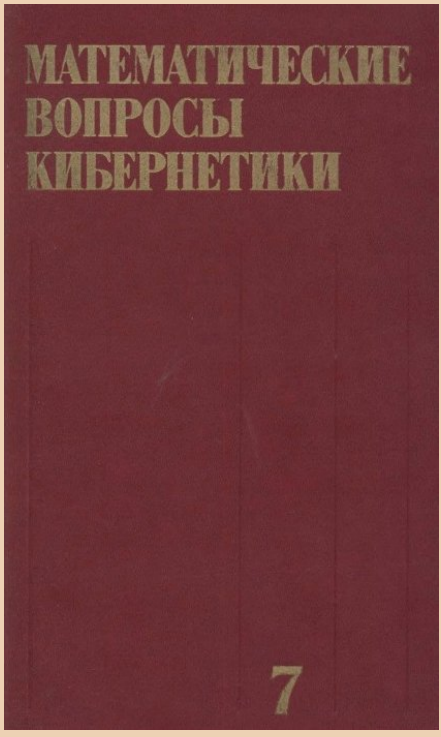
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 7




М. А. Федоткин

# Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Федоткин М. А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 333–344. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1998-333

# НЕЛОКАЛЬНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

*М. А. ФЕДОТКИН*
(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

## § 1. Традиционные подходы в изучении случайных экспериментов с управлением

Известно [5, 8, 16], что одним из основных предметов теории вероятностей является построение адекватной математической модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}(\cdot))$ статистически устойчивого случайного эксперимента $\mathcal{Э}$ с некоторым комплексом условий его проведения. Произвольный элемент $\omega$ из множества $\Omega$ определяет с помощью некоторого языка описание так называемого элементарного исхода эксперимента $\mathcal{Э}$. Множество $\mathcal{F}$ содержит все исходы $A \subset \Omega$ эксперимента $\mathcal{Э}$, и, наконец, вероятностная функция $\mathrm{P}(A)$: $\mathcal{F} \to [0, 1]$ задается на $\sigma$-алгебре $\mathcal{F}$. Для многих реальных экспериментов $\mathcal{Э}$ на содержательном уровне можно подметить общую ситуацию из следующих пунктов.

1. Имеются эксперимент $\mathcal{E}$, некоторое множество $\mathcal{T}$ элементов $t$ и однопараметрическое семейство экспериментов $\mathcal{E}_t$, $t \in \mathcal{T}$. В результате проведения экспериментов $\mathcal{E}_t$, $t \in \mathcal{T}$, однозначно определяется элементарный исход эксперимента $\mathcal{E}$. В этом случае будем писать $\mathcal{E} = \prod\limits_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{E}_t$ и говорить, что эксперимент $\mathcal{E}$ происходит во времени $t \in \mathcal{T}$, т. е. элемент $t$ здесь интерпретируется как время.

2. Имеются некоторое множество $\mathcal{R}$ элементов $r$, совокупность экспериментов $\mathcal{C}_r$, $r \in \mathcal{R}$, и, наконец, при каждом фиксированном $r \in \mathcal{R}$ множество экспериментов $\mathcal{C}_{r,t}$, $t \in \mathcal{T}$. После проведения всех экспериментов $\mathcal{C}_{r,t}$, $t \in \mathcal{T}$, мы однозначно находим элементарный исход эксперимента $\mathcal{C}_r$, т. е. по аналогии с экспериментом $\mathcal{E}$ эксперимент $\mathcal{C}_r$ происходит во времени $t \in \mathcal{T}$ и, следовательно, $\mathcal{C}_r = \prod\limits_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{C}_{r,t}$ для каждого $r \in \mathcal{R}$.

3. Предполагается, что при проведении эксперимента $\mathcal{E}$ ставится некоторая цель. Эта цель может быть достигнута с помощью выбора некоторым образом эксперимента $\mathcal{C}_r$ из множества $\{\mathcal{C}_r\colon r \in \mathcal{R}\}$. Естественно, при этом эксперимент $\mathcal{C}_r$ активно влияет на эксперимент $\mathcal{E}$ по достижению поставленной цели. В силу этого в дальнейшем эксперимент $\mathcal{E}$ удобно называть *объектом управления*, а эксперимент $\mathcal{C}_r$ — *системой управления*. При этом, в отличие от системы управления, природа и структура объекта управления фиксированы в некотором смысле.

4. В реальной жизни мы можем интересоваться отдельно объектом управления и системой управления. Однако чаще всего мы будем рассматривать их совместное поведение, т. е. будем изучать упорядоченную пару $\mathcal{Э}_r = (\mathcal{E}, \mathcal{C}_r)$, где $r \in \mathcal{R}$.

© М. А. Федоткин, 1998

Упорядоченную пару $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_r)$ будем называть *статистически устойчивым экспериментом с управлением*. Между объектом управления $\mathcal{E}$ и системой управления $\mathcal{C}_r$ происходит взаимодействие во времени $t \in \mathcal{T}$. Это означает, что исходы экспериментов $\mathcal{E}_t$, $t \in \mathcal{T}$, как правило, влияют на исходы экспериментов $\mathcal{C}_{r,t}$, $t \in \mathcal{T}$, а исходы экспериментов $\mathcal{C}_{r,t}$, $t \in \mathcal{T}$, всегда влияют на исходы экспериментов $\mathcal{E}_t$, $t \in \mathcal{T}$. Если исходы экспериментов $\mathcal{E}_t$, $t \in \mathcal{T}$, не влияют на исходы экспериментов $\mathcal{C}_{r,t}$, $t \in \mathcal{T}$, то мы имеем дело со *статистически устойчивым экспериментом $\mathcal{Э}_r$ с управлением без канала обратной связи*. В противном случае эксперимент $\mathcal{Э}_r$ функционирует с каналом обратной связи. При наличии канала обратной связи статистически устойчивые случайные эксперименты $\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}_r$ практически не отличаются друг от друга с точки зрения их взаимодействия. Однако следует помнить, что природа и структура системы управления может выбираться путем указания некоторого элемента $r$ из множества $\mathcal{R}$.

Зафиксируем некоторую природу и структуру $r$, $r \in \mathcal{R}$, для системы управления $\mathcal{C}_r$. Пусть теперь $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}_r(\cdot))$ есть вероятностная модель статистически устойчивого случайного эксперимента $\mathcal{Э}_r$ с управлением. В настоящее время рассматривают только такие случайные эксперименты с управлением, для которых описание $\omega \in \Omega$ элементарного исхода $\mathcal{Э}_r = (\mathcal{E}, \mathcal{C}_r)$ и $\sigma$-алгебра $\mathcal{F}$ всех исходов $\mathcal{Э}_r$ не зависят от конкретного выбора природы и структуры $r \in \mathcal{R}$ системы управления. Однако вероятностная природа функционирования $\mathcal{Э}_r$ зависит от $r$, $r \in \mathcal{R}$, и поэтому у вероятностной меры $\mathsf{P}_r(\cdot)$ мы ставим метку (индекс) $r$, подчеркивая тем самым зависимость основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}_r(\cdot))$ от $r$, $r \in \mathcal{R}$. Заметим, что предлагаемый в данной работе подход позволяет рассматривать эксперименты $\mathcal{Э}_r$, вероятностная модель которых имеет вид $(\Omega_r, \mathcal{F}_r, \mathsf{P}_r(\cdot))$.

Пусть $(Z, \mathcal{B})$ и $(Y, \mathcal{L})$ — измеримые пространства с выделенными $\sigma$-алгеброй $\mathcal{B}$ подмножеств множества $Z$ и $\sigma$-алгеброй $\mathcal{L}$ подмножеств множества $Y$. Пространство $(Z, \mathcal{B})$ называют *фазовым пространством состояний объекта управления* $\mathcal{E}$, а пространство $(Y, \mathcal{L})$, которое в простейшем случае не зависит от $r$, — *фазовым пространством состояний системы управления* $\mathcal{C}_r$. При каждом $t$, $t \in \mathcal{T}$, обозначим через $\varphi_t(\omega)$ и $\psi_t(\omega)$, где $\varphi_t(\omega)\colon \Omega \to Z$, $\psi_t(\omega)\colon \Omega \to Y$, случайные элементы [16] со значениями в $Z$ (соответственно, в $Y$), которые, в частности, могут быть случайными величинами или векторами. На практике $\varphi_t(\omega)$ и $\psi_t(\omega)$ измеряют элементарный исход эксперимента $\mathcal{Э}_r$ с описанием $\omega$ из $\Omega$ с точки зрения объекта управления $\mathcal{E}$ и с точки зрения системы управления $\mathcal{C}_r$ в некоторый фиксированный момент $t$, $t \in \mathcal{T}$. Можно также сказать, что $\varphi_t(\omega)$ и $\psi_t(\omega)$ измеряют исходы экспериментов $\mathcal{E}_t$ и $\mathcal{C}_{r,t}$ соответственно. Пусть $(Z \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{L})$ — произведение измеримых пространств $(Z, \mathcal{B})$ и $(Y, \mathcal{L})$.

Определение. *Управляемым случайным процессом на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}_r(\cdot))$ называется однопараметрическое семейство $\{(\varphi_t, \psi_t);\ t \in \mathcal{T}\}$ случайных элементов со значениями в измеримом пространстве $(Z \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{L})$.

При проведении статистически устойчивого случайного эксперимента $\mathcal{Э}_r$ ставятся различные цели (основные задачи управления), которые существенно влияют на выбор измерителей $\varphi_t$ и $\psi_t$, $t \in \mathcal{T}$. Математическая формулировка этих задач даже для одного и того же управляемого случайного процесса $\{(\varphi_t, \psi_t);\ t \in \mathcal{T}\}$ может быть самой разнообразной. Одной из распространенных целей является так называемая оптимизационная задача, которая, в свою очередь, имеет много разных форм. Например, пусть $z = \{z_t;\ t \in \mathcal{T}\}$, $z \in Z^{\mathcal{T}}$, $y = \{y_t;\ t \in \mathcal{T}\}$, $y \in Y^{\mathcal{T}}$, $\mathcal{B}_0 =$ борелевская $\sigma$-алгебра на действительной прямой $\mathbb{R}$, и пусть задан $(\mathcal{B}^{\mathcal{T}} \times \mathcal{L}^{\mathcal{T}}/\mathcal{B}_0)$-измеримый [16] функционал $\Phi(z, y)\colon Z^{\mathcal{T}} \times Y^{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$. На содержательном уровне этот

функционал определяет количественные затраты, необходимые для управления объектом $\mathcal{E}$ с помощью системы $\mathcal{C}_r$, если выбрана совокупность $y=\{y_t;\ t\in\mathcal{T}\}$, $y\in Y^{\mathcal{T}}$, из управлений и при этом объект управления $\mathcal{E}$ принял значение $z=\{z_t;\ t\in\mathcal{T}\}$ из $Z^{\mathcal{T}}$. Если $\varphi=\{\varphi_t;\ t\in\mathcal{T}\}$, $\psi=\{\psi_t;\ t\in\mathcal{T}\}$ и $M_r\Phi(\varphi,\psi)=\int\limits_{\Omega}\Phi(\varphi,\psi)d\mathsf{P}_r(\cdot)$ — среднее значение затрат при использовании природы и структуры $r$ системы управления, то цель состоит в нахождении такого $r'$ из $\mathcal{R}$, для которого имеет место условие оптимальности

$$M_{r'}\Phi(\varphi,\psi)=\inf_{r\in\mathcal{R}}M_r\Phi(\varphi,\psi).$$

Итак, рассмотрен первый традиционный подход при изучении случайных экспериментов с управлением. Этот подход прежде всего позволяет обнаруживать статистические свойства эксперимента $\mathcal{E}_r$ в рамках математической модели $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}_r(\cdot))$, дать определение управляемого случайного процесса и интерпретировать его составляющие $\varphi_t$ и $\psi_t$, $t\in\mathcal{T}$ как измерители объекта управления и системы управления. К сожалению, только для очень простых экспериментов $\mathcal{E}_r$ удается построить обозримую вероятностную модель $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}_r(\cdot))$ и, тем самым, исследовать управляемый случайный процесс $\{(\varphi_t,\psi_t);\ t\in\mathcal{T}\}$, а иногда и достигнуть поставленной цели управления, т. е. найти $r'$.

Второй подход (для определенности и простоты здесь полагаем $\mathcal{T}=\{0,1,\ldots\}$) основан на задании вероятностей

$$\mathsf{P}_r(\{\omega:\ \varphi_0\in B\}),\qquad B\in\mathcal{B}, \tag{1}$$

для измерителя объекта управления $\mathcal{E}$ в начальный момент $t=0$, семейства условных вероятностей

$$\mathsf{P}_r(\{\omega:\ \varphi_{t+1}\in B\}\mid\varphi_0,\psi_0,\varphi_1,\psi_1,\ldots,\varphi_t,\psi_t),\quad B\in\mathcal{B},\quad t=0,1,\ldots, \tag{2}$$

для измерителя объекта управления $\mathcal{E}$, и, наконец, семейства условных вероятностей

$$\begin{gathered}\mathsf{P}_r(\{\omega:\ \psi_0\in L\}\mid\varphi_0),\quad L\in\mathcal{L},\\ \mathsf{P}_r(\{\omega:\ \psi_{t+1}\in L\}\mid\varphi_0,\psi_0,\ldots,\varphi_t,\psi_t,\varphi_{t+1}),\quad L\in\mathcal{L},\quad t=0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{3}$$

для измерителя системы управления $\mathcal{C}_r$. Семейство функций (1)–(3) удобно обозначить через

$$\begin{gathered}p(B),\quad p(B;z_0,z_1,\ldots,z_t;y_0,y_1,\ldots,y_t),\\ q_r(L,z_0),\quad q_r(L;z_0,z_1,\ldots,z_{t+1};y_0,y_1,\ldots,y_t),\\ B\in\mathcal{B},\quad L\in\mathcal{L},\quad z_t\in Z,\quad y_t\in Y,\quad t=0,1,\ldots;\end{gathered} \tag{4}$$

в этих обозначениях подразумевается независимость вероятностей (1) и семейства условных вероятностей (2) от параметра $r$, $r\in\mathcal{R}$, ибо природа и структура объекта управления $\mathcal{E}$ фиксированы. В работе [4] приведены условия, при которых по функциям (4) дано построение семейств так называемых выборочных вероятностных пространств вида

$$\begin{gathered}(Z^{\mathcal{T}},\mathcal{B}^{\mathcal{T}},\mathsf{p}(\cdot\mid y)),\quad y\in Y^{\mathcal{T}},\\ (Y^{\mathcal{T}},\mathcal{L}^{\mathcal{T}},\mathsf{q}_r(\cdot\mid z)),\quad z\in Z^{\mathcal{T}},\end{gathered} \tag{5}$$

и выборочного вероятностного пространства

$$((Z\times Y)^{\mathcal{T}},(\mathcal{B}\times\mathcal{L})^{\mathcal{T}},\mathsf{u}_r(\cdot)), \tag{6}$$

и, наоборот, по (5) определяются (4) и (6). Заметим, что условия касаются функций (4), семейства по $y$, $y\in Y^{\mathcal{T}}$, распределений $\mathsf{p}(C\mid y)$, $C\in\mathcal{B}^{\mathcal{T}}$, семейства по $z$, $z\in Z^{\mathcal{T}}$, распределений $\mathsf{q}_r(D\mid z)$, $D\in\mathcal{L}^{\mathcal{T}}$, и фазовых пространств $(Z,\mathcal{B})$, $(Y,\mathcal{L})$. Второй подход позволяет задачу исследования управляемого случайного процесса $\{(\varphi_t,\psi_t);\ t\in\mathcal{T}\}$ на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}_r(\cdot))$ с целью определения оптимального управления объектом $\mathcal{E}$ системой $\mathcal{C}_r$ свести к задаче изучения управляемого случайного процесса $\{(\varphi'_t,\psi'_t);\ t\in\mathcal{T}\}$ на выборочном вероятностном пространстве (6), где $\varphi'_t(z)=z_t$, $\psi'_t(y)=y_t$ при всех $t=0,1,\ldots$

Из только что рассмотренного подхода непосредственно следует несколько другой подход, который априори предполагает задание семей-

ства выборочных вероятностных пространств (5). Затем по (5) определяется функция (4) и, наконец, по функциям (4) строится выборочное вероятностное пространство (6), на котором задается и исследуется управляемый случайный процесс $\{(\varphi'_t, \psi'_t);\ t \in \mathcal{T}\}$. Этот прием, как правило, используют в случае непрерывного множества $\mathcal{T}$, см. [4].

В заключение § 1 отметим существование большого числа частных и важных подходов в случае, когда между случайными процессами $\{\varphi_t;\ t \in \mathcal{T}\}$, $\{\psi_t;\ t \in \mathcal{T}\}$ обнаруживаются или предполагаются самые разнообразные (простые или сложные) функциональные зависимости. Например, если указанные процессы удовлетворяют рекуррентным соотношениям, стохастическим дифференциальным уравнениям и т. д.

## § 2. Статистически устойчивые эксперименты с управлением с позиции управляющей системы

Приведенные в § 1 подходы фактически основаны на формальном описании статистических и функциональных связей между входами и выходами эксперимента $\mathcal{E}_\tau$. Иначе говоря, эти подходы изучают статистически устойчивые эксперименты с управлением с позиции «черного ящика», как это обычно делается в классических задачах автоматического регулирования. Даже при первом подходе, в котором для построения $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}_\tau(\cdot))$ требуется непосредственный и детальный анализ комплекса условий проведения статистически устойчивого эксперимента с управлением, в действительности достаточно иметь условные вероятности (1)–(3) и далее изучить только вероятностные свойства управляемого случайного процесса $\{(\varphi_t, \psi_t);\ t \in \mathcal{T}\}$ или его копии $\{(\varphi'_t, \psi'_t);\ t \in \mathcal{T}\}$.

Упомянутые подходы обладают существенными недостатками, являющимися следствием их единой точки зрения на изучение статистически устойчивых экспериментов управления с позиции «черного ящика». Во-первых, в основу определения управляемого случайного процесса положено общее понятие о фазовых измеримых пространствах $(Z, \mathcal{B})$ и $(Y, \mathcal{L})$ состояний для объекта управления $\mathcal{C}$ и соответственно для системы управления $\mathcal{C}_\tau$. Это позволяет задавать управляемый случайный процесс с помощью семейства условных распределений (4) или (5). Достигаемая при таком способе задания управляемых случайных процессов математическая общность результатов [4] не дает возможности получить указанные условные распределения для конкретных экспериментов $\mathcal{E}_\tau$. Например, для реальных процессов обслуживания, страхования, диспетчерского контроля за последовательностью взлетов и приземлений самолетов, управления технологическими и информационными сигналами микросварочного комплекса при сборке интегральных схем на кристаллах, адаптивного регулирования транспортных потоков на перекрестках со сложной геометрией переезда, обработки информационных потоков программ в локальных вычислительных сетях, управления конфликтными потоками самолетов при прохождении пересекающихся воздушных коридоров, организации работы таможен в крупных аэропортах мира и т. п. Во-вторых, перед экспериментом $\mathcal{E}_\tau$ может быть поставлен ряд целей с различными способами их достижения. В этом случае приходится рассматривать большое число управляемых случайных процессов с различными выборочными вероятностными пространствами и, следовательно, находить большое число семейств условных распределений вида (4) или (5). Затем необходимо решить трудную проблему согласованности (унификации) этого числа семейств условных распределений — например, с помощью построения единого выборочного вероятностного пространства для всех управляемых случайных процессов. Таковы принципиальные

трудности и недостатки в практическом отношении указанных подходов изучения статистически устойчивых экспериментов с управлением.

В связи с вышесказанным в работах [3, 12–14] разрабатывается новый подход к построению математической модели, анализу и оптимизации статистически устойчивых экспериментов с управлением. При таком подходе считается, что управляемый случайный процесс в классическом смысле [14] является всего лишь удобной вероятностной моделью совместного функционирования во времени $t \in \mathcal{T}$ объекта управления и системы управления, а не моделью эксперимента $\mathcal{Э}_\tau$. Поэтому всегда возникают трудные вопросы эффективного способа задания и методов изучения управляемых случайных процессов с учетом конкретной природы и цели функционирования эксперимента $\mathcal{Э}_\tau$. В силу этого на эксперимент $\mathcal{Э}_\tau$ целесообразно смотреть не с позиции «черного ящика», а с точки зрения общего понятия управляющей системы, впервые данного в математической кибернетике [11, 17]. Эта точка зрения по существу была поддержана и последовательно развивалась в монографии [1] по имитационному моделированию сложных систем (телефонные сети, производственные процессы, информационные системы, средства регулирования уличного движения, крупные морские и авиационные порты и т. п.). В работе [14] ради простоты статистически устойчивый эксперимент $\mathcal{Э}_\tau$ интерпретируется как довольно общий процесс обслуживания неоднородных требований и управления потоками. В основе построения, анализа и оптимизации модели эксперимента $\mathcal{Э}_\tau$ лежат следующие положения:

1) принцип дискретности актов функционирования эксперимента $\mathcal{Э}_\tau$ во времени $\tau_i$, $i \geqslant 0$, где стробирующий точечный случайный процесс $\{\tau_i; i \geqslant \geqslant 0\}$ задает на $[0, \infty)$ шкалу тактов времени работы системы обслуживания;

2) принцип нелокальности в описании поэлементного строения эксперимента $\mathcal{Э}_\tau$;

3) принцип совместного рассмотрения поэлементного строения эксперимента $\mathcal{Э}_\tau$ и его функционирования во времени.

Эти принципы позволили в [14] выделить схему, информацию, координаты и функцию статистически устойчивого эксперимента $\mathcal{Э}_\tau$. При таком нетрадиционном подходе статистически устойчивый эксперимент с управлением представляет собой единство схемы, информации, координат и функции. Для схемы найдены следующие составляющие элементы: входные и выходные полюсы, внешняя память, внутренняя память, устройство по переработке информации внешней памяти. Введено понятие алгоритма управления состояниями составляющих элементов схемы (например, состояниями внутренней памяти). Было проведено кодирование информации или, что то же самое, нелокальное описание составляющих элементов схемы эксперимента $\mathcal{Э}_\tau$. Рассмотрены нетрадиционные задачи классификации составляющих элементов схемы и задачи выявления существенных связей между этими элементами. Основная проблема, которая была поставлена и частично решена в [14], заключается в выборе искомых характеристик (управляемых случайных процессов) статистически устойчивых экспериментов $\mathcal{Э}_\tau$, в алгоритмизации — конструктивном построении выбранных управляемых случайных процессов, и, наконец, в изучении их вероятностных свойств с целью решения задачи анализа, синтеза, эволюции, надежности, оптимизации и др.

В §§ 3, 4 мы для демонстрации эффективности предлагаемого здесь подхода рассмотрим задачу об обслуживании неоднородных требований и об управлении в классе алгоритмов с упреждением $m$ конфликтными и независимыми потоками [14], которые формируются в случайной среде. При этом результаты §§ 3, 4 являются прямым продолжением исследований, начатых в работе [14]. Поэтому здесь мы сохраним и используем введенные в [14] терминологию, основные обозначения и определения.

## § 3. Условия проведения случайного эксперимента и управляющая система

Неоднородные требования независимых и конфликтных [14] входных потоков $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ — входных полюсов для управляющей системы — поступают в соответствующие накопители или очереди $O_1, O_2, \ldots, O_m$. Изменение во времени вероятностной структуры входных потоков определяется внешней случайной средой (СС) [1] — марковской цепью $\{\nu_i;\ i \geqslant 0\}$ — для определенности, с двумя состояниями: $e^{(0)}$ и $e^{(1)}$. Если среда находится в состоянии $e^{(0)}$, то входные потоки представляют собой потоки типа Пуассона [5]. При состоянии среды $e^{(1)}$ входные потоки являются неординарными потоками Бартлетта [2, 14]. Например, при хорошей погоде (СС) транспортные потоки машин на магистрали, как правило, являются пуассоновскими, а при плохой погоде (СС) уже будут потоками пачек Бартлетта [14]. Состояние $\nu_i$ внешней среды объявляем меткой поступающих требований. Накопители, которые образуют внешнюю память управляющей системы, разрешают неограниченный размер очереди по потокам, т. е. $N_j = +\infty$ для всех $j$, $1 \leqslant j \leqslant m$ (см. [14]). Обслуживающее устройство (ОУ) составляет внутреннюю память управляющей системы и имеет $2m+1$ изменяющихся случайным образов режимов работы — другими словами, $2m+1$ состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m+1)}$. В каждом состоянии $\Gamma^{(s)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T_s$, $1 \leqslant s \leqslant 2m+1$. Для каждого $j$, $j = 1, \ldots, m$, в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживаются только требования потока $\Pi_j$ из накопителя $O_j$ с максимально возможной интенсивностью $\mu_j > 0$, в состоянии $\Gamma^{(2j)}$ потоки не обслуживаются и, наконец, в состоянии $\Gamma^{(2m+1)}$ обслуживаются лишь требования самого интенсивного потока $\Pi_m$ из очереди $O_m$ с максимально возможной интенсивностью $\mu_m$. Итак, обслуживающее устройство выполняет не только традиционные функции по обслуживанию неоднородных требований, но и функции по управлению входными потоками для разрешения их конфликтности, по формированию очередей в накопителях, а также функцию изменения режимов своей работы (переналадок). Разрешение конфликтности, например, для транспортного перекрестка, управляемого светофором, означает безаварийное движение машин. Процесс обслуживания неоднородных требований удобно характеризовать не их длительностями, как принято в теории массового обслуживания, а потоками насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_m$ — выходными потоками системы обслуживания при максимально возможной загруженности ее накопителей и эксплуатации. Потоки насыщения образуют другой тип входных полюсов управляющей системы. Отбор (в некотором количестве) заявок из накопителей $O_1, O_2, \ldots, O_m$ на обслуживание осуществляют механизмы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ дисциплины очереди в зависимости от наличия требований в очередях, от входных

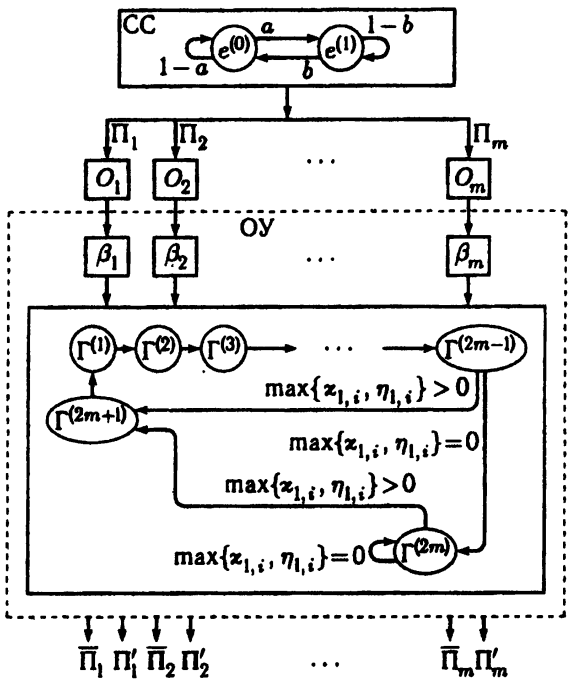



Рис. 1. Функциональная схема системы управления конфликтными потоками требований (алгоритм с упреждением)

потоков, от потоков насыщения и, наконец, от состояния обслуживающего устройства. Устройство $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ по организации дисциплины очереди в накопителях — это элемент по переработке информации внешней памяти управляющей системы. Выходные потоки $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \ldots, \overline{\Pi}_m$ в действительности обслуженных по входным потокам $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ требований естественно считать выходными полюсами управляющей системы. Предположим теперь, что закон изменения состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m+1)}$ обслуживающего устройства является алгоритмом с упреждением (вида (6) из [14]). Дополнительно к этому примем, что моменты $\theta_{j,i}$, $i \geqslant 0$, переработки информации о внешней памяти по каждому потоку $\Pi_j$ и моменты $\theta_{1,i}$, $i \geqslant 0$, переработки информации о внутренней памяти совпадают с $\tau_i$, $i \geqslant 0$, т. е. из соотношения (6) работы [14] сразу находим $\zeta_{j,i} = i$, $v_1(\Gamma_i) \equiv 1$ для всех $j$, $j = 1, \ldots, m$, $i \geqslant 0$ и $\tau_{i+1} = \tau_i + v(\Gamma_i)$, где $\Gamma_i$ — состояние обслуживающего устройства в момент $\tau_i$ со значениями в $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m+1)}\}$, а отображение $v(\cdot)$: $\Gamma \to \{T_1, T_2, \ldots, T_{2m+1}\}$ задается равенством $v(\Gamma^{(s)}) = T_s$, $s = 1, \ldots, 2m+1$. Отметим, что в работе [14] приведено достаточное число реальных экспериментов, в которых практически полезно использовать алгоритмы с упреждением для управления конфликтными потоками с целью, например, обеспечить требования минимальных задержек в обслуживании. Наконец, пусть работа устройства $\beta$ по переработке внешней памяти формализуется соотношением (8) из [14], т. е. здесь применяется экстремальная стратегия формирования очередей по потокам. Теперь, с учетом наличия внешней марковской среды и ее графа переходов состояний, с учетом отсутствия потоков потерянных требований при экстремальной стратегии формирования очередей и, наконец, с учетом графа переходов состояния обслуживающего устройства при управлении потоками в классе алгоритмов с упреждением общую схему управляющей системы из работы [14] можно графически изобразить так, как показано на рисунке.

На этой функциональной схеме введены более удобные (по сравнению с [14]) обозначения для накопителей, устройства формирования очередей и потоков насыщения этих элементов. Заметим, что внешняя среда представляет собой марковскую последовательность $\{\nu_i;\ i \geqslant 0\}$ случайных меток [14] поступающих требований. Значит, смена ее состояний может происходить только в случайные моменты $\tau_i$, $i \geqslant 0$, с переходными вероятностями $a$ и $b$, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, из состояния $e^{(0)}$ в $e^{(1)}$ и из $e^{(1)}$ в $e^{(0)}$ соответственно.

Используем предложенное в [14] определение схемы, информации, координат и функции для данного эксперимента $\mathcal{Э}_r$ и примем также из [14] математическое описание составляющих элементов схемы управляющей системы или кодирование информации для $\mathcal{Э}_r$. Тогда выявленные существенные функциональные связи (формулы (6), (8) и (9) в [14]) между определяющими элементами схемы управляющей системы для данного конкретного эксперимента $\mathcal{Э}_r$ можно представить в несколько упрощенном виде:

$$\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \eta_{1,i}) = \begin{cases} \Gamma^{(1)} & \text{при } \Gamma_i = \Gamma^{(2m)}, \\ \Gamma^{(s)} & \text{при } \Gamma_i = \Gamma^{(s-1)},\ 1 < s < 2m, \\ \Gamma^{(2m)} & \text{при } [(\Gamma_i = \Gamma^{(2m-1)}) \vee (\Gamma_i = \Gamma^{(2m+1)})] \,\&\, (\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} > 0), \\ \Gamma^{(2m+1)} & \text{при } [(\Gamma_i = \Gamma^{(2m-1)}) \vee (\Gamma_i = \Gamma^{(2m+1)})] \,\&\, (\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} = 0), \end{cases} \quad (7)$$

$$\tau_{i+1} = \tau_i + v(\Gamma_i), \quad \tau_0 = 0, \quad i \geqslant 0;$$

$$\xi_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad \varkappa_{j,i+1} = \max\{0; \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad i \geqslant 0.$$

Напомним, что при получении соотношений (7) использованы следующие случайные величины и элементы из работы [14]:

$\Gamma_i$ — состояние обслуживающего устройства на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\Gamma_i \in \Gamma$;

$\varkappa_{j,i}$ — величина очереди требований потока $\Pi_j$ в накопителе $O_j$, $\varkappa_{j,i} \in \{0, 1, \ldots\}$;

$\eta_{j,i}$ — число поступивших требований потока $\Pi_j$ на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ с меткой $\nu_i$ из $E = \{e^{(0)}, e^{(1)}\}$, $\eta_{j,i} \in \{0, 1, \ldots\}$;

$\xi_{j,i}$ — максимально возможное число обслуженных требований потока $\Pi_j$ на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ с меткой $(\nu_i, \Gamma_i)$ из $E \times \Gamma$, $\xi_{j,i} \in \{0, 1, \ldots\}$;

$\bar{\xi}_{j,i}$ — число фактически обслуженных требований потока $\Pi_j$ на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ с меткой $(\nu_i, \Gamma_i)$ из $E \times \Gamma$, $\bar{\xi}_{j,i} \in \{0, 1, \ldots\}$,

а также учтены справедливые для данного эксперимента $\mathcal{Э}_r$ равенства $N_j = +\infty$, $\zeta_{j,i} = i$, $\eta^+_{j,i} = \eta_{j,i}$, $\xi^+_{j,i} = \xi_{j,i}$ для всех $j$, $j = 1, \ldots, m$, $i \geqslant 0$. Наряду с равенствами (7) мы будем пользоваться известным [7] рекуррентным соотношением

$$\nu_{i+1} = \Xi_i(\nu_i, \chi_i), \quad i \geqslant 0, \tag{8}$$

для марковской цепи $\{\nu_i;\ i \geqslant 0\}$, где $\Xi_i(\cdot, \cdot)$ — некоторое измеримое отображение пространства $E \times (0, 1)$ на $E$ при каждом $i \geqslant 0$, а $\{\chi_i;\ i \geqslant 0\}$ — последовательных независимых случайных величин (например, равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$). Самым важным и трудным этапом предложенного здесь подхода является получение рекуррентных соотношений типа (6)–(8), которые прежде всего позволяют удачно выбрать, конструктивно построить и изучить искомые управляемые случайные последовательности $\{(\Gamma_i, \nu_i, \varkappa_i);\ i \geqslant 0\}$, $\{(\Gamma_i, \nu_i, \varkappa_i, \bar{\xi}_i);\ i \geqslant 0\}$ с целью решения поставленных задач функционирования эксперимента $\mathcal{Э}_r$. Элементы $\varkappa_i$ и $\bar{\xi}_i$ этих последовательностей соответственно равны векторам $(\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \ldots, \varkappa_{m,i})$ и $(\bar{\xi}_{1,i}, \bar{\xi}_{2,i}, \ldots, \bar{\xi}_{m,i})$.

В § 4 мы приведем результаты аналитических и численных исследований лишь управляемой случайной последовательности $\{(\Gamma_i, \nu_i, \varkappa_i);\ i \geqslant 0\}$, так как более громоздкий процесс $\{(\Gamma_i, \nu_i, \varkappa_i, \bar{\xi}_i);\ i \geqslant 0\}$ в силу рекуррентных соотношений (6)–(8) можно изучать аналогичным способом.

## § 4. Аналитическое и численное исследование управляемых случайных последовательностей

С использованием нелокального способа описания [14] входных потоков и потоков насыщения (входных полюсов управляющей системы), их независимости в совокупности, вида распределений Пуассона [5] и Бартлетта [2], а также с учетом независимости потоков насыщения от внешней случайной среды, в работе [9] для условных вероятностей случайных величин $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$, $j = 1, \ldots, m$, $i \geqslant 0$, были получены следующие равенства *):

$$\mathsf{P}_r(\eta_{j,i} = c,\ \xi_{j,i} = d \mid \Gamma_k = c_k,\ \nu_k = d_k,\ \varkappa_{j,k} = x_{j,k},\ 0 \leqslant k \leqslant i) = \\ = \mathsf{P}_r(\eta_{j,i} = c \mid \Gamma_i = c_i,\ \nu_i = d_i)\mathsf{P}_r(\xi_{j,i} = d \mid \Gamma_i = c_i), \tag{9}$$

$$d, x_{j,k} \in \{0, 1, \ldots\}, \quad c_k \in \Gamma, \quad d_k \in E;$$

$$\mathsf{P}_r(\eta_{j,i} = c \mid \Gamma_i = \Gamma^{(s)}, \nu_i = e^{(0)}) = (\lambda_j T_s)^c (c!)^{-1} \exp\{-\lambda_j T_s\}, \quad \Gamma^{(s)} \in \Gamma,\ \lambda_j > 0; \tag{10}$$

*) Далее используется обозначение $[x]$ для целой части числа $x$.

$$\mathsf{P}_r(\eta_{j,i}=c \mid \Gamma_i=\Gamma^{(s)},\ \nu_i=e^{(1)})=\left(\frac{(\lambda'_jT_s(1-g_j))^c}{c!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{c-2}\frac{(\lambda'_jT_s(1-g_j))^l}{l!}\sum_{h=1}^{[(c-l)/2]}\frac{\lambda'_jT_sg_j(1-q_j)^h}{h!}C_{c-l-h-1}^{h-1}q_j^{c-l-2h}\right)\exp\{-\lambda'_jT_s\},\quad(11)$$

$$\Gamma^{(s)}\in\Gamma,\quad \lambda'_j>0,\quad 0<g_j,q_j<1;$$

$$\mathsf{P}_r(\xi_{j,i}=l_j \mid \Gamma_i=\Gamma^{(2j-1)})=1,\qquad l_j=\lfloor\mu_jT_{2j-1}\rfloor;\quad(12)$$

$$\mathsf{P}_r(\xi_{j,i}=0 \mid \Gamma_i=\Gamma^{(s)})=1,\qquad s=1,\ldots,2m,\quad s\neq 2j-1;\quad(13)$$

$$\mathsf{P}_r(\xi_{j,i}=0 \mid \Gamma_i=\Gamma^{(2m+1)})=1,\qquad 1\leqslant j<m;\quad(14)$$

$$\mathsf{P}_r(\xi_{m,i}=l'_m \mid \Gamma_i=\Gamma^{(2m+1)})=1,\qquad l'_m=\lfloor\mu_mT_{2m+1}\rfloor;\quad(15)$$

в этих соотношениях $j=1,\ldots,m$ (за исключением двух последних), $i, c\in\{0,1,2,\ldots\}$, через $\lambda_j$ и $\lambda'_j$ обозначены интенсивность пуассоновского поступления требований и интенсивность поступления пачек в потоке Бартлетта соответственно. При этом параметры $\lambda'_j$, $g_j$ и $q_j$ распределения Бартлетта удовлетворяют равенству $\lambda_j=(1+g_j(1-q_j)^{-1})\lambda'_j$, которое означает, что интенсивность поступления заявок в потоке $\Pi_j$ не зависит от состояния внешней случайной среды.

Для управляемой случайной последовательности $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_i);\ i\geqslant 0\}$ справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Управляемые случайные последовательности* $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_i);\ i\geqslant 0\}$, $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i});\ i\geqslant 0\}$, $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{j,i});\ i\geqslant 0\}$, $1<j\leqslant m$, *при заданном распределении вектора* $(\Gamma_0,\nu_0,\varkappa_0)$ *являются марковскими.*

Теорема 2. *Пространство всех возможных состояний векторной марковской цепи* $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{m,i});\ i\geqslant 0\}$ *распадается на незамкнутое множество несущественных состояний и на минимальное замкнутое множество из существенных непериодических состояний.*

Теорема 3. *Для марковской цепи* $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{m,i});\ i\geqslant 0\}$ *либо не существует стационарного распределения, либо существует единственное стационарное распределение, и в этом случае распределение указанной цепи в момент* $\tau_i$ *стремится к нему при* $i\to\infty$, *каково бы ни было распределение начального вектора* $(\Gamma_0,\nu_0,\varkappa_{1,0},\varkappa_{m,0})$.

Утверждения, аналогичные теоремам 2 и 3, имеют место и для цепей Маркова $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i});\ i\geqslant 0\}$, $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_i);\ i\geqslant 0\}$, $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{j,i});\ i\geqslant 0\}$, $1<j<m$. Обозначим $T=T_1+\ldots+T_{2m}$.

Теорема 4. *Для марковской цепи* $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i});\ i\geqslant 0\}$ *предельное распределение существует тогда и только тогда, когда* $\lambda_1T-l_1<0$.

Теорема 5. *Для существования стационарного распределения векторной цепи Маркова* $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{m,i});\ i\geqslant 0\}$ *необходимы условия* $\lambda_1T-l_1<0$, $\lambda_m-\mu_m<0$ *и* $\lambda_1l_1^{-1}(T-T_{2m-1})+\lambda_m\mu_m^{-1}<1$.

Теорема 6. *При* $\lambda_1T-l_1<0$ *и* $\lambda_mT-l_m<0$ *векторная марковская последовательность* $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{m,i});\ i\geqslant 0\}$ *имеет предельное распределение.*

Теорема 7. *Пусть* $\lambda_1T-l_1<0$, $\lambda_mT-l_m<0$ *и* $T_{2m+1}>T_{2m-1}+(\lambda_mT-l_m)(\mu_m-\lambda_m)^{-1}$. *Тогда математическое ожидание длины очереди в момент* $\tau_i$ *по каждому из потоков* $\Pi_1$, $\Pi_m$ *имеет конечный предел при* $i\to\infty$, *и этот предел определяется единственным стационарным распределением для последовательности* $\{(\Gamma_i,\nu_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{m,i});\ i\geqslant 0\}$.

В работах [12, 13] предлагается итеративно-мажорантный метод, с помощью которого и соотношений (6)–(15) в [9, 10] доказываются сформулированные здесь теоремы 1–7.

Подробное изучение вероятностных свойств управляемой случайной последовательности $\{(\Gamma_i, \nu_i, \mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{m,i});\ i \geqslant 0\}$ можно объяснить тем, что эта последовательность определяет флуктуацию длин очередей по информативному и приоритетному потоку $\Pi_1$ и по наиболее интенсивному потоку $\Pi_m$. Правда, вероятностные свойства управляемых случайных последовательностей $\{(\Gamma_i, \nu_i, \mathbf{x}_i);\ i \geqslant 0\}$, $\{(\Gamma_i, \nu_i, \mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{j,i});\ i \geqslant 0\}$, $1 < j < m$, могут быть изучены аналогичным методом.

Таким образом, в §§ 3, 4 мы, исходя из реальных запросов практики, рассмотрели проблемы управления в классе алгоритмов с упреждением новыми моделями входных потоков, которые не являются стационарными, ординарными и потоками без последействия даже при $T_1 = T_2 = \ldots = T_{2m+1}$. Более того, для такого рода потоков пока не удается найти локальное описание [14], так как их вероятностная структура существенно зависит от состояния внешней среды, и от алгоритма управления, а потому устроена сложнее по сравнению с потоками, известными в теории массового обслуживания. Кроме того, в соответствии с терминологией и обозначениями § 1 и в связи с выбранной управляемой последовательностью $\{(\Gamma_i, \nu_i, \mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{m,i});\ i \geqslant 0\}$ для эксперимента $\mathcal{E}_r$ имеем $t = i \in \{0, 1, \ldots\}$, $\varphi_t = (\nu_t, \mathbf{x}_{1,t}, \mathbf{x}_{m,t})$, $\psi_t = \Gamma_t$, $Y = \Gamma$, $Z = E \times \{0, 1, \ldots\} \times \{0, 1, \ldots\}$, $\mathcal{B}$ — множество всех подмножеств множества $E \times \{0, 1, \ldots\} \times \{0, 1, \ldots,\}$, $\mathcal{L}$ — множество всех подмножеств множества $\Gamma$, $r = (T_1, T_2, \ldots, T_{2m+1})$, $\mathcal{R} = \{(T_1, T_2, \ldots, T_{2m+1})\colon T_1 > 0,\ T_2 > 0,\ \ldots,\ T_{2m+1} > 0\}$. Применяя теорему 7, мы в качестве среднего значения затрат при использовании природы и структуры $r$ для изучаемого здесь эксперимента $\mathcal{E}_r$ можем, например, взять величину $M_r\Phi(\varphi, \psi) = \lim\limits_{i \to \infty} M_r(\mathbf{x}_{1,i} + \mathbf{x}_{m,i})$. Эта величина определяет среднее значение суммы длин очередей по потоку $\Pi_1$ и $\Pi_m$ в стационарном режиме.

Перейдем теперь к численным исследованиям статистически устойчивого эксперимента $\mathcal{E}_r$. Основными целевыми показателями управления конфликтными потоками неоднородных требований являются среднее время пребывания произвольной заявки в системе для стационарного режима и продолжительность переходного процесса. В настоящее время не удается изучить аналитическими средствами поведение указанных критериальных характеристик работы управляющей системы в зависимости от ее параметров $\lambda_j, \mu_j, a, b, g_j, q_j$, $j = 1, \ldots, m$, и алгоритма (стратегии) управления $r$, $r \in \mathcal{R}$. Однако предлагаемый в этой работе подход позволяет по найденной схеме управляющей системы и по установленным функционально-статистическим связям между составляющими элементами схемы непосредственно построить компьютерную имитационную модель эксперимента $\mathcal{E}_r$. На самом деле была создана унифицированная модель [15] для широкого класса процессов обслуживания неоднородных требований и процессов управления $m$ конфликтными потоками с возможным изменением их вероятностной структуры (см. рис. 1 и соотношения (1)–(3) из [14]). Затем выбором параметров унифицированной модели легко можно сконструировать имитационную модель рассматриваемого здесь эксперимента $\mathcal{E}_r$. Компьютерной имитацией поведения составляющих элементов схемы управляющей системы и их функционально-статистического взаимодействия были приближенно вычислены указанные выше основные характеристики эксперимента $\mathcal{E}_r$ и вскрыты его закономерности. Естественно, имитационное моделирование процесса управления конфликтными потоками в классе алгоритмов с упреждением проводилось в условиях существования стационарного режима, т. е. при выполнении неравенств $\lambda_1 T - \lfloor \mu_1 T_1 \rfloor < 0$, $\lambda_m T - \lfloor \mu_m T_{2m-1} \rfloor < 0$ (см. теорему 6). Прежде всего, на имитационной модели были еще раз подтверждены все факты, которые описаны в задачах и примерах работы [14]. Кроме

того, анализ численных результатов, полученных при имитационном моделировании, позволяет выделить следующие новые закономерности.

1. С ростом загрузки $\rho$ управляющей системы, которая согласно теореме 5 определяется формулой $\rho = \lambda_1 l_1^{-1}(T - T_{2m-1}) + \lambda_m \mu_m^{-1} < 1$, оценки среднего времени пребывания произвольного требования в стационарном режиме и продолжительности переходного процесса [6] и, наконец, время имитационного моделирования, необходимое для получения указанных оценок с заданной точностью и надежностью, возрастают существенно нелинейно. Медленнее всего указанные величины возрастают для входных потоков Пуассона ($a = 0$, $b = 1$), быстрее — в «смесях» потоков Пуассона и Бартлетта ($0 < a, b < 1$) и, наконец, быстрее всего — для входных потоков Бартлетта ($a = 1$, $b = 0$). В последних двух случаях с ростом среднего размера длины пачки, вычисляемого по формуле $L_n = 1 + g_j(1 - q_j)^{-1}$, происходит резкое увеличение указанных оценок и времени необходимого имитационного моделирования. Итак, если факт существования стационарного движения для данной управляющей системы не зависит от параметров $a$ и $b$ внешней случайной среды, то, напротив, эти параметры оказывают существенное влияние на величины основных ее характеристик.

2. При одной и той же загрузке $\rho$ наименьшую величину переходного процесса имеет управляющая система с пуассоновскими входными потоками. В «смесях» потоков Пуассона и Бартлетта длительность переходного процесса увеличивается. При этом существенную роль играют параметры $a$, $b$, $g_j$ и $q_j$. Наибольшей продолжительностью переходного процесса обладают управляющие системы с входными потоками Бартлетта, имеющими наибольшие средние размеры пачек.

3. Пусть имеется некоторое количество различных реализаций имитационной модели управляющей системы, каждая из которых задается своим начальным состоянием датчика псевдослучайных чисел. По каждой такой реализации с одной и той же точностью и надежностью определяется оценка среднего времени пребывания произвольного требования в системе для стационарного режима. Обозначим через $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ наименьшее и наибольшее значение среди всех таких оценок. Тогда разброс оценок среднего времени пребывания произвольного требования в системе для стационарного режима можно вычислить по формуле $(\gamma_{\max} - \gamma_{\min})\gamma_{\min}^{-1} \times 100\%$. Многочисленные результаты экспериментов на имитационной модели показали, что с ростом загрузки $\rho$ разброс оценок возрастает также существенно нелинейно. Загрузку $\rho$ можно увеличить за счет выбора $r = (T_1, T_2, \ldots, T_{2m+1})$ из $\mathcal{R}$, поэтому большой разброс оценок основной характеристики эксперимента $\mathcal{E}_r$ может служить косвенным признаком применения нерациональной стратегии управления.

Теперь для подтверждения некоторых из указанных закономерностей приведем численные примеры (результаты расчетов на компьютере). Ради простоты в дальнейшем полагаем $m = 2$ — иначе говоря, рассматриваем задачу об управлении двумя конфликтными потоками заявок (з.), т. е., следовательно, в управляющей системе обслуживания отсутствует группа малоинтенсивных потоков [14].

Пример 1. Пусть $\lambda_1 = 0{,}1$ з./с, $\lambda_2 = 0{,}15$ з./с, $\mu_1 = \mu_2 = 1$ з./с, $g_1 = q_1 = g_2 = q_2 = 0{,}8$, $a = 0{,}7$, $b = 0{,}2$, $T_1 = 20$ с, $T_2 = T_4 = 3$ с, $T_3 = 26$ с, $T_5 = 4$ с. При этих значениях параметров управляющей системы обслуживания находим, что $T = 52$ с, $\rho = 0{,}28$ и средний размер длины пачки равен 5 з. по каждому из потоков $\Pi_1$ и $\Pi_2$. В этом случае с помощью имитации на компьютере получаем оценку среднего времени пребывания произвольного требования в системе для стационарного режима, равную 11,36 с при точности 0,1 с и надежности 0,9. При этом разброс оценок, полученных по десяти различным реализациям имитационной модели, составляет 3,7%.

Ниже в этом примере числовые значения некоторых из параметров $a$, $b$, $g_1$, $g_2$ управляющей системы будут другими, а числовые значения остальных параметров остаются без изменения. Тогда для оценки $t_п$ продолжительности переходного процесса имеем следующие значения: $t_п = 1352$ с при $a = 0$, $b = 1$; $t_п = 5012$ с при $a = 0{,}7$, $b = 0{,}2$, $g_1 = g_2 = 0{,}4$ ($L_п = 3$ з.); $t_п = 5392$ с при $a = 0{,}7$, $b = 0{,}2$, $g_1 = g_2 = 0{,}6$ ($L_п = 4$ з.); $t_п = 7608$ с при $a = 1$, $b = 0$, $g_1 = g_2 = 0{,}6$ ($L_п = 4$ з.).

Пример 2. Если $\lambda_1 = 0{,}1$ з./с, $\lambda_2 = 0{,}3$ з./с, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}5$ з./с, $g_1 = q_1 = g_2 = q_2 = 0{,}8$, $a = 0{,}7$, $b = 0{,}2$, $T_1 = 34$ с, $T_2 = T_4 = 3$ с, $T_3 = 80$ с, $T_5 = 4$ с, то $T = 120$ с, $\rho = 0{,}83$ и $L_п = 5$ з.. Эти числовые значения параметров имитационной модели дают оценку среднего времени пребывания произвольного требования в системе для стационарного режима, равную 89,1 с при точности 0,6 с и доверительной вероятности 0,9. Для разброса оценок получаем величину, равную 14,2%. Далее, как и в примере 1, изменяем числовые значения только параметров $a$, $b$, $g_1$ и $g_2$. Путем имитационного моделирования для оценки переходного процесса получаем: $t_п = 33480$ с для $a = 0$, $b = 1$; $t_п = 59776$ с для $a = 0{,}7$, $b = 0{,}2$, $g_1 = g_2 = 0{,}4$ ($L_п = 3$ з.); $t_п = 90736$ с при $a = 0{,}7$, $b = 0{,}2$, $g_1 = g_2 = 0{,}6$ ($L_п = 4$ з.); $t_п = 90852$ с при $a = 1$, $b = 0$, $g_1 = g_2 = 0{,}6$ ($L_п = 4$ з.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. — М.: Наука, 1978.
2. Высоцкий А. А., Федоткин М. А. Методы анализа потоков с зависимыми интервалами поступления требований // Международная научно-техническая коиференция «Микросистема-92»: Тез. докл. — Томск, 1992. — С. 57–59.
3. Высоцкий А. А., Федоткин М. А. Предельные свойства и оптимизация процессов с разделением времени // Докл. РАН. — 1996. — Т. 350, № 3. — С. 295–297.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наукова думка, 1977.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988.
6. Княжицкий Б. Я., Неймарк Ю. И., Федоткин М. А. О допустимости оптимизации управления конфликтными системами массового обслуживания по стационарному режиму // Динамика систем. Оптимизация и адаптация. — Горький: ГГУ, 1981. — С. 123–136.
7. Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1982.
8. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
9. Куделии А. Н., Федоткин М. А. Управление конфликтными потоками в случайной среде по информации о наличии очереди // Деп. в ВИНИТИ, 1996. — № 1717-В-96.
10. Куделин А. Н., Федоткин М. А. Предельные теоремы для систем управления потоками в случайной среде в классе алгоритмов с упреждением // Деп. в ВИНИТИ, 1996. — № 2593-В-96.
11. Ляпунов А. А., Яблонский С. В. Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 9. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 5–22.
12. Федоткин М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. I // Литовский математический сборник. — 1988. — Т. 28, № 4. — С. 783–794.
13. Федоткин М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. II // Литовский математический сборник. — 1989. — Т. 29, № 1. — С. 148–159.
14. Федоткин М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 51–70.
15. Федоткин М. А., Шаров Г. В. Имитационное моделирование систем массового обслуживания с переменной структурой // Методическая разработка по выполнению компьютерной лабораторной работы. — Н. Новгород: ННГУ, 1997. — С. 1–28.
16. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1989.
17. Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 2. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 7–38.


Поступило в редакцию 3 IX 1997