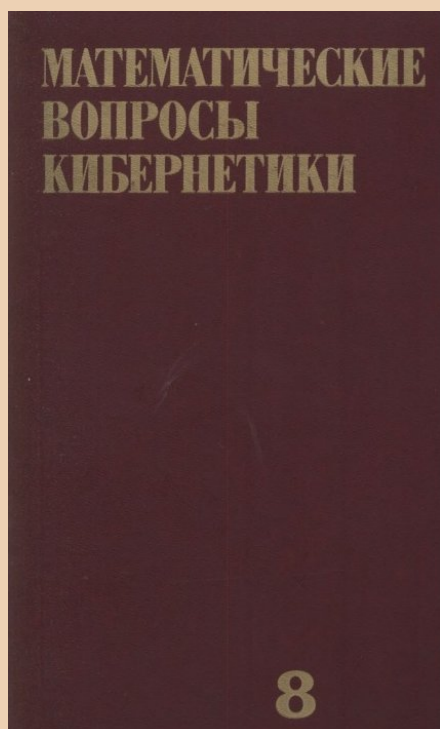




**Р. Г. Стронгин,
К. А. Баркалов**

**О сходимости
индексного алгоритма
в задачах глобальной
оптимизации с ε -
резервированными
решениями**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Стронгин Р. Г., Баркалов К. А. О сходимости индексного алгоритма в задачах глобальной оптимизации с ε -резервированными решениями // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. — М.: Наука, 1999. — С. 273–288. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1999-273>

О СХОДИМОСТИ ИНДЕКСНОГО АЛГОРИТМА В ЗАДАЧАХ УСЛОВНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ε -РЕЗЕРВИРОВАННЫМИ РЕШЕНИЯМИ *)

Р. Г. СТРОНГИН, К. А. БАРКАЛОВ

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

Работа продолжает исследование предложенного в [1, 3, 4, 6] индексного метода для решения условных задач многоэкстремальной оптимизации с целевой функцией и левыми частями ограничений, удовлетворяющими условию Липшица. Рассматриваются одномерные задачи, имеющие ε -резервированные решения, введенные в [5, 7]. Установлены верхние границы значений резервов, при соблюдении которых сохраняется сходимость метода к точному условному оптимуму многоэкстремальной задачи. Путем построения оценок плотности испытаний в подынтервалах области поиска показано, что увеличение используемых в алгоритме значений резервов ведет к ускорению сходимости метода. Предложена новая модификация алгоритма, использующая адаптивные оценки резервов. Приведены результаты численных экспериментов.

§ 1. Задачи условной глобальной оптимизации с не всюду определенными функционалами и индексная схема редукции в задаче без ограничений

Рассмотрим одномерную задачу условной глобальной минимизации вида

$$\varphi(x^*) = \min\{\varphi(x): x \in [a, b], g_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m\} \quad (1.1)$$

в предположении, что целевая функция φ (в дальнейшем обозначаемая также g_{m+1} , т. е. $g_{m+1}(x) = \varphi(x)$) и левые части ограничений g_i , $1 \leq i \leq m$, являются липшицевыми функциями с соответствующими константами L_i , $1 \leq i \leq m+1$. В общем случае все эти функции могут быть многоэкстремальными.

В работах [1, 3, 4, 6] задача (1.1) рассмотрена с учетом того обстоятельства, что во многих приложениях некоторые из функционалов g_i , $1 \leq i \leq m+1$, могут быть определены не во всей области поиска $[a, b]$.

*) Работа выполнена при поддержке ФЦНТП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники гражданского назначения» (подпрограмма «Перспективные информационные технологии», направление «Автоматизация проектирования», проект 297).

Так, например, в задачах оптимального проектирования технических систем некоторые характеристики оказываются неопределенными, если не выполнены представленные частью ограничений задачи (1.1) условия функционирования системы. Это обстоятельство можно учесть, приняв, что каждая функция g_i , $1 \leq i \leq m+1$, определена и вычислима лишь в соответствующей подобласти $Q_i \subset [a, b]$, причем

$$Q_1 = [a, b], \quad Q_{i+1} = \{x \in Q_i: g_i(x) \leq 0\}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.2)$$

Очевидно, что принятая схема задания областей определения предполагает порядок нумерации величин g_i , отвечающий указанной выше связи определенности функционалов с выполнимостью ограничений.

С учетом условий (1.2), исходная задача (1.1) может быть представлена в виде

$$\varphi(x^*) = \min\{g_{m+1}(x): x \in Q_{m+1}\}, \quad (1.3)$$

которая и названа задачей с частично определенными целевой функцией и ограничениями (см. [1, 3, 4, 6]).

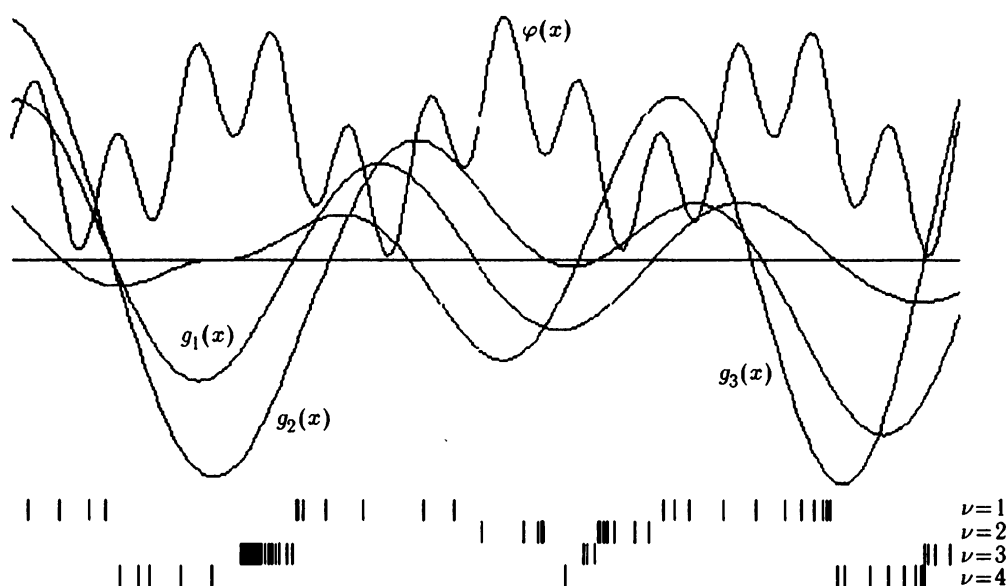


Рис. 1

Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу (1.1) для случая $x \in [-0,6; 2,2]$, $m = 3$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \cos(18x - 3) \sin(10x - 7) + 1, \\ g_1(x) &= \exp(-x/2) \sin(6x - 1,5), \\ g_2(x) &= \sin(4x - 2,2) + \cos(6x - 2,9), \\ g_3(x) &= |x| \sin(2\pi x - 0,5). \end{aligned}$$

Функции g_i , $1 \leq i \leq 4$, изображены кривыми на рис. 1. В предположении частичной определенности, соответствующие областям (1.2) дуги этих функций представлены на рис. 2.

определенную и вычислимую всюду в $[a, b]$. Ее значение в точке x есть либо значение левой части первого ограничения, нарушенного в этой точке (случай, когда $\nu \leq m$), либо значение минимизируемой функции (случай, когда $\nu = m + 1$). Поэтому определение значения $f(x)$, $x \in [a, b]$, сводится к последовательному вычислению величин $g_i(x)$, $1 \leq i \leq \nu = \nu(x)$, т. е. последующее значение $g_{i+1}(x)$ вычисляется лишь в случае, если $g_i(x) \leq 0$. Процесс вычислений завершается либо в результате установления неравенства $g_\nu(x) > 0$, либо в результате достижения значения $\nu(x) = m + 1$.

Таким образом, описанная процедура, названная *испытанием* в точке x , автоматически приводит и к определению индекса ν этой точки, ибо условия (1.4) эквивалентны условиям

$$g_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq \nu - 1, \quad g_\nu(x) > 0,$$

где последнее неравенство несущественно, если $\nu = m + 1$. Пара значений

$$z = f(x) = g_\nu(x), \quad \nu = \nu(x), \quad (1.8)$$

порожденная испытанием в точке $x \in [a, b]$, называется *результатом испытания*.

Основная идея *индексного подхода*, предложенного в уже цитированных работах [1, 3, 4, 6], состоит в редукции условной задачи (1.5) к безусловной задаче

$$\psi(x^*) = \min\{\psi(x): x \in [a, b]\}, \quad \psi(x) = \begin{cases} g_\nu(x)/L_\nu, & \nu < M, \\ (g_M(x) - g_M^*)/L_M, & \nu = M, \end{cases}$$

решение x^* которой является также решением (1.5). Заметим, что значения констант Липшица L_ν , $1 \leq \nu \leq M$, и величина g_M^* являются неизвестными. Однако, как показано в цитированных работах, их можно заменить адаптивными оценками, получаемыми в процессе решения задачи на основании результатов испытаний (1.8).

§ 2. Индексный алгоритм глобального поиска

Алгоритм. Первое испытание осуществляется в произвольной внутренней точке $x^1 \in (a, b)$. Выбор точки x^{k+1} , $k \geq 1$, любого последующего $(k+1)$ -го испытания определяется следующими правилами.

Правило 1. Перенумеровать точки $x^1, \dots, x^k$ предшествующих испытаний нижними индексами в порядке увеличения значений координаты, т. е.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_k < x_{k+1} = b, \quad (2.1)$$

и сопоставить им значения $z_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq k$, из (1.7), вычисленные в этих точках; точки $x_0 = a$ и $x_{k+1} = b$ введены дополнительно (значения z_0 и z_{k+1} не определены) для удобства последующих обозначений.

Правило 2. Провести классификацию номеров i , $1 \leq i \leq k$, точек из ряда (2.1) по числу ограничений задачи, выполняющихся в этих точках, путем построения множеств

$$I_\nu = \{i: 1 \leq i \leq k, \nu = \nu(x_i)\}, \quad 1 \leq \nu \leq m + 1,$$

содержащих номера всех точек x_i , $1 \leq i \leq k$, имеющих индексы, равные одному и тому же значению ν . Граничные точки $x_0 = a$ и $x_{k+1} = b$ интерпретируются как имеющие нулевые индексы, и им сопоставляется дополнительное множество $I_0 = \{0, k + 1\}$.

П р а в и л о 3. Построить объединения

$$S_\nu = I_0 \cup \dots \cup I_{\nu-1}, \quad 1 \leq \nu \leq m+1,$$

содержащие номера всех точек из (2.1), имеющих индексы меньше чем ν , и

$$T_\nu = I_{\nu+1} \cup \dots \cup I_{m+1} \cup I_{m+2}, \quad 1 \leq \nu \leq m+1,$$

содержащие номера всех точек из (2.1), имеющих индексы большие чем ν ($I_{m+2} = \emptyset$).

П р а в и л о 4. Вычислить текущие нижние границы

$$\mu_\nu = \max\{|z_i - z_j|/(x_i - x_j): i, j \in I_\nu, i > j\} \quad (2.2)$$

для неизвестных констант Липшица L_ν функций g_ν , $1 \leq \nu \leq m+1$. Если множество I_ν содержит менее двух элементов или, если μ_ν из (2.2) оказывается равным нулю, то принять $\mu_\nu = 1$. Из (2.2) следует, что оценки μ_ν являются неубывающими, начиная с момента, когда (2.2) рождает первое положительное значение μ_ν .

П р а в и л о 5. Для всех непустых множеств I_ν , $1 \leq \nu \leq m+1$, определить величины

$$z_\nu^* = \begin{cases} \min\{z_i: i \in I_\nu\}, & T_\nu = \emptyset, \\ -\varepsilon_\nu, & T_\nu \neq \emptyset, \end{cases} \quad (2.3)$$

где вектор $\varepsilon_R = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ с неотрицательными компонентами является заданным (исследование его влияния на функционирование алгоритма составляет цель настоящей работы).

Если $\omega \leq m$ и $I_\omega \neq \emptyset$, $T_\omega = \emptyset$, то $z_\omega^* > 0$ и $z_\nu^* \leq 0$, $1 \leq \nu < \omega$. При этом ω можно интерпретировать как номер «текущей целевой функции» $g_\omega(x)$, которую минимизирует алгоритм. Поэтому z_ω^* есть лучшая (не возрастающая) верхняя граница для минимального значения этой функции. До тех пор, пока ω не достигает значения $m+1$, разные функции $g_i(x)$ могут играть роль $g_\omega(x)$. При $\omega = m+1$, z_{m+1}^* является лучшей текущей оценкой неизвестного значения $\varphi(x^*)$ из (1.1). Фактически, ω является текущей оценкой величины M из (1.6). Поэтому z_ω^* может рассматриваться как оценка g_M^* из (1.5) и соответствующая точка x_j из $z_\omega^* = g_\omega(x_j)$ может использоваться как приближение к x_M^* . Этот комментарий носит неформальный характер. Точные утверждения будут даны в следующем параграфе.

П р а в и л о 6. Для каждого интервала (x_{i-1}, x_i) , $1 \leq i \leq k+1$, вычислить *характеристику* $R(i)$, где

$$R(i) = \Delta_i + 4(z_i - z_{i-1})^2/r^2\mu_\nu^2\Delta_i - 2(z_i + z_{i-1} - 2z_\nu^*)/r\mu_\nu, \quad i-1, i \in I_\nu, \quad (2.4)$$

$$R(i) = 2\Delta_i - 4(z_i - z_\nu^*)/r\mu_\nu, \quad i \in I_\nu, \quad i-1 \in S_\nu, \quad (2.5)$$

$$R(i) = 2\Delta_i - 4(z_{i-1} - z_\nu^*)/r\mu_\nu, \quad i-1 \in I_\nu, \quad i \in S_\nu, \quad (2.6)$$

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}. \quad (2.7)$$

Величина $r > 1$ является параметром алгоритма. Подходящий выбор значения r позволяет использовать произведение $r\mu_\nu$ как оценку константы Липшица L_ν (это обсуждение будет продолжено при исследовании сходимости).

П р а в и л о 7. Выбрать интервал (x_{t-1}, x_t) , которому соответствует максимальная характеристика

$$R(t) = \max\{R(i): 1 \leq i \leq k+1\} \quad (2.8)$$

и, если индексы концевых точек этого интервала различны, то выполнить очередное испытание в его серединной точке, т. е.

$$x^{k+1} = (x_t + x_{t-1})/2, \quad \nu(x_{t-1}) \neq \nu(x_t). \quad (2.9)$$

В противном случае, т. е. при $\nu(x_{t-1}) = \nu(x_t)$, очередное испытание выполняется в точке

$$x^{k+1} = (x_t + x_{t-1})/2 - (z_t - z_{t-1})/2r\mu_\nu. \quad (2.10)$$

Описанные правила можно дополнить условием остановки, прекращающим испытания, если

$$x_t - x_{t-1} \leq \varepsilon, \quad (2.11)$$

где t из (2.8) и $\varepsilon > 0$ есть заданная точность.

Численная иллюстрация. Описанный алгоритм был использован для решения приведенного выше примера при $x^1 = (a+b)/2$, $r=2$ и $\varepsilon=10^{-5}$. Координаты 102 точек испытаний, осуществленных алгоритмом в процессе решения задачи при нулевом векторе ε_R из (2.3), отмечены на рис. 1 четырьмя рядами вертикальных штрихов. Штрихи верхнего ряда соответствуют точкам с единичным индексом, второго и третьего — точкам, индексы которых соответственно равны 2 и 3; точки, отмеченные штрихами нижнего ряда, являются допустимыми.

Координаты испытаний, выполненных в близких точках, отмечены темными прямоугольниками. При этом значения функций g_1 , g_2 , g_3 и $\varphi = g_4$ вычислялись соответственно $k_1=102$, $k_2=80$, $k_3=64$ и $k_4=26$ раз. То есть раздельный учет ограничений, осуществляемый индексным методом, рационально использовать и в случае, когда функционалы задачи (1.1) определены во всей области поиска, поскольку это обеспечивает экономию вычислений в недопустимых точках.

Как видно из рисунка, концентрация точек испытаний имеет место не только в окрестности точки $x^* = 2,07957$ условного глобального минимума, но и в окрестностях недопустимых граничных точек областей Q_i из (1.2). Этот эффект можно ослабить, используя вектор ε_R с положительными координатами. При этом, как следует из (2.3)–(2.6), характеристики интервалов, лежащих в недопустимых областях, будут иметь меньшие значения и, согласно правилу (2.8), испытания будут реже попадать в такие интервалы.

Действительно, решение рассмотренного примера при $\varepsilon_i=0,2$, $1 \leq i \leq 3$, потребовало лишь 52 испытания (координаты которых отмечены вертикальными штрихами на рис. 2) и обеспечило ту же самую точность решения задачи, что и при нулевом векторе ε_R . При этом $k_1=52$, $k_2=39$, $k_3=38$ и $k_4=25$. Более подробное изучение роли вектора ε_R проведено в следующих двух параграфах.

§ 3. Достаточные условия сходимости метода

Использование положительных векторов ε_R в целях ускорения сходимости было предложено в работах [5, 7]. Ниже предлагаются достаточные условия сходимости индексного метода, содержащие верхние оценки для координат вектора резервов ε_R , используемых в (2.3).

Теорема 1. Пусть задача (1.1) имеет решение x^* из (1.1) и выполняются следующие условия:

1) каждая область Q_i , $1 \leq i \leq m+1$, из (1.2) представляет собой объединение конечного числа отрезков положительной длины;

2) каждая функция $g_i(x)$, $1 \leq i \leq m+1$, допускает липшицево с константой L_i продолжение $G_i(x)$ на весь отрезок $[a, b]$, т. е.

$$g_i(x) = G_i(x), \quad x \in Q_i, \quad 1 \leq i \leq m+1; \quad (3.1)$$

3) компоненты ϵ_ν вектора резервов ϵ_R , используемые в (2.3) и соответствующие активным в точке абсолютного минимума x^* ограничениям (т. е. ограничениям, для которых выполняется условие $g_\nu(x^*) = 0$), удовлетворяют неравенствам

$$0 < 2\epsilon_\nu < L_\nu(\beta - \alpha), \quad (3.2)$$

где $\beta - \alpha$ есть длина интервала $[\alpha, \beta] \subset Q_{m+1}$, содержащего точку x^* из (1.1);

4) компоненты ϵ_ν вектора резервов ϵ_R , соответствующие не активным в точке x^* ограничениям (т. е. ограничениям, для которых выполняется условие $g_\nu(x^*) < 0$), удовлетворяют либо неравенствам (3.2), либо неравенствам

$$0 < \epsilon_\nu < |g_\nu(x^*)|; \quad (3.3)$$

5) если некоторым точкам из ряда (2.1) соответствуют значения индекса, равные ν , то при достаточно больших значениях k для соответствующей величины μ_ν из (2.2) справедливо неравенство

$$r\mu_\nu > 2L_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq m+1. \quad (3.4)$$

Тогда:

1) точка x^* является предельной точкой последовательности точек испытаний $\{x^k\}$, порождаемой индексным алгоритмом для задачи (1.1), при $\epsilon = 0$ в условии остановки (2.11);

2) любая предельная точка $\bar{x}$ последовательности $\{x^k\}$ является решением задачи (1.1);

3) сходимость к предельной точке $\bar{x}$ является двухсторонней, если $\bar{x} \neq a$ и $\bar{x} \neq b$.

Если условия (3.2) и (3.3) не выполняются для заданного вектора резервов ϵ_R , но задача (1.1) имеет ϵ -резервированное решение, определяемое отношением

$$\varphi(x_\epsilon) = \min\{\varphi(x): x \in [a, b], g_i(x) \leq -\epsilon_i, 1 \leq i \leq m\}, \quad (3.5)$$

то:

1) для любой предельной точки $\bar{x}$ последовательности $\{x^k\}$ справедливы отношения

$$\varphi(\bar{x}) = \inf\{\varphi(x^k): g_i(x^k) \leq 0, 1 \leq i \leq m, k = 1, 2, \dots\} \leq \varphi(x_\epsilon); \quad (3.6)$$

2) любая предельная точка $\bar{x}$ есть граничная точка множества

$$X_\epsilon = \{x \in [a, b]: g_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m, \varphi(x) \leq \varphi(x_\epsilon)\} \quad (3.7)$$

допустимых точек задачи (1.1), которые не хуже (по значению целевой функции), чем ϵ -резервированное решение, если функция $\varphi(x)$ имеет не более одной точки локального максимума в каждом из изолированных интервалов составляющих X_ϵ из (3.7);

3) приведенное выше утверждение о двухстороннем характере сходимости остается в силе.

З а м е ч а н и е. Неравенства (3.2) устанавливают границы увеличения резервов, при соблюдении которых сохраняется сходимость к решению x^* . Так, в примере, рассмотренном выше, в допустимой области Q_3 существует интервал $[\alpha, \beta]$, $\alpha = 1,821$, $\beta = 2,079$ (выделен штриховкой на рис. 2), содержащий точку оптимума x^* и имеющий длину $\beta - \alpha = 0,258$. Половина этого значения превосходит величину $\max\{\varepsilon_\nu/L_\nu: 1 \leq \nu \leq 3\} < 0,123$, соответствующую значениям резервов $\varepsilon_\nu = 0,2$, $1 \leq \nu \leq 3$, использованным в вычислениях (верхние оценки констант Липшица для рассматриваемого примера имеют вид $L_1 < 1,63$, $L_2 < 8,41$, $L_3 < 10,8$). Таким образом, наблюдаемая в этом численном эксперименте сходимость в точке условного глобального минимума x^* согласуется с условием (3.2).

При увеличении коэффициента надежности r , входящего в условие (3.4), до $r = 3$ (при тех же значениях резервов $\varepsilon_\nu = 0,2$, $1 \leq \nu \leq 3$), число итераций, предшествующих остановке, увеличивается, но эффект экономии вычислений в недопустимых точках сохраняется ($k_1 = 86$, $k_2 = 66$, $k_3 = 60$, $k_4 = 42$). Эксперименту соответствует та же оценка оптимума $x^* \simeq 2,07957$, что и в эксперименте при $r = 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Покажем, что для каждой предельной точки $\bar{x}$ последовательности $\{x^k\}$ существует бесконечная последовательность интервалов

$$\{(x_{t-1}, x_t): t = t(q^p)\}_{p=1}^\infty, \quad (3.8)$$

удовлетворяющих условиям

$$\bar{x} \in \bigcap_{p=1}^\infty [x_{t-1}, x_t], \quad (3.9)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Delta_t = 0, \quad (3.10)$$

$$R(t(q^p)) > 0, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} R(t(q^p)) = 0, \quad (3.12)$$

где $q^1 < q^2 < \dots$; $R(t)$, Δ_t и t соответственно из (2.4)–(2.6), (2.7) и (2.8).

Поскольку $\bar{x}$ является предельной точкой, должна существовать последовательность номеров испытаний $q^1, q^2, \dots$, удовлетворяющих условиям

$$x^{q^p+1}, \bar{x} \in [x_{t-1}, x_t], \quad t = t(q), \quad q \in \{q^p\}_{p=1}^\infty, \quad (3.13)$$

отражающим то обстоятельство, что точка $(q+1)$ -го испытания попала в интервал $[x_{t-1}, x_t]$, содержащий точку $\bar{x}$ на шаге q , т. е. $t = t(q)$.

Из (2.9), (2.10), (2.2) и (3.13) следует, что

$$\max\{(x_t - x^{q^p+1}), (x^{q^p+1} - x_{t-1})\} \leq \gamma \Delta_t, \quad (3.14)$$

где $\gamma = (r+1)/2r < 1$ (поскольку $r > 1$). При этом свойство (3.10), является следствием неравенства (3.14).

На каждом шаге $k \geq 1$ существует интервал (x_{i-1}, x_i) , $i = i(k)$, на одном из концов которого достигается значение z_ω^* (см. комментарий к пятому правилу алгоритма). Если при этом $\nu(x_{i-1}) \neq \nu(x_i)$, то согласно (2.5) и (2.6), $R(i) = 2\Delta_i > 0$. В случае, когда $\nu(x_{i-1}) = \nu(x_i) = \omega$, из (2.2) следует оценка

$$z_i + z_{i-1} - 2z_\omega^* \leq \mu_\omega \Delta_i,$$

которая, в сочетании с (2.4), дает неравенство $R(i) \geq (1 - r^{-1})\Delta_i > 0$. Таким образом, на любом шаге поиска $k \geq 1$ существует интервал, имеющий стро-

го положительную характеристику. Отсюда, с учетом (2.8), получаем, что интервалы из системы (3.8) также должны иметь положительные характеристики, ибо, согласно (3.10), они подвергаются дроблению попадающими в них точками испытаний; т. е. условия (3.11) необходимо справедливы.

Из (1.8) и (2.3) следует, что

$$z_j = g_\nu(x_j) \geq z_\nu^*, \quad \nu = \nu(x_j), \quad 1 \leq j \leq k.$$

Тогда из (2.4)–(2.6) и (3.10), учитывая условия (3.1) и неравенство (3.11), выводим справедливость (3.12).

2. Теперь покажем, что существует такой номер испытания $h \geq 1$, при котором

$$\nu(x^h) = m + 1. \quad (3.15)$$

Допустим противное и рассмотрим интервал $[x_{t-1}, x_t]$, содержащий точку x^* на шаге k , т. е. $t = t(k)$. Поскольку мы допустили, что равенство (3.15) не имеет места и, следовательно, последовательность $\{x^k\}$ не содержит допустимых точек, интервал $[\alpha, \beta]$ из (3.2) должен удовлетворять условиям

$$x^* \in [\alpha, \beta] \subset [x_{t-1}, x_t]. \quad (3.16)$$

Тогда из (3.1) и (3.16) следуют отношения

$$z_{t-1} \leq L_\nu(\alpha - x_{t-1}) \leq L_\nu \Delta_t - L_\nu(\beta - \alpha), \quad \nu = \nu(x_{t-1}), \quad (3.17)$$

$$z_t \leq L_\nu(x_t - \beta) \leq L_\nu \Delta_t - L_\nu(\beta - \alpha), \quad \nu = \nu(x_t), \quad (3.18)$$

причем случаю $\nu(x_{t-1}) = \nu(x_t)$ соответствует неравенство

$$z_t + z_{t-1} \leq L_\nu \Delta_t - L_\nu(\beta - \alpha). \quad (3.19)$$

Теперь из (2.4)–(2.6), (3.17)–(3.19) и вытекающего из (2.3) неравенства

$$z_\nu^* \geq -\varepsilon_\nu \quad (3.20)$$

следует либо оценка

$$R(t) \geq \Delta_t(1 - 2L_\nu/r\mu_\nu) + 2(L_\nu(\beta - \alpha) - 2\varepsilon_\nu)/r\mu_\nu,$$

либо оценка

$$R(t) \geq 2\Delta_t(1 - 2L_\nu/r\mu_\nu) + 4(L_\nu(\beta - \alpha) - 2\varepsilon_\nu)/r\mu_\nu.$$

Учитывая условия (3.2) и (3.4), в обоих случаях приходим к неравенству

$$R(t(k)) > 0, \quad (3.21)$$

справедливому при достаточно больших значениях k .

Допустим, что ограничение с номером

$$\nu = \max\{\nu(x_{t-1}), \nu(x_t)\} \quad (3.22)$$

не является активным в точке x^* и для резерва ε_ν справедливы неравенства (3.3). Тогда из (3.1) следуют отношения

$$z_{t-1} \leq g_\nu(x^*) + L_\nu(x_t - x^*), \quad z_t \leq g_\nu(x^*) + L_\nu(x_t - x^*),$$

причем случаю $\nu(x_{t-1}) = \nu(x_t)$ соответствует неравенство

$$z_t + z_{t-1} \leq 2g_\nu(x^*) + L_\nu \Delta_t.$$

Используя эти соотношения в (2.4)–(2.6) и учитывая (3.20), выведем оценку

$$R(t(k)) \geq \Delta_t(1 - 2L_\nu/\tau\mu_\nu) + 4(|g_\nu(x^*)| - \varepsilon_\nu)/\tau\mu_\nu,$$

из которой, согласно (3.3) и (3.4), следует справедливость (3.21) при достаточно больших значениях k .

Из (3.12), (3.21) и правила (2.8) вытекает необходимость проведения испытания в рассматриваемом интервале $[x_{t-1}, x_t]$ на некотором шаге поиска, что приведет к его разделению на два подынтервала, хотя бы один из которых будет содержать точку x^* . Повторение этого деления при $k \rightarrow \infty$ порождает бесконечную последовательность подынтервалов, стягивающуюся к точке x^* . Т. е. при выполнении условий (3.2), (3.3) x^* есть предельная точка последовательности $\{x^k\}$.

Поскольку совпадение x^* с одной из точек испытаний означает справедливость (3.15), то остается рассмотреть случай, когда $x^* \in (x_{t-1}, x_t)$ при любом $q \geq 1$. При этом, в силу первого условия теоремы, либо $[x_{t-1}, x^*] \subset Q_{m+1}$, либо $[x^*, x_t] \subset Q_{m+1}$, если число k достаточно велико. Но тогда либо $\nu(x_{t-1}) = m+1$, либо $\nu(x_t) = m+1$.

Теперь рассмотрим случай, когда условия (3.2) и (3.3) не выполняются, но существует ε -резервированное решение x_ε из (3.5) для которого справедливы неравенства

$$g_\nu(x_\varepsilon) \leq -\varepsilon_\nu \leq z_\nu^*, \quad 1 \leq \nu \leq m. \quad (3.23)$$

Кроме того, согласно (1.8) и (3.1), для значений z_{j-1}, z_j , соответствующих концам интервала $[x_{j-1}, x_j]$, содержащего точку x_ε на шаге q (т. е. $j = j(q)$), справедливо, что

$$z_j = g_\nu(x_j) \leq g_\nu(x_\varepsilon) + L_\nu(x_j - x_\varepsilon), \quad \nu = \nu(x_j), \quad (3.24)$$

$$z_{j-1} = g_\nu(x_{j-1}) \leq g_\nu(x_\varepsilon) + L_\nu(x_\varepsilon - x_{j-1}), \quad \nu = \nu(x_{j-1}). \quad (3.25)$$

Если допустить, что при любом $h \geq 0$ условие (3.15) не выполняется, то из формул (2.4)–(2.6) для характеристики $R(j(q))$, учитывая неравенства (3.23)–(3.25) и (3.4), получаем оценку $R(j(q)) > 0$ аналогичную (3.21).

Справедливость этой оценки ведет к выводу, что точка x_ε является предельной точкой последовательности $\{x^k\}$, и, следовательно, при достаточно больших значениях q либо $[x_{j-1}, x_\varepsilon] \subset Q_{m+1}$, либо $[x_\varepsilon, x_j] \subset Q_{m+1}$, что противоречит невыполнимости (3.15). Итак, утверждение (3.15) доказано.

3. Покажем, что любая предельная точка $\bar{x}$ последовательности $\{x_k\}$ является допустимой, т. е.

$$\nu(\bar{x}) = m + 1. \quad (3.26)$$

Из (2.3) и (3.15) следует, что при $q \geq h$

$$z_\nu^* = -\varepsilon_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq m, \quad z_{m+1}^* = \min\{z_i: i \in I_{m+1}\}, \quad (3.27)$$

и существует интервал (x_{t-1}, x_t) , $t = t(q)$, удовлетворяющий условию

$$\max\{\nu(x_{t-1}), \nu(x_t)\} = m + 1; \quad (3.28)$$

при этом либо $z_{t-1} = z_{m+1}^*$, либо $z_t = z_{m+1}^*$. В случае, если $\nu(x_{t-1}) \neq \nu(x_t)$, из (2.5) и (2.6) следует оценка $R(t(q)) = 2\Delta_t > 0$. При $\nu(x_{t-1}) = \nu(x_t)$, учитывая (2.2), получаем неравенство $R(t(q)) = \Delta_t[1 - |z_t - z_{t-1}|/\tau\mu_{m+1}\Delta_t] \geq (\tau - \tau^{-1})\Delta_t > 0$.

Теперь из правила (2.8), условия (3.12) и полученных неравенств вида $R(t(q)) > 0$ следует существование последовательности (3.8), стягивающейся к некоторой точке $\bar{x}$ и удовлетворяющей условиям (3.10), (3.11), (3.28). Поскольку множество Q_{m+1} является замкнутым, из (3.9) и (3.28) следует (3.26).

Допустим, что существует предельная точка $\bar{x}$, не принадлежащая замкнутому допустимому множеству Q_{m+1} . Согласно (3.9),

$$\bar{x} = \lim_{p \rightarrow \infty} x_{t-1} = \lim_{p \rightarrow \infty} x_t, \quad t = t(q^p),$$

и, следовательно,

$$x_{t-1}, x_t \notin Q_{m+1}, \quad t = t(q^p), \quad p \geq s,$$

если число s достаточно велико. Поэтому существует столь большое значение $n \geq s$, что

$$\omega = \nu(\bar{x}) = \max\{\nu(x_{t-1}), \nu(x_t)\} < m+1, \quad p \geq n, \quad (3.29)$$

ибо каждое подмножество Q_ν является объединением конечного числа интервалов, имеющих положительную длину. В результате, либо

$$\nu(x_t) = \omega, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} g_\omega(x_t) = g_\omega(\bar{x}) > 0,$$

либо

$$\nu(x_{t-1}) = \omega, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} g_\omega(x_{t-1}) = g_\omega(\bar{x}) > 0$$

(возможно, что справедливы и оба случая одновременно).

Таким образом, существует некоторое положительное число δ , для которого

$$\text{либо } \nu(x_t) = \omega, \quad z_t \geq \delta, \quad \text{либо } \nu(x_{t-1}) = \omega, \quad z_{t-1} \geq \delta, \quad (3.30)$$

где $t = t(q^p)$, $p \geq n$. Теперь из (2.4)–(2.6), (3.10), (3.27), (3.29) и (3.30) выводим оценку

$$R(t(q^p)) \leq 2\Delta_t - 4\delta/rL_\omega < 0, \quad p \geq n, \quad (3.31)$$

справедливую при достаточно большом значении числа n .

Поскольку уже доказано существование хотя бы одной предельной точки, удовлетворяющей условию (3.26) и являющейся общей точкой последовательности интервалов (3.8), имеющих положительные характеристики из (3.11), то из правила (2.8) и неравенств (3.31) вытекает невозможность попадания испытаний в интервал, содержащий точку $\bar{x}$ из (3.29), если n достаточно велико. Таким образом, любая предельная точка удовлетворяет условиям (3.26).

4. Покажем, что при выполнении третьего и четвертого условий теоремы точка x^* из (1.1) является предельной.

Допустим противное и рассмотрим два возможных случая. В первом случае, для интервала $[x_{t-1}, x_t]$, $t = t(k)$, содержащего точку x^* на шаге k , условие (3.28) не выполняется ни на одном шаге поиска и, следовательно, имеют место включения (3.16). Этот случай уже рассматривался в п. 2 доказательства и для него было установлено выполнение неравенств (3.21) при достаточно больших значениях k , что привело к противоречию с предположением о неопределенном характере точки x^* .

Предположение о выполнении условия (3.28) при достаточно больших значениях k ведет к сохранению справедливости оценок для значений

z_{t-1} , z_t и $z_t + z_{t-1}$, записанных под выражением (3.22) и являющихся следствием (3.1), при $\nu = m + 1$. При этом из (2.4)–(2.6), (3.4) и неравенства $z_{m+1}^* \geq g_{m+1}(x^*) = \varphi(x^*)$ вытекает, что вновь имеет место условие (3.21) положительности характеристики интервала $[x_{t-1}, x_t]$, содержащего точку x^* , ведущее к упомянутому выше противоречию с допущением неопределенного характера точки x^* .

5. Для обоснования левого равенства в (3.6) докажем справедливость неравенств

$$\varphi(\bar{x}) \leq z_{m+1}^* \quad (3.32)$$

для допустимой предельной точки $\bar{x}$ последовательности $\{x^k\}$, существование которой показано в п. 3. При этом существует последовательность интервалов (3.8), стягивающихся к этой точке и имеющих положительные характеристики; см. (3.9)–(3.11).

Если допустить, что (3.32) не имеет места, то для некоторого положительного числа δ должны выполняться неравенства

$$z_i > z_{m+1}^* + \delta, \quad \text{если } \nu(x_i) = m + 1, \quad i = t, t - 1, \quad (3.33)$$

где $t = t(q^p)$, $p = 1, 2, \dots$. Из (2.4)–(2.6), (3.28), (3.33) и (3.10) следует, что

$$R(t(q^p)) < 2\Delta_t - 4\delta/r\mu_{m+1} < -2\delta/rL_{m+1}, \quad p \geq s, \quad (3.34)$$

если число s достаточно велико. Но (3.34) противоречит неравенству (3.11) и, следовательно, должно иметь место свойство (3.32).

Для доказательства правого неравенства в (3.6) покажем, что отношение

$$\varphi(x_\epsilon) \leq z_{m+1}^* - \beta \quad (3.35)$$

невыполнимо при достаточно больших значениях числа k из (2.1), если $\beta > 0$. Допустим противное, т. е. допустим, что неравенство (3.35) справедливо на любом шаге q для некоторого фиксированного значения $\beta > 0$.

Интервал $[x_{j-1}, x_j]$, содержащий точку x_ϵ на шаге $q \geq h$, должен удовлетворять условию (3.28); см. рассуждения, завершающие п. 2 доказательства. Тогда из (3.24), (3.25) и (3.35)

$$z_i \leq z_{m+1}^* - \beta + L_{m+1}\Delta_i, \quad \text{если } \nu(x_i) = m + 1, \quad i = j - 1, j,$$

что в сочетании с (2.4)–(2.6) и (3.4) дает

$$R(j(q)) \geq 4\beta/rL_{m+1} > 0. \quad (3.36)$$

Полученное неравенство (3.36) противоречит условию (3.12). С одной стороны, согласно правилу (2.8) и неравенствам (3.12) и (3.36), интервал (x_{j-1}, x_j) должен стягиваться в точку, а с другой стороны, стягивающийся интервал должен удовлетворять условию (3.12). Следовательно, нижняя грань z_{m+1}^* , совпадающая со средней частью в отношениях (3.6), не может превышать значение $\varphi(x_\epsilon)$.

6. Пусть $\bar{x}$ есть внутренняя точка отрезка $[a, b]$ и $\bar{x} \notin \{x^k\}$. Тогда из (3.8)–(3.10) следует, что левые граничные точки и правые граничные точки последовательности интервалов (x_{t-1}, x_t) сходятся к $\bar{x}$, т. е. имеет место двухсторонняя сходимость к $\bar{x}$.

Если $\bar{x} = x^* \in \{x^k\}$, то на каждом шаге $q \geq s$ существуют два интервала, содержащих $\bar{x}$: $[x_{j-1}, \bar{x}]$ и $[\bar{x}, x_{j+1}]$, где $j = j(q)$. Каждый из этих интервалов может быть подвергнут рассмотрению, повторяющему схему из п. 2 и приводящему к установлению существования системы вложенных подынтервалов, стягивающихся к точке $\bar{x}$, что и доказывает двухстороннюю сходимость

к этой точке. Заметим, что рис. 1 и рис. 2 наглядно демонстрируют этот эффект (индексы точек, сходящихся к x^* слева, равны 4, т. е. левая подпоследовательность состоит из допустимых точек; индексы точек, сходящихся к x^* справа, равны 3).

7. Пусть функция $\varphi(x)$ унимодальна (вверх) в каждом интервале из X_ε и пусть $\bar{x}$ есть внутренняя точка множества X_ε из (3.7). Тогда существуют две подпоследовательности последовательности $\{x^k\}$, одна из которых сходится к точке $\bar{x}$ слева, а другая — справа, что противоречит свойству

$$\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(x^k), \quad x^k \in Q_{m+1} \cap X_\varepsilon,$$

вытекающему из (3.6). Действительно, если функция имеет не более одного локального максимума в каждом интервале из X_ε , то

$$\min\{\varphi(x^p), \varphi(x^q)\} < \varphi(\bar{x}), \quad x^p < \bar{x} < x^q,$$

если x^p и x^q принадлежат одному и тому же интервалу из X_ε .

8. Пусть x^* есть предельная точка последовательности $\{x_k\}$, что предполагает справедливость равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{m+1}^* = \varphi(x^*), \quad (3.37)$$

и пусть $\bar{x}$ есть некоторая другая предельная точка этой последовательности, являющаяся допустимой согласно (3.26). Тогда для характеристики интервала $[x_{j-1}, x_j]$, содержащего точку $\bar{x}$ на шаге k , в силу (2.2), (2.4)–(2.6), (3.1), (3.10) и (3.37), справедливо отношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(j(k)) \leq -4[\varphi(\bar{x}) - \varphi(x^*)]/\tau L_{m+1}.$$

Следовательно, если $\varphi(\bar{x}) > \varphi(x^*)$, то, начиная с некоторого шага, характеристика интервала $[x_{j-1}, x_j]$, содержащего точку $\bar{x}$, будет отрицательной, что противоречит (3.11). Таким образом, любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$, порождаемой индексным алгоритмом, является решением задачи (1.1) при выполнении условий (3.2) и (3.3).

§ 4. Оценка влияния резервов на скорость сходимости

Как показал эксперимент с решением описанного выше примера, увеличение значений резервов может снизить концентрацию испытаний в окрестностях, принадлежащих множествам Q_i из (1.2) недопустимых граничных точек. Ниже проводится теоретический анализ, основанный на использовании предложенных в [2] оценок плотности испытаний.

Определение. Отношение числа $N_{\alpha\beta}$ точек последовательности $\{x^k\}$, лежащих в подынтервале $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, к его длине $\beta - \alpha$ называется *плотностью*

$$P_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}/(\beta - \alpha)$$

последовательности $\{x^k\}$ в указанном подынтервале.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть в подынтервале $[\alpha, \beta] \subset Q_\nu$, $1 \leq \nu \leq m$, длина которого удовлетворяет условию

$$\beta - \alpha > 2(\tau - 1)(\delta_\nu + \varepsilon_\nu)/\tau^2 L_\nu, \quad (4.1)$$

выполняются неравенства

$$g_\nu(x) \geq \delta_\nu, \quad x \in [\alpha, \beta], \quad \delta_\nu \geq 0. \quad (4.2)$$

Тогда для плотности $P_{\alpha\beta}$ точек последовательности $\{x^k\}$, порождаемой индексным алгоритмом при решении задачи (1.1), справедлива оценка

$$P_{\alpha\beta} < r^2 L_\nu / (r-1)(\delta_\nu + \varepsilon_\nu). \quad (4.3)$$

Доказательство. Из $[x_{j-1}, x_j] \subset [\alpha, \beta] \subset Q_\nu$ и (2.3) следует, что $z_\nu^* = -\varepsilon_\nu$ и, с учетом (4.2),

$$z_i + z_{i-1} - 2z_\nu^* \geq 2(\delta_\nu + \varepsilon_\nu) + |z_j - z_{j-1}|. \quad (4.4)$$

Теперь из (2.4), (2.2) и (4.4) следует оценка

$$\begin{aligned} r\mu_\nu R(j(k)) &\leq r\mu_\nu \Delta_j - 4(\delta_\nu + \varepsilon_\nu) + |z_j - z_{j-1}| \{ |z_j - z_{j-1}| / r\mu_\nu \Delta_j - 2 \} \leq \\ &\leq rL_\nu \Delta_j - 4(\delta_\nu + \varepsilon_\nu). \end{aligned}$$

Поскольку, согласно правилу (2.8) и установленному в п. 1 доказательства теоремы 1 существованию положительных характеристик на каждом шаге поиска, испытания могут попадать в рассматриваемый интервал лишь при выполнении необходимого условия $R(j(k)) > 0$, то последовательность $\{x^k\}$ не пересекается с интервалом (x_{j-1}, x_j) , если $\Delta_j < 4(\delta_\nu + \varepsilon_\nu) / rL_\nu$. Точки последовательности $\{x^k\}$ могут попадать лишь в интервалы, для которых справедливо обратное условие. Поэтому, согласно (3.12), расстояние между точками x_{i-1}, x_i , лежащими в $[\alpha, \beta]$, должно удовлетворять условию

$$x_i - x_{i-1} \geq 2(r-1)(\delta_\nu + \varepsilon_\nu) / r^2 L_\nu,$$

что приводит к следующей оценке для числа $N_{\alpha\beta}$:

$$N_{\alpha\beta} < \frac{r^2 L_\nu (\beta - \alpha)}{2(r-1)(\delta_\nu + \varepsilon_\nu)} + 1. \quad (4.5)$$

Учитывая условие (4.1), выводим из (4.5) утверждение (4.3).

§ 5. Алгоритм с адаптивными оценками резервов

Используя то обстоятельство, что для рассматриваемого в данной работе примера оценены значения констант Липшица L_ν , $1 \leq \nu \leq 3$, и определен интервал $[\alpha, \beta] \subset Q_4$, содержащий искомую точку условного оптимума x^* (см. замечание к теореме 1), выберем величины резервов равными половинным значениям правых частей из условия (3.2), т. е. положим $\varepsilon_\nu = L_\nu(\beta - \alpha)/2$, $1 \leq \nu \leq 3$. Решение примера при указанных значениях резервов и $r=2$, $\varepsilon = 10^{-5}$ потребовало лишь 48 шагов до выполнения условия остановки ($k_1=48$, $k_2=36$, $k_3=35$, $k_4=25$) и обеспечило то же приближение $x^* = 2,07957$, что и в описанных выше экспериментах.

Таким образом, условие (3.2) можно рассматривать как рекомендацию для выбора значений резервов, при которых сохраняется свойство сходимости к решению задачи (1.1). Однако, в общем случае, значения констант Липшица не являются априорно заданными и длина интервала $[\alpha, \beta]$ из Q_{m+1} , содержащего искомое решение x^* , также не известна. Эти трудности можно обойти, заменив неизвестные коэффициенты L_ν , $1 \leq \nu \leq m$, их адаптивными нижними оценками μ_ν из (2.2) и приняв, что

$\beta - \alpha > \varepsilon q$, где $\varepsilon > 0$ есть параметр (точность), задаваемый в условии останова (2.11), а фактор $q > 1$ можно интерпретировать как априорную оценку того, во сколько раз длина интервала $[\alpha, \beta]$ из условия (3.2) превышает заданную точность ε .

В результате получаем *адаптивные оценки резервов* вида

$$\varepsilon_\nu = \mu_\nu \varepsilon q, \quad 1 \leq \nu \leq m, \quad (5.1)$$

которые и должны использоваться в условии (2.3). Эту модификацию алгоритма будем называть индексным методом условной глобальной оптимизации с адаптивными резервами, или *индексным методом с адаптивными резервами* (ИМАР).

Для иллюстрации эффективности ИМАР проведена серия численных экспериментов, в ходе которых описанный выше пример задачи вида (1.1) решался для ряда значений фактора q при $r = 3$ и $\varepsilon = 10^{-5}$. Чтобы исключить влияние выбора начальной точки x^1 на результаты оптимизации, решение примера (при каждом используемом в (5.1) значении q) повторялось 1000 раз для различных начальных точек, выбираемых случайным механизмом с равномерным распределением в области поиска $[a, b]$.

Результаты описанных экспериментов представлены в следующей таблице, первая строка которой содержит значения фактора q из (5.1), а последующие строки соответствуют средним числам вычислений k_1 , k_2 , k_3 и k_4 (округлены до ближайших целых) значений функции g_1 , g_2 , g_3 и φ , осуществленных в ходе оптимизации (до выполнения условия останова (2.11) при заданной точности $\varepsilon = 10^{-5}$). Различия указанных значений, соответствующих указанному ряду величин q , являются значимыми, поскольку существенно превышают утроенные выборочные стандарты для средних величин.

q	1	10	100	500	1000	5000
k_1	149	144	125	103	93	72
k_2	114	110	93	75	68	57
k_3	101	97	81	66	60	52
k_4	38	38	38	38	38	37

Во всех экспериментах получены приближения к точке x^* , отвечающие заданной точности. На рис. 3 представлен график $k(q) = k_1(q)$, отражающий

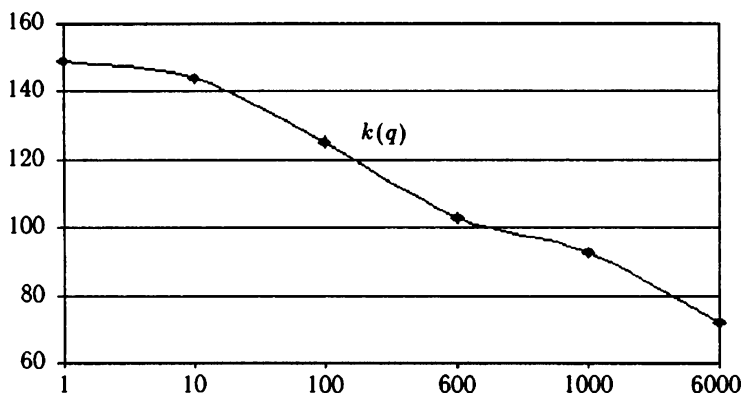


Рис. 3

уменьшение среднего числа шагов при увеличении фактора q , соответствующего увеличению резервов. Эта зависимость качественно отвечает оценке (4.3) из теоремы 2.

В целях более полного использования информации, содержащейся в утверждениях теоремы 1, можно усовершенствовать рассмотренную схему адаптивной оценки резервов, приняв во внимание условие (3.3) для ограничений, не являющихся активными в точке x^* .

При этом, вместо точного деления ограничений на активные и неактивные в искомой точке x^* , введем более простую в вычислительном отношении классификацию, основанную на проверке выполнения неравенства

$$|g_\nu(x_*^k)|\rho < \mu_\nu \varepsilon q, \quad 1 \leq \nu \leq m, \quad (5.2)$$

где ρ , $0 < \rho < 1$, есть вещественный параметр, а $x_*^k = x_j$, $j = j(k)$, есть точка, в которой достигается текущая оценка z_{m+1}^* из (2.3), т. е.

$$\varphi(x_*^k) = z_{m+1}^* \quad (5.3)$$

(x_*^k может интерпретироваться как текущее приближение к неизвестной координате x^*).

Результат проверки условия (5.2) для конкретного значения ν условимся фиксировать с помощью двоичной переменной α_ν , которая принимает нулевое значение при выполнении неравенства (5.2) и равна единице, если отношение (5.2) не имеет места. Разумеется, что так определенная переменная α_ν , $1 \leq \nu \leq m$, может изменять свое значение в процессе поиска, причем принимается, что $\alpha_\nu = 1$, если еще не получена ни одна допустимая точка и, следовательно, правая часть отношения (5.3) не определена.

В рассматриваемой новой схеме предлагается определять резервы ε_ν , $1 \leq \nu \leq m$, с помощью выражения

$$\varepsilon_\nu = \alpha_\nu \mu_\nu \varepsilon q + (1 - \alpha_\nu) |g_\nu(x_*^k)|\rho. \quad (5.4)$$

Для иллюстрации использования схемы (5.4) было выполнено 100 реализаций процесса поиска условного глобального минимума рассматриваемой тестовой задачи при случайно выбираемой начальной точке x^1 и следующих значениях параметров алгоритма: $r = 3$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $q = 5000$, $\rho = 0,8$. Во всех случаях искомый оптимум был оценен с заданной точностью. При этом средние числа вычислений значений левых частей ограничений g_ν , $1 \leq \nu \leq 3$, и целевой функции φ ($k_1 = 66$, $k_2 = 53$, $k_3 = 50$ и $k_4 = 37$) оказались несколько меньше, чем в уже обсуждавшихся экспериментах со схемой (5.1) (см. данные в последнем столбце таблицы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркин Д. Л., Стронгин Р. Г. Метод решения многоэкстремальных задач с невыпуклыми ограничениями, использующий априорную информацию об оценках оптимума // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 1987. — Т. 27, № 1. — С. 52–62.
2. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. — М.: Наука, 1978.
3. Стронгин Р. Г., Маркин Д. Л. Минимизация многоэкстремальных функций при невыпуклых ограничениях // Кибернетика. — 1986. — № 4. — С. 64–69.
4. Стронгин Р. Г. Поиск глобального оптимума. — М.: Знание, 1990.
5. Стронгин Р. Г. Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 1991. — Т. 31, № 8. — С. 1173–1185.
6. Strongin R. G. Numerical methods for multiextremal nonlinear programming problems with nonconvex constraints // Lect. Notes in Economics and Mathematical Systems. — 1985. — V. 255. — P. 278–282.
7. Strongin R. G. Algorithms for multiextremal mathematical programming problems employing the set of joint space-filling curves // J. of Global Optimization. — 1992. — № 2 — P. 357–378.