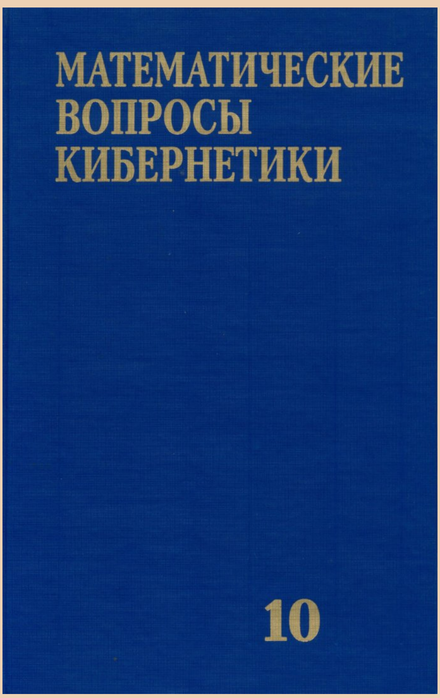

В. А. Захаров

О проблеме эквивалентности операторных программ на уравновешенных однородных обратимых шкалах

О ПРОБЛЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ПРОГРАММ НА УРАВНОВЕШЕННЫХ ОДНОРОДНЫХ ОБРАТИМЫХ ШКАЛАХ*)

В. А. ЗАХАРОВ

(МОСКВА)

В настоящей работе исследуется проблема эквивалентности программ в одной вычислительной модели, позволяющей описывать поведение последовательных императивных (операторных) программ на уровне абстракции пропозициональной логики. Цель исследований — построить алгоритм, разрешающий эквивалентность программ и оценить его эффективность.

Программа в указанной модели задается конечной системой переходов, размеченной символами из двух алфавитов — алфавита операторов и алфавита логических переменных. Семантика программ описывается посредством моделей пропозициональной динамической логики. В рамках этих моделей вводится пространство состояний данных S, на котором каждый оператор a интерпретируется как бинарное отношение R_a, $R_a \subseteq S \times S$, а каждое логическое условие p — как свойство состояний данных L_p, $L_p \subseteq S$. Определенная таким образом семантика позволяет ввести для пропозициональной операторной программы понятия вычисления, результата вычисления, а также отношение эквивалентности по результатам вычислений.

Вычислительная модель пропозициональных операторных программ [2, 9, 11] используется в качестве приближения (аппроксимации) реальных последовательных императивных программ при решении задач трансляции, оптимизации, верификации, специализации и др. Характерная особенность упомянутых задач системного программирования состоит в том, что для их решения приходится изменять синтаксическую составляющую программы (ее текст), сохраняя при этом в той или иной мере ее семантическую компоненту (поведение или вычисляемую функцию). Такого рода преобразования программ называются эквивалентными преобразованиями. При построении систем эквивалентных преобразований программ приходится иметь дело с отношением эквивалентности программ, и, следовательно, с проблемой эквивалентности. Общая формулировка проблемы эквивалентности такова. Для произвольной пары программ в заданной модели вычислений требуется выяснить, обладают ли эти программы одинаковым поведением. Во многих случаях (см. [1]) эффективная процедура распознавания эквивалентности программ немедленно приводит к построению полной системы эквивалентных преобразований программ, простой и удобной в использовании для целей системного программирования.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00133).

В данной работе рассматривается класс пропозициональных операторных программ, семантика которых определяется уравновешенными однородными обратимыми моделями пропозициональной динамической логики. Эти модели базируются на разрешимых полугруппах операторов, подчиняющихся законам правого и левого сокращения. Основной результат работы — описание алгоритма, разрешающего эквивалентность указанных программ. В основу алгоритма положен анализ метрических свойств критериальных графов программ [3–6, 13]. Статья организована следующим образом. Вначале вводятся основные понятия теории пропозициональных операторных программ, позволяющие сформулировать проблему эквивалентности. Затем идет ряд лемм, в которых устанавливаются необходимые и достаточные условия эквивалентности пропозициональных операторных программ на уравновешенных однородных обратимых шкалах. И в заключение предлагается описание алгоритма, разрешающего эквивалентность программ.

Опишем синтаксис и семантику пропозициональных операторных программ.

Фиксируем конечные алфавиты $\mathscr{A}=\{a_1,\ldots,a_N\}$ и $\mathscr{P}=\{p_1,\ldots,p_M\}$. Символы алфавита $\mathscr{A}$ будем называть *операторами*, подразумевая при этом, что ими обозначаются элементарные операторы программ. Конечные последовательности операторов будем называть *термами*. Множество всех термов обозначим $\mathscr{A}^*$. Символом λ будет обозначаться пустой терм. *Длину* терма h обозначим $|h|$. На множестве термов вводится операция конкатенации (последовательного соединения), и для любых термов h и g их конкатенация будет обозначаться hg. Предполагается, что $|\lambda|=0$ и $\lambda h=h\lambda=h$.

Символы алфавита $\mathscr{P}$ будем называть *логическими переменными*, полагая при этом, что ими обозначаются элементарные свойства и отношения на множестве данных. Каждая логическая переменная может принимать одно из двух истинностных значений 0 или 1. Двоичный набор $\delta=\langle d_1,\ldots,d_M\rangle$ длины M истинностных значений всех логических переменных, где $M=|\mathscr{P}|$, назовем *логическим условием*. Множество всех таких наборов обозначим $\mathscr{C}$.

Пропозициональная операторная программа сигнатуры $(\mathscr{A},\mathscr{P})$ задается конечной системой переходов $\pi=\langle V,B,T\rangle$, в которой

V — конечное множество *вершин-преобразователей*, содержащее *начальную вершину* **вход**, *заключительную вершину* **выход** и *вершину пустого цикла* **тупик**;

$B\colon V\to\mathscr{A}\cup\{\lambda\}$ — *функция привязки*, сопоставляющая выделенным вершинам **вход**, **выход**, **тупик** пустой терм λ, а всем другим преобразователям программы — операторы из $\mathscr{A}$;

$T\colon V\times\mathscr{C}\to V$ — *функция переходов* такая, что для любого условия δ из $\mathscr{C}$ выполняется $T(\textbf{выход},\delta)=\textbf{выход}$ и $T(\textbf{тупик},\delta)=\textbf{тупик}$.

Пропозициональную операторную программу удобно представлять в виде конечного ориентированного графа с множеством вершин V и множеством дуг $E=\{(v,T(v,\delta))\colon v\in V,\ \delta\in\mathscr{C}\}$, в котором выделены три вершины **вход**, **выход**, **тупик**. Всем прочим вершинам графа приписаны операторы, а каждой дуге графа приписано некоторое условие, причем дугам, исходящим из одной вершины, сопоставлены попарно различные условия. *Размером* $|\pi|$ программы π назовем число $|V|$ ее вершин-преобразователей.

Всякая последовательность пар $\omega=(v_0,\delta_0),(v_1,\delta_1),\ldots,(v_n,\delta_n)$, где $v_i\in V_\pi$, $\delta_i\in C$, $v_{i+1}=T_\pi(v_i,\delta_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$, определяет *маршрут* в программе. Маршрут, исходящий из начальной вершины, будем называть *трассой*. Трассу будем называть *терминальной*, если она оканчивается в заключительной вершине. Для заданного маршрута ω в программе π обозначим $B_\pi(\omega)$ терм $B(v_1)\ldots B(v_{n+1})$. Программу π назовем *редуцированной*, если всякий ее преобразователь, за исключением, быть может, вершины пустого цикла, достижим из начальной вершины, и заключительная вершина **выход** достижима из всякого преобразователя, отличного от вершины пустого цикла. *Рангом* преобразователя v в редуцированной программе назовем длину $\mathrm{rang}(v)$ кратчайшего маршрута из v в выход программы. Будем полагать, что $\mathrm{rang}(\textbf{тупик}) = \infty$.

Для описания семантики пропозициональных операторных программ воспользуемся шкалами и моделями пропозициональной динамической логики [12].

Шкалой сигнатуры $\mathcal{A}$ назовем тройку $\mathcal{F} = \langle \mathcal{S}, , \mathcal{R} \rangle$, состоящую из

непустого множества *состояний* S;

начального состояния s_0, $s_0 \in S$;

функции преобразования R: $S \times \mathcal{A} \to \mathcal{S}$.

Шкала $\mathcal{F}$ задает интерпретацию операторов программы. Областью интерпретации операторов является множество S, элементы которого называются *состояниями данных*. Выделенное состояние s_0 играет роль начального состояния. Семантика операторов определяется функцией преобразования: результатом выполнения оператора a из $\mathcal{A}$ на состоянии данных s, $s \in S$, является состояние $s' = R(s, a)$. Мы полагаем при этом, что каждый элементарный оператор a выполним на любом состоянии данных s, и результат его выполнения определяется состоянием s однозначно. Эти ограничения традиционно соблюдаются для всех базовых операторов систем императивного программирования.

Функцию преобразования R можно распространить естественным образом на все множество термов $\mathcal{A}^*$, полагая $R^*(s, \lambda) = s$ и $R^*(s, ha) = R(R^*(s, h), a)$ для всякого терма h из $\mathcal{A}^*$, оператора a из $\mathcal{A}$ и состояния s из S. Будем говорить, что состояние s'' *достижимо* на шкале $\mathcal{F}$ из состояния s' (обозначая этот факт $s' \preceq_{\mathcal{F}} s''$), если $s'' = R^*(s', h)$ для некоторого терма h из $\mathcal{A}^*$. Для каждого терма h обозначим $[h]_{\mathcal{F}}$ состояние $s = R^*(s_0, h)$, достижимое на $\mathcal{F}$ из начального состояния посредством h. Поскольку нас будут интересовать только те состояния данных, которые достижимы из начального состояния s_0, мы будем не ограничивая общности полагать $S = \{[h]_{\mathcal{F}}:\ h \in \mathcal{A}^*\}$. Для упрощения записи мы будем иногда опускать обозначение шкалы $\mathcal{F}$ в выражениях $[h]_{\mathcal{F}}$ и $s' \preceq_{\mathcal{F}} s''$, когда ясно о какой шкале идет речь.

Подобно программе, динамическая шкала может рассматриваться как ориентированный нагруженный граф, в общем случае бесконечный. Вершины графа соответствуют состояниям данных, а расположение и пометка дуг определяется функцией преобразования. Рассмотрим некоторые типы шкал, с которыми приходится иметь дело в настоящей статье

Шкалу $\mathcal{F} = \langle \mathcal{S}', , \mathcal{R}' \rangle$ назовем *подшкалой* шкалы $\mathcal{F} = \langle \mathcal{S}, , \mathcal{R} \rangle$, порожденной состоянием s, если $S' = \{R^*(s, h):\ h \in \mathcal{A}^*\}$ и функция преобразования R' получена сужением функции R на множество состояний S'. Будем говорить, что шкала $\mathcal{F}$ является

полугрупповой, если $\mathcal{F}$ может быть гомоморфно отображена на всякую ее подшкалу $\mathcal{F}$;

однородной, если $\mathcal{F}$ изоморфна всякой своей подшкале $\mathcal{F}$;

упорядоченной, если $\preceq$ является отношением строгого частичного порядка на множестве состояний S;

уравновешенной, если $[h] = [g]$ влечет $|h| = |g|$ для любой пары термов h, g;

обратимой, если функция преобразования R обратима, т. е. для любого состояния s и оператора a имеется не более одного состояния s' такого, что $R(s', a) = s$.

Полугрупповую шкалу $\mathcal{F} = \langle \mathcal{S}, , \mathcal{R} \rangle$ можно расматривать как конечно порожденный моноид $\langle S, * \rangle$ с множеством образующих $\{[a]:\ a \in \mathcal{A}\}$, единицей $s_0=[\lambda]$ и бинарной операцией $*$ такой, что $[h]*[g]=[hg]$. В таком случае упорядоченная шкала соответствует полугруппе с неразложимой единицей (т. е. $[\lambda]=[gh]$ влечет $g=h=\lambda$), однородная шкала — левосократимой полугруппе (т. е. $[gh']=[gh'']$ влечет $[h']=[h'']$), а обратимая шкала — правосократимой плдугруппе (т. е. $[h'g]=[h''g]$ влечет $[h']=[h'']$). Очевидно, что уравновешенная шкала является упорядоченной. В этой работе мы будем иметь дело преимущественно с уравновешенными однородными обратимыми шкалами.

Моделью M сигнатуры $(\mathscr{A}, \mathscr{P})$ назовем пару $\langle \mathscr{F}, \xi \rangle$ такую, что

$\mathscr{F}=\langle \mathscr{S}, , \mathscr{R}\rangle$ — шкала сигнатуры $\mathscr{A}$;

$\xi\colon\ S \to \mathscr{C}$ — *функция означивания*, определяющая истинностные значения логических переменных в каждом состоянии шкалы.

На модели M интерпретация операторов задается посредством шкалы $\mathscr{F}$, а интерпретация логических переменных — при помощи функции означивания ξ. Мы будем говорить, что $M=\langle \mathscr{F}, \xi\rangle$ является моделью шкалы $\mathscr{F}$, и множество всех моделей шкалы $\mathscr{F}$, обозначим $\mathscr{M}_{\mathscr{F}}$.

Пусть $\pi=\langle V, B, T\rangle$ — некоторая программа, и $M=\langle \mathscr{F}, \xi\rangle$ — модель шкалы $\mathscr{F}=\langle \mathscr{S}, , \mathscr{R}\rangle$. *Вычислением* программы π на модели M называется терминальная или бесконечная трасса

$$\pi(M)=(v_0, \delta_0), (v_1, \delta_1), \ldots, (v_n, \delta_n), \ldots$$

такая, что $\delta_i=\xi([B(v_0)\ldots B(v_i)])$ для всякого i, $i\geqslant 0$. Если вычисление программы π на модели M достигает выхода, то состояние $[B(\pi(M))]$ считается его результатом. В противном случае результат неопределен.

Пусть π' и π'' — некоторые программы, и $\mathscr{F}$ — какая-либо шкала. Программы π' и π'' назовем *эквивалентными на* $\mathscr{F}$ ($\pi' \sim_{\mathscr{F}} \pi''$), если для любой модели M шкалы $\mathscr{F}$ выполняется равенство $[r(\pi', M)]=[r(\pi'', M)]$, т. е. либо оба вычисления $r(\pi', M)$ и $r(\pi'', M)$ безрезультатные, либо оба они являются терминальными вычислениями, имеющими одно и то же состояние s в качестве результата

Для заданной шкалы $\mathscr{F}$ сигнатуры $(\mathscr{A}, \mathscr{P})$ *проблема эквивалентности* относительно $\mathscr{F}$ состоит в том, чтобы для произвольной пары программ π_1, π_2 проверить выполнимость отношения $\pi' \sim_{\mathscr{F}} \pi''$. В том случае, когда исследуются алгоритмические аспекты проблемы эквивалентности, подразумевается, что шкала $\mathscr{F}$ специфицирована некоторым эффективным способом. Мы будем говорить, что эффективно заданная шкала $\mathscr{F}$ *разрешима*, если существует алгоритм, проверяющий выполнимость соотношения $[h_1]_{\mathscr{F}}=[h_2]_{\mathscr{F}}$ для всякой пары термов h_1, h_2.

В [14] приведен подробный обзор основных случаев разрешимости и неразрешимости проблемы эквивалентности для пропозициональных операторных программ. Мы выделим здесь один результат, установленный А. А. Летичевским, который объясняет наш интерес к проблеме эквивалентности программ на уравновешенных однородных обратимых шкалах. Формулировка этого результата в терминах рассматриваемой здесь модели вычислений пропозициональных операторных программ такова.

Теорема 1 [7, 8]. *Пусть разрешимая однородная обратимая шкала $\mathscr{F}$ обладает следующим свойством:*

имеется алгоритм, выясняющий для всякой пары термов g, g', существование термов h', h'', для которых выполняются равенства

$$[h'h'']=[h''h']=[\lambda],\ [gh']=[g][h'g]=[g'].$$

Тогда проблема эквивалентности на шкале $\mathscr{F}$ разрешима в том и только том случае, когда она разрешима на шкале $\mathscr{F}'$, соответствующей сильно связной компоненте $\mathscr{F}$, содержащей начальное состояние.

Как видно из теоремы, критерий разрешимости проблемы эквивалентности программ на однородных обратимых шкалах имеет простую формулировку. Однако соответствующий этому критерию общий алгоритм разрешения проблемы эквивалентности программ на однородных обратимых шкалах весьма изощрен и трудоемок. В настоящей работе мы несколько усилим требования к шкале $\mathcal{F}$, рассчитывая воспользоваться специфическими особенностями уравновешенных шкал для построения более простой и эффективной разрешающей процедуры. Один из вариантов разрешающего алгоритма для данного класса шкал был разработан Р. И. Подловченко в [10]. Он основывается на приведении анализируемых программ к специальному каноническому виду путем применения систем эквивалентных преобразований. В основе нашего алгоритма лежит простой анализ некоторых метрических свойств графов переходов, составляющих анализируемые программы.

Пусть задана трасса ω в программе π и модель $M=\langle\mathcal{F},\xi\rangle$. Будем говорить, что трасса ω *реализуется в модели* M, если ω является префиксом вычисления $\pi(M)$. Мы будем также говорить, что трасса ω *реализуется на шкале* $\mathcal{F}$, если она реализуема на некоторой модели M шкалы $\mathcal{F}$. Трассы ω_1 и ω_2 в программах π_1, π_2 соответственно назовем *совместными на шкале* $\mathcal{F}$, если обе эти трассы реализуемы одновременно на некоторой модели M шкалы $\mathcal{F}$.

Отметим некоторые простейшие свойства вычислений, которые потребуются в дальнейшем при анализе эквивалентности программ.

Лемма 1. *Трасса* $\omega=(v_1,\delta_1),(v_2,\delta_2),\dots,(v_n,\delta_n)$ *в программе* π *реализуется на модели* $M=\langle\mathcal{F},\xi\rangle$ *в том и только том случае, когда* $\delta_i=\xi([B(v_1)B(v_2)\dots B(v_i)])$ *для каждого* i, $1\leqslant i<n$.

Справедливость леммы вытекает непосредственно из определения вычисления и свойства реализуемости трассы на модели.

Лемма 2. *Трасса* $\omega=(v_1,\delta_1),(v_2,\delta_2),\dots,(v_n,\delta_n)$ *в программе* π *реализуется на шкале* $\mathcal{F}$ *в том и только том случае, когда для каждой пары* i,j, $1\leqslant i<j\leqslant n$, *совпадение состояний* $[B(v_1)B(v_2)\dots B(v_i)]=[B(v_1)B(v_2)\dots B(v_j)]$ *влечет равенство условий* $\delta_i=\delta_j$.

Доказательство. Необходимое условие вытекает непосредственно из определения вычисления на модели. Для обоснования достаточного условия рассмотрим модель $M=\langle\mathcal{F},\xi\rangle$ такую, что $\xi([B(v_1)B(v_2)\dots\dots B(v_i)])=\delta_i$ для каждого i, $1\leqslant i\leqslant m$. В силу соотношения

$$[B(v_1)B(v_2)\dots B(v_i)]=[B(v_1)B(v_2)\dots B(v_j)]\Rightarrow\delta_i=\delta_j$$

указанная функция разметки ξ определена корректно. Далее остается воспользоваться леммой 1.

Лемма 3. *Всякая трасса в программе* π *реализуется на уравновешенной шкале* $\mathcal{F}$.

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что на уравновешенной шкале $\mathcal{F}$ для всякой трассы $\omega=(v_1,\delta_1),(v_2,\delta_2),\dots,(v_n,\delta_n)$ при $i\neq j$ выполняется $[B(v_1)B(v_2)\dots B(v_i)]\neq[B(v_1)B(v_2)\dots B(v_j)]$. Тогда утверждение леммы 3 следует из леммы 2.

Лемма 4. *Трассы*

$$\omega_1=(v_1^1,\delta_1^1),(v_2^1,\delta_2^1),\dots,(v_n^1,\delta_n^1)$$
$$\omega_2=(v_1^2,\delta_1^2),(v_2^2,\delta_2^2),\dots,(v_m^2,\delta_m^2)$$

в программах π_1,π_2 *соответственно являются совместными на уравновешенной шкале* $\mathcal{F}$ *тогда и только тогда, когда для всякого* i, $1\leqslant i\leqslant\min(m,n)$, *из равенства состояний*

$$[B_{\pi_1}(v_1^1)B_{\pi_1}(v_2^1)\dots B_{\pi_1}(v_i^1)]=[B_{\pi_2}(v_1^2)B_{\pi_2}(v_2^2)\dots B_{\pi_2}(v_i^2)]$$

следует равенство логических условий $\delta_i^1 = \delta_i^2$.

Доказательство. Необходимое условие вытекает непосредственно из определения совместности трасс. Для обоснования достаточного условия рассмотрим модель $M = \langle \mathcal{F}, \xi \rangle$ с функцией означивания ξ такой, что $\xi([B_{\pi_1}(v_1^1)B_{\pi_1}(v_2^1)\ldots B_{\pi_1}(v_i^1)]) = \delta_i^1$ и $\xi([B_{\pi_2}(v_1^2)B_{\pi_2}(v_2^2)\ldots B_{\pi_2}(v_j^2)]) = \delta_j^2$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m$ и каждого j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Импликация, фигурирующая в формулировке леммы, гарантирует существование такой функции. Далее остается воспользоваться леммой 2.

Лемма 5. *Пусть* $\mathcal{F}$ *— произвольная шкала. Для любой программы* π *существует редуцированная программа* π' *такая, что* $|\pi'| \leqslant |\pi|$ *и* $\pi \sim_{\mathcal{F}} \pi'$.

Доказательство. Пусть $\pi = \langle V, B, T \rangle$. Обозначим V_1 множество всех преобразователей π, из которых недостижима заключительная вершина **выход**. Обозначим V_2 множество всех преобразователей, которые недостижимы из начальной вершины **вход**. Рассмотрим редуцированную программу $\pi' = \langle V \setminus (V_1 \cup V_2), B', T' \rangle$, где B' — ограничение функции привязки B на множестве преобразователей $V \setminus (V_1 \cup V_2)$, а T' — функция переходов такая, что для каждого преобразователя $v \in V \setminus (V_1 \cup V_2)$ и логического условия $\delta \in \mathcal{C}$ выполняется

$$T'(v, \delta) = \begin{cases} T(v, \delta), & \text{если } T(v, \delta) \in V \setminus (V_1 \cup V_2), \\ \textbf{тупик} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, π и π' обладают одинаковым множеством терминальных трасс и поэтому эквивалентны на любой модели $M = \langle \mathcal{F}, \xi \rangle$.

Лемма 5 позволяет при исследовании проблемы эквивалентности ограничиться рассмотрением одних лишь редуцированных программ. Поэтому все рассматриваемые в дальнейшем программы будем считать редуцированными.

Пусть задана уравновешенная однородная обратимая шкала $\mathcal{F}$. Для распознавания эквивалентности программ π_1, π_2 на шкале $\mathcal{F}$ введем в рассмотрение граф G_0. Вершинами графа G_0 служат всевозможные пары (v^1, v^2), $v^1 \in V_{\pi_1}$, $v^2 \in V_{\pi_2}$. Для каждой вершины $x = (v^1, v^2)$, и пары логических условий (δ^1, δ^2) в графе G_0 имеется дуга, ведущая из вершины x в вершину $(T_{\pi_1}(v^1, \delta^1), T_{\pi_2}(v^2, \delta^2))$. Вершина **(вход, вход)** будет считаться корневой вершиной графа G_0. Для всякого маршрута

$$\alpha = (v_1^1, v_1^2) \xrightarrow{(\delta_1^1, \delta_1^2)} (v_2^1, v_2^2) \xrightarrow{(\delta_2^1, \delta_2^2)} \ldots \xrightarrow{(\delta_m^1, \delta_m^2)} (v_{m+1}^1, v_{m+1}^2)$$

в графе G_0 обозначим $\alpha|_1$ маршрут $(v_1^1, \delta_1^1)(v_2^1, \delta_2^1)\ldots(v_m^1, \delta_m^1)$ в программе π_1. Аналогично определяется $\alpha|_2$. Нетрудно видеть, что какова бы ни была пара равновеликих трасс ω_1 и ω_2 в программах π_1 и π_2, в графе G_0 найдется маршрут α такой, что $\alpha|_1 = \omega_1$ и $\alpha|_2 = \omega_2$.

Корневой маршрут α в графе G_0 назовем *допустимым*, если трассы $\alpha|_1$ и $\alpha|_2$ являются совместными на шкале $\mathcal{F}$. В графе G_0 особо выделим подграф G_1, образованный дугами, помеченными парами одинаковых логических условий (δ, δ).

Лемма 6. *Если корневой маршрут* α *в графе* G_0 *допустим и ведет в вершину* x, *а путь* β *выходит из* x *и проходит по дугам подграфа* G_1, *то корневой маршрут* $\alpha\beta$ *также допустим.*

Доказательство. Коль скоро трассы $\alpha|_1$ и $\alpha|_2$ являются совместными, то для трасс $\alpha\beta|_1$ и $\alpha\beta|_2$ выполняются условия совместности леммы 4.

В графе G_1 для каждой вершины $x=(v^1, v^2)$, $v^1 \neq$ **тупик**, $v^2 \neq$ **тупик**, рассмотрим произвольный кратчайший маршрут β, ведущий из x в вершину $y=(u^1, u^2)$ такую, что **выход** $\in \{u^1, u^2\}$. Коль скоро мы рассматриваем редуцированные программы, хотя бы один такой маршрут обязательно существует. Вершину x графа G_0 назовем

особой, если $u^1=u^2=$ **выход** и $[B_{\pi_1}(\beta|_1)]=[B_{\pi_2}(\beta|_2)]$;

отвергающей, если $\operatorname{rang}(v^1)\neq\operatorname{rang}(v^2)$;

ординарной в остальных случаях.

Заметим, что приведенная здесь классификация вершин графа G_0 зависит от выбора маршрутов β в графе G_1. Тем не менее наши последующие утверждения не будут зависеть от этого выбора маршрутов. Поэтому для определенности мы будем полагать, что классификация вершин была осуществлена при некотором произвольном, но фиксированном распределении кратчайших маршрутов, соединяющих вершины $x=(v^1, v^2)$ с вершинами $y=(u^1, u^2)$ такими, что **выход** $\in\{u^1, u^2\}$.

В графе G_0 удалим все дуги, выходящие из особых вершин и помеченные парами логических условий (δ_1, δ_2) такими, что $\delta_1 \neq \delta_2$. Полученный при этом граф обозначим Γ. Этот граф Γ будет играть роль критериального графа, используемого в работах [3–6, 13] для построения эффективных алгоритмов разрешения эквивалентности программ.

Лемма 7. *Если $\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2$, то в Γ допустимы все корневые маршруты.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что произвольный корневой маршрут в графе Γ будет допустимым тогда и только тогда, когда допустим всякий конечный префикс этого маршрута. Предположим, что в Γ имеется кратчайший недопустимый корневой маршрут

$$\alpha=(v_1^1, v_1^2)\xrightarrow{(\delta_1^1,\,\delta_1^2)}(v_2^1, v_2^2)\xrightarrow{(\delta_2^1,\,\delta_2^2)}\ldots\xrightarrow{(\delta_m^1,\,\delta_m^2)}(v_{m+1}^1, v_{m+1}^2).$$

Согласно лемме 4 это означает, что выполняется равенство состояний

$$[B_{\pi_1}(v_1^1)B_{\pi_1}(v_2^1)\ldots B_{\pi_1}(v_m^1)]=[B_{\pi_2}(v_1^2)B_{\pi_2}(v_2^2)\ldots B_{\pi_2}(v_m^2)],$$

но при этом $\delta_m^1\neq\delta_m^2$. Заметим, что сокращенный маршрут

$$\alpha'=(v_1^1, v_1^2)\xrightarrow{(\delta_1^1,\,\delta_1^2)}(v_2^1, v_2^2)\xrightarrow{(\delta_2^1,\,\delta_2^2)}\ldots\xrightarrow{(\delta_{m-1}^1,\,\delta_{m-1}^2)}(v_m^1, v_m^2)$$

допустим, и хотя бы одна из вершин v_m^1, v_m^2 не является пустым циклом.

Выберем в подграфе G_1 графа Γ произвольный маршрут β, ведущий из вершины (v_m^1, v_m^2) в вершину (u^1, u^2) такую, что **выход** $\in\{u^1, u^2\}$. Согласно лемме 6 корневой маршрут $\alpha'\beta$ в графе Γ является допустимым. Следовательно, трассы $\alpha'\beta|_1$ и $\alpha'\beta|_2$ в программах π_1 и π_2 являются совместными на шкале $\mathcal{F}$. Последнее означает, что для некоторой модели M шкалы $\mathcal{F}$ выполняется $\pi_1(M)=\alpha'\beta|_1$ и $\pi_2(M)=\alpha'\beta|_2$. Коль скоро одна из этих трасс является терминальной, и программы π_1 и π_2 эквивалентны на шкале $\mathcal{F}$, другая трасса также будет терминальной. Отсюда следует $u^1=u^2=$ **выход**. При этом будут выполнены равенства

$$r(\pi_1, M)=[B_{\pi_1}(\alpha'\beta|_1)]=[B_{\pi_2}(\alpha'\beta|_2)]=r(\pi_2, M).$$

Учитывая также, что $[B_{\pi_1}(\alpha'|_1)]=[B_{\pi_2}(\alpha'|_2)]$, а шкала $\mathcal{F}$ является однородной, приходим к выводу о том, что

$$[B_{\pi_1}(\beta|_1)]=[B_{\pi_2}(\beta|_2)].$$

Маршрут β в Γ был выбран произвольно, и это означает, что вершина (v_m^1, v_m^2), из которой исходит этот маршрут, относится к числу особых вершин. Но статус особой вершины (v_m^1, v_m^2) в графе Γ противоречит тому, что из этой вершины исходит дуга, помеченная парой логических условий (δ_m^1, δ_m^2) такой, что $\delta_m^1 \neq \delta_m^2$ (дуги такого вида удаляются из графа G_0 при построении Γ). Полученное противоречие свидетельствует о том, что в критериальном графе Γ отсутствуют недопустимые корневые маршруты.

Лемма 8. *Если $\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2$, то для каждой модели M шкалы $\mathcal{F}$ в графе Γ имеется маршрут α такой, что $\alpha|_1 = \pi_1(M)$, $\alpha|_2 = \pi_2(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную модель $M = \langle \mathcal{F}, \xi \rangle$ и пару вычислений $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ программ π_1 и π_2 на модели M. Предположим, что для конечных префиксов ω_1 и ω_2 длины n вычислений $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ в графе Γ имеется корневой маршрут α такой, что $\alpha|_1 = \omega_1$ и $\alpha|_2 = \omega_2$, а для префиксов длины $n+1$ этих же вычислений подобного корневого маршрута в графе Γ уже не существует. Это возможно в том и только том случае, когда трассы ω_1 и ω_2 в программах π_1 и π_2 ведут в преобразователи v^1 и v^2 соответственно такие, что вершина (v^1, v^2) в графе Γ является особой, и при этом

$$\xi([B_{\pi_1}(\omega_1)]) \neq \xi([B_{\pi_2}(\omega_2)]).$$

Последнее, в частности, означает, что

$$[B_{\pi_1}(\omega_1)] \neq [B_{\pi_2}(\omega_2)].$$

Коль скоро вершина (v^1, v^2) является особой, в подграфе G_1 графа Γ имеется маршрут β, ведущий из этой вершины в вершину **(выход, выход)**, такой, что

$$[B_{\pi_1}(\beta|_1)] = [B_{\pi_2}(\beta|_2)].$$

Согласно лемме 6 корневой маршрут $\alpha\beta$ в графе Γ является допустимым. Принимая во внимание эквивалентность программ π_1 и π_2 на шкале $\mathcal{F}$, отсюда заключаем, что справедливо равенство

$$[B_{\pi_1}(\alpha\beta|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha\beta|_2)].$$

Но тогда, ввиду обратимости шкалы $\mathcal{F}$, должно выполняться и равенство

$$[B_{\pi_1}(\alpha|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha|_2)],$$

которое противоречит соотношению

$$[B_{\pi_1}(\omega_1)] \neq [B_{\pi_2}(\omega_2)].$$

Это означает, что предположение об отсутствии в графе Γ соответствующего корневого маршрута для префиксов длины $n+1$ вычислений $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ несправедливо. Значит для всякой пары вычислений $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ в Γ имеется маршрут α такой, что $\alpha|_1 = \pi_1(M)$, $\alpha|_2 = \pi_2(M)$.

Лемма 9. *Если $\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2$, то для любой особой вершины x в графе Γ справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого корневого маршрута α, ведущего в x, выполняется равенство*

$$[B_{\pi_1}(\alpha|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha|_2)].$$

2. *Для любого маршрута β, ведущего из вершины x в вершину (u^1, u^2) такую, что* **выход** $\in \{u^1, u^2\}$, *выполняются равенства*

$$u^1 = u^2 = \textbf{выход} \quad \textit{и} \quad [B_{\pi_1}(\beta|_1)] = [B_{\pi_2}(\beta|_2)].$$

Доказательство. По определению особой вершины в графе Г из вершины x исходит по крайней мере один маршрут β', проходящий по дугам подграфа G_1 и ведущий в вершину (**выход**, **выход**), причем для этого маршрута будет выполняться равенство

$$[B_{\pi_1}(\beta'|_1)] = [B_{\pi_2}(\beta'|_2)].$$

Рассмотрим произвольный маршрут α из корневой вершины графа Г в вершину x. По лемме 7 маршрут $\alpha\beta'$ будет допустимым маршрутом. Коль скоро трассы $\alpha\beta'|_1$ и $\alpha\beta'|_2$ являются терминальными, существует модель M шкалы $\mathcal{F}$ такая, что $\pi_1(M) = \alpha\beta'|_1$ и $\pi_2(M) = \alpha\beta'|_2$. Поскольку программы π_1 и π_2 эквивалентны на $\mathcal{F}$, выполняется равенство

$$[B_{\pi_1}(\alpha\beta'|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha\beta'|_2)].$$

Учитывая обратимость шкалы $\mathcal{F}$, отсюда приходим к заключению

$$[B_{\pi_1}(\alpha|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha|_2)].$$

Рассмотрим теперь произвольный маршрут β, ведущий из вершины x в вершину (u^1, u^2) такую, что **выход** $\in \{u^1, u^2\}$. По лемме 7 маршрут $\alpha\beta$ в графе Г будет допустимым. Следовательно, трассы $\alpha\beta|_1$ и $\alpha\beta|_2$ являются префиксами вычислений $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ для некоторой модели M шкалы $\mathcal{F}$. Поскольку одна из указанных трасс является терминальной, программы π_1 и π_2 эквивалентны на $\mathcal{F}$, а сама шкала $\mathcal{F}$ уравновешенная, другая трасса также будет терминальной (что означает $u^1 = u^2 =$ **выход**), и при этом будет выполняться равенство

$$[B_{\pi_1}(\alpha\beta|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha\beta|_2)].$$

Ранее мы убедились в том, что

$$[B_{\pi_1}(\alpha|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha|_2)].$$

Принимая во внимание однородность шкалы $\mathcal{F}$, приходим к заключению

$$[B_{\pi_1}(\beta|_1)] = [B_{\pi_2}(\beta|_2)].$$

Лемма 10. *Если $\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2$, то в графе* Г *отвергающие вершины не достижимы из корневой вершины.*

Доказательство. Предположим, что в графе Г некоторая отвергающая вершина (v_1^1, v_1^2) достижима из корня маршрутом α. Для редуцированных программ неравенство $\mathrm{rang}(v_1^1) \neq \mathrm{rang}(v_1^2)$ означает, что $v_1^1 \neq$ **тупик** или $v_1^2 \neq$ **тупик**. Предположим для определенности, что $v_1^1 \neq$ **тупик** и $\mathrm{rang}(v_1^1) < \mathrm{rang}(v_1^2)$. Рассмотрим в программе π_1 кратчайший маршрут

$$\omega = (v_1^1, \delta_1), (v_2^1, \delta_2) \ldots (\textbf{выход}, \delta_{n+1})$$

длины $n = \mathrm{rang}(v^1)$ из преобразователя v^1 в заключительную вершину **выход**. По определению графа G_0 маршруту ω однозначно соответствует маршрут

$$\beta = (v_1^1, v_1^2) \xrightarrow{(\delta_1, \delta_1)} (v_2^1, v_2^2) \xrightarrow{(\delta_2, \delta_2)} \ldots \xrightarrow{(\delta_n, \delta_n)} (\textbf{выход}, v_{n+1}^2)$$

в подграфе G_1, причем $v^2_{n+1} \neq$ **выход**. Поскольку при построении критериального графа Г все дуги подграфа G_1 сохраняются в Г, маршрут β также сохранится в Г. Рассмотрим теперь маршрут $\alpha\beta$ в графе Г. По лемме 7 указанный маршрут будет допустимым. Следовательно, трассы $\alpha\beta|_1$ и $\alpha\beta|_2$ являются равновеликими префиксами вычислений $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ на некоторой модели M шкалы $\mathcal{F}$. При этом трасса $\alpha\beta|_1$ является терминальным вычислением. Коль скоро программы $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ эквивалентны на шкале $\mathcal{F}$, вычисление $\pi_2(M)$ тоже должно быть терминальным, и, следовательно, преобразователь v^2_{n+1} привязан к некоторому оператору. Но тогда

$$|\pi_1(M)|_1 = |\alpha\beta|_1| < |\alpha\beta|_2| \leqslant |\pi_1(M)|_1.$$

Поскольку шкала $\mathcal{F}$ является уравновешенной, это означает, что $r(\pi_1, M) \neq r(\pi_2, M)$ вопреки условию $\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2$. Значит предположение о достижимости отвергающей вершины (v^1_1, v^2_1) из корня критериального графа Г несправедливо.

Лемма 11. *Если $\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2$, то всякий достижимый из корневой вершины графа* Г *цикл, отличный от петли, проходящей через вершину* **(тупик, тупик)**, *проходит через особую вершину.*

Доказательство. Рассмотрим в графе Г произвольную ординарную вершину (v^1_1, v^2_1), достижимую из корневой вершины и отличную от вершины **(тупик, тупик)**. По определению ординарной вершины имеет место равенство $\mathrm{rang}(v^1_1) = \mathrm{rang}(v^2_1) = n$, где n — некоторое натуральное число. Рассмотрим кратчайший маршрут ω в программе π_1 из v^1_1 в **выход**. Длина этого маршрута равна n. Тогда вершина v^1_2, следующая на маршруте ω за вершиной v^1_1 будет иметь ранг $n-1$. Пусть $v^1_2 = T_{\pi_1}(v^1_1, \delta^1)$. Рассмотрим произвольное логическое условие δ^2. Коль скоро пара (v^1_1, v^2_1) является ординарной вершиной Г, из нее выходит дуга, помеченная парой логических условий (δ^1, δ^2), в некоторую вершину $x = (v^1_2, T_{\pi_2}(v^2_1, \delta^2))$ графа Г. Очевидно, вершина x достижима из корня Г, и поэтому в силу леммы 10 не может быть отвергающей. Следовательно $\mathrm{rang}(v^1_2) = \mathrm{rang}(T_{\pi_2}(v^2_1, \delta^2)) = n-1$. Поскольку логическое условие δ^2 было выбрано произвольно, это означает, что всякий последователь v^2_1 в программе π_2 имеет ранг $n-1$. Поменяв в приведенном рассуждении ролями v^1_1 и v^2_1, мы придем к выводу о том, что всякий последователь v^1_1 в программе π_1 имеет ранг $n-1$. Таким образом, в графе Г все непосредственные последователи вершины (v^1_1, v^2_1) имеют один и тот же ранг $n-1$. Теперь нетрудно видеть, что в каждом цикле графа Г, достижимом из корня и отличном от петли, проходящей через вершину **(тупик, тупик)**, должна обязательно быть вершина, на которую не распространяются приведенные выше умозаключения, т. е. неординарная вершина. Коль скоро отвергающие вершины не могут быть достигнуты из корня Г, такая вершина будет особой.

Теорема 2. *Предположим, что программы π_1, π_2 таковы, что в графе* Г *отвергающие вершины не достижимы из корневой вершины и всякий цикл проходит через особую вершину. Тогда $\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2$ тогда и только тогда, когда всякий простой маршрут γ в графе* Г, *начинающийся в достижимой из корня особой вершине x, завершающийся в особой вершине y и проходящий только через ординарные вершины, обладает свойством*

$$[B_{\pi_1}(\gamma|_1)] = [B_{\pi_2}(\gamma|_2)].$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что в графе Г выбран произвольный простой маршрут γ, начинающийся в достижимой из корня особой вершине x, завершающийся в особой вершине y и проходящий только через ординарные вершины. Рассмотрим в графе Г произвольный маршрут α, ведущий из корня в вершину x, и маршрут β, ведущий из y в вершину (**выход, выход**). Такой маршрут β существует по определению особой вершины. Согласно лемме 7 маршрут $\alpha\gamma\beta$ допустим в Г, и поэтому для некоторой модели M шкалы $\mathcal{F}$ справедливо $\pi_1(M) = \alpha\gamma\beta|_1$ и $\pi_2(M) = \alpha\gamma\beta|_2$, причем оба вычисления являются терминальными. Так как $\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2$, имеем $[B_{\pi_1}(\alpha\gamma\beta|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha\gamma\beta|_2)]$. Согласно лемме 9 справедливы равенства $[B_{\pi_1}(\alpha|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha|_2)]$ и $[B_{\pi_1}(\beta|_1)] = [B_{\pi_2}(\beta|_2)]$. Поскольку шкала $\mathcal{F}$ является однородной и сократимой, отсюда получаем $[B_{\pi_1}(\gamma|_1)] = [B_{\pi_2}(\gamma|_2)]$.

Достаточность. Рассмотрим произвольную модель M шкалы $\mathcal{F}$. По лемме 8 в графе Г существует корневой маршрут α такой, что $\pi_1(M) = \alpha|_1$ и $\pi_2(M) = \alpha|_2$. Согласно лемме 11 этот маршрут может быть разбит на простые подмаршруты, каждый из которых ведет из одной особой вершины в другую и проходит только через ординарные вершины. Рассмотрим такое разбиение $\alpha = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_m \ldots$. По условию теоремы для каждого простого подмаршрута γ_m справедливо равенство

$$[B_{\pi_1}(\gamma_m|_1)] = [B_{\pi_2}(\gamma_m|_2)].$$

Но ввиду того, что шкала $\mathcal{F}$ полугрупповая, будет выполняться и равенство

$$[B_{\pi_1}(\alpha|_1)] = [B_{\pi_2}(\alpha|_2)],$$

которое влечет за собой $r(\pi_1, M) = r(\pi_2, M)$.

Теорема 3. *Проблема эквивалентности программ на уравновешенной однородной обратимой разрешимой шкале разрешима.*

Доказательство. Пусть заданы программы π_1 и π_2. Построим для этих программ граф G_0, проведем классификацию его вершин и, удалив лишние дуги, преобразуем его в критериальный граф Г. Все это можно осуществить эффективно, поскольку для такого построения требуется вычислять метрические характеристики программ (ранги преобразователей), решать задачу достижимости вершин и проблему равенства для конечного числа пар термов на разрешимой шкале $\mathcal{F}$. Если в построенном графе Г хоть одна отвергающая вершина достижима из корня, или существует достижимый из корня цикл, проходящий только через ординарные вершины, то согласно леммам 10 и 11 программы π_1 и π_2 будут неэквивалентны на $\mathcal{F}$. В противном случае рассмотрим конечное множество простых маршрутов, соединяющих особые вершины, и воспользуемся теоремой 2 для проверки критерия эквивалентности π_1 и π_2. Коль скоро шкала $\mathcal{F}$ является разрешимой, указанная проверка может быть осуществлена эффективно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушков В. М., Летичевский А. А. Теория дискретных преобразователей // Избранные вопросы алгебры и логики: сб. статей. — Новосибирск: Наука, 1973. — С. 5–39.
2. Ершов А. П. Об операторных схемах Янова // Проблемы кибернетики. Вып. 20. — М.: Наука, 1968. — С. 181–200.
3. Захаров В. А. Быстрые алгоритмы разрешения эквивалентности операторных программ на уравновешенных шкалах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 303–324.
4. Захаров В. А. Быстрые алгоритмы разрешения эквивалентности пропозициональных операторных программ на упорядоченных полугрупповых шкалах // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. — 1999. — № 3. — С. 29–35.

5. Захаров В. А. О разрешимости проблемы эквивалентности в одном классе операторных программ // Прикладная математика и информатика. Вып. 5. — 1999. — С. 90–100.
6. Захаров В. А. Об эффективной разрешимости проблемы эквивалентности линейных унарных рекурсивных программ // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. — М.: Наука, 1999. — С. 255–273.
7. Летичевский А. А. Эквивалентность автоматов относительно полугрупп // Теоретическая кибернетика. Вып. 6. — Киев, 1970. — С. 3–71.
8. Летичевский А. А. Эквивалентность автоматов относительно полугрупп с сокращением // Проблемы кибернетики. Вып. 27. — М.: Наука, 1973. — С. 195–212.
9. Подловченко Р. И. Полугрупповые модели программ // Программирование. — 1981. — № 4. — С. 3–13.
10. Подловченко Р. И. Об одном массовом решении проблемы эквивалентных преобразований схем программ // I. Программирование. — 2000. — № 1. — С. 64–77; II. Программирование. — 2000. — № 2. — С. 3–11.
11. Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов // Проблемы кибернетики. Вып. 1. — М.: Физматгиз, 1958. — С. 75–127.
12. Harel D., Sherman R. Propositional dynamic logic of flowcharts // Lecture Notes in Computer Science. — 1982. — V. 158. — P. 195–206.
13. Zakharov V. A. An efficient and unified approach to the decidability of equivalence of propositional program schemes // Lecture Notes in Computer Science. — 1998. — V. 1443. — P. 247–259.
14. Zakharov V. A. The equivalence model for computational models: Decidable and undecidable cases // Lecture Notes in Computer Science. — 2001. — V. 2055. — P. 133–153.

Поступило в редакцию 27 XI 2001