k, \quad u, v \in W_2^1(\Omega_k), \quad f_k = f|_{\Omega_k}, \tag{16}$$

$$(f, v)_{\Omega_k} = \int\limits_{\Omega_k} f v d\Omega_k, \quad f \in L_2(\Omega). \tag{17}$$

Доказательство. Докажем сначала, что если функция u является решением задачи (4)-(5), то она удовлетворяет соотношениям (12)-(15). Рассмотрим функцию $u \in W_2^1(\Omega, -\Delta)$ как элемент пространства W. Тогда условие (12) удовлетворяется по построению пространства W, условие (13) удовлетворяется в силу леммы 4.1.

Для доказательства условия (14) рассмотрим произвольную функцию $v_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_k)$. Продолжив ее нулем на $\Omega \setminus \Omega_k$, получим функцию $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ([26], с.74). Подставив v в (5), получим (14).

Для доказательства (15) заметим, что постановка (4)-(5) эквивалентна постановке (1)-(2) ([10], глава 6). Тогда для $u \in W_2^1(\Omega, -\Delta)$, $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$(-\Delta u, v) = \sum_{k=1}^{K} (-\Delta u_k, v_k)_{\Omega_k} =$$

$$\sum_{k=1}^{K} a_{\Omega_k}(u_k, v_k) - \sum_{k=1}^{K} \langle \delta_k u_k, v_k \rangle = (f, v) = \sum_{k=1}^{K} (f_k, v_k)\,.$$

Отсюда, учитывая (14), убеждаемся в справедливости (15). Мы доказали, что из (4)-(5) следует (12)-(15).

Докажем обратное утверждение.

В силу условий (12), (13), леммы 4.1, и определения пространства $\tilde{W}$ получаем, что $u \in W_2^1(\Omega)$ и $u|_{\partial\Omega} = g \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$.

Условие (14) равносильно тому, что $-\Delta u = f$ в Ω_k, где $-\Delta : W_2^1(\Omega_k) \longrightarrow W_2^{-1}(\Omega_k)$ – оператор, формально порожденный билинейной формой $a_{\Omega_k}(\cdot,\cdot)$ ([10], Глава 6). Тогда для $u \in W_2^1(\Omega)$, $\forall\ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \sum_{k=1}^{K} a_{\Omega_k}(u_k, v_k) = \sum_{k=1}^{K} (-\Delta u_k, v_k) + \sum_{k=1}^{K} \langle \delta_k u_k, v_k \rangle =$$

$$\sum_{k=1}^{K} (-\Delta u_k, v_k) = \sum_{k=1}^{K} (f_k, v_k) = (f, v).$$

Лемма доказана. □

Поясним смысл условий (12)–(15). Условие (12) подчиняет u главным граничным условиям (2) и обеспечивает необходимую гладкость u в помулы Грина. Отметим, что для произвольных элементов пространств W и $\tilde{W}$ формулу Грина в области Ω использовать нельзя, т.к. произвольный элемент этих пространств может не обладать суммируемым с квадратом обобщенным градиентом во всей области Ω, хотя он всегда имеет суммируемый с квадратом обобщенный градиент в каждой из областей Ω_k.

Гладкость u во всей области Ω (т.е. принадлежность u пространству $W_2^1(\Omega)$) обеспечивает условие (13). Для элементов W или $\tilde{W}$, подчиненных (13), использование формулы Грина во всей области Ω уже оправдано.

Выполнение условий (14) эквивалентно тому, что функция $u_k \in W_2^1(\Omega_k)$ является слабым решением уравнения (1) в области Ω_k. Т.к. в этом условии $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_k)$, то соотношения (14) не накладывают на u_k никаких граничных условий (другими словами, любая функция u_k, являющаяся слабым решением уравнения (но не краевой задачи) (1), будет удовлетворять соотношениям (14)).

Условие (15) является слабой формой условий сопряжения функций $\{u_k\}_{k=1}^K$ на множестве $\bigcup\limits_{k=1}^{K}\gamma_k)$ и замыкает систему соотношений (12)–(15).

5 Построение вариационного уравнения $b(u, v) = f(v)$ в пространстве следов

5.1 Операторы и их свойства

Введем оператор $G : W_2^{1/2}(\partial\Omega) \to W_2^1(\Omega)$, сопоставляющий функции $\varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ функцию $u = G\varphi \in W_2^1(\Omega)$, являющуюся решением задачи

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega), \tag{18}$$

$$a(u, v) = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{19}$$

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \qquad G(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 G(\varphi_1) + c_2 G(\varphi_2),$$

$$\|G\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\, \|\varphi\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)},$$

где константа $C > 0$ не зависит от φ.

Используя формулу Грина, из (19) получим:

$$a(u, v) = \langle \delta u, \gamma v \rangle_{\partial\Omega}, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega),$$

или, учитывая, что $u = G\varphi$:

$$a(G\varphi, v) = \langle \delta G\varphi, \gamma v \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad \forall \varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega).$$

Если решение $u = G\varphi \in W_2^2(\Omega)$, то $\delta u = \partial u / \partial \vec{n}$ и

$$a(G\varphi, v) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G\varphi}{\partial \vec{n}} v\, dl, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad \forall \varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega).$$

Введем в рассмотрение оператор $P : W_2^{1/2}(\partial\Omega) \to W_2^{-1/2}(\partial\Omega)$ (оператор Пуанкаре–Стеклова), определенный следующим образом:

$$P\varphi = \delta G\varphi.$$

Если решение $u = G\varphi \in W_2^2(\Omega)$, то

$$P\varphi = \frac{\partial G\varphi}{\partial \vec{n}}.$$

В дальнейшем всегда будет использоваться обозначение $\partial(\cdot)/\partial\vec{n}$, даже если нормальная производная не существует.

Укажем некоторые свойства операторов P и G:

1. Оператор P является линейным и непрерывным.

2. Для $\forall \varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega), \forall v \in W_2^1(\Omega)$ справедливо тождество:

$$a(G\varphi, v) = \langle P\varphi, v \rangle_{\partial\Omega}. \tag{20}$$

$\psi \in W_2^{1/2}(\Omega)$. Тогда, учитывая симметричность $a(u, v)$, получим:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in W_2^{1/2}(\partial\Omega): \quad \langle P\varphi_1, \varphi_2 \rangle = a(G\varphi_1, G\varphi_2) =$$
$$= a(G\varphi_2, G\varphi_1) = \langle \varphi_1, P\varphi_2 \rangle,$$

т.е. оператор P является симметричным.

Операторы P и G, соотвествующие Ω_k, будем обозначать P_k и G_k.

5.2 Построение вариационного уравнения

Рассмотрим построенную выше систему соотношений (12)-(15). Представим $u = \{u_k\}_{k=1}^K$ в виде $u = v + U$, $u_k = v_k + U_k$, $k = \overline{1, K}$, где $v = \{v_k\}_{k=1}^K$ – такая функция, что

$$-\Delta v_k = f \quad \text{в}\, \Omega_k, \quad v_k|_{\partial\Omega_k} = w|_{\partial\Omega_k},\ k = \overline{1, K},$$

где $w \in W_2^1(\Omega)$, $w|_{\partial\Omega} = g$ – произвольная функция, удовлетворяющая на $\partial\Omega$ главным граничным условиям.

Построенная таким образом функция $v = \{v_k\}_{k=1}^K$ будет принадлежать пространству $W_2^1(\Omega)$, удовлетворять на $\partial\Omega$ главным граничным условиям и в каждой подобласти Ω_k являться решением исходного уравнения. Смысл представления функции u в таком виде – свести задачу (12)-(15) к задаче с однородными граничными условиями на $\partial\Omega$.

Подставив $u = v + U$ в соотношения (12)-(15), получим уравнения для $U = \{U_k\}_{k=1}^K$:

$$U = \{U_k\}_{k=1}^K \in \prod_{k=1}^K W_{2,0}^1(\Omega_k): \tag{21}$$

$$-\sum_{k=1}^K \langle U_k, \mu \rangle_{\partial\Omega_k} = 0, \quad \forall \mu \in M, \tag{22}$$

$$a_{\Omega_k}(U_k, v) = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_k), \quad k = \overline{1, K}, \tag{23}$$

$$\sum_{k=1}^K \left\langle \frac{\partial U_k}{\partial n_k}, w \right\rangle_{\partial\Omega_k} = -\sum_{k=1}^K \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial n_k}, w \right\rangle_{\partial\Omega_k}, \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{24}$$

$$W_{2,0}^1(\Omega_k) = \begin{cases} W_2^1(\Omega_k), & \text{если } \gamma_{0,k} = \emptyset; \\ \left\{ v \in W_2^1(\Omega_k) : v|_{\gamma_{0,k}} = 0 \right\} & \text{если } \gamma_{0,k} \neq \emptyset \ . \end{cases}$$

Напомним, что $\gamma_{0,k} = \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$, $\gamma_k = \partial\Omega_k \setminus \gamma_{0,k}$.

Используя операторы P и G, перепишем соотношения (22)-(24) в виде:

$$-\sum_{k=1}^{K} \langle \varphi_k, \mu \rangle_{\partial\Omega_k} = 0, \quad \forall \mu \in M, \tag{25}$$

$$U_k = G_k \varphi_k, \quad k = \overline{1, K}, \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \langle P_k \varphi_k, v \rangle_{\partial\Omega_k} = -\sum_{k=1}^{K} \langle P_k \tilde{\varphi}_k, v \rangle_{\partial\Omega_k}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{27}$$

Здесь $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^K = \{U_k|_{\partial\Omega_k}\}_{k=1}^K$ – набор следов искомой функции U на $\partial\Omega_k$, $\tilde{\varphi} = \{\tilde{\varphi}_k\}_{k=1}^K = \{v_k|_{\partial\Omega_k}\}_{k=1}^K$ – набор следов на $\partial\Omega_k$ заданной функции $v = \{v_k\}_{k=1}^K$, P_k, G_k – операторы P и G, соответствующие подобластям Ω_k.

Таким образом, формально задача может решаться в два этапа:

1. По соотношениям (25), (27) определяем функцию $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^K$ – след неизвестного решения на границах подобластей $\partial\Omega_k$.

2. По известным функциям φ_k, согласно (26), восстанавливаем решения U_k в подобластях Ω_k, решая в Ω_k соответствующие краевые задачи (т.е. вычисляем значения операторов G_k на элементах φ_k, $U_k = G_k \varphi_k$, $k = \overline{1, K}$).

Рассмотрим гильбертово пространство $\tilde{H}$, определенное следующим образом:

$$\tilde{H} = \prod_{k=1}^{K} L_2(\partial\Omega_k),$$

где $L_2(\partial\Omega_k)$ – пространство суммируемых с квадратом функций на $\partial\Omega_k$, $k = \overline{1, K}$. Элемент $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^K$ пространства $\tilde{H}$ представляет собой упорядоченный набор функций $\mu_k \in L_2(\partial\Omega_k)$.

$$\langle \mu, \nu \rangle_{\partial\Omega_k} = \int\limits_{\partial\Omega_k} \mu\nu \, dl, \quad \|\mu\|_{\partial\Omega_k} = \sqrt{\langle \mu, \mu \rangle_{\partial\Omega_k}}.$$

В пространстве $\tilde{H}$ введем скалярное произведение и норму прямого произведения:

$$\langle \mu, \nu \rangle_{\tilde{H}} = \sum_{k=1}^{K} \langle \mu_k, \nu_k \rangle_{\partial\Omega_k}, \quad \|\mu\|_{\tilde{H}} = \sqrt{\langle \mu, \mu \rangle_{\tilde{H}}}.$$

В пространстве $\tilde{H}$ рассмотрим подпространство H, определенное следующим образом:

$$H = \Big\{ \mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{K} \in \tilde{H} : \quad \forall i, j \in \{1, \dots, K\} \text{ таких,}$$
$$\text{что } \gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \emptyset, \ \mu_i|_{\gamma_{ij}} = \mu_j|_{\gamma_{ij}} \text{почти всюду} \Big\}.$$

Аналогично введем пространство

$$\tilde{X} = \prod_{k=1}^{K} W_2^{1/2}(\partial\Omega_k), \quad \|\mu\|_{\tilde{X}} = \sum_{k=1}^{K} \|\mu_k\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_k)}.$$

В пространстве $\tilde{X}$ рассмотрим подпространства

$$X \ = \Big\{ \mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{K} \in \tilde{X} : \quad \exists v \in W_2^1(\Omega), \ \mu_k = v|_{\partial\Omega_k} \Big\}$$
$$X_0 = \Big\{ \mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{K} \in \tilde{X} : \quad \exists v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \ \mu_k = v|_{\partial\Omega_k} \Big\}.$$

В качестве пространства, двойственного к $\tilde{X}$, будем рассматривать пространство

$$\tilde{X}' = \prod_{k=1}^{K} W_2^{-1/2}(\partial\Omega_k).$$

Т.к.

$$W_2^{1/2}(\partial\Omega_k) \subset L_2(\partial\Omega_k) \subset W_2^{-1/2}(\partial\Omega_k),$$

то

$$\tilde{X} \subset H \subset \tilde{X}'.$$

В пространствах $W_2^{-1/2}(\partial\Omega_k)$, и X' будем рассматривать обычные нормы двойственного пространства:

$$\|x\|_{Y'} = \sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} x(y)/\,\|y\|_Y\,,$$

где $Y = W_2^{1/2}(\partial\Omega_k)$, $k=\overline{1,K}$ или $Y=\tilde{X}$.

Рассмотрим теперь определенные выше линейные операторы P_k : $W_2^{1/2}(\partial\Omega_k) \to W_2^{-1/2}(\partial\Omega_k)$, и билинейную форму

$$b(\mu,\nu) = \sum_{k=1}^{K} \langle P_k\mu_k, \nu_k\rangle_{\partial\Omega_k}\,,$$

определенную для всех $\mu,\nu\in\tilde{X}$.

Лемма 5.1. *Форма $b(\cdot,\cdot)$ является непрерывной симметричной положительно определенной билинейной формой в пространстве X_0, т.е.*

$$\forall\mu,\nu\in X_0:\ |b(\mu,\nu)| \le c_2\,\|\mu\|_{X_0}\,\|\nu\|_{X_0}\,;\quad \forall\mu\in X_0:\ c_1\,\|\mu\|_{X_0}^2 \le b(\mu,\mu).$$

Доказательство. Симметричность, непрерывность и билинейность формы являются прямым следствием симметричности, непрерывности и линейности операторов Пуанкаре-Стеклова.

Докажем положительную определенность формы $b(\cdot,\cdot)$. Для этого рассмотрим произвольный элемент $\mu\in X_0$ и проделаем ряд преобразований:

$$\forall\mu=\{\mu_k\}_{k=1}^K\in X_0:\quad b(\mu,\mu)=\sum_{k=1}^{K}\langle P_k\mu,\nu\rangle_{\partial\Omega_k} =$$

$$\sum_{k=1}^{K} a_{\Omega_k}(G_k\mu_k, G_k\mu_k) = \sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\Omega_k} \nabla G_k\mu_k\cdot\nabla G_k\mu_k\, d\Omega_k.$$

Т.к. $\mu=\{\mu_k\}_{k=1}^K\in X_0$ является следом некоторой функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то любая функция $w\in W=\prod_{k=1}^{K} W_2^1(\Omega_k)$, такая что $\mu_k = w|_{\Omega_k}$, $k=\overline{1,K}$, будет принадлежать пространству $W_2^1(\Omega)$ (напомним, что в сформулированном выше условии принадлежности функции из W пространству

Ω_k).

По построению операторов G_k, $G_k\mu_k \in W_2^1(\Omega_k)$, и значит $u = \{u_k\}_{k=1}^K = \{G_k\mu_k\}_{k=1}^K \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Таким образом, у функции u существует в области Ω обобщенный градиент, и

$$b(\mu,\mu) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, d\Omega.$$

Напомним, что здесь $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Известно, что в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ форма $a(u,v)$ задает (энергетическую) норму, эквивалентную обычной норме пространства $W_2^1(\Omega)$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, получим:

$$b(\mu,\mu) \geq C\, \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = C\sum_{k=1}^{K} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}.$$

Для областей с кусочно-гладкой границей справедливо следующее неравенство ([27]):

$$\forall u \in W_2^1(\Omega): \quad \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \geq C_1\, \|\gamma u\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}, C_1 > 0.$$

Напомним, что здесь γ – оператор взятия следа.

Продолжив преобразования, получим:

$$b(\mu,\mu) \geq C_2 \sum_{k=1}^{K} \|\mu_k\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_k)} = C_2\, \|\mu\|^2_X.$$

Таким образом,

$$b(\mu,\mu) \geq C_2\, \|\mu\|^2_X, \quad C_2 > 0.$$

$\square$

Билинейность, непрерывность и положительная определенность формы $b(\cdot,\cdot)$ позволяют сформулировать для нее следующую задачу:

$$\textit{определить } \varphi \in X_0: \quad b(\varphi,\psi) = F(\psi), \quad \forall\psi \in X_0, \tag{28}$$

В соотвествии с леммой Лакса-Мильграма ([11]) решение этой задачи существует и единственно.

Наконец, справедлива

Теорема 5.1. *Пусть*

$$F(\psi) = -b(\tilde{\varphi}, \psi), \quad \psi \in X; \quad \tilde{\varphi} = \{\tilde{\varphi}_k\}_{k=1}^K = \{v|_{\partial\Omega_k}\}_{k=1}^K \in X, \quad F \in X',$$

где $v = \{v_k\}_{k=1}^K$ *– такая функция, что*

$$-\Delta v_k = f \quad \text{в}\, \Omega_k, \quad v_k|_{\partial\Omega_k} = w|_{\partial\Omega_k},\, k = \overline{1, K},$$

$w \in W_2^1(\Omega)$, $w|_{\partial\Omega} = g$ *– произвольная функция, удовлетворяющая на* $\partial\Omega$ *главным граничным условиям.*

Тогда решение $u = \{u_k\}_{k=1}^K \in W_2^1(\Omega)$ *исходной задачи в суперэлементе* Ω_k *имеет вид* $u_k = G_k\varphi_k + v_k$, $k = \overline{1, K}$, *где* φ *– решение задачи (28) с указанным* F.

Доказательство. Доказательство сводится к записи соотношений (25)-(27) с использованием введенных обозначений.

При этом условие (25) удовлетворяется за счет выбора соответствующего пространства X_0, условие (27) является развернутой записью вариационного уравнения (28). □

Предположим, что в (28) функционал $F \in X' = \tilde{X}'$ принадлежит пространству $\tilde{H} = \tilde{H}' \subset \tilde{X}'$, т.е. $F(\psi) = \langle F, \psi\rangle = \sum\limits_{k=1}^{K} \int\limits_{\partial\Omega_k} F_k\, \psi_k dl$. Тогда уравнение (28) будет справедливо и для $\forall \psi \in H_0$, и задачу можно записать следующим образом:

$$\text{определить } \varphi \in X_0: \quad b(\varphi, \psi) = F(\psi), \quad \forall \psi \in H_0, \tag{29}$$

где H_0 – подпространство пространства H, состоящее из функций, равных 0 на $\gamma_{0,k} = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega$ (т.е. удовлетворяющих главным граничным условиям на $\partial\Omega$).

$$b(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{K} \langle P_k \varphi_k, \psi_k \rangle$$

определена на пространстве $X_0 \times H_0$ и не является симметричной.

6 Построение разностной схемы

Метод конечных суперэлементов является проекционным (проекционно-сеточным) методом решения уравнения (29). Проекционые методы решения абстрактных операторных уравнений и краевых задач рассмотрены в ([12],[13]).

Для аппроксимации задачи (29) выберем некоторое конечномерное подпространство $X_{0,h}$ пространства X_0, являющееся линейной оболочкой системы функций $\{\varphi_h^{(i)}\}_{i=1}^N \subset X_0$, и подпространство $H_{0,h}$ пространства H_0, являющееся линейной оболочкой системы функций $\{\psi_h^{(i)}\}_{i=1}^N \subset H_0$. Приближенное решение $\varphi_h \in X_{0,h}$ задачи (29) будем искать в виде

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_h^{(i)}. \tag{30}$$

Приближенным решением задачи (29) будем считать решение следующей конечномерной задачи:

$$\textit{определить } \varphi_h \in X_{0,h} : \quad b(\varphi_h, \psi_h) = F(\psi_h), \quad \forall \psi_h \in H_{0,h}. \tag{31}$$

Выбирая различным образом подпространства $X_{0,h}$ и $H_{0,h}$, можно получить различные варианты МКСЭ.

Расчет во всех случаях будем проводить по следующей схеме:

1. Для каждой функции $\varphi_h^{(i)}$ вычислим и запомним функции

$$u_h^{(i)} = G\varphi_h^{(i)} = \{G_k \varphi_{h,k}^{(i)}\}_{k=1}^K$$

и

$$\Pi_h^{(i)} = P\varphi_h^{(i)} = \{P_k \varphi_{h,k}^{(i)}\}_{k=1}^K = \{\partial u_{h,k}^{(i)} / \partial n_k\}_{k=1}^K.$$

ходимо решить краевую задачу с краевым условием, определяемым функцией $\varphi_h^{(i)}$.

Отметим, что функции $u_h^{(i)}$ $(\Pi_h^{(i)})$ отличны от нуля лишь в тех подобластях Ω_k $(\partial\Omega_k)$, для которых на $\partial\Omega_k$ отлична от нуля функция $\varphi_h^{(i)}$.

2. Сформировав и решив конечномерную задачу (31), получим приближенное решение φ_h задачи (29). Тогда приближенное решение исходной краевой задачи (4)-(5) будет иметь вид

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i u_h^{(i)}.$$

Рассмотрим два способа выбора $X_{0,h}$ и $H_{0,h}$.

МКСЭ Р.П. Федоренко

Введем на множестве $\bigcup\limits_{k=1}^{K} \partial\Omega_k$ систему узлов M_h, состоящую из вершин многоугольников Ω_k. Каждому узлу $M_i \in M_h$ сопоставим базисную функцию $\varphi_h^{(i)} \in X_{0,h}$, определенную следующим образом: в узле M_i $\varphi_h^{(i)}(M_i) = 1$, в остальных узлах она равна нулю, на внешние границы суперэлементов $\varphi_h^{(i)}$ продолжена линейно, на всех внутренних границах суперэлементов $\varphi_h^{(i)} = 0$. В качестве функции $\tilde{\varphi}$ возьмем функцию, совпадающую на границах суперэлементов с функцией g. Каждому узлу $M_i \in M_h$ сопоставим звездообразную двухстороннюю область ω_i нулевой площади. (Рис.2). В качестве функции $\psi_h^{(i)}$ возьмем характеристическую функцию области ω_i, $\psi_h^{(i)} = \chi(\omega_i)$. При таком выборе базисных функций получается МКСЭ Р.П. Федоренко первого порядка ([4]-[7]).

Метод Бубнова-Галеркина

Метод Бубнова-Галеркина ([12]) соответствует случаю, когда $\varphi_h^{(i)} = \psi_h^{(i)}$, т.е. системы базисных и пробных функций совпадают. Базисные функции $\varphi_h^{(i)}$ строятся аналогично предыдущему случаю.

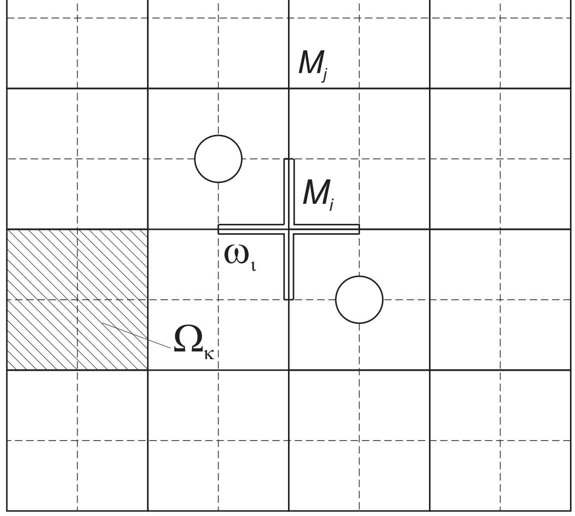

Рис. 2. Область и сетка

7 Оценки ошибок для метода Бубнова-Галеркина

В случае метода Бубнова-Галеркина оценка ошибки сводится к оценке величины наилучшего приближения решения φ задачи элементами конечномерного подпространнства $X_{0,h}$.

В соотвествии с леммой Cea ([11], c.109), для ошибки метода справедливо неравенство:

$$\|\varphi - \varphi_h\| \leq M \inf_{\psi_h \in V_h} \|\varphi - \psi_h\|, \tag{32}$$

где константа $M > 0$ не зависит от φ.

Норму в правой части неравенства (32) оценим следующим образом:

$$\inf_{\psi_h \in V_h} \|\varphi - \psi_h\| \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\|,$$

где $\tilde{\varphi} \in X_{0,h}$ – интерполянт решения φ, построенный по системе функций $\{\varphi_h^{(i)}\} \subset X_0$.

Оценим $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|$ для случая, когда следы функций вдоль ребер суперэлементов интерполируются алгебраическими многочленами, а само решение достаточно гладкое.

В этом случае i-тая базисная функция $\varphi_h^{(i)} \in X_{0,h}$ строится как интерполянт произвольной функции $\varphi \in X_0$, равной 1 в i-том узле и 0 во всех остальных узлах.

ной нормой

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{1/2}(I)} = \|\varphi\|^2_{L_2(I)} + \int\limits_I \int\limits_I \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^2}\, dxdy, \tag{33}$$

$$\|\varphi\|^2_{L_2(I)} = \int\limits_I \varphi^2(x)\, dx.$$

Пусть $\varphi \in C^1(I) \cap W_2^{1/2}(I)$. Тогда

$$\forall x, y \in I: \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \max_{\xi \in I} |\varphi'(\xi)||x-y|.$$

Используя это неравенство, из (33) получим:

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{1/2}(I)} \leq \|\varphi\|^2_{L_2(I)} + \alpha^2 |I|^2, \quad \alpha = \max_{\xi \in I} |\varphi'(\xi)|, \quad |I| = |b-a|.$$

Если, помимо этого, $\varphi \in C_0^1(I)$, то

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{1/2}(I)} \leq \frac{1}{3}\alpha^2 |I|^3 + \alpha^2 |I|^2 = \alpha^2 |I|^2 (\frac{1}{3}|I| + 1). \tag{34}$$

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и ее правильное разбиение на K многоугольников Ω_k, $k = \overline{1, K}$. Пусть $\Omega_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ – дополнение к Ω в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\gamma_{i,j}$ общее ребро подобластей Ω_i и Ω_j, $i, j = \overline{0, K}$. Для определенности всегда будем считать, что $i < j$. Множество всех таких допустимых пар индексов обозначим через J.

С учетом леммы 4.1 пространство X можно определить следующим образом:

$$X = \left\{ \mu = \{\mu_k\}_{k=1}^K \in \tilde{X}: \quad \forall\, (i,j) \in J \quad \mu_i|_{\gamma_{i,j}} = \mu_j|_{\gamma_{i,j}} \right\}.$$

Под $\|\mu_k\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_k)}$ будем понимать величину

$$\|\mu_k\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_k)} = \sum_{i,j} \|\mu_k\|^2_{W_2^{1/2}(\gamma_{i,j})},$$

где суммирование ведется по всем $(i,j) \in J$ таким, что $\gamma_{i,j} \in \partial\Omega_k$.

Тогда

$$\|\mu\|^2_X = \sum_{k=1}^K \|\mu_k\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_k)} = 2 \sum_{i,j \in J} \|\mu_k\|^2_{W_2^{1/2}(\gamma_{i,j})}. \tag{35}$$

на каждом ребре $\gamma_{i,j}$ расположено одинаковое количество узлов $L+1$, $L+1 \geq 2$, причем два узла соответствуют концам отрезка $\gamma_{i,j}$.

В качестве интерполянта функции $\varphi \in X$ возьмем функцию $\tilde{\varphi}$, ограничение которой на ребро $\gamma_{i,j}$ совпадает с обычным алгебраическим интерполянтом функции $\varphi|_{\gamma_{i,j}}$, построенным по $L+1$ узлу на отрезке $\gamma_{i,j}$. При этом мы предполагаем, что $\varphi_k \in W_2^{1/2}(\partial\Omega_k)$ является непрерывной функцией и $\varphi|_{\gamma_{i,j}} \in C^1(\gamma_{i,j})$.

Из способа построения интерполянта, выражения (35) для нормы и неравенства (34) следует, что оценка ошибки интерполяции $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_X$ сводится к оценке ошибки обычной алгебраической интерполяции на отрезке $\gamma_{i,j}$.

Пусть $M_{i,j}$ – множество узлов, принадлежащих отрезку $\gamma_{i,j}$. Выберем на отрезке $\gamma_{i,j}$ некоторую систему координат Os, расположив ее начало в одном из концов отрезка $\gamma_{i,j}$. Пусть

$$\{0 = s_0,\, s_1, \ldots, s_{L-1},\, s_L = |\gamma_{i,j}|\}$$

– координаты узлов из $M_{i,j}$.

Обозначим через $\varphi_{i,j}$ и $\tilde{\varphi}_{i,j}$ ограничения на ребро $\gamma_{i,j}$ исходной функции φ и ее интерполянта $\tilde{\varphi}$.

Тогда ([28], с.35) для ошибки интерполяции имеют место неравенства:

$$\max_{s\in\gamma_{i,j}}|\varphi_{i,j} - \tilde{\varphi}_{i,j}| \leq \frac{\alpha_{L+1,i,j}}{(L+1)!}|\gamma_{i,j}|^{L+1}, \tag{36}$$

$$\max_{s\in\gamma_{i,j}}|\varphi'_{i,j} - \tilde{\varphi}'_{i,j}| \leq \frac{\alpha_{L+1,i,j}}{L!}|\gamma_{i,j}|^{L}, \quad \alpha_{L+1,i,j} = \max_{s\in\gamma_{i,j}}\varphi^{(L+1)}(s).$$

Окончательно, из (34), (35) и (36) следует, что

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_X^2 \leq 2\sum_{i,j\in J}\frac{\alpha^2_{L+1,i,j}}{(L!)^2}|\gamma_{i,j}|^{2(L+1)}(\frac{1}{3}|\gamma_{i,j}| + 1). \tag{37}$$

Отметим, что здесь величины $\alpha_{L+1,i,j}$ зависят от способа разбиения области на суперэлементы.

Из-за известных свойств интерполяции алгебраическими многочленами практический интерес представляют случаи $L = 1$ (интерполяция ка). Из вида оценки (37) следует условие применимости метода: следы решения на границах суперэлементов должны хорошо интерполироваться многочленами низких степеней. Внутри же суперэлементов решение может быть «плохим» и иметь невысокую гладкость, большие градиенты, особенности и т.д. Именно это свойство метода и представляет особый интерес.

Отметим, что конкретный выбор способа интерполяции следов определяется способом разбиения исходной области на суперэлементы и априорной информацией о решении задачи – расположением и типом особенностей решения и т.д. В общем же случае на каждом ребре может использоваться свой способ интерполяции. Заметим также, что на дифференциальные свойства следа решения на границах суперэлементов сильно влияет способ разбиения области на суперэлементы. Например, если граница суперэлемента «близка» к линии уровня решения, то след решения на этой границе является «почти» константой, которую легко аппроксимировать.

Покажем теперь, что из сходимости φ_h к φ в X следует сходимость u_h к u в $W_2^1(\Omega)$. В силу непрерывности оператора G имеем:

$$\|u - u_h\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{K} \|u_k - u_{h,k}\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{K} \|G_k(\varphi_k - \varphi_{h,k})\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{K} \|\varphi_k - \varphi_{h,k}\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_k)} = C \, \|\varphi - \varphi_h\|^2_X .$$

Здесь константа $C > 0$ зависит лишь от области Ω и способа ее разбиения на суперэлементы Ω_k.

Как уже отмечалость, величина ошибки метода существенно зависит от степени гладкости следов решения на границах суперэлементов, которая, в свою очередь, зависит от взаимного расположения скважин, суперэлементов и области. Таким образом, представляет интерес зависимость ошибки метода от относительного расположения скважин внутри суперэлементов, в частности, от расстояния между скважиной и грани-

Рассмотрим модельную задачу для уравнения Лапласа в квадратной области Ω с одной скважиной. Будем считать, что стороны квадратной области имеют длину l и параллельны осям координат, а скважина имеет радиус r_c и расположенна в начале координат.

В качестве точного решения задачи рассмотрим функцию

$$u(r, \varphi) = u_c + \ln(\frac{r_c}{r}), \tag{38}$$

где (r, φ) – полярные координаты на плоскости Oxy.

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в области Ω и принимает значение u_c на границе скважины.

Функция g, определяющая граничное условие, задается как ограничение функции u на границу области, $\forall\, M \in \partial\Omega \quad g(M) = u(M)$.

Область Ω разобьем на суперэлементы прямыми, параллельными осям координат. Будем считать, что расстояние между этими прямыми равно $H = l/(2N+1)$, $N = 1, 2, 3, \ldots$.

Каждый суперэлемент Ω_k является квадратом со стороной H, скважина находится в центральном суперэлементе. Общее количество суперэлементов $K = (2N+1)^2$.

Для решения задачи будем использовать метод Бубнова-Галеркина с кусочно-линейными базисными функциями, линейными вдоль ребер суперэлементов. Вариант метода конечных суперэлементов, соотвествующий такому выбору базисных функций, уже был описан выше.

Зная точное решение (38) задачи и оценку(37) для ошибки метода, мы можем получить зависимость величины ошибки от размера суперэлемента H, которое равно удвоенному расстоянию от центра скважины до границы суперэлемента.

Записав оценки (37) приминительно к данному случаю ($L = 1$, $\gamma_{i,j} =$

$$\|\varphi-\varphi_h\|_X^2 \le H^4\left(\frac{1}{3}H+1\right)\sum_{k=1}^{K}\sum_{\gamma_{i,j}\in\partial\Omega_k}\alpha_{2,\gamma_{i,j}}^2 \le$$

$$H^4\left(\frac{1}{3}H+1\right)\sum_{k=1}^{K}\sum_{\gamma_{i,j}\in\partial\Omega_k}\max_{\gamma_{i,j}}\alpha_{2,\gamma_{i,j}}^2 =$$

$$4H^4\left(\frac{1}{3}H+1\right)(2N+1)^2\max_{\gamma_{i,j}}\alpha_{2,\gamma_{i,j}}^2 =$$

$$4l^2H^2\left(\frac{1}{3}H+1\right)\max_{\gamma_{i,j}}\alpha_{2,\gamma_{i,j}}^2.$$

Учитывая, что все ребра $\gamma_{i,j}$ лежат параллельны осям координат, а также вид точного решения (38) и симметрию области, получим

$$\max_{\gamma_{i,j}}\alpha_{2,\gamma_{i,j}} = \max_{\gamma_{i,j}}\max_{s\in\gamma_{i,j}}\left|\varphi^{(2)}(s)\right| \le \max_{x\in[-l/2;+l/2]}\left|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right|\Bigg|_{y=H/2} = \frac{4}{H^2}.$$

Т.к.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

то

$$\max_{x\in[-l/2;+l/2]}\left|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right|\Bigg|_{y=H/2} = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,H/2)\right| = \frac{4}{H^2}.$$

Окончательно получаем:

$$\|\varphi-\varphi_h\|_X^2 \le 4l^2H^2\left(\frac{1}{3}H+1\right)\max_{\gamma_{i,j}}\alpha_{2,\gamma_{i,j}}^2 \le$$

$$4l^2H^2\left(\frac{1}{3}H+1\right)\frac{16}{H^4} = 64\frac{l^2}{H^2}\left(\frac{1}{3}H+1\right).$$

Отсюда видно, что с увеличением расстояния межлу скважиной и границей суперэлемента велична ошибки убывает.

Данная зависимость была полученна и в результате расчета ряда тестовых задач, но для нормы в пространстве H. Эта зависимость представленна на рис. 3, 4.

По оси абсцисс отложен размер суперэлемента H, по оси ординат – квадрат ошибки в норме пространства H.

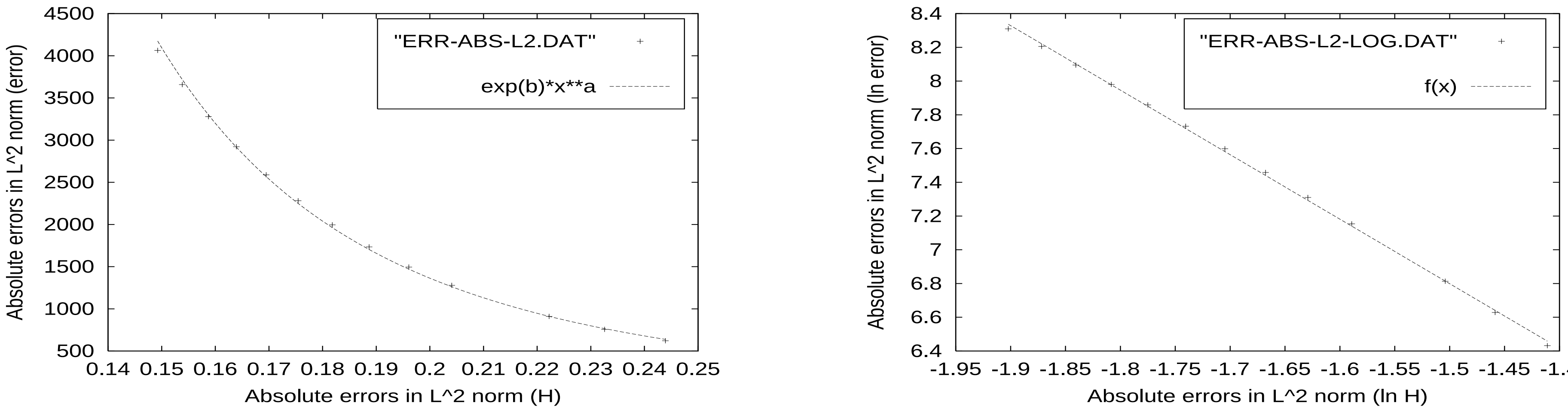

Рис. 3. Квадрат абсолютной ошибки в H-норме

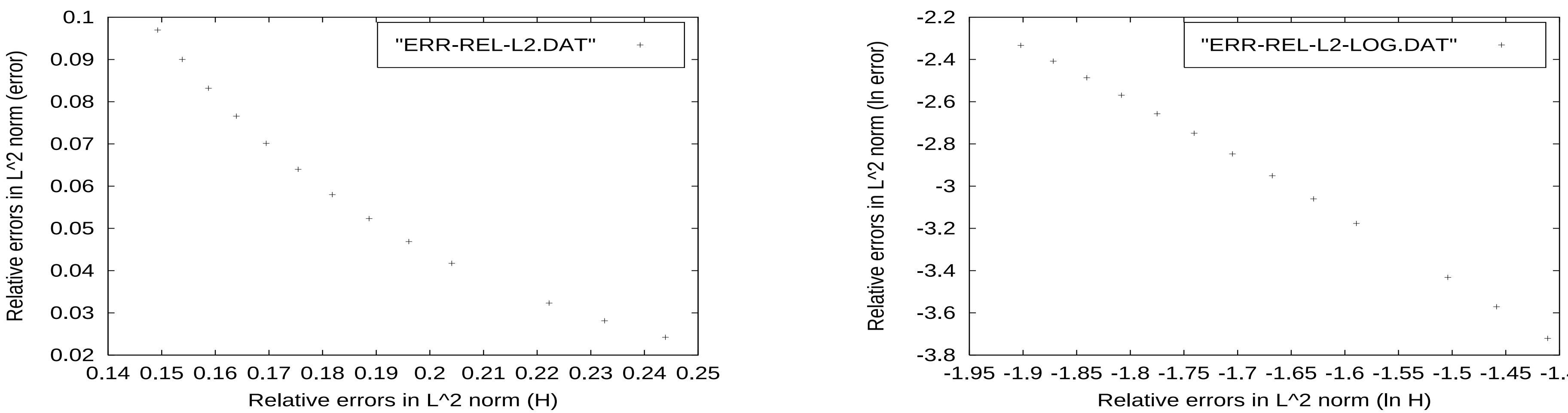

Рис. 4. Квадрат относительной ошибки в H-норме

$$\|\varphi - \varphi_h\|_H^2 \sim \frac{1}{H^{1.9}}.$$

Сильная зависимость ошибки метода от относительного расположения скважины и суперэлемента еще раз показывает наобходимость предварительного исследования особенностей задачи для построения ее аппроксимаций хорошего качества.

В заключении приведем карты линий уровня нескольких типичных решений (Рис. 5). Для приведенных решений размер области составляет 10×10 суперэлемнтов, размер суперэлемента $H = 1.0$, диаметр скважины $d = 0.1$. Таким образом, диаметр скважины в 100 раз меньше размера области. Для расчета базисных функций использовался обычный метод конечных элементов на треугольной сетке с шагом $h \approx d/10$. На внешней границе области задавалось нулевое граничное условие. На границах скважин значение решения равно единице. При расчетах использовался вариант метода конечных суперэлементов, соотвествующий методу Бубнова-Галеркина.

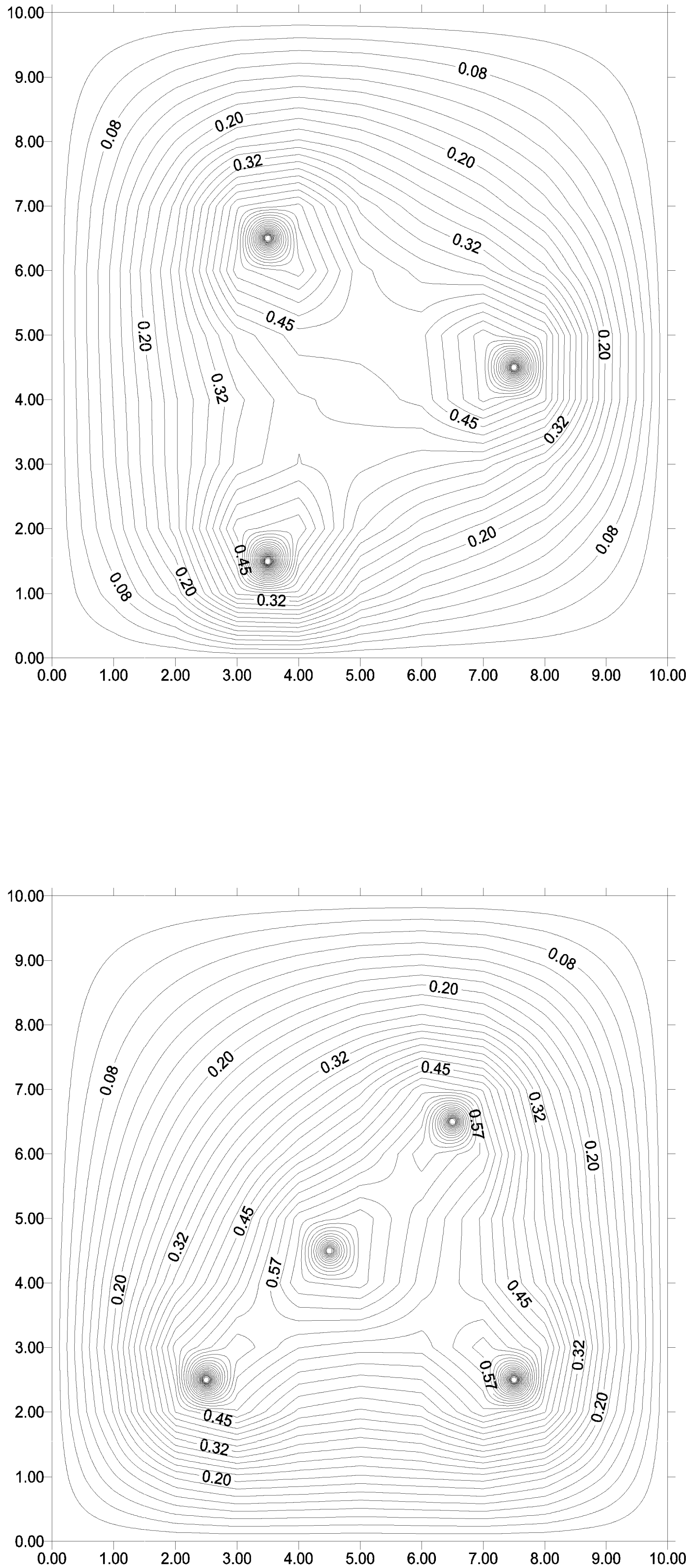

Рис. 5. Типичные решения

[1] *Бутковский А.Г.*. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с.

[2] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

[3] Сен - Венана принцип. Физическая энциклопедия. Т. 4, М.: Большая Российская энциклопедия, 1994. 704 с.; с. 486.

[4] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Об одном варианте метода конечных элементов // ЖВМиМФ. 1979. Т.19, №4. с. 950-960.

[5] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Расчет диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов // Препринт ИПМ АН СССР. М., 1987. №171.

[6] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Расчет напряжений в композитном теле методом конечных суперэлементов // Препринт ИПМ АН СССР. М., 1994. №97.

[7] *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Издательство МФТИ, 1994. 528 с.

[8] *Репях В.В.* Применение одного варианта метода конечных суперэлементов к решению задач теории упругости // ЖВМиМФ. 1986. Т.26. №11. с. 1643-1653.

[9] *Репях В.В.* Анализ ошибок метода приближенных суперэлементов // ЖВМиМФ. 1989. Т.30. №7. с. 963-983

[10] *Обэн, Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 384 с.

[11] *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.:Мир, 1980. 512 с.

тоды. М.: Наука, 1981. 416 с.

[13] *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

[14] *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.:Наука, 1980. 496 с.

[15] *Агошков В.И., Лебедев В.И.* Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // Вычислительные процессы и системы. Т.2. М.: Наука, 1985.

[16] *Агошков В.И.* Методы разделения области в задачах математической физики // Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в задачах математической физики. М.: ОВМ АН СССР, 1989.

[17] *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. М.: ОВМ АН СССР, 1983.

[18] *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2000. 296 с.

[19] *Марчук Г.И.* Введение в вычислительную математику. М.:Наука, 1989. 608 с.

[20] *Brezzi F., Franca L.P., Russo A.* Futher consideration on residual-free bubbles for advective-diffusion equation // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1998. №166. p. 25-33.

[21] *Franca L.P., Russo A.* Approximation of the Stokes problem by Residual-Free Macro Bubbles // East-West J. Appl. Math. 1996. №4. p. 265-278.

[22] *Brezzi F., Hughes T.J.R, Marini L.D., Russo A.* A priory error analysis of residual-free bubbles for advective-diffusion problems // SIAM J. Numer. Anal. 1999. V.36. №6. p. 1933-1948.

одоритова О.Б. Метод конечных элементов в задачах конвекции-диффузии. // Препринт ИПМ РАН. М., 2001. №8.

[24] *Андреев В.Б.* Сеточные аппроксимации негладких решений дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. T.XVI. №7.

[25] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.

[26] *Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. и др.* Избранные главы анализа и высшей алгебры. Л.: Издательство Ленинградского ун-та, 1981. 200 с.

[27] *Яковлев Г.Н.* О следах функция из W_p^l на кусочно-гладких поверхностях. // Матем. сборник. 1967. V.74(116). №4. с. 526-543

[28] *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. М.: Наука, 1994. 336 с.