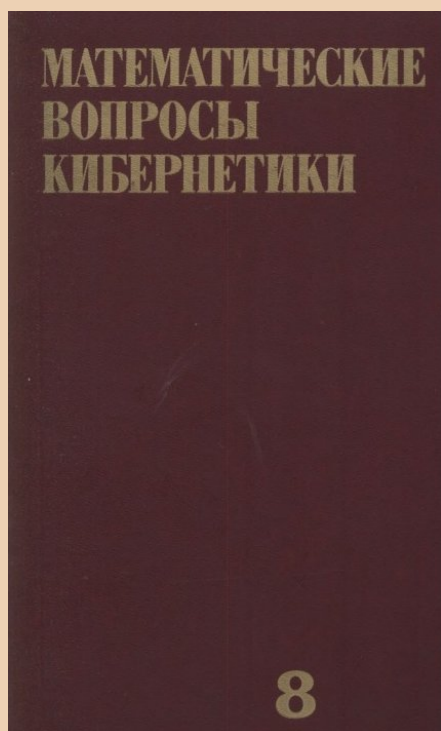




В. Н. Сачков

**Случайные разбиения
множеств**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Сачков В. Н. Случайные разбиения множеств // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. — М.: Наука, 1999. — С. 33–54. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1999-33>

СЛУЧАЙНЫЕ РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

В. Н. САЧКОВ

(МОСКВА)

ВВЕДЕНИЕ

В последние 2–3 десятилетия систематически изучались случайные комбинаторные объекты, которые можно описывать в терминах структуры составляющих их частей, называемых компонентами. В ряде случаев свойства этих объектов полностью определяются свойствами их компонент. Для объектов веса n структура компонент определяется случайным вектором

$$C(n) = (C_1(n), C_2(n), \dots, C_n(n)), \quad (1)$$

где $C_i = C_i(n)$ равно числу компонент величины i , $1 \leq i \leq n$. Вес компоненты величины i равен iC_i , поэтому

$$C_1 + 2C_2 + \dots + nC_n = n. \quad (2)$$

При заданном n объекты веса n выбираются случайно и равновероятно, и в силу соотношения (2) компоненты $C_1, \dots, C_n$ случайного вектора $C(n)$ являются зависимыми целочисленными случайными величинами. Основной интерес обычно представляет изучение при $n \rightarrow \infty$ асимптотических распределений различных случайных величин, определяемых с использованием вектора $C(n)$.

К рассматриваемому виду случайных объектов относятся случайные подстановки степени n , которые впервые изучались В. Л. Гончаровым в 1944 г. [1]. Компонентами этих случайных объектов являются циклы. Следующими объектами, которые интенсивно исследовались в последующие годы, являются случайные однозначные отображения n -множества в себя, компонентами которых являются компоненты связности. Обширная литература имеется по исследованию случайных графов, компонентами которых являются компоненты связности. К таким объектам относятся и случайные разбиения натуральных чисел на слагаемые, рассматриваемые как компоненты, а также разложения случайных многочленов над конечным полем на неприводимые множители, играющие роль компонент. Одним из объектов, которому посвящена настоящая статья, являются случайные разбиения множества, компонентами которых служат блоки разбиения. Ряд результатов по случайным подстановкам, отображениям, графам, разбиениям множеств и др. можно найти в книгах [7] и [8].

Сформулированный выше общий подход к изучению случайных комбинаторных объектов рассматриваемого вида был намечен в статье Р. Арратиа и С. Таваре [9] и, несколько позднее, в работе Л. Мутафчиева [17].

© В. Н. Сачков, 1999

Основные направления асимптотического исследования объектов рассматриваемого вида связаны с использованием метода производящих функций.

Одним из направлений получения асимптотических результатов является сведение рассматриваемой задачи к задаче суммирования независимых случайных величин и применение классических предельных теорем. Другое направление связано с асимптотическими оценками производящих или характеристических функций и использованием соответствующих теорем непрерывности.

Наличие общих подходов к отысканию предельных распределений случайных величин, связанных со случайными объектами рассматриваемого вида, создает основу для унификации методов их асимптотического изучения. Вместе с тем, предельные распределения аналогичных случайных величин для различных конкретных случайных объектов данного вида в целом ряде случаев оказываются различными. Поэтому знание предельных распределений для случайных величин одних объектов не всегда позволяет делать какие-либо обоснованные предположения относительно распределений аналогичных случайных величин для других объектов. Проиллюстрируем это примерами.

Обозначим через ξ_n и ξ_n^* , соответственно, случайные величины, представляющие собой число компонент случайного объекта веса n , а через $M\xi_n$ и $M\xi_n^*$ — их средние значения. Если ξ_n — число циклов в случайной подстановке степени n , а ξ_n^* — число различных циклов, то при $n \rightarrow \infty$

$$M\xi_n = \ln n + C + o(1), \quad M\xi_n^* = \ln n + C - Q + o(1),$$

где $C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера, и

$$Q = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \zeta(n) = 0,65981,$$

где ζ — дзета-функция.

Для случайного однозначного отображения n -множества в себя ξ_n и ξ_n^* представляют собой число компонент связности случайного отображения. При $n \rightarrow \infty$ для асимптотик средних значений имеем

$$M\xi_n = \frac{1}{2} \ln n (1 + o(1)), \quad M\xi_n^* = \frac{1}{2} \ln n (1 + o(1)).$$

В обоих случаях при $n \rightarrow \infty$ величины $M\xi_n$ и $M\xi_n^*$ имеют одинаковый порядок роста. Пусть теперь ξ_n и ξ_n^* — соответственно, число слагаемых и число различных слагаемых в случайном разбиении натурального числа n . Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$M\xi_n = \frac{2}{3\pi} \sqrt{n} \ln n (1 + o(1)), \quad M\xi_n^* = \frac{\sqrt{on}}{\pi} (1 + o(1)).$$

В этом случае имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{M\xi_n}{M\xi_n^*} = A \ln n,$$

где A — некоторая постоянная.

Для случайных разбиений n -множества ξ_n — число блоков, а ξ_n^* — число различных блоков разбиения. Имеем при $n \rightarrow \infty$

$$M\xi_n = \frac{n}{\ln n} (1 + o(1)), \quad M\xi_n^* = e \ln n (1 + o(1))$$

и, следовательно,

$$\frac{M\xi_n}{M\xi_n^*} = B \frac{n}{(\ln n)^2},$$

где B — некоторая постоянная.

Приведенные примеры показывают существенное различие характера поведения средних $M\xi_n$ и $M\xi_n^*$ для некоторых различных случайных комбинаторных объектов рассматриваемого типа.

Характер предельных распределений также может быть различным для различных случайных объектов. Так, известные предельные распределения случайной величины ξ_n для различных объектов как правило асимптотически нормальны при $n \rightarrow \infty$. Предельные распределения случайной величины $\chi_n(l)$, равной числу компонент величины l , при $n \rightarrow \infty$ могут иметь предельные распределения, принадлежащие к различным типам.

К числу первых результатов в этой области следует отнести теорему Л. Харпера об асимптотической нормальности числа блоков в случайном разбиении m -множества при $m \rightarrow \infty$, доказанную в 1961 г. [13]. Другое доказательство этой теоремы было опубликовано в книге [8] в 1982 г. Следующим шагом в изучении случайных разбиений было доказательство В. Н. Сачковым [4] в 1974 г. многомерной предельной теоремы для чисел блоков заданной величины в случайном разбиении и, в частности, асимптотической нормальности распределения для числа блоков данной величины. В 1983 г. Д. Деллаурентис и Б. Питтел модифицировали результаты, относящиеся к многомерной предельной теореме для случайных разбиений, путем рассмотрения некоторого случайного процесса, сходящегося к условному винеровскому процессу [16].

Дальнейшее развитие теорема В. Н. Сачкова об асимптотической нормальности распределения числа блоков данной величины l в случайном разбиении получила в статье Б. Питтела [19], опубликованной в 1997 г., где расширены границы для значений величины блока l , при которых имеет место асимптотическая нормальность. В той же статье доказана асимптотическая логнормальность числа измельчений случайного разбиения m -множества при $m \rightarrow \infty$.

В статье В. Н. Сачкова [4], опубликованной в 1974 г., впервые были найдены предельные распределения максимального и минимального по величине блоков в случайном разбиении m -множества при $m \rightarrow \infty$. В частности, показано, что предельное дважды экспоненциальное распределение величины максимального блока сосредоточено около среднего значения порядка $e \ln m$ и вид его зависит от последовательности значений, которую пробегает m при безграничном увеличении.

В статье В. Коха и Е. Шмутца [12], опубликованной в 1994 г., исследовалось асимптотическое поведение средней кратности максимального блока в случайном разбиении. В другой статье тех же авторов [11], опубликованной несколько ранее, в 1992 г., исследовалась асимптотика вероятности того, что разбиение m -множества при $m \rightarrow \infty$ является безлакунным.

В 1994 г. в статье Р. Арратиа и С. Таваре [9] предложен общий подход к исследованию случайных комбинаторных структур, к которым относятся и случайные разбиения множеств. Для случайных множеств, в частности, получены асимптотические оценки, в том числе в области больших отклонений.

В 1985 г. А. Одлышко и Л. Ричмонд в статье [18] установили, что при $m \rightarrow \infty$ почти все разбиения имеют в среднем $e \ln m$ различных блоков. В 1997 г. Л. Мутафчиев в работе [17] показал, что число различных блоков в случайном разбиении m -множества при $m \rightarrow \infty$ асимптотически нормально.

Случайные разбиения, величины блоков и частота их встречаемости, для которых определяются последовательностями A и Λ , впервые рассматривались в 1973 г. в статье В. Н. Сачкова [3]. Для таких разбиений, названных $A\Lambda$ -разбиениями, рассматривался дополнительный случайный процесс нанесения меток на блоки. Основные результаты статьи касаются предель-

ных распределений случайных величин $\xi(m)$ и η_m , равных числу помеченных блоков и числу элементов, содержащихся в помеченных блоках m -множества, соответственно.

Отдельное место занимают результаты, относящиеся к оценкам величин антицепей в решетке разбиений. Эта задача возникла как следствие вопроса, поставленного в 1970 г. Дж. К. Рота (см. [7]), в котором спрашивалось: обладает ли решетка разбиений m -множества шпернеровским свойством. Последний результат в этой области получен в 1995 г. в статье Е. Канфилда и Л. Харпера [10], где показано, что для достаточно больших m в решетке разбиений m -множества существует такая антицепь, величина которой в $m^{1/35}$ раз больше максимального значения числа Стирлинга второго рода $\sigma(m, k)$, $1 \leq k \leq m$.

Во второй части статьи рассматриваются результаты автора по противоречивым разбиениям, применяемые к изучению бесповторных конъюнктивных нормальных форм.

Приводится формула для числа разбиений m -множества, имеющих заданное число блоков, общих с фиксированным разбиением, и, в частности, формула для числа таких разбиений, противоречивых фиксированному разбиению. Для случайных разбиений m -множества рассматривается случайная величина, равная числу блоков случайного разбиения, общих с фиксированным разбиением. Предельное распределение этой случайной величины зависит от числа единичных блоков в фиксированном разбиении и при $m \rightarrow \infty$ является либо пуассоновским, либо вырожденным.

Аналогичные результаты имеют место и для случайных разбиений с данным числом блоков.

Задача определения количества бесповторных конъюнктивных нормальных форм (б.к.н.ф) с данным числом несущественных переменных эквивалентна определению числа разбиений $2n$ -множества на блоки величины 2, противоречивых с фиксированным разбиением того же вида. Получена формула для числа б.к.н.ф. рассматриваемого вида.

Если на множестве всех б.к.н.ф. от переменных задано равномерное вероятностное распределение, то случайная величина, равная числу несущественных переменных для случайной б.к.н.ф. при $n \rightarrow \infty$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1/2$. Этот результат позволяет получить асимптотику для числа б.к.н.ф., существенно зависящих от всех переменных.

В заключение выводится формула для мощности рассмотренного в статье С. П. Горшкова [2] подкласса $M_1(k)$ класса булевых функций, для которых соответствующие системы уравнений имеют полиномиальную сложность решения. С использованием результатов по противоречивым разбиениям для $m_1(k)$ получена простая формула в виде сходящегося ряда, из которой с использованием асимптотической формулы из книги [8], находится асимптотика для $m_1(k)$ при $k \rightarrow \infty$.

1. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО СЛУЧАЙНЫМ РАЗБИЕНИЯМ

§ 1. Вероятностное распределение числа блоков в случайном разбиении

Асимптотическая нормальность числа блоков в случайном разбиении m -множества при $m \rightarrow \infty$ впервые доказана Л. Харпером в 1961 г. [13]. Доказательство было проведено методом, который в дальнейшем неоднократно использовался в других работах. Схема доказательства, подробно изложенная также в книге [7], состоит в следующем.

Пусть ξ_m — число блоков в случайном разбиении m -множества, $\sigma(m, k)$ — числа Стирлинга второго рода и T_m — числа Белла. Тогда имеем

$$P(\xi_m = k) = \frac{\sigma(m, k)}{T_m}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Если

$$F_m(x) = \sum_{j=0}^m \sigma(m, j) x^j,$$

то производящая функция ξ_m имеет вид

$$P_m(x) = \frac{F_m(x)}{F_m(1)}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Можно показать, что при $m \geq 1$ все корни многочлена $F_m(x)$ различны, действительны и неположительны. Если $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_{m-1}$ — ненулевые корни $F_m(x)$, то

$$P_m(x) = x \left(\frac{x}{1+\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \right) \dots \left(\frac{x}{1+\alpha_{m-1}} + \frac{\alpha_{m-1}}{1+\alpha_{m-1}} \right),$$

и стало быть, $\xi_m = \xi_{m1} + \xi_{m2} + \dots + \xi_{m, m-1} + 1$, где $\xi_{m1}, \xi_{m2}, \dots, \xi_{m, m-1}$ — независимые случайные величины, принимающие два значения 0 и 1, причем

$$P(\xi_{mi} = 1) = \frac{1}{1+\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Из центральной предельной теоремы в формулировке Ляпунова следует, что сумма $\xi_{m1} + \xi_{m2} + \dots + \xi_{m, m-1}$ асимптотически нормальна, если при $m \rightarrow \infty$ выполнено условие

$$\Delta \xi_m = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{(1+\alpha_i)^2} \rightarrow \infty.$$

Так как при $m \rightarrow \infty$ среднее $M\xi_m$ и дисперсия $\Delta \xi_m$ случайной величины ξ_m имеют асимптотики вида

$$M\xi_m = \frac{m}{\ln m} (1 + o(1)),$$

$$\Delta \xi_m = \frac{m}{(\ln m)^2} (1 + o(1)),$$

то тем самым асимптотическая нормальность ξ_m установлена.

В книге В. Н. Сачкова [8], изданной в 1982 г., дано другое доказательство асимптотической нормальности ξ_m . С этой целью для многочлена $F_m(x)$ для всех $|x| < \infty$ получено представление

$$F_m(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m x^k}{k!}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Далее показано, что при $m \rightarrow \infty$ равномерно для всех $x \in (1-\delta, 1+\delta)$, $0 < \delta < 1$ имеет место формула

$$F_m(x) = \frac{R^m e^{R-m-x}}{\sqrt{m/R+1}} (1 + o(1)),$$

где $R = R(x)$ — единственное для достаточно больших m действительное решение уравнения

$$R \ln \frac{R}{x} = m.$$

С использованием этой асимптотической формулы для производящей функции $P_m(x)$ случайной величины ξ_m установлено асимптотическое представление при $m \rightarrow \infty$:

$$P_m(x) = e^{h_m(x)}(1 + o(1))$$

равномерно для всех $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$, $0 < \delta < 1$, где

$$h_m(x) = R - r + m \ln \frac{R}{r} - x + 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{r}{R}}{1 + \frac{x}{R}},$$

причем $r = R(1)$. Так как при $m \rightarrow \infty$

$$h'_m(1) + h''_m(1) = \frac{m}{(\ln m)^2} (1 + o(1)) \rightarrow \infty,$$

$$\frac{h'''_m(x)}{(h'_m(1) + h''_m(1))^{3/2}} = O\left(\frac{(\ln m)^2}{\sqrt{m}}\right) \rightarrow 0,$$

то в соответствии с теоремой 4.2, доказанной в книге [7, стр. 57] случайная величина ξ_m асимптотически нормальна.

В статье М. Вильяма и У. Джета [23], опубликованной в 1994 г., определено понятие эффективной величины блока случайного разбиения m -множества как минимальной функции k_m , такой, что для любой функции L_m , удовлетворяющей условию $L_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, $X(k_m)$ — число блоков в случайном разбиении, величины которых не превосходят $k_m + L_m$, асимптотически нормальны при той же центрировке и нормировке, что и для случайной величины ξ_m . Показано, что такой функцией является $k_m = \frac{r_m}{\delta}$, где $r = r_m$ — единственный положительный корень уравнения $re^r = m$, а δ — единственный корень уравнения $\frac{\delta}{2} - \ln \delta = 1$ в интервале $(0, 1)$.

§ 2. Вероятностное распределение числа блоков заданной величины в случайном разбиении.

Многомерная предельная теорема. Измельчения разбиений

В статье В. Н. Сачкова [4], опубликованной в 1974 г., доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть $m \rightarrow \infty$, $l = \text{const}$ и r — единственное при достаточно больших m вещественное решение уравнения $re^r = m$. Тогда, если $x_m(l)$ — число блоков в случайном разбиении m -множества, то случайная величина

$$x'_m(l) = \frac{x_m(l) - \frac{r^l}{l!}}{\sqrt{\frac{r^l}{l!}}}$$

распределена асимптотически нормально с параметрами $(0, 1)$, т. е. при

$$P(x'_m(l) < x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

В той же статье для $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ доказана нормальность с единичными дисперсиями и независимыми компонентами случайной величины

$$\left(\frac{x_{i_1} - \lambda_{i_1}}{\sqrt{\lambda_{i_1}}}, \dots, \frac{x_{i_k} - \lambda_{i_k}}{\sqrt{\lambda_{i_k}}} \right),$$

где $x_i = x_m(l)$, $\lambda_i = \frac{r^i}{i!}$.

Точнее говоря, доказаны следующие две теоремы.

Теорема 2.2. При $m \rightarrow \infty$ равномерно для всех $|\mu_i| \leq C < \infty$, $i = 1, 2, \dots, k$, имеет место равенство

$$P \left\{ \frac{z_{i_1} - \lambda_{i_1}}{\sqrt{\lambda_{i_1}}} = \mu_1, \dots, \frac{z_{i_k} - \lambda_{i_k}}{\sqrt{\lambda_{i_k}}} = \mu_k \right\} = \frac{(2\pi)^{-k/2}}{\sqrt{\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \mu_s^2 \right\} (1 + o(1)),$$

где $\lambda_i = \frac{r^i}{i!}$, r — единственный при $m \rightarrow \infty$ вещественный корень уравнения $re^r = m$, C — положительная постоянная.

Теорема 2.3. При $m \rightarrow \infty$ для любой квадратируемой k -мерной области L_k имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left\{ \left(\frac{z_{i_1} - \lambda_{i_1}}{\sqrt{\lambda_{i_1}}}, \dots, \frac{z_{i_k} - \lambda_{i_k}}{\sqrt{\lambda_{i_k}}} \right) \in L_k \right\} = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int \dots \int_{L_k} e^{-\frac{1}{2} \sum_{s=1}^k u_s^2} du_1 du_2 \dots du_k.$$

В работе Д. Делаурентиса и Б. Питтела, опубликованной в 1983 г. [16], многомерная предельная теорема 2.2 была модифицирована следующим образом. В статье рассматривается процесс $Y^{(m)}(t)$, $t \in [0, 1]$, определяемый следующим образом: для фиксированного m вводится специальная функция $n^{(m)}(t)$, $t \in [0, 1]$, принимающая целочисленные значения, и рассматривается множество

$$Y^{(m)}(t) = \sum_{s=0}^{n^{(m)}(t)} X_{ms},$$

где X_{ms} — число блоков величины s в случайном разбиении. Таким образом, $Y^{(m)}(t)$ представляет собой число блоков, величины которых не превосходят $n^{(m)}(t)$. Функция $n^{(m)}(t)$ определяется равенствами

$$n^{(m)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ r + y(t)\sqrt{r}, & \text{если } 0 < t < 1, \\ m, & \text{если } t = 1, \end{cases}$$

где $re^r = m$ и $y(t)$ — квантиль порядка t , т. е. $y(t)$ есть корень уравнения

$$\Phi(y) = t,$$

где $\Phi(y)$ — функция нормального распределения с параметрами $(0, 1)$.

В статье показано, что процесс $z^{(m)}(t)$ вида

$$z^{(m)}(t) = \left(Y^{(m)}(t) - \sum_{s=0}^{n^{(m)}(t)} b_{ms} \right) / \sqrt{\sum_{s=0}^m b_{ms}}, \quad b_{ms} = \frac{r^s}{s!},$$

сходится в терминах его конечномерных распределений к гауссовскому процессу $z(t)$ со средним $E(z(t)) = 0$ и ковариационной функцией $F(s, t) = E(z(t)z(s)) = \min\{s, t\} - st$. Конечномерные распределения $z(t)$ совпадают с конечномерными распределениями условного винеровского процесса $B(t)$ при условии выполнения события $\{B(t) = 0\}$.

В статье Б. Питтела [19], опубликованной в 1977 г., теорема об асимптотической нормальности $z_m(l)$ — числа блоков величины l — при $m \rightarrow \infty$

из работы И. Н. Сачкова [4] была обобщена для случая, когда l возрастает с ростом m . Для семейств случайных величин

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(1)} &= \{z_m(l)\}_{l \leq l_1}, & z^{(1)} &= \{z_l\}_{l \leq l_1}, \\ \mathbf{z}^{(2)} &= \{z_m(l)\}_{l \leq l_2}, & z^{(2)} &= \{z_l\}_{l \leq l_2}, \end{aligned}$$

где

$$P(z_l = k) = \frac{\lambda_l^k}{k!} e^{-\lambda_l}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lambda_l = \frac{r^l}{l!}, \quad re^r = m,$$

$$l_1 \leq r \leq l_2, \quad \frac{l_i}{r} \rightarrow 1, \quad i = 1, 2, \quad m \rightarrow \infty,$$

в частности, получена следующая теорема.

Теорема 2.4. При $m \rightarrow \infty$

$$d(\mathbf{z}^{(i)}, z^{(i)}) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2,$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{r - l_1}{\sqrt{\ln n}} \rightarrow \infty, \quad \frac{l_2 - r}{\sqrt{\ln n}} \rightarrow \infty,$$

где $d(u, v)$ — вариационное расстояние между распределениями случайных величин u и v .

В статье Б. Питтела [19] доказана также следующая теорема.

Теорема 2.5. Если J_m — число измельчений случайного разбиения m -множества, то случайная величина

$$J'_m = \frac{\ln J_m - M_m}{\sigma_m}$$

асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$, причем при $m \rightarrow \infty$

$$M_m \sim m \ln \ln m, \quad \sigma_m^2 \sim m(\ln \ln m)^2.$$

В 1983 г. А. Стам в статье [22] предложил способ изучения случайных разбиений с использованием схемы случайного размещения частиц в ячейки. Он показал, что схема равновероятных случайных разбиений m -множества эквивалентна схеме размещения частиц со случайным числом урн u , где

$$P(u = k) = \frac{k^m}{e T_m k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 2.6. Пусть $w_i = |A_i| - 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, где A_i — блок случайного разбиения m -множества, содержащий элемент $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. При $m \rightarrow \infty$ случайные величины $w_1, \dots, w_k$, $1 \leq i < \dots < i_k \leq m$ асимптотически нормальны и независимы.

§ 3. Вероятностное распределение минимальных и максимальных блоков в случайном разбиении. Безлакунные разбиения

В статье В. Н. Сачкова [4], опубликованной в 1974 г., и книге того же автора [7], изданной в 1978 г., показано, что для достаточно больших m и любых l

$$P(\mathbf{z}_m(l) > 0) \geq 1 - \frac{l!}{r^l}, \quad re^r = m.$$

Отсюда следует, что если ν_m — величина наименьшего блока случайного разбиения m -множества, то при $m \rightarrow \infty$

$$P(\nu_m = 1) \rightarrow 1.$$

Кроме того, при ограниченном l и $m \rightarrow \infty$

$$P(x_m(l) > 0) \rightarrow 1.$$

Для случайной величины μ_m , равной размеру максимального блока в случайном разбиении m -множества, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Если $\bar{\mu}_m = \mu_m - [er - \ln \sqrt{2\pi e r} - \ln(e - 1)]$, где $[z]$ — целая часть z , то при $m \rightarrow \infty$ равномерно для всех x , таких, что $|x| < \ln \sqrt{r}$,

$$P(\bar{\mu}_m < x) - e^{-e^{-|x|+\delta}} \rightarrow 0,$$

где $\delta = \{er - \ln \sqrt{2\pi e r} - \ln(e - 1)\}$ — дробная часть соответствующего числа и $re^r = m$.

Теорема 3.1. означает, что при больших m распределение сосредоточено в некоторой окрестности точки $[er - \ln \sqrt{2\pi e r} - \ln(e - 1)]$ и имеет в этой окрестности дважды экспоненциальный характер. Функция $\delta = \delta(m)$ при $m \rightarrow \infty$ не имеет предела, $0 \leq \delta < 1$. Поведение δ зависит от последовательности, которую пробегает m при безграничном увеличении. Точка сосредоточения распределения μ_m при $m \rightarrow \infty$ близка к среднему значению этой случайной величины. Действительно, имеет место асимптотика для среднего значения

$$M\mu_m = E_m = er - \ln \sqrt{r} + O(1), \quad re^r = m,$$

из которой следует, что

$$\bar{\mu}_m = \mu_m - M\mu_m + \ln((e - 1)\sqrt{2\pi e}).$$

В статье М. Коха и Е. Шмутца [12], опубликованной в 1994 г., доказаны две теоремы, дающие уточнение вида асимптотического распределения μ_m при $m \rightarrow \infty$ для случаев, когда $x = -a \ln \ln m$ и $x = b \ln m$, где a и b — положительные постоянные. Эти теоремы позволяют установить поведение среднего значения $M(\theta_m)$ случайной величины θ , представляющей собой среднюю кратность максимального блока в случайном разбиении m -множества. Показано, что если

$$H(y) = \frac{e^y}{\sqrt{2\pi e}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k} \exp\left\{\frac{-e^{y-k}}{\sqrt{2\pi e}(e-1)}\right\},$$

то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup M(\theta_m) = \max_{0 \leq y \leq 1} H(y) = 1,719398\dots,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \inf M(\theta_m) = \min_{0 \leq y \leq 1} H(y) = 1,717164\dots$$

В статье [11] В. Коха и Е. Шмутца, опубликованной в 1992 г., рассматриваются так называемые безлакунные разбиения m -множества. Разбиение m -множества называется *безлакунным*, если для каждого k , заключенного между величинами наименьшего и наибольшего блоков разбиения, имеются блоки размера k . Если G_m — число безлакунных, а T_m — общее число разбиений множества, то для вероятности $\frac{G_m}{T_m}$ того, что случайное разбиение является безлакунным, получено асимптотическое представление

$$\frac{G_m}{T_m} = F(\{er - \ln \sqrt{r}\}) + o(1), \quad re^r = m,$$

где $\{z\}$ — дробная часть z и

$$F(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp \left[-\frac{e^{y-k}}{(e-1)\sqrt{2\pi e}} \right] \cdot \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-\frac{e^{y+j-k}}{\sqrt{2\pi e}} \right) \right) \right)$$

— периодическая функция с периодом 1.

Для вероятности безлакунности случайного разбиения установлены следующие формулы:

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{G_m}{T_m} = \min_{0 \leq y \leq 1} F(y) = 0,70398 \dots,$$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{G_m}{T_m} = \max_{0 \leq y \leq 1} F(y) = 0,70427 \dots$$

Эти результаты получены с использованием теоремы 3.1.

В статье Р. Арратиа и С. Таваре [9], опубликованной в 1994 г., рассматривался общий подход к изучению распределений характеристик случайных комбинаторных структур, к которым относятся случайные отображения, подстановки, разбиения множеств и др. В статье дальнейшее развитие получил предложенный в работе [21] подход к отысканию предельных распределений путем сведения задачи к суммированию независимых случайных величин. Для случайных разбиений доказана, в частности, следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть $C_i(n)$ — число блоков величины i в разбиении n -множества. Для любого $\varepsilon > 0$ для случайного разбиения n -множества с большой вероятностью имеются блоки каждой величины $i \leq (e - \varepsilon) \ln n$ и с малой вероятностью — блоки величины $i \geq (e + \varepsilon) \ln n$. Более точно, для любого $r < \infty$ существует k , $k = k(\varepsilon, r) < \infty$, такое, что при $n \rightarrow \infty$

$$P(C_i(n) = 0) = O((\ln n)^{3/2}/\sqrt{n})$$

и для всех $a = e \cdot x - (3/2 + \varepsilon) \ln \ln n$

$$P(C_i(n) = 0 \text{ для любых } 2 \leq i \leq a) = o(n^{-r}).$$

Кроме того,

$$P\left(\sum_{i \geq b = (e + \varepsilon) \ln n} C_i(n) \geq k\right) = o(n^{-r}),$$

где $xe^x = n$.

§ 4. Случайные разбиения с различными блоками

В статье А. М. Одлышко и Л. Б. Ричмонда [18], опубликованной в 1985 г., показано, что среднее число различных блоков в случайном разбиении m -множества при $m \rightarrow \infty$ асимптотически равно $e \ln m$. Кроме того, установлено, что при $m \rightarrow \infty$ почти все разбиения имеют асимптотически различных размеров блоков.

В 1977 г. Л. Мутафчиев в статье [17] доказал, что если X_m^* — число различных блоков в случайном разбиении m -множества, то при $m \rightarrow \infty$ случайная величина X_m^* асимптотически нормальна, а именно,

$$P\left\{\frac{X_m^* - e \ln m}{\sqrt{\ln \ln m}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

§ 5. Случайные разбиения с ограниченными блоками и с помеченными блоками

В статье В. Н. Сачкова [3], опубликованной в 1973 г., и его книге [7], изданной в 1978 г., рассматривались так называемые AL -разбиения m -множества, для которых величины блоков и частота их встречаемости в разбиении являются элементами некоторых последовательностей A и Λ . На множестве AL -разбиений задается равномерное вероятностное распределение. К реализации некоторого AL -разбиения в результате случайного испытания применяется другой случайный процесс нанесения меток для блоков.

Блок величины k получает метку с вероятностью P_k и остается непомеченным с вероятностью $q_k = 1 - P_k$.

Если $\xi^{(k)}$ — число переменных k блоков в случайном AL -разбиении m -множества и $f(x_1, \dots, x_m; A, \Lambda)$ — производящая функция для $\xi_m(A, \Lambda)$, где $\xi_m(A, \Lambda) = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(m)})$, то доказана следующая формула:

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m(A, \Lambda) f(x_1, \dots, x_m; A, \Lambda) \frac{t^m}{m!} = \prod_{j \in A} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left((P_j x_j + q_j) \frac{t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!},$$

где $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$ и $T_m(A, \Lambda)$ — число AL -разбиений m -множества.

Из этой формулы при $A = (1, 2, \dots)$, $\Lambda = (0, 1, 2, \dots)$ следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m f(x_1, \dots, x_m) \frac{t^m}{m!} = \exp \left\{ e^t - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k (x_k - 1) \frac{t^k}{k!} \right\},$$

где T_m — числа Белла.

Случайные величины $\xi(m)$ и η_m , равные числу помеченных блоков и числу элементов, содержащихся в помеченных блоках, равны

$$\begin{aligned} \xi(m) &= \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots + \xi^{(m)}, \\ \eta_m &= 1 \cdot \xi^{(1)} + 2\xi^{(2)} + \dots + m\xi^{(m)}. \end{aligned}$$

При $m \rightarrow \infty$ дискретные предельные распределения $\xi(m)$, η_m и $\xi^{(l)}$ определяются следующими теоремами.

Теорема 5.1. Если $m \rightarrow \infty$ и $P_j \left(\frac{\lambda}{r} \right)^{-j} \rightarrow 1$, $j = 1, 2, \dots$, $re^r = m$, $0 \leq \lambda < \infty$, то $\xi(m)$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $e^\lambda - 1$.

Теорема 5.2. Если $P_j = \lambda \frac{j}{m}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $0 < \lambda < \infty$, то в пределе при $m \rightarrow \infty$ случайная величина $\xi(m)$ имеет распределение Пуассона с параметром λ .

Теорема 5.3. Если $P_j \left(\frac{\lambda}{r} \right)^{-j} \rightarrow 1$, $j = 1, 2, \dots$, при $m \rightarrow \infty$ и $re^r = m$, $0 < \lambda < \infty$, $0 < l < \infty$, то $\xi^{(l)}$ в пределе имеет распределение Пуассона с параметром $\frac{\lambda^l}{l!}$.

Теорема 5.4. Если $P_j = \delta^j$, $j = 1, 2, \dots$, где $\delta = \delta(m)$, и $r\delta \rightarrow \lambda < \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то η_m имеет в пределе распределение, однозначно определяемое своими моментами, а именно:

$$P(\eta_m = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} T_k e^{-(e^\lambda - 1)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где T_k — числа Белла.

Предельные нормальные распределения для $\xi(m)$ и $\xi^{(l)}$ определяются следующими теоремами.

Теорема 5.5. Если $P_j = \delta^j$, $j = 1, 2, \dots$, где $0 < \delta < 1$, $re^r = m$, то при $m \rightarrow \infty$ случайная величина

$$\frac{\xi(m) - e^{\delta r}}{e^{\delta r/2}}$$

имеет в пределе нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

Теорема 5.6. Если при $m \rightarrow \infty$ выполнено условие $P_l r^l \rightarrow \infty$, $0 < l < \infty$, $re^r = m$, то случайная величина

$$\frac{\xi^{(l)} - P_l r^l / l!}{\sqrt{P_l r^l / l!}}$$

имеет в пределе нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

§ 6. Антицепи в решетке разбиений

Пусть S — конечное множество и $P = (S, \leq)$ — частично упорядоченное множество, полученное заданием на S порядка $\leq$. Два элемента $x, y \in S$ сравнимы, если $x = y$, $x < y$ или $y < x$. Подмножество $C \subseteq S$, в котором любые два элемента сравнимы, называется *цепью*. Если $x, y \in S$, $x < y$ и не существует такого элемента $z \in S$, что $x < z < y$, то говорят, что y покрывает x . Цепь $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ называется насыщенной, если x_{i+1} покрывает x_i . Элемент $\hat{0} \in S$ называется нулем в P , если $\hat{0} \leq x$ для всех $x \in S$. Если P имеет нулевой элемент и каждая насыщенная цепь от $\hat{0}$ до x содержит одно и то же число элементов, то говорят, что частично упорядоченное множество P *ранжировано*. Функция $r(x)$, значения которой равны общей длине насыщенных цепей от $\hat{0}$ до x называется *ранговой функцией*. Множество элементов P , никакие два из которых не сравнимы, называется *антицепью*. В ранжированном частично упорядоченном множестве совокупность элементов данного ранга образует антицепь.

В 1928 г. Е. Шпернер показал, что наибольшая совокупность подмножеств n -множества, никакие два из которых не связаны отношением включения, содержит $\binom{n}{[n/2]}$ подмножеств. В этой связи говорят, что ранжированное частично упорядоченное множество обладает *шпернеровским свойством*, если в нем наибольшая антицепь не превосходит наибольшего ранга.

На множестве Π_n разбиений n -множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ введем отношение частичного порядка, полагая, что разбиения π_1 и π_2 связаны отношением $\pi_1 < \pi_2$, если каждый блок разбиения π_1 есть объединение блоков разбиения π_2 . Нулевым элементом в этом случае является разбиение с единственным блоком $\{1, 2, \dots, n\}$. Множество разбиений ранжировано, и для каждого разбиения $\pi \in \Pi_n$ ранговая функция определяется равенством $r(\pi) = |\pi|$, где $|\pi|$ — число блоков в разбиении π . Если N_j — число блоков величины j в разбиении, т. е.

$$N_j(\pi) = |\{B \in \pi : |B| = j\}|,$$

то имеют место равенства

$$\sum_j N_j(\pi) = |\pi|,$$

$$\sum_j j N_j(\pi) = n.$$

В 1970 г. Дж. К. Рота [7] поставил вопрос: обладает ли решетка Π_n шпернеровским свойством. Е. Канфилд показал, что для достаточно больших n ответ на этот вопрос является отрицательным. Е. Шпернер, а позднее Ша и Клейтман указали границу для n вида $3,4 \cdot 10^6$. Открытым оставался вопрос о том, не будут ли асимптотически равными наибольшая антицепь и наибольший ранг. Л. Харпер в работах [14] и [15], опубликованных в 1985 и 1991 гг., используя непрерывные аналоги проблемы Шпернера сделал попытку доказать существование антицепей, величина которых в 1,68 раз превосходит величину наибольшего ранга.

Наконец, в работе Е. Канфилда и Л. Харпера [10] в 1995 г. был получен следующий результат. Если

$$\Pi_{nk} = \{\pi \in \Pi_n : |\pi| = k\},$$

то хорошо известно, что

$$|\Pi_{nk}| = \sigma(n, k),$$

где $\sigma(n, k)$ — числа Стирлинга второго рода. Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно показать, что для достаточно больших n величина наибольшей антицепи превосходит величину максимального значения числа Стирлинга $\sigma(n, k)$. В статье [10] показано, что для достаточно больших n существует такая антицепь $A \subseteq \Pi_n$, что

$$|A| > n^{1/35} \sigma(n, k_n),$$

где $\sigma(n, k_n) = \max_{1 \leq k \leq n} \sigma(n, k)$. Этот результат базируется на доказательстве асимптотической нормальности случайной величины

$$z_{n,A} = \sum_{j=1}^n A_j N_j,$$

где N_j — число блоков величины j в случайном разбиении $\pi \in \Pi_n$, и $A = (A_1, A_2, \dots)$ — некоторая последовательность действительных чисел.

II. ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ РАЗБИЕНИЯ

В данной главе излагаются новые результаты автора по так называемым противоречивым разбиениям. Это понятие было введено автором в 70-х гг. в связи с изучением некоторых свойств булевых функций.

§ 1. Формулы и вероятностные распределения для противоречивых разбиений

Разбиение m -множества X вида $X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ называется противоречивым с фиксированным разбиением $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, если $Y_i \neq X_j$ для всех i и j , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r$. Для числа таких разбиений справедлива следующая формула:

$$T_m(X_1, X_2, \dots, X_r) = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \binom{|X_1|}{j-1} \cdots \binom{|X_r|}{j-1}. \quad (1.1)$$

Формула (1.1) доказывается методом включения-исключения. Если A_i — свойство разбиения m -множества, состоящее в том, что блок X_i

фиксированного разбиения является блоком рассматриваемого разбиения $1 \leq i \leq r$, то число разбиений, обладающих свойствами $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r$, равно $T_{m-|X_{j_1}|-\dots-|X_{j_k}|}$, где T_m — числа Белла. Если $T_m^{(s)}(X_1, X_2, \dots, X_r)$ — число разбиений m -множества, имеющих ровно s общих блоков с фиксированным разбиением $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, то

$$T_m^{(s)}(X_1, X_2, \dots, X_r) = \sum_{k=s}^r (-1)^{k-s} \binom{k}{s} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} T_{m-|X_{j_1}|-\dots-|X_{j_k}|}, \quad (1.2)$$

$$s = 0, 1, \dots, r.$$

В частности, число разбиений, противоречивых с разбиением $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, равно

$$T_m(X_1, X_2, \dots, X_r) = T_m + \sum_{k=1}^r (-1)^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} T_{m-|X_{j_1}|-\dots-|X_{j_k}|}. \quad (1.3)$$

Используя формулу Добинского

$$T_m = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!},$$

из равенства (1.3) получаем формулу (1.1).

Прежде чем изучать асимптотические свойства противоречивых разбиений установим некоторые вспомогательные соотношения. Будем использовать асимптотическую формулу, выведенную в книге [8, стр. 168].

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+\alpha)^{m-\beta}}{j!} = \sqrt{\frac{R}{m}} R^{m+\alpha-\beta} e^R (1 + o(1)), \quad (1.4)$$

справедливую при ограниченных α и β и $m \rightarrow \infty$, где R — действительный корень уравнения

$$R \ln R = m, \quad (1.5)$$

из которого следует, что

$$R = \frac{m}{\ln m} (1 + o(1)). \quad (1.6)$$

Из формулы (1.4) следует, что при $m \rightarrow \infty$

$$T_{m-\beta} = \sqrt{\frac{R}{m}} R^{m-\beta} e^{R-1} (1 + o(1)). \quad (1.7)$$

При $\beta = 0$ из формулы (1.7) следует асимптотика для чисел Белла

$$T_m = \sqrt{\frac{R}{m}} R^m e^{R-1} (1 + o(1)). \quad (1.8)$$

Пусть $[[1^{\delta_1} 2^{\delta_2} \dots m^{\delta_m}]]$ — вторичная спецификация разбиения $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, т. е. разбиение имеет δ_i блоков величины i , $1 \leq i \leq m$. Тогда можно записать, что

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} T_{m-|X_{j_1}|-\dots-|X_{j_k}|} = \binom{\delta_1}{k} T_{m-k} (1 + \theta_{nk}), \quad (1.9)$$

где

$$\theta_{nk} \leq \left(\frac{r}{\delta_1}\right)^k \frac{T_{m-k-1}}{T_{m-k}}. \quad (1.10)$$

На множестве всех разбиений m -множества зададим равномерное вероятностное распределение и обозначим через $\eta_m^{(r)} = \eta_m(X_1, \dots, X_r)$ случайную величину, равную количеству блоков случайного разбиения, совпадающих с блоками фиксированного разбиения $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$.

Очевидно, что

$$P(\eta_m^{(r)} = s) = \frac{1}{T_m} T_m^{(s)}(X_1, \dots, X_r), \quad s = 0, 1, \dots, r, \quad (1.11)$$

где $T_m^{(s)}(X_1, \dots, X_r)$ определяется формулой (1.2). Биномиальные моменты $\eta_m^{(r)}$ имеют вид

$$B_k^{(r)}(m) = \frac{1}{T_m} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} T_{m - |X_{j_1}| - \dots - |X_{j_k}|}, \quad k = 0, 1, \dots, r. \quad (1.12)$$

В частности, для среднего значения $\eta_m^{(r)}$ имеет место формула

$$M\eta_m^{(r)} = \frac{1}{T_m} \sum_{j=1}^r T_{m - |X_j|}. \quad (1.13)$$

Эту формулу можно записать также в следующем виде

$$M\eta_m^{(r)} = \frac{1}{T_m} \sum_{i=1}^r \alpha_i T_{m-i}. \quad (1.14)$$

Справедлива следующая предельная теорема.

Теорема 1.1. Пусть δ_1 — число единичных блоков в фиксированном разбиении m -множества $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$. При $m \rightarrow \infty$ число блоков случайного разбиения $\eta_m^{(r)}$, совпадающих с блоками фиксированного разбиения имеет следующие предельные распределения:

а) если $\frac{\alpha_1}{R} \rightarrow \lambda > 0$, где $R \ln R = m$, то $\eta_m^{(r)}$ в пределе имеет распределение Пуассона с параметром λ ,

б) если $\frac{\alpha_1}{R} \rightarrow 0$, то $\eta_m^{(r)}$ имеет в пределе вырожденное распределение, а именно,

$$P(\eta_m^{(r)} = 0) \rightarrow 1. \quad (1.15)$$

При $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного k из формул (1.6), (1.7), (1.9), (1.10) и (1.12) имеем

$$B_k^{(r)}(m) = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 + O\left(\frac{(\ln m)^{k+1}}{m}\right) \right). \quad (1.16)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_k^{(r)}(m) = \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.17)$$

Этим пункт а) теоремы доказан.

Из формулы (1.13) получаем, что при

$$M\eta_m^{(r)} = \frac{\alpha_1}{R} + O\left(\frac{(\ln m)^2}{m}\right). \quad (1.18)$$

Из этого соотношения вытекает справедливость пункта б) теоремы.

С л е д с т в и е. Для числа разбиений m -множества, противоречивых с фиксированным разбиением $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, имеющим α_1 единичных блоков, при $m \rightarrow \infty$, $\frac{\alpha_1}{R} \rightarrow \lambda > 0$, $R \ln R = m$, имеет место асимптотическая формула

$$T_m(X_1, X_2, \dots, X_r) = e^{-\lambda} T_m(1 + o(1)), \quad (1.19)$$

где T_m — числа Белла.

§ 2. Противоречивые разбиения с данным числом блоков

Перейдем теперь к рассмотрению противоречивых разбиений с заданным числом блоков. Обозначим через $T_{mn}^{(s)}(X_1, X_2, \dots, X_r)$ — число разбиений m -множества на n блоков, из которых ровно s блоков совпадают с блоками фиксированного разбиения $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$. Используя метод включения-исключения аналогично предыдущему, получаем формулу

$$\begin{aligned} T_{mn}^{(s)}(X_1, X_2, \dots, X_r) = \\ = \sum_{k=s}^{\min(r, n)} (-1)^{k-s} \binom{k}{s} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} \sigma(m - |X_{j_1}| - \dots - |X_{j_k}|, n - k), \quad (1.20) \\ s = 0, 1, \dots, \min(r, n), \end{aligned}$$

где $\sigma(m, n)$ — числа Стирлинга второго рода.

При $s=0$ и из равенства (1.20) получаем формулу для числа разбиений m -множества с n блоками, противоречивых с фиксированным разбиением $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$:

$$T_{mn}(X_1, \dots, X_r) = \sum_{k=0}^{\min(r, n)} (-1)^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} \sigma(m - |X_{j_1}| - \dots - |X_{j_k}|, n - k). \quad (1.21)$$

На множестве всех разбиений m -множества с n блоками зададим равномерное вероятностное распределение и рассмотрим случайную величину $\eta_{mn}^{(r)} = \eta_{mn}(X_1, X_2, \dots, X_r)$, равную числу блоков случайного разбиения, совпадающих с блоками фиксированного разбиения $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$. Очевидно, что

$$P(\eta_{mn}^{(r)} = s) = \frac{1}{\sigma(m, n)} T_{mn}^{(s)}(X_1, X_2, \dots, X_r), \quad s = 0, 1, \dots, \min(r, n), \quad (1.22)$$

где $T_{mn}^{(s)}(X_1, X_2, \dots, X_r)$ определяется формулой (1.20). Биномиальные моменты $\eta_{mn}^{(r)}$ имеют вид

$$B_k^{(r)}(m, n) = \frac{1}{\sigma(m, n)} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} \sigma(m - |X_{j_1}| - \dots - |X_{j_k}|, n - k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.23)$$

Для среднего значения $\eta_{mn}^{(r)}$ имеем следующее выражение

$$M\eta_{mn}^{(r)} = \frac{1}{\sigma(m, n)} \sum_{j=1}^{\min(r, n)} \sigma(m - |X_j|, n - 1). \quad (1.24)$$

Если разбиение $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ имеет α_i блоков величины i , $1 \leq i \leq m$, то формулу (1.24) можно записать в следующем виде:

$$M\eta_{mn}^{(r)} = \frac{1}{\sigma(m, n)} \sum_{i=1}^{m-n+1} \alpha_i \sigma(m - i, n - 1). \quad (1.25)$$

Используя известную формулу для чисел Стирлинга второго рода [8]

$$\sigma(m, n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)^m, \quad n = 0, 1, \dots, m, \quad (1.26)$$

и неравенства Бонферрони, получаем, что

$$1 - e^{-\frac{m}{n} + \ln n} \leq \frac{n! \sigma(m, n)}{nm} \leq 1. \quad (1.27)$$

Из этого неравенства следует, что если при $m \rightarrow \infty$ выполнено условие

$$\frac{m}{n} - \ln n = \gamma \rightarrow \infty, \quad (1.28)$$

то имеет место асимптотическая формула

$$\sigma(m, n) = \frac{n^m}{n!} (1 + o(1)). \quad (1.29)$$

Из асимптотической формулы Эрдеша-Секереша [6]

$$\sigma(m, n) = \frac{n^m}{n!} \exp \left[\left(\frac{m}{2n} - n \right) e^{-\frac{m}{n}} \right] (1 + o(1)), \quad (1.30)$$

справедливой при $n < \frac{m}{\ln m}$ и $m \rightarrow \infty$, следует, что если выполнено условие

$$\frac{m}{n \ln m} = \gamma(m) > 1, \quad (1.31)$$

то формула (1.29) также справедлива.

Если формула (1.29) имеет место, то при $m \rightarrow \infty$ из формулы (1.23) получаем следующую асимптотику для биномиальных моментов

$$B_k^{(r)}(m, n) = e^{-k(\frac{m}{n} - \ln n)} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} \frac{1}{(n-k)^{|X_{j_1}| + \dots + |X_{j_k}|}} (1 + o(1)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.32)$$

В частности, для среднего значения $\xi_{mn}^{(r)}$ из формулы (1.24) получаем асимптотическую формулу

$$M_{mn}^{(r)} = e^{-\frac{m}{n} + \ln n} \sum_{j=1}^r \frac{1}{(n-1)^{|X_j|}}. \quad (1.33)$$

Из формул (1.32) и (1.33) следует предельная теорема.

Теорема 1.2. Если при $m \rightarrow \infty$ выполнено хотя бы одно из условий (1.28) и (1.31), то предельным распределением $\eta_{mn}^{(r)}$ является распределение Пуассона с параметром λ , если для любого $k = 0, 1, \dots$

$$e^{-k(\frac{m}{n} - \ln n)} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} \frac{1}{(n-k)^{|X_{j_1}| + \dots + |X_{j_k}|}} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (1.34)$$

и в пределе является вырожденным распределением, если

$$e^{-\frac{m}{n} + \ln n} \sum_{j=1}^r \frac{1}{(n-1)^{|X_j|}} \rightarrow 0. \quad (1.35)$$

Условия (1.34) и (1.35) являются трудными для проверки, поэтому найдем более ограничительные, но простые для проверки условия для предельных пуассоновского и вырожденного распределений.

Из очевидного неравенства

$$\sum_{j=1}^r \frac{1}{(n-1)^{|X_j|}} \leq \frac{r}{n-1} \quad (1.36)$$

и условия (1.35) получаем следствие из теоремы 1.2.

С л е д с т в и е 1. Если при $t \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$te^{-\frac{r}{n}} \rightarrow 0, \quad (1.37)$$

то случайная величина $\eta_{mn}^{(r)}$ в пределе имеет вырожденное распределение.

Из соотношений (1.28) и (1.37) следует, что для невырожденности распределения $\eta_{mn}^{(r)}$ при $t \rightarrow \infty$ необходимо выполнение условия

$$\frac{r}{n} \rightarrow \infty. \quad (1.38)$$

Если α_1 — число единичных блоков в разбиении $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, то имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^r \frac{1}{(n-1)^{|X_j|}} = \frac{\alpha_1}{n-1} (1+R), \quad (1.39)$$

где

$$R \leq \frac{r}{\alpha_1(n-1)} \quad (1.40)$$

Из соотношений (1.38) и (1.39) вытекает другое следствие.

С л е д с т в и е 2. Если при $t \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$\alpha_1 e^{-\frac{r}{n}} \rightarrow 0, \quad \frac{r}{\alpha_1(n-1)} < \infty, \quad (1.41)$$

то случайная величина $\eta_{mn}^{(r)}$ в пределе имеет вырожденное распределение.

Из соотношений

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} \frac{1}{(n-k)^{|X_{j_1}| + \dots + |X_{j_k}|}} = \frac{1}{(n-k)^k} \binom{\alpha_1}{k} (1+R_1), \quad (1.42)$$

$$R_1 \leq \frac{1}{n-k} \left(\frac{r}{\alpha_1} \right)^k, \quad k=0, 1, \dots, \quad (1.43)$$

получаем условие для предельного Пуассоновского распределения.

С л е д с т в и е 3. Если при $t \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$\frac{m}{n} - \ln \alpha_1 \rightarrow \theta < \infty, \quad \frac{r}{\alpha_1} = O(\ln n), \quad (1.44)$$

то случайная величина $\eta_{mn}^{(r)}$ в пределе имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = e^{-\theta}$.

Будем считать, что разбиение m -множества X с n блоками принадлежит j -му классу, если блок, содержащий фиксированный элемент x , $x \in X$, содержит j элементов. Число разбиений в j -м классе равно

$$\binom{m-1}{j-1} \sigma(m-j, n-1), \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение

$$\sigma(m, n) = \sum_{j=1}^{m-n+1} \binom{m-1}{j-1} \sigma(m-j, n-1).$$

Из этого рекуррентного соотношения имеем неравенство

$$\sigma(m, n) \geq \binom{m-1}{j-1} \sigma(m-j, n-1), \quad 1 \leq j \leq m-n+1.$$

С использованием этого неравенства из формулы (1.25) находим, что

$$M\eta_{mn}^{(r)} = \alpha_1 \frac{\sigma(m-1, n-1)}{\sigma(m, n)} + R_{mn},$$

где

$$R_{mn} \leq \frac{\alpha_2}{m-1} + \frac{2(m-\alpha_2)}{(m-1)(m-2)}.$$

Таким образом, если при $m \rightarrow \infty$ выполнено хотя бы одно из условий (1.28) или (1.31) и $\alpha_2 = o(m)$, то

$$M\eta_{mn}^{(r)} = \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-1} (1 + o(1)). \quad (1.45)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $m \rightarrow \infty$ основной вклад в число совпадающих блоков фиксированного и случайного разбиений дают единичные блоки фиксированного разбиения.

§ 3. Бесповторные конъюнктивные нормальные формы

Пусть дано множество переменных $X = \{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$, где $x_i = 0, 1$, $\bar{x}_i = 1 - x_i$, $1 \leq i \leq n$. Будем рассматривать булевы функции, определяемые бесповторными конъюнктивными нормальными формами (б.к.н.ф). Для задания б.к.н.ф. будем использовать некоторое разбиения $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ такое, что $|X_i| = 2$, $1 \leq i \leq n$, и записывать б.к.н.ф. в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (x\mu \vee \bar{x}_\nu)_{x_\mu, x_\nu \in X_i}, \quad (1.46)$$

где знак $\vee$ означает дизъюнкцию переменных, принадлежащих некоторому блоку разбиения. Ясно, что если для некоторого i , $1 \leq i \leq l$, имеем $x_\mu, \bar{x}_\mu \in X_i$, то $f(x_1, \dots, x_n)$ от переменной x_μ зависит несущественно.

Отсюда следует, что $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных тогда и только тогда, когда разбиение $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ противоречиво фиксированному разбиению

$$X = \{x_1, \bar{x}_1\} \cup \{x_2, \bar{x}_2\} \cup \dots \cup \{x_n, \bar{x}_n\}. \quad (1.47)$$

Общее число разбиений $2n$ множества на n блоков, каждый величины 2, равно $(2n)!/2^n \cdot n!$. Обозначим через A_i свойство, состоящее в том, что некоторый блок X_j разбиения совпадает с блоком $\{x_i, \bar{x}_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Для $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$, имеем формулу для числа разбиений обладающих свойствами $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$

$$M(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}(n-k)!}. \quad (1.48)$$

Таким образом, число бесповторных конъюнктивных нормальных форм, несущественно зависящих от r переменных, равно

$$M_n(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{n}{k} \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}(n-k)!}, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (1.49)$$

В частности, число б.к.н.ф., существенно зависящих от всех своих переменных равно

$$M_n = M_n(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}(n-k)!}. \quad (1.50)$$

Если на множестве б.к.н.ф. задано равномерное вероятностное распределение и η_n — случайная величина, равная числу несущественных переменных в случайной б.к.н.ф., то

$$P(\eta_n = r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{2^k}{k!} \frac{(n)_k^2}{(2n)_{2k}}, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (1.51)$$

Биномиальные моменты случайной величины η_n имеют вид

$$B_{kn} = \frac{2^k}{k!} \frac{(n)_k^2}{(2n)_{2k}}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.52)$$

Из этой формулы при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$B_{kn} \rightarrow \frac{1}{2^k k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.53)$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$P(\eta_n = r) \rightarrow \frac{1}{2^r r!} e^{-1/2}, \quad r = 0, 1, \dots \quad (1.54)$$

Таким образом, для числа б.к.н.ф., существенно зависящих от всех своих переменных, при $n \rightarrow \infty$ имеем асимптотическую формулу

$$M_n = n^n \left(\frac{2}{e} \right)^{n+1/2} (1 + o(1)). \quad (1.55)$$

§ 4. Булевы функции с полиномиальной сложностью решения систем соответствующих уравнений

Подкласс $M_1(k)$ булевых функций $f(x_1, \dots, x_k)$ класса функций с полиномиальной сложностью решения соответствующих систем уравнений определяется в статье С. П. Горшкова [2] равенством

$$f \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{t_1} x_{s_i}^{\alpha_i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=t_1+1}^t (x_{s_{i_1}} \oplus x_{s_{i_2}} \oplus 1) \right) \quad (1.56)$$

а мощность этого класса $m_1(k)$ определяется формулой

$$m_1(k) = 1 + \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} 2^i \widehat{T}_{r-i}, \quad (1.57)$$

где $\widehat{T}_r$ — число разбиений r -множества без единичных блоков, причем $\widehat{T}_r$ предложено вычислять по формуле

$$\widehat{T}_r = \sum_{n=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \widehat{\sigma}(r, n), \quad (1.58)$$

где $\hat{\sigma}(r, n)$ — число разбиений r -множества на n блоков, среди которых нет единичных, — удовлетворяет известному рекуррентному соотношению

$$\hat{\sigma}(r+1, n) = n\hat{\sigma}(r, n) + r\hat{\sigma}(r-1, n-1) \quad (1.59)$$

с соответствующими начальными условиями.

Формулы (1.57), (1.58) и (1.59), а также грубые точные и асимптотические оценки затрудняют вычисления для $m_1(k)$ и мало дают информации о поведении $m_1(k)$ при $k \rightarrow \infty$.

Использование указанного выше подхода к перечислению противоречивых разбиений позволяет получить простую точную формулу и асимптотику для вычисления $m_1(k)$. Действительно, так как величина $\hat{T}_r$ представляет собой число разбиений r -множества, противоречивых с разбиением все блоки которого единичные, то согласно формуле (1.1)

$$T_r = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1)^r}{j!}. \quad (1.60)$$

Теперь, подставляя выражение (1.60) для T_r в формулу (1.57) и проводя простые преобразования, получаем, что

$$m_1(k) = 1 + \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+2)^k}{j!}. \quad (1.61)$$

Далее, используя при $\alpha = 2$, $\beta = 0$ асимптотическую формулу (1.4), получаем при $k \rightarrow \infty$ асимптотику

$$m_1(k) = \sqrt{\frac{R}{k}} R^{k+2} e^{R-1} (1 + o(1)), \quad (1.62)$$

где R — действительный корень уравнения

$$R \ln R = k. \quad (1.63)$$

Отметим, что для R помимо асимптотической формулы (1.6) известно также асимптотическое разложение, аналогичное асимптотическому разложению (8.6) на стр. 285 книги [6]. Сравнение асимптотики (1.62) с асимптотической формулой (1.8) для чисел Белла показывает, что с учетом формулы (1.6) имеем при $k \rightarrow \infty$ предельное соотношение

$$\frac{m_1(k)}{T_k} \left(\frac{\ln k}{k} \right)^2 \rightarrow 1. \quad (1.64)$$

Это дает достаточно полную информацию о поведении чисел $m_1(k)$ при $k \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1944. — Т. 8, № 1. — С. 3–48.
2. Горшков С. П. О пересечениях классов мультиафинных, биюнктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций // Обозр. прикл. и промышл. матем. — 1977. — Т. 4, Вып. 2. — С. 238–259.
3. Сачков В. Н. Случайные разбиения множеств с помеченными подмножествами // Матем. сборник. — 1973. — Т. 92(134), № 3(11). — С. 491–502.

4. Сачков В. Н. Случайные разбиения множеств // Теор. вероятн. и ее примен. — 1974. — Т. 19, № 1. — С. 178–194.
5. Сачков В. Н. Случайные разбиения // Тр. II Всесоюзн. семин. по комбинаторной математике. Ч. 1. — М.: Сов. радио, 1975.
6. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.
7. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.
8. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982.
9. Arratia R., Tavaré S. Independent process approximations for random combinatorial structures // Adv. in Math. — 1994. — V. 104. — P. 90–154.
10. Canfield E., Harper L. Large antichains in the partition lattice // Random Structures and Algorithms. — 1995. — V. 6, № 1.
11. Coh W., Schmutz E. Gap-free set partitions // Random Structures and Algorithms. — 1992. — V. 3, № 1.
12. Coh W., Schmutz E. Random set partitions // SIAM J. Discr. Math. — 1994. — V. 7, № 3. — P. 419–436.
13. Harper L. Stirling behavior is asymptotically normal // Ann. Math. Stat. — 1961. — V. 38, № 2.
14. Harper L. On continuous analog of Sperner's problem // Pacif. J. Math. — 1985. — V. 118. — P. 411–425.
15. Harper L. On continuous analog of Ford–Fulkerson flows in networks and its application to problem of Rota // Adv. Appl. Math. — 1991. — V. 12. — P. 82–90.
16. DeLaurentis J., Pittel B. Counting subsets of the random partition and the «brownian bridge» process // Stochast. Processes and Their Appl. — 1983. — V. 15. — P. 155–167.
17. Mutaľchiev L. Limiting distributions for the number of distinct component sizes in relational structures // J. Comb. Theory. — 1997. — V. A79. — P. 1–35.
18. Odlyzko A., Richmond L. On the number of distinct block sizes in partitions of set // J. Comb. Theory. — 1985. — V. A38. — P. 170–181.
19. Pittel B. Random set partitions: asymptotics of subset counts // J. Comb. Theory. — 1997. — V. A79. — P. 326–359.
20. Rota G.-C. A generalization of Sperner theoreme // J. Comb. Theory. — 1967. — V. 2. — P. 104.
21. Shepp L., Lloyd S. Ordered cycle lengths in random permutation // Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — V. 121. — P. 340–357.
22. Stam A. Generation of a random partition of finite set by urn model // J. Comb. Theory. — 1983. — V. A35. — P. 231–240.
23. William M., Jet W. On effective block size in Harper's theorem // Math. and Appl. Anal. — 1994. — V. 1, № 2. — P. 119–142.

Поступило в редакцию 11 VI 1999