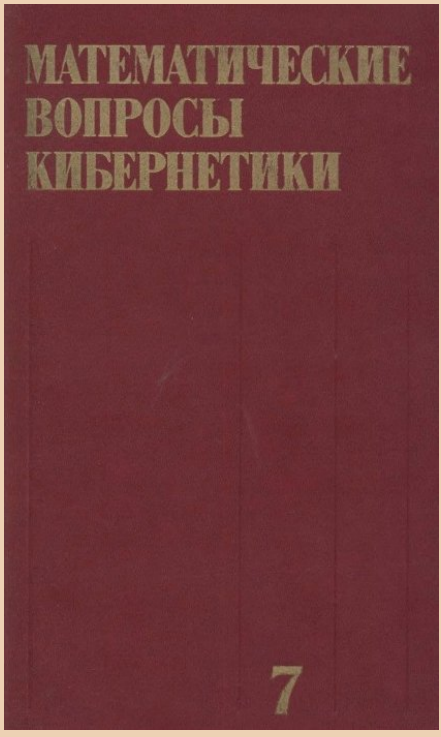
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 7



Д. Г. Мещанинов

О первых d-разностях функций k-значной логики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Мещанинов Д. Г. О первых d-разностях функций k-значной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 265–280. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1998-265

О ПЕРВЫХ d-РАЗНОСТЯХ ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Д. Г. МЕЩАНИНОВ

(МОСКВА)

Пусть k — натуральное число, $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $P_k = \{f: E_k^n \to E_k,\ n = 0, 1, \ldots\}$ — класс всех функций k-значной логики. Рассмотрим функциональную систему P_k, т. е. алгебру указанных функций с операцией суперпозиции [15]. Важнейшими при изучении функциональных систем (как и любых универсальных алгебр) являются проблемы полноты и выразимости, представления их элементов формулами канонического вида, а также описания решетки замкнутых классов (структуры подалгебр). Как известно, множество всех замкнутых классов в P_k имеет при $k \geqslant 3$ мощность континуум [16], что весьма затрудняет описание всей их решетки. Однако информацию о строении этой решетки можно получить, в частности, рассматривая ее фрагменты — например, окрестности некоторых достаточно мощных классов. Одним из таких классов является замкнутый класс Pol всех функций, представимых полиномами по модулю k в случае, когда число k составное. В последние годы ведутся интенсивные исследования как верхней [2, 3, 6, 8, 9, 11–14], так и нижней [5] его полуокрестностей.

В настоящей работе вводятся и анализируются два семейства замкнутых классов, содержащих полиномы по модулю k. Элементы этих семейств содержат классы из верхней и нижней полуокрестностей класса Pol и характеризуются в терминах так называемых d-разностей. Аппарат конечных разностей уже неоднократно применялся рядом авторов для описания различных свойств функций, связанных с их полиномиальным представлением [1, 7, 9, 10, 17–19], а также при исследовании верхней полуокрестности класса Pol, см. [6, 8, 9]. Решение многих подобных вопросов, как выяснилось, в большой степени зависит от структуры числа k, количества и состава его простых множителей. Подход, примененный в данной работе, един для любого k. Строятся решетки классов, входящих в каждое из двух анализируемых семейств; показывается, что они изоморфны решетке делителей числа k. В каждом из введенных замкнутых классов находятся канонические представления его элементов и полные системы.

Будем применять следующие обозначения: $\tilde{x} = \tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{0} = 0^n = (0, \ldots, 0)$ — n-мерные векторы; $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел; $[\{f_1, \ldots, f_m\}]$ — замыкание системы функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ относительно суперпозиции; $\lfloor r \rfloor$ — целая часть рационального числа r. Символы $+, -, \cdot$ будут обычно означать операции кольца вычетов по модулю k, все иные случаи их употребления специально оговариваются. Если a, b — натуральные числа, то (a, b) и $[a, b]$ — их наибольший общий делитель и наи-

меньшее общее кратное соответственно. Буквами p и q (возможно, с индексами) будут обозначаться простые числа. Наконец,

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\beta} \pmod{d} \iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ (\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{d}),$$
$$d|e \iff e \equiv 0 \pmod{d}.$$

§ 1. Основные понятия

Определение 1. Пусть $f(\tilde{x}) \in P_k$, $d|k$. Фиксируем i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Для различных $\tilde{x}$ из E_k^n рассмотрим величины

$$\Delta_i f(\tilde{x}) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + d, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}),$$

которые называются (*первыми*) *d-разностями функции f по переменной x_i*, вычисленными *в точке* $\tilde{x}$. Если функция f зависит от одной переменной, то ее d-разности, вычисленные в точке x, обозначаются $\Delta f(x)$.

Определение 2. Будем говорить, что *функция $f(\tilde{x})$ сохраняет d-разности*, если для всех i из $\{1, \ldots, n\}$, всех $\tilde{\mu}$ из E_d^n и всех таких $\tilde{x}$, что $\tilde{x} \equiv \tilde{\mu} \pmod{d}$, разности $\Delta_i f(\tilde{x}) = \Delta(i, \tilde{\mu})$ не зависят от $\tilde{x}$. Если при этом разности $\Delta_i f(\tilde{x}) = \Delta(i)$ не зависят и от $\tilde{\mu}$, будем говорить, что *функция f абсолютно сохраняет d-разности.*

Определение 3. Пусть $d|k$. Функция $f(\tilde{x})$ называется *d-периодической*, если она удовлетворяет условию

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\beta} \pmod{d} \Longrightarrow f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}).$$

Введем функции $g_d(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \equiv \tilde{0} \pmod{d}, \\ 0, & \tilde{x} \not\equiv \tilde{0} \pmod{d} \end{cases}$ и $\chi_d(\tilde{x}) = x_n g_d(\tilde{x})$.

Замечание 1. Функция $g_1(\tilde{x})$ — тождественная константа 1.

Пример 1. Функция-константа абсолютно сохраняет d-разности, так как все ее d-разности равны нулю.

Пример 2. Функция $f(x) = x$ абсолютно сохраняет d-разности, так как $\Delta f(x) = d$ при любых x.

Пример 3. Все d-периодические функции и, в частности, функция $g_d(\tilde{x})$ абсолютно сохраняют d-разности, так как их d-разности по любой переменной и в любой точке равны нулю.

Пример 4. Для функций $\chi_d(\tilde{x})$ имеем

$$\Delta_i \chi_d(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & i = 1, \ldots, n-1, \\ 0, & i = n,\ \tilde{x} \not\equiv \tilde{0} \pmod{d}, \\ d, & i = n,\ \tilde{x} \equiv \tilde{0} \pmod{d}. \end{cases}$$

Таким образом, функция $\chi_d(\tilde{x})$ сохраняет d-разности (если $d \neq 1$ и $d \neq k$), но не абсолютно.

Пример 5. Функция $j_0(x) = g_k(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ не сохраняет d-разности (если $d \neq 1$ и $d \neq k$), так как

$$\Delta j_0(x) = \begin{cases} k-1, & x = 0, \\ 1, & x = k-d, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим через $R(d)$ и $L(d)$ классы всех функций, сохраняющих и, соответственно, абсолютно сохраняющих d-разности. Как показывают рассмотренные примеры, классы $R(d)$ и $L(d)$ непусты, различны между собой и отличны от P_k (за исключением случаев $d = 1$ и $d = k$).

Следствие 1. *Между классами $R(d)$ и $L(d)$ имеют место следующие соотношения: $L(d)\subseteq R(d)$; если d — собственный делитель числа k, то $L(d)\subset R(d)$; $L(k)=R(k)=P_k$.*

§ 2. Свойства функций из классов $R(d)$ и $L(d)$

Лемма 1. *Пусть $f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})\in P_k$, $\alpha_1, \alpha_2\in E_k$, $f(\tilde{x})=\alpha_1 f_1(\tilde{x})+\alpha_2 f_2(\tilde{x})$. Тогда если $f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})\in R(d)$, то $f(\tilde{x})\in R(d)$, а если $f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})\in L(d)$, то $f(\tilde{x})\in L(d)$.*

Справедливость леммы следует из того факта, что $\Delta_i f(\tilde{x})=\alpha_1\Delta_i f_1(\tilde{x})+\alpha_2\Delta_i f_2(\tilde{x})$ при всех $\tilde{x}$ из E_k^n и всех i из $\{1,\ldots,n\}$.

Лемма 2. *Введение и изъятие фиктивных переменных не нарушают свойства функции принадлежать или не принадлежать классу $R(d)$ или $L(d)$.*

Доказательство. Пусть y — фиктивная переменная функции $f(\tilde{x}, y)=h(\tilde{x})$. Тогда для $i=1,\ldots,n$ имеем $\Delta_i f(\tilde{x})=\Delta_i h(\tilde{x})$.

Пусть $(\mu_1,\ldots,\mu_n,\nu)$ — наименьшие неотрицательные вычеты компонент вектора $(x_1,\ldots,x_n,y)$ по модулю d. Тогда разности $\Delta_i f(\tilde{x}, y)$ зависят только от i и $(\tilde{\mu},\nu)$ (лишь от i) в том и только том случае, когда разности $\Delta_i h(\tilde{x})$ зависят лишь от i и $\tilde{\mu}$ (только от i). Далее, разности $\Delta_{n+1} f(\tilde{x}, y)=f(\tilde{x}, y+d)-f(\tilde{x}, y)$ равны 0 при любых $\tilde{x}$ и y.

Следствие 2. *Функция $x+y$ принадлежит классу $L(d)$.*

Лемма 3. *Функция $f(\tilde{x})$ сохраняет d-разности в том и только том случае, когда для всех $\tilde{\mu}$ из E_d^n и всех $\widetilde{M}$ из $\mathbb{Z}_+^n$ выполняется соотношение*

$$f(\tilde{\mu}+\widetilde{M}d)=f(\tilde{\mu})+\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i f(\tilde{\mu}). \tag{1}$$

Доказательство. Справедливость леммы при $n=1$, а также при любом n достаточность условия (1) для сохранения функцией d-разностей очевидны. Необходимость условия (1) докажем индукцией по n.

Осуществим индуктивный переход. Пусть условие (1) выполнено для всех функций, сохраняющих d-разности и зависящих не более, чем от n переменных. Рассмотрим $(n+1)$-местную функцию $f(\tilde{x}, y)$. Пусть она сохраняет d-разности. Фиксируем $(\tilde{\mu},\nu)$ из E_d^{n+1} и $(\widetilde{M}, N)$ из $\mathbb{Z}_+^{n+1}$. Не ограничивая общности, положим для простоты записи $(\tilde{\mu},\nu)=\tilde{0}^{n+1}$. Необходимо показать, что

$$f(\widetilde{M}d, Nd)=f(\tilde{0},0)+\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i f(\tilde{0},0)+N\Delta_{n+1} f(\tilde{0},0). \tag{2}$$

Рассмотрим одноместную функцию $h(y)=f(\widetilde{M}d, y)$ и n-местную функцию $H(\tilde{x})=f(\tilde{x},0)$. Как уже установлено, $h(Nd)=h(0)+N\Delta h(0)$, т. е.

$$f(\widetilde{M}d, Nd)=f(\widetilde{M}d,0)+N\Delta_{n+1} f(\widetilde{M}d,0). \tag{3}$$

Функция $f(\tilde{x}, y)$ сохраняет d-разности, и $\widetilde{M}d\equiv\tilde{0}\pmod d$, поэтому

$$\Delta_{n+1} f(\widetilde{M}d,0)=\Delta_{n+1} f(\tilde{0},0). \tag{4}$$

Далее, по предположению индукции для n-местной функции $H(\tilde{x})$ справедливо равенство $H(\widetilde{M}d)=H(\tilde{0})+\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i H(\tilde{0})$, которое с учетом определения функции $H(\tilde{x})$ равносильно соотношению $f(\widetilde{M}d,0)=f(\tilde{0},0)+\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i f(\tilde{0},0)$. Подставляя это соотношение в (3) и учитывая (4), убеждаемся в справедливости равенства (2). Индуктивный переход совершен, лемма доказана.

Замечание 2. Для случая $k = p^\alpha$, $d = p$ это утверждение следует из леммы 3 статьи [10].

Лемма 4. *Если функция $f(\widetilde{x})$ принадлежит классу $R(d)$, то все ее d-разности кратны d.*

Доказательство. Пусть $k = de$. В равенстве (1) положим $\widetilde{M} = (\widetilde{0}^{i-1}, e, \widetilde{0}^{n-i})$. Тогда $\widetilde{M}d \equiv \widetilde{0} \pmod{k}$ и соотношение (1) примет вид

$$f(\widetilde{\mu}) \equiv f(\widetilde{\mu}) + e\Delta_i f(\widetilde{\mu}) \pmod{de},$$

откуда $\Delta_i f(\widetilde{\mu}) \equiv 0 \pmod{d}$. Наконец, если $\widetilde{\mu}$ — наименьшие неотрицательные вычеты компонент вектора $\widetilde{x}$ по модулю d, то, поскольку функция $f(\widetilde{x})$ сохраняет d-разности, $\Delta_i f(\widetilde{x}) = \Delta_i f(\widetilde{\mu})$. Лемма доказана.

Определение 4. Пусть $d|k$. Будем говорить, что *функция $f(\widetilde{x})$ из P_k сохраняет сравнение по модулю d*, если $f(\widetilde{\alpha}) \equiv f(\widetilde{\beta}) \pmod{d}$ при $\widetilde{\alpha} \equiv \widetilde{\beta} \pmod{d}$.

Через $C(d)$ обозначим класс всех функций в P_k, сохраняющих сравнение по модулю d.

Замечание 3. Очевидно, что $C(1) = C(k) = P_k$. В остальных случаях $C(d)$ являются замкнутыми классами, предполными в P_k, см. [15].

Следствие 3. *Если $d \neq 1$ и $d \neq k$, то $L(d) \subset R(d) \subset C(d)$.*

Замечание 4. Включение $R(d) \subset C(d)$ является строгим, так как, например, функция $\psi_d(x, y) = dj_0(x)j_0(y)$ принадлежит классу $C(d) \setminus R(d)$.

Лемма 5. *Пусть $d^2 \equiv 0 \pmod{k}$. Тогда произведение функций из класса $R(d)$ также принадлежит этому классу.*

Доказательство. Пусть $g(\widetilde{x}), h(\widetilde{x}) \in R(d)$, $f(\widetilde{x}) = g(\widetilde{x})h(\widetilde{x})$. Покажем, что функция $f(\widetilde{x})$ удовлетворяет условию (1). Не ограничивая общности, положим $\widetilde{\mu} = \widetilde{0}$. Пусть $y_0 = g(\widetilde{0})$, $z_0 = h(\widetilde{0})$,

$$y_i = g(\widetilde{0}^{i-1}, d, \widetilde{0}^{n-i}), \quad z_i = h(\widetilde{0}^{i-1}, d, \widetilde{0}^{n-i}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда левая часть равенства (1) преобразуется следующим образом:

$$f(\widetilde{M}d) = g(\widetilde{M}d)h(\widetilde{M}d) = \Big(y_0 + \sum_{i=1}^{n} M_i(y_i - y_0)\Big)\Big(z_0 + \sum_{i=1}^{n} M_i(z_i - z_0)\Big). \quad (5)$$

Функции g и h сохраняют сравнение по модулю d, поэтому

$$y_i \equiv y_0, \quad z_i \equiv z_0 \pmod{d}, \qquad (y_i - y_0)(z_i - z_0) \equiv 0 \pmod{k},$$

и последнее выражение в (5) принимает вид $y_0z_0 + \sum_{i=1}^{n} M_i(y_iz_0 + y_0z_i - 2y_0z_0)$.

В правой части (1) имеем $y_0z_0 + \sum_{i=1}^{n} M_i(y_iz_i - y_0z_0)$, поэтому для доказательства равенства (1) осталось проверить, что $y_iz_0 + y_0z_i - y_0z_0 = y_iz_i$. Последнее верно, так как

$$y_iz_0 - y_0z_0 + y_0z_i - y_iz_i = (y_i - y_0)(z_0 - z_i) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Функция xy принадлежит классу $R(d)$ в том и только том случае, когда $d^2 \equiv 0 \pmod{k}$.*

Функция xy принадлежит классу $L(d)$ только при $d = k$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2) = x_1x_2$, $\mu_1, \mu_2 \in E_d$, $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$\Delta_1 f(\mu_1 + M_1d, \mu_2 + M_2d) = d\mu_2 + d^2M_2,$$
$$\Delta_2 f(\mu_1 + M_1d, \mu_2 + M_2d) = d\mu_1 + d^2M_1.$$

Из этих формул следует, что d-разности не зависят от M_1 и M_2 лишь при условии $d^2 \equiv 0 \pmod{k}$. Ясно также, что они не зависят от μ_1 и μ_2 только в двух случаях: либо $d = k$, либо μ_1 и μ_2 из E_d принимают единственное значение (т. е. $d = 1$). В последнем случае $1^2 \not\equiv 0 \pmod{k}$, и $xy \notin R(1)$. Однако всегда $L(d) \subseteq R(d)$, поэтому $xy \notin L(1)$. Лемма доказана.

Представляет интерес сопоставление леммы 6 со следующим фактом.

Утверждение 1. *Пусть $d \neq k$. Тогда*:

1) *функция x^2 принадлежит классу $R(d)$ в том и только том случае, когда $d^2 \equiv 0 \pmod{k}$ или $k = 2d$;*

2) *функция x^2 принадлежит классу $L(d)$ лишь при $k = 2d$.*

Доказательство. Пусть $f(x) = x^2$, $\mu \in E_d$, $M \in \mathbb{Z}_+$. Тогда d-разности

$$\Delta f(\mu + Md) = 2d\mu + 2d^2M + d^2$$

не зависят от M только в двух случаях: $d^2 \equiv 0 \pmod{k}$ или $2d \equiv 0 \pmod{k}$. В последнем из них разности не зависят и от μ. Поскольку $d \mid k$ и $d \neq k$, сравнение $2d \equiv 0 \pmod{k}$ эквивалентно условию $k = 2d$.

Замечание 5. Если $k = 2d$ и d четно, то функция x^2 является d-периодической.

Лемма 7. *Пусть $g(\tilde{x})$ является d-периодической функцией, а функции $f_1(\tilde{x}), \ldots, f_n(\tilde{x})$ сохраняют сравнение по модулю d. Тогда функция $f(\tilde{x}) = g(f_1(\tilde{x}), \ldots, f_n(\tilde{x}))$ принадлежит классу $L(d)$.*

Легко проверить, что функция $f(\tilde{x})$ является d-периодической и, следовательно, абсолютно сохраняет d-разности.

§ 3. Замкнутость классов $L(d)$ и $R(d)$. Канонические формулы. Полные системы

Лемма 8. *Пусть $A = \{1,\ x+y,\ g_d(x, y)\}$, $B = \{1,\ x+y,\ xy,\ g_d(x, y)\}$. Тогда $[A] \subseteq L(d)$, а если $d^2 \equiv 0 \pmod{k}$, то $[B] \subseteq R(d)$.*

Доказательство проведем индукцией по сложности формулы над системой A (над B), задающей функцию из $[A]$ (из $[B]$).

Если $f \in A$ ($f \in B$), то $f \in L(d)$ ($f \in R(d)$) на основании примеров 1, 3, следствия 2 и леммы 6.

Пусть все функции из $[A]$ (из $[B]$), представимые формулами сложности не более l, абсолютно сохраняют (сохраняют) d-разности. Покажем, что этим же свойством обладает и любая функция f, представимая формулой сложности $l + 1$ над соответствующей системой. В этом случае $f = f_0(f_1, \ldots, f_m)$, где $f_0 \in A$ ($f_0 \in B$), а $f_1, \ldots, f_m$ — функции из $[A]$ (из $[B]$), представимые формулами, сложность которых не выше l. В силу леммы 2 можно считать, что функции $f_1, \ldots, f_m$ зависят от одних и тех же переменных $\tilde{x}$ (при этом $m = n$). Применение лемм 1, 5, 7 завершает индуктивный переход и все доказательство.

В дальнейшем изложении будем, когда это необходимо, указывать число переменных рассматриваемой функции верхним индексом в скобках возле функционального символа.

Элементарно проверяется следующий факт.

Лемма 9. *Справедливы следующие соотношения*:

если $n \geqslant 2$, то $g_d^{(n+1)}(\tilde{x}, y) = g_d^{(2)}(g_d^{(n)}(\tilde{x}) - 1, y)$;

$g_d^{(1)}(x) = g_d^{(2)}(x, x)$;

если $d \neq 2$, то $g_d^{(2)}(x, y) = g_d^{(1)}(g_d^{(1)}(x) + g_d^{(1)}(y) - 2)$.

Введем функцию $\delta_d(x) = d\lfloor x/d \rfloor$. Очевидно, она абсолютно сохраняет d-разности, так как $\Delta\delta_d(x) = d$ при всех x.

Легко проверить следующий факт.

Лемма 10. *Если* $d=1$ *или* $d=2$, *то* $\delta_d(x)=x-1+g_d(x)$.

Если $d>2$, *то* $\delta_d(x)=x-1+g_d(x)-\sum_{i=2}^{d-1}(i-1)g_d(x-i)$.

Следствие 4. *Функция* $\delta_d(x)$ *принадлежит классу* $[\{1, x+y, g_d(x)\}]$.

Теорема 1. *Функция* $f(\tilde{x})$ *принадлежит классу* $L(d)$ *в том и только том случае, когда она может быть представлена в виде*

$$f(\tilde{x})=\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_d(x_i)+\sum_{\tilde{\mu}\in E_d^n} b(\tilde{\mu})g_d(\tilde{x}-\tilde{\mu}), \tag{6}$$

где $a_i, b(\tilde{\mu})\in E_k$.

Доказательство. Если справедливо представление (6), то функция $f(\tilde{x})$ абсолютно сохраняет d-разности как линейная комбинация функций $\delta_d(x_i)$ и $g_d(\tilde{x}-\tilde{\mu})$, принадлежащих, очевидно, классу $L(d)$ (лемма 1).

Пусть теперь $f(\tilde{x})\in L(d)$. Рассмотрим d-периодическую функцию $g(\tilde{x})$, совпадающую с $f(\tilde{x})$ на E_d^n. Очевидно, ее, как и любую d-периодическую функцию, можно представить в виде $g(\tilde{x})=\sum_{\tilde{\mu}\in E_d^n} b(\tilde{\mu})g_d(\tilde{x}-\tilde{\mu})$, где $b(\tilde{\mu})\in E_k$. Пусть

$$h(\tilde{x})=f(\tilde{x})-g(\tilde{x}).$$

Нетрудно проверить следующие свойства функции $h(\tilde{x})$:

1) $h(\tilde{x})\equiv 0 \pmod d$, так как $f(\tilde{x}), g(\tilde{x})\in C(d)$;

2) $h(\tilde{x})=0$, если $\tilde{x}\in E_d^n$;

3) $h(\tilde{x})\in L(d)$ (так как $f(\tilde{x}), g(\tilde{x})\in L(d)$).

Функция $h(\tilde{x})$ сохраняет d-разности, поэтому для нее справедлива формула (1), которая с учетом свойства 2) примет вид

$$h(\tilde{\mu}+\widetilde{M}d)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i h(\tilde{\mu}).$$

Пусть $\tilde{x}=\tilde{\mu}+\widetilde{M}d$, где $\tilde{\mu}$ — наименьшие неотрицательные вычеты компонент вектора $\tilde{x}$ по модулю d. Тогда для $i=1,\ldots,n$ получаем $M_i=(x_i-\mu_i)/d=\lfloor x_i/d\rfloor$.

В силу леммы 4 имеем $\Delta_i h(\tilde{\mu})=a_i d$, поэтому

$$M_i\Delta_i h(\tilde{\mu})=\lfloor x_i/d\rfloor da_i=a_i\delta_d(x_i)$$

и справедливость представления (6) установлена.

Следствие 5. *Система функций* $\{1, x+y, g_d(x, y)\}$ *является полной в классе* $L(d)$. *Если* $d\neq 2$, *то полной в этом классе является и система* $\{1, x+y, g_d(x)\}$.

Следствие 6. *Класс* $L(1)$ *совпадает с классом* $R(1)$; *он порождается системой функций* $\{1, x+y\}$ *и состоит в точности из всех линейных по модулю* k *функций, т. е. функций, представимых в виде* $f(\tilde{x})=a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in E_k$.

Следствие 7 [4]. *При* $k\neq 2$ *система функций* $\{x+y, j_0(x)\}$ *является полной в* $P_k=L(k)$.

Определение 5. Пусть $d|k$, $\tilde{\mu}\in E_d^n$. Функции

$$f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})=f(\tilde{x})g_d(\tilde{x}-\tilde{\mu})=\begin{cases} f(\tilde{x}) \text{ при } \tilde{x}\equiv\tilde{\mu} \pmod d,\\ 0 \text{ при } \tilde{x}\not\equiv\tilde{\mu} \pmod d,\end{cases}$$

называются *d-решеточными ограничениями* функции $f(\tilde{x})$.

Очевидны следующие два факта [2, 10].

Лемма 11. *Всякую функцию $f(\tilde{x})$ из P_k можно представить в виде* $f(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{\mu} \in E_d^n} f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$.

Лемма 12. *Имеет место представление* $g_d^{(n)}(\tilde{x}) = \prod_{i=1}^{n} g_d^{(1)}(x_i)$.

Лемма 13. *Если функция $f(\tilde{x})$ сохраняет d-разности, то каждое ее d-решеточное ограничение $f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$ можно представить в виде*

$$f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}) = g_d(\tilde{x} - \tilde{\mu})\left(f(\tilde{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \mu_i}{d} \Delta_i f(\tilde{\mu})\right). \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, функция $f(\tilde{x})$ сохраняет d-разности в том и только том случае, когда их сохраняют все d-решеточные ограничения $f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$. Фиксируем $\tilde{\mu}$ из E_d^n. При $\tilde{x} \not\equiv \tilde{\mu} \pmod d$ соотношение (7) выполняется, так как обе его части равны нулю. Пусть, далее, $\tilde{x} = \tilde{\mu} + \tilde{M}d$, где $\tilde{M} \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $g_d(\tilde{x} - \tilde{\mu}) = 1$, и значения $f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$ могут быть вычислены по формуле (1), что и доказывает справедливость представления (7).

Теорема 2. *Если $d^2 \equiv 0 \pmod k$, то функция $f(\tilde{x})$ принадлежит классу $R(d)$ в том и только том случае, когда для каждого d-решеточного ограничения $f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$ справедливо представление* (7).

Необходимость указанного условия для сохранения d-разностей функцией $f(\tilde{x})$ определяется леммой 13. Достаточность вытекает из лемм 1 и 5.

Следствие 8. *Если $d^2 \equiv 0 \pmod k$, то система функций $\{1, x+y, xy, g_d(x)\}$ является полной в классе $R(d)$.*

Лемма 14. *Если функции $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$ принадлежат классу $R(d)$, то функция $f(\tilde{x}) = \chi_d(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}))$ также принадлежит этому классу.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\mu}$ — наименьшие неотрицательные вычеты компонент вектора $\tilde{x}$ по модулю d. Фиксируем произвольный номер i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Функции f_1, f_2 принадлежат классу $R(d)$, и $R(d) \subseteq C(d)$, поэтому $f_1(\tilde{x}) \equiv f_1(\tilde{\mu})$, $f_2(\tilde{x}) \equiv f_2(\tilde{\mu}) \pmod d$, и значение $g_d(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})) = g_d(f_1(\tilde{\mu}), f_2(\tilde{\mu}))$ зависит только от $\tilde{\mu}$. Обозначим его как $c(\tilde{\mu})$. Пусть $\tilde{y} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + d, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Тогда $g_d(f_1(\tilde{y}), f_2(\tilde{y})) = c(\tilde{\mu})$. Вычислим разности $\Delta_i f(\tilde{x})$:

$$\Delta_i f(\tilde{x}) = f(\tilde{y}) - f(\tilde{x}) =$$
$$= f_2(\tilde{y}) g_d(f_1(\tilde{y}), f_2(\tilde{y})) - f_2(\tilde{x}) g_d(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})) = (f_2(\tilde{y}) - f_2(\tilde{x})) c(\tilde{\mu}).$$

Функция f_2 принадлежит классу $R(d)$, поэтому справедливы равенства

$$f_2(\tilde{y}) - f_2(\tilde{x}) = \Delta_i f_2(\tilde{x}) = \Delta_i f_2(\tilde{\mu}),$$

и разности $\Delta_i f(\tilde{x})$ зависят только от $\tilde{\mu}$. Лемма доказана.

Легко проверяется следующий факт.

Лемма 15. *Имеет место соотношение $\chi_d^{(1)}(x) = \chi_d^{(2)}(x, x)$, а если $d \neq 2$, то $\chi_d^{(n+1)}(\tilde{x}, y) = \chi_d^{(2)}(g_d(\tilde{x}) - 1, y)$.*

Теорема 3. *Система функций $\{1, x+y, g_d(x, y), \chi_d(x, y)\}$ является полной в классе $R(d)$, а если $d \neq 2$, то полной в этом классе является и система $\{1, x+y, g_d(x), \chi_d(x, y)\}$.*

Доказательство. Обозначим первую из указанных систем функций через A. Индукцией по сложности формулы над A, задающей функцию f из $[A]$, можно показать, что $f \in R(d)$. Для этого достаточно повторить рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 8, с той лишь

разницей, что при индуктивном переходе необходимо использовать также лемму 14. Таким образом, $[A] \subseteq R(d)$. Справедливость обратного включения следует из лемм 11, 13 и 15.

Утверждение 2. *Функция $g_2(x)$ принадлежит классу* $[\{1, x+y, \chi_2(x)\}]$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что при всех d имеет место равенство

$$\delta_d(x) = \chi_d(x) + \chi_d(x-1) + \ldots + \chi_d(x-d+1),$$

и, кроме того, $g_2(x) = \delta_2(x) + 1 - x$.

§ 4. Решетки классов $L(d)$ и $R(d)$

Замечание 6. Если $k = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — разложение составного k на простые множители $p_1, \ldots, p_s$, то имеется ровно $\prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1)$ попарно различных классов $R(d)$ и столько же различных классов $L(d)$.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $d_1 | d_2$;
2) $R(d_1) \subseteq R(d_2)$;
3) $L(d_1) \subseteq L(d_2)$.

Доказательство. Пусть $d_2 = d_1 e_1$, $f(\tilde{x}) \in R(d_1)$. Пусть $\Delta_i^{(j)} f(\tilde{x})$ — это d_j-разности функции $f(\tilde{x})$, $j = 1, 2$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда нетрудно показать, пользуясь леммой 3, что

$$\Delta_i^{(2)} f(\tilde{x}) = e_1 \Delta_i^{(1)} f(\tilde{x}). \tag{8}$$

Далее, пусть $\tilde{\mu}$ — наименьшие неотрицательные вычеты компонент вектора $\tilde{x}$ по модулю d_1. Функция f принадлежит классу $R(d_1)$, поэтому разности $\Delta_i^{(1)} f(\tilde{x})$ зависят только от $\tilde{\mu}$. Далее, $\tilde{\mu} \in E_{d_1}^n$, поэтому в силу (8) разности $\Delta_i^{(2)} f(\tilde{x})$ зависят только от наименьших неотрицательных вычетов компонент вектора $\tilde{x}$ по модулю d_2. Если же $f \in L(d_1)$ и разности $\Delta_i^{(1)} f(\tilde{x})$ зависят только от i, то из (8) следует, что только от i зависят и разности $\Delta_i^{(2)} f(\tilde{x})$. Таким образом, $R(d_1) \subseteq R(d_2)$, и $L(d_1) \subseteq L(d_2)$.

Пусть теперь $R(d_1) \subseteq R(d_2)$ или $L(d_1) \subseteq L(d_2)$. Рассмотрим функцию $f(x) = g_{d_1}(x)$ из $L(d_1)$. Пусть $y = f(d_2)$. В обоих случаях $f(x) \in R(d_2)$, поэтому для всех M из $\mathbf{Z}_+$ значение $f(Md_2)$ можно вычислить следующим образом: $f(Md_2) = f(0) + M(f(d_2) - f(0)) = 1 + M(y-1)$.

Пусть $k = d_2 e_2$. Тогда имеют место равенства $1 = f(0) = f(k) = f(e_2 d_2) = 1 + e_2(y-1)$, откуда $e_2(y-1) \equiv 0 \pmod{d_2 e_2}$. Следовательно, $y = 1$, т. е. $g_{d_1}(d_2) = 1$, и $d_1 | d_2$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Справедливо соотношение* $L(d_1) \cap L(d_2) = L((d_1, d_2))$.

Доказательство. Пусть $d_0 = (d_1, d_2)$. Так как $d_0 | d_1$ и $d_0 | d_2$, то на основании теоремы 4 имеем $L(d_0) \subseteq L(d_1) \cap L(d_2)$.

Пусть теперь $f(\tilde{x}) \in L(d_1) \cap L(d_2)$. Покажем, что для всех $\tilde{\mu}$ из $E_{d_0}^n$ и всех $\tilde{M}$ из $\mathbf{Z}_+^n$ справедливо равенство

$$f(\tilde{\mu} + \tilde{M}d) = f(\tilde{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i^{(0)}, \tag{9}$$

где $\Delta_i^{(0)}$ — константы из E_k. Поскольку $d_0 = (d_1, d_2)$, найдутся такие A и B из $\mathbf{Z}_+$, что $d_0 \equiv A d_1 + B d_2 \pmod{k}$. Тогда $f(\tilde{\mu} + \tilde{M} d_0) = f(\tilde{\mu} + \tilde{M} A d_1 + \tilde{M} B d_2)$.

Через $\Delta_i^{(j)}$ обозначим d_j-разности функции $f(\tilde{x})$ по переменным x_i, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2$. Функция $f(\tilde{x})$ принадлежит классу $L(d_2)$, поэтому $f(\tilde{x}) \in L(Bd_2)$, и, следовательно, $f(\tilde{\mu} + \widetilde{M}Ad_1 + \widetilde{M}Bd_2) = f(\tilde{\mu} + \widetilde{M}Ad_1) + \sum_{i=1}^{n} M_i B\Delta_i^{(2)}$. Далее, $f(\tilde{x}) \in L(Ad_1)$, поэтому $f(\tilde{\mu} + \widetilde{M}Ad_1) = f(\tilde{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} M_i A\Delta_i^{(1)}$.

Следовательно, равенство (9) имеет место, причем величины $\Delta_i^{(0)} = A\Delta_i^{(1)} + B\Delta_i^{(2)}$ являются d_0-разностями функции f по переменным x_i в любой точке. Как видим, функция абсолютно сохраняет d_0-разности. Теорема доказана.

Теорема 6. *Справедливо соотношение* $[L(d_1) \cup L(d_2)] = L([d_1, d_2])$.

Доказательство. Пусть $d_3 = [d_1, d_2]$. Так как $d_1 | d_3$ и $d_2 | d_3$, то $L(d_1) \cup L(d_2) \subseteq L(d_3)$. Далее, $[L(d_1) \cup L(d_2)] = [\{1, x+y, g_{d_1}(x, y), g_{d_2}(x, y)\}] \subseteq \subseteq L(d_3)$ в силу лемм 1, 2, 7 и следствия 5. Справедливость обратного включения $L(d_3) = [\{1, x + y, g_{d_3}(x, y)\}] \subseteq [\{1, x + y, g_{d_1}(x, y), g_{d_2}(x, y)\}]$ вытекает из выражения

$$g_{d_3}^{(n)}(\tilde{x}) = g_{d_1}^{(n+1)}(\tilde{x}, 1 - g_{d_2}^{(n)}(\tilde{x})). \tag{10}$$

Теорема доказана.

Пусть $d_1, \ldots, d_r$ — делители числа k. Введем замкнутые классы

$$C(d_1, \ldots, d_r) = C(d_1) \cap \ldots \cap C(d_r).$$

Замечание 7. Если $d_1 | k$, $d_2 | k$ и $d_0 = (d_1, d_2)$, то $C(d_1, d_2) = = C(d_0, d_1, d_2)$.

Если $d_3 = [d_1, d_2]$, то $C(d_1, d_2) = C(d_1, d_2, d_3)$.

Лемма 16. *Пусть d_0, d_1, d_2 — такие делители числа k, что $d_0 = (d_1, d_2)$, $k = [d_1, d_2]$ и $f(\tilde{x}) \in C(d_0, d_1, d_2)$. Тогда функцию f можно представить в виде*

$$f(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x}) + f_1(\tilde{x}) + f_2(\tilde{x}), \tag{11}$$

где $f_i(\tilde{x})$ — это d_i-периодические функции класса $C(d_0, d_1, d_2)$ при $i = =0, 1, 2$, и

$$f_j(\tilde{x}) \equiv 0 \pmod{d_{3-j}}, \qquad j = 1, 2. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{x} \in E_k^n$, $\tilde{\mu} \in E_{d_0}^n$, и

$$\tilde{x} \equiv \tilde{\mu} \pmod{d_0}. \tag{13}$$

1. Определим значения функции f_0 равенством $f_0(\tilde{x}) = f(\tilde{\mu})$. Ясно, что эта функция является d_0-периодической и, следовательно, сохраняет сравнения по модулям d_0, d_1 и d_2.

2. Введем функцию $F(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - f_0(\tilde{x})$. Заметим, что при $\tilde{x} \in E_{d_0}^n$ выполнено $F(\tilde{x}) = 0$.

3. Определим значения функций f_j, $j = 1, 2$, следующим образом: $f_j(\tilde{x}) = F(\tilde{y}^{(j)})$, где

$$\tilde{y}^{(j)} \equiv \tilde{x} \pmod{d_j}, \quad \tilde{y}^{(j)} \equiv \tilde{\mu} \pmod{d_{3-j}}. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что в E_k^n имеется ровно один вектор $\tilde{y}^{(j)}$, удовлетворяющий условиям (14). Отметим также, что $f_j(\tilde{x}) = 0$, если $\tilde{x} \in E_{d_0}^n$.

4. Покажем справедливость представления (11). Из приведенных определений функций $f_0(\tilde{x})$, $F(\tilde{x})$, $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$ следует, что соотношение (11) равносильно сравнениям

$$F(\tilde{x}) \equiv F(\tilde{y}^{(1)}) + F(\tilde{y}^{(2)}) \pmod{d_j}, \qquad j = 1, 2, \tag{15}$$

при условиях (13) и (14). Но $F(\tilde{x}) \in C(d_0, d_1, d_2)$, поэтому для $j = 1, 2$ имеем $F(\tilde{x}) \equiv F(\tilde{y}^{(j)})$, $F(\tilde{y}^{(3-j)}) \equiv F(\tilde{\mu}) \equiv 0 \pmod{d_j}$, что и доказывает справедливость соотношения (15).

5. Покажем выполнимость условий (12). Действительно, из п. 3 доказательства следует, что $f_j(\tilde{x}) = F(\tilde{y}^{(j)})$, где $\tilde{y}^{(j)} \equiv \tilde{\mu} \pmod{d_{3-j}}$. Но функция F сохраняет сравнения по модулям d_1 и d_2, а потому $F(\tilde{y}^{(j)}) \equiv F(\tilde{\mu}) \equiv 0 \pmod{d_{3-j}}$.

6. Наконец, функции $f_j(\tilde{x})$ сохраняют сравнения по модулям d_1 и d_2, так как они являются d_j-периодическими, $j = 1, 2$, и удовлетворяют условиям (12). Лемма доказана.

Замечание 8. Если $d_0 = 1$ (т. е. d_1 и d_2 — взаимно простые, и $k = d_1 d_2$), то функция $f_0(\tilde{x})$ — это константа $f(\tilde{0})$. При этом условия (14) для векторов $\tilde{y}^{(j)}$, определяющих значения $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$, приобретают вид $\tilde{y}^{(j)} \equiv \tilde{x} \pmod{d_j}$ и $\tilde{y}^{(j)} \equiv \tilde{0} \pmod{d_{3-j}}$, $j = 1, 2$.

При этих условиях лемма была доказана ранее [7, 10].

Лемма 17. *Если d_0, d_1, d_2 — делители числа k, и $d_0 = (d_1, d_2)$, то d_1-периодическая функция сохраняет d_2-разности в том и только том случае, когда она сохраняет d_0-разности.*

Доказательство. Так как $d_0 | d_2$, то из сохранения d_0-разностей следует (по теореме 4) сохранение и d_2-разностей.

Пусть теперь функция $f(\tilde{x})$ является d_1-периодической и сохраняет d_2-разности, $\tilde{\mu} \in E_{d_0}^n$, $\widetilde{M} \in \mathbb{Z}_+^n$. Нетрудно проверить, что найдется такое c из E_k, что $cd_2 \equiv d_0 \pmod{d_1}$. В силу d_1-периодичности функции имеем

$$f(\tilde{\mu} + \widetilde{M} c d_2) = f(\tilde{\mu} + \widetilde{M} d_0). \tag{16}$$

Далее, $f \in R(cd_2)$ и согласно лемме 3 имеем

$$f(\tilde{\mu} + \widetilde{M} c d_2) = f(\tilde{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} M_i D_i f(\tilde{\mu}), \tag{17}$$

где $D_i f(\tilde{\mu})$ — это cd_2-разности, вычисленные в точке $\tilde{\mu}$. Полагая в (16) $\widetilde{M} = (\tilde{0}^{i-1}, 1, \tilde{0}^{n-i})$, убеждаемся в том, что величины $D_i f(\tilde{\mu})$ являются d_0-разностями функции f в точке $\tilde{\mu}$. Тогда (17) преобразуется в равенство (1), и согласно лемме 3 функция f сохраняет d_0-разности.

Теорема 7. *Пусть d_0, d_1, d_2 — делители числа k, причем $d_0 = (d_1, d_2)$. Тогда $R(d_1) \cap R(d_2) = R(d_0)$.*

Доказательство. Так как $d_0 | d_1$ и $d_0 | d_2$, то $R(d_0) \subseteq R(d_1) \cap R(d_2)$.

Пусть теперь $f(\tilde{x}) \in R(d_1) \cap R(d_2)$. Тогда $f(\tilde{x}) \in C(d_0, d_1, d_2)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $[d_1, d_2] = k$. При этом согласно лемме 16 функцию f можно представить в виде (11), откуда $f_1(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - f_0(\tilde{x}) - f_2(\tilde{x})$.

Функции f_0 и f_2 являются d_2-периодическими, поэтому они сохраняют d_2-разности. Тогда $f_1(\tilde{x}) \in R(d_2)$, и, согласно лемме 17, $f_1(\tilde{x}) \in R(d_0)$. Аналогично показывается, что $f_2(\tilde{x}) \in R(d_0)$. Из формулы (11) по лемме 1 следует, что $f(\tilde{x}) \in R(d_0)$.

2. Пусть $[d_1, d_2] < k$. Тогда $k = abcd_0$, $d_1 = ad_0$, $d_2 = bd_0$, $(a, b) = 1$.

Сведем этот случай к предыдущему. Пусть $p_1, \ldots, p_s$, $q_1, \ldots, q_t$, $r_1, \ldots, r_m$ — различные простые числа, и

$$a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}, \qquad c = p_1^{\gamma_1} \ldots p_s^{\gamma_s} q_1^{\delta_1} \ldots q_t^{\delta_t} r_1^{\varepsilon_1} \ldots r_m^{\varepsilon_m},$$
$$b = q_1^{\beta_1} \ldots q_t^{\beta_t}, \qquad d_0 = p_1^{\pi_1} \ldots p_s^{\pi_s} q_1^{\varkappa_1} \ldots q_t^{\varkappa_t} r_1^{\rho_1} \ldots r_m^{\rho_m} e,$$

где $(e, p_1 \ldots p_s q_1 \ldots q_t r_1 \ldots r_m) = 1$. Тогда

$$k = e \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i + \gamma_i + \pi_i} \prod_{j=1}^{t} q_j^{\beta_j + \delta_j + \varkappa_j} \prod_{l=1}^{m} r_l^{\varepsilon_l + \rho_l},$$

$$d_1 = e \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i + \pi_i} \prod_{j=1}^{t} q_j^{\varkappa_j} \prod_{l=1}^{m} r_l^{\rho_l}, \qquad d_2 = e \prod_{i=1}^{s} p_i^{\pi_i} \prod_{j=1}^{t} q_j^{\beta_j + \varkappa_j} \prod_{l=1}^{m} r_l^{\rho_l}.$$

Положим

$$d_1' = e \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i + \gamma_i + \pi_i} \prod_{j=1}^{t} q_j^{\varkappa_j} \prod_{l=1}^{m} r_l^{\rho_l}, \qquad d_2' = e \prod_{i=1}^{s} p_i^{\pi_i} \prod_{j=1}^{t} q_j^{\beta_j + \delta_j + \varkappa_j} \prod_{l=1}^{m} r_l^{\varepsilon_l + \rho_l}.$$

При этом, как нетрудно проверить, $d_1 | d_1'$, $d_2 | d_2'$, $(d_1', d_2') = d_0$ и $[d_1', d_2'] = k$. Тогда $f(\tilde{x}) \in R(d_1', d_2')$, и мы пришли к случаю 1. Теорема доказана.

Следствие 9. *Если $d_0, d_1, d_2 | k$ и $d_0 = (d_1, d_2)$, то $R(d_1) \cap L(d_2) = R(d_0) \cap L(d_2)$.*

Теорема 8. *Пусть d_1, d_2, d_3 — делители числа k, причем $d_3 = [d_1, d_2]$. Тогда $[R(d_1) \cup R(d_2)] = R(d_3)$.*

Доказательство. Так как $d_1 | d_3$, $d_2 | d_3$ и $[R(d_3)] = R(d_3)$, то $[R(d_1) \cup R(d_2)] \subseteq R(d_3)$. Докажем обратное включение. Известно, что

$$R(d_3) = [\{1, x + y, g_{d_3}(x, y), \chi_{d_3}(x, y)\}],$$
$$[R(d_1) \cup R(d_2)] = [\{1, x + y, g_{d_1}(x, y), g_{d_2}(x, y), \chi_{d_1}(x, y), \chi_{d_2}(x, y)\}].$$

Заметим также, что $\chi_{d_3}^{(n)}(\tilde{x}) = \chi_{d_1}^{(n+1)}(1 - g_{d_2}^{(n)}(\tilde{x}), \tilde{x})$. Из этого выражения, формулы (10) и леммы 15 следует, что $R(d_3) \subseteq [R(d_1) \cup R(d_2)]$.

Следствие 10. *Классы $L(d)$ образуют решетку по включению, изоморфную решетке делителей числа k. Такую же решетку образуют классы $R(d)$.*

§ 5. Классы $R(d)$ и $C(d)$

Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 18. *Если функция $f(\tilde{x})$ сохраняет сравнение по модулю d, то ее можно представить в виде $f(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x}) + f_1(\tilde{x})$, где $f_0(\tilde{x}) \equiv 0 \pmod d$, а $f_1(\tilde{x})$ — некоторая d-периодическая функция.*

Введем функции $\psi_d(\tilde{x}) = \begin{cases} d, & \tilde{x} = \tilde{0}, \\ 0, & \tilde{x} \neq \tilde{0}. \end{cases}$ Нетрудно проверяются следующие факты.

Лемма 19. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\psi_d^{(1)}(x) = \psi_d^{(2)}(x, x)$.
2. *Если $n \geqslant 2$, то $\psi_d^{(n+1)}(\tilde{x}, y) = \psi_d^{(2)}(\psi_d^{(n)}(\tilde{x}) - d, y)$.*
3. *Если $k \neq 2d$, то $\psi_d^{(2)}(x, y) = \psi_d^{(1)}(\psi_d^{(1)}(x) + \psi_d^{(1)}(y) - 2d)$.*
4. *Если $k = 2d$, то $\psi_d^{(2)}(x, y) = \psi_d^{(1)}(x)\psi_d^{(1)}(y)$.*

Лемма 20. *Функция $\psi_d^{(1)}(x)$ сохраняет d-разности ровно в двух случаях: при $k=2d$ и при $k=d$.*

Следствие 11. *Все одноместные функции класса $C(d)$ сохраняют d-разности ровно в двух случаях: при $k=2d$ и при $k=d$.*

Лемма 21. *Пусть $k=2d$, $f(\tilde{x})\in R(d)$, $h(\tilde{x})=\psi_d^{(1)}(f(\tilde{x}))$. Тогда $h(\tilde{x})\in R(d)$.*

Доказательство. Фиксируем $\tilde{\mu}$ из E_d^n. Если $f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})\not\equiv 0 \pmod d$, то функция $h^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$ есть константа 0. Если же $f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})\equiv 0 \pmod d$, то во всех точках $\tilde{x}$, $\tilde{x}\equiv\tilde{\mu} \pmod d$, имеют место равенства $\Delta_i h^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})=\Delta_i f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$, $i=1,\ldots,n$. Таким образом, в любом случае функция $h^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$ сохраняет d-разности. Следовательно, и функция $h(\tilde{x})$ — как сумма своих d-решеточных ограничений — сохраняет d-разности.

Следствие 12. *При любых k и d, $d|k$, системы функций $\{1, x+y, xy, g_d(x), \psi_d(x)\}$ и $\{1, x+y, g_d(x,y), \psi_d(x,y)\}$ являются полными в классе $C(d)$.*

Система $\{1, x+y, g_d(x), \psi_d(x,y)\}$ полна в $C(d)$ при $d\neq 2$.

Система $\{1, x+y, g_d(x,y), \psi_d(x)\}$ полна в $C(d)$ в том и только том случае, когда $k\neq 2d$, а при $k=2d$ ее замыкание содержится в $R(d)$.

Система $\{1, x+y, g_d(x), \psi_d(x)\}$ полна в $C(d)$, если $k\neq 2d$ и $d\neq 2$.

Это утверждение вытекает из лемм 9, 18, 19 и 21. Его ослабленный вариант, а также первые три утверждения леммы 19 были опубликованы ранее, см. [8, лемма 2 и замечание 2].

Замечание 9. Если $k=p^2$ и $d=p$, то $C(d)=M(k)$, где $M(k)$ — замкнутый класс функций, сохраняющих сравнения по всем модулям, являющимся делителями числа k. В работах [2, 12, 14] для этого случая построены полные системы в классе $M(k)$. Система B_{p^2}, предложенная в [2], совпадает с системой $\{1, x+y, xy, g_d(x), \psi_d(x)\}$, указанной в следствии 12, с той лишь разницей, что в [2] функция $\psi_d(\tilde{x})$ обозначалась $h_1(\tilde{x})$.

Лемма 22. *Пусть $n\geqslant 3$, и пусть n-местная функция f не сохраняет d-разности. Тогда подстановкой констант на места переменных функции f можно получить одноместную или двухместную функцию, также не сохраняющую d-разности.*

Доказательство. Если существует набор из $n-1$ константы, при подстановке которых в функцию f получается одноместная функция, не сохраняющая d-разности, то утверждение леммы выполнено.

Предположим противное: пусть все одноместные функции, получающиеся из f подстановкой констант, сохраняют d-разности. Но, по условию, $f\notin R(d)$; следовательно, найдется такой номер i (без ограничения общности полагаем $i=n$) и такой вектор $\tilde{\mu}$ из E_d^n, что для некоторых $\tilde{\alpha}^{n-1}$ и $\tilde{\beta}^{n-1}$ из E_k^{n-1}, удовлетворяющих условиям $\tilde{\alpha}^{n-1}\equiv\tilde{\beta}^{n-1}\equiv\tilde{\mu}^{n-1} \pmod d$, одноместные функции $h_\alpha(x)=f^{\tilde{\mu}}(\tilde{\alpha}^{n-1},x)$ и $h_\beta(x)=f^{\tilde{\mu}}(\tilde{\beta}^{n-1},x)$ имеют в точках x, $x\equiv\mu_n \pmod d$, неравные d-разности.

Покажем, что существуют такие векторы $\tilde{\alpha}^{n-1}$ и $\tilde{\beta}^{n-1}$, имеющие общие компоненты. Предположим противное: пусть все векторы, при подстановке которых в функцию $f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x})$ получаются одноместные функции с неравными d-разностями в точках x, $x\equiv\mu_n \pmod d$, не имеют общих компонент. Рассмотрим какую-либо пару таких векторов $\tilde{\beta}^{n-1}$ и $\tilde{\gamma}^{n-1}$ и вектор $\tilde{\alpha}^{n-1}$, в котором $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2$, $\ldots$, $\alpha_{n-2}=\beta_{n-2}$, $\alpha_{n-1}=\gamma_{n-1}$.

Векторы $\tilde{\alpha}^{n-1}$ и $\tilde{\gamma}^{n-1}$ имеют общую компоненту, поэтому функция $h_\alpha(x)$ имеет в точках x, $x\equiv\mu_n \pmod d$, те же d-разности, что и функция $h_\gamma(x)$, т. е. они отличны от d-разностей функции $h_\beta(x)$. Мы указали

пару векторов $\tilde{\alpha}^{n-1}$ и $\tilde{\beta}^{n-1}$, имеющих общие компоненты и обладающих тем свойством, что при их подстановке в функцию f получаются одноместные функции с неравными d-разностями.

Подставляя в функцию f константы, общие для указанных векторов $\tilde{\alpha}^{n-1}$ и $\tilde{\beta}^{n-1}$, получаем функцию меньшего числа переменных, также не сохраняющую d-разности. Аналогично поступаем с этой функцией, и продолжаем описанный процесс до тех пор, пока не придем к двухместной функции. Лемма доказана.

Лемма 23. *Пусть $k \neq 2d$ и $f(x_1, x_2) \in C(d) \setminus R(d)$. Тогда подстановкой в функцию f элементов класса $L(d)$ можно получить одноместную функцию класса $C(d)$, также не сохраняющую d-разности.*

Доказательство. Пусть все одноместные функции, получающиеся из $f(x_1, x_2)$ подстановкой констант, сохраняют d-разности. По условию имеем $f(x_1, x_2) \notin R(d)$, поэтому существует такой вектор $\tilde{\mu}$ из E_d^2, что при подстановке в функцию $f^{\tilde{\mu}}$ вместо одной из переменных (например, второй) констант α и β, сравнимых с компонентой $\tilde{\mu}$ по модулю d, получаются одноместные функции с неравными d-разностями в точке x, $x \equiv \mu_1 \pmod d$. Пусть $\alpha = Ad + \mu_2$. Тогда можно считать, что $\beta = \alpha + d$.

Рассмотрим функцию $h(x, y) = f(x + \mu_1, y + \mu_2 + Ad)$. Она не сохраняет d-разности, так как функции $h_0(x) = h(x, 0)$ и $h_1(x) = h(x, d)$ имеют неравные d-разности в точках x, $x \equiv \mu_1 \pmod d$. Пусть эти разности суть Ld и Md (они кратны d, так как $f, h \in C(d)$). Покажем, что одноместная функция $H(x) = h(x, x)$ не сохраняет d-разности. Не ограничивая общности, полагаем $h(0, 0) = 0$. Пусть $\Delta_2 h(0, 0) = Nd$. Тогда $h(0, 2d) = 2Nd$ и

$$h(d, 2d) = h(d, 0) + 2(h(d, d) - h(d, 0)) = 2h(d, d) - h(d, 0) = (2N + 2M - L)d.$$

Аналогичным образом вычисляется значение $h(2d, 2d) = (2N + 4M - 2L)d$. Справа приведена полученная часть таблицы значений функции $h(x, y)$.

y \ x	0	d	$2d$
0	0	Ld	$2Ld$
d	Nd	$(N+M)d$	$(N+2M)d$
$2d$	$2Nd$	$(2N+2M-L)d$	$(2N+4M-2L)d$

Итак,

$$H(0) = 0, \quad H(d) = (N + M)d, \quad H(2d) = (2N + 4M - 2L)d.$$

Далее, $L \neq M$, а потому $2Ld \neq 2Md$ и, следовательно, $\Delta H(d) \neq \Delta H(0)$. Таким образом, функция $H(x)$ не сохраняет d-разности. Наконец, $H(x) \in C(d)$, потому что $f \in C(d)$. Тем самым лемма доказана.

Легко проверяется следующий факт.

Лемма 24. *Если $f(\tilde{x}) \equiv 0 \pmod d$, то d-решеточные ограничения функции $f(\tilde{x})$ для всех $\tilde{\mu}$ из E_d^n можно представить в виде $f^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}) = \chi_d^{(n+1)}(\tilde{x} - \tilde{\mu}, f(\tilde{x}))$.*

Теорема 9. *Если d — собственный делитель числа k, то класс $R(d)$ является предполным в $C(d)$ в том и только том случае, когда $k = pd$.*

Доказательство. Пусть $k = abd$, где $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Тогда имеют место соотношения $R(d) = R(d) \cap R(ad) \subset C(d, ad) \subset C(d)$, т. е. между $R(d)$ и $C(d)$ находится еще по крайней мере один замкнутый класс.

Пусть теперь $k = pd$. Напомним, что

$$R(d) = [\{1, x + y, g_d(x, y), \chi_d(x, y)\}], \quad C(d) = [\{1, x + y, g_d(x, y), \psi_d(x, y)\}].$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in C(d) \setminus R(d)$. Покажем, что $[R(d) \cup \{f\}] = C(d)$. Возможны два случая: $k = 2d$ и $k \neq 2d$.

Случай $k = 2d$. Согласно следствию 11, в этом случае $n \geqslant 2$. При $n > 2$ подстановкой констант (элементов класса $R(d)$) в функцию f можно получить двухместную функцию $h(x, y)$ класса $C(d) \setminus R(d)$. Можно считать, что $h(x, y) \equiv 0 \pmod d$; в противном случае вычтем из h соответствующую d-периодическую функцию (принадлежащую, очевидно, классу $R(d)$). Фиксируем значения μ и ν из E_d, для которых функция $H(x, y) = h^{(\mu, \nu)}(x, y)$ не сохраняет d-разности. При этом согласно лемме 24 имеем $H(x, y) \in [R(d) \cup \{f\}]$. Не ограничивая общности, полагаем $\mu = \nu = 0$. Пусть также $H(0, 0) = 0$; в противном случае вычтем из H соответствующую d-периодическую функцию. Положим $S = \{0, d\}$. Рассмотрим значения функции $H(x, y)$ на множестве S^2. В силу того, что $H(x, y) \in C(d)$, все они также принадлежат S. Поскольку $H(x, y) \notin R(d)$, значение d принимается функцией H на S^2 лишь нечетное число раз. Если оно принимается трижды, то $\psi_d(x, y) = dg_d(x, y) - H(x, y)$. Если же значение d принимается лишь один раз — скажем, $d = H(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in S$, — то $\psi_d(x, y) = H(x + \alpha, y + \beta)$. Итак, $\psi_d(x, y) \in [R(d) \cup \{f\}]$, поэтому $[R(d) \cup \{f\}] = C(d)$.

Случай $k \neq 2d$. В этом случае $C(d) = [\{1, x + y, g_d(x, y), \psi_d(x)\}]$. Покажем, что $\psi_d(x) \in [R(d) \cup \{f\}]$.

Применяя леммы 22 и 23, из функции f получим (если это требуется) одноместную функцию $h(x)$ класса $C(d) \setminus R(d)$. Вычитанием d-периодической функции добьемся выполнения условия $h(x) \equiv 0 \pmod d$. Фиксируем значение μ из E_d, для которого функция $H(x) = h^{\mu}(x) = \chi_d(x - \mu, h(x))$ не сохраняет d-разности. Без ограничения общности полагаем $\mu = 0$. Пусть $y_i = H(id)$ при $i \in E_p$. Все значения y_i сравнимы между собой по модулю d, так как $H(x) \in C(d)$. Будем применять следующие преобразования функций с помощью элементов класса $R(d)$.

П1. Вычитание d-периодической функции.

П2. Линейная замена переменной.

П3. Умножение функции на константу.

Полагаем $y_0 = 0$, иначе применим преобразование П1. Пусть $\sigma(H) = y_1 + \ldots + y_{p-1}$ (сумма вычисляется в кольце целых чисел), и пусть $N(H)$ — количество ненулевых значений среди $y_1, \ldots, y_{p-1}$. Число $N(H)$ будем называть *сложностью функции* H. Так как $H(x) \notin R(d)$, то $N(H) \geqslant 1$, и $y_t \neq 0$ при некотором t. Считаем, что $y_t = td$, иначе применим преобразование П3. Для построения функции $\psi_d(x)$ рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $N(H) = 1$. Тогда $\psi_d(x)$ строится из $H(x)$ с помощью преобразований П2 и П3.

2. Пусть $N(H) > 1$, $\sigma(H) \not\equiv 0 \pmod k$. Рассмотрим функцию $F(x) = H(x) + H(2x) + \ldots + H((p-1)x)$. Нетрудно проверить, что $F^0(x) = F(x)$, $F(0) = 0$ и $F(id) = \sigma(H) = ad$, где $(a, p) = 1$, $i = 1, \ldots, p - 1$. Тогда $\psi_d(x) = dg_d(x) - cF(x)$, где $c \equiv a^{-1} \pmod p$.

3. Пусть $\sigma(H) \equiv 0 \pmod k$, $1 < N(H) \leqslant p - 2$. Будем последовательно уменьшать сложность функции, пока не придем к одному из случаев 1 или 2. Возможны три подслучая.

3.1. Имеется такое y_j, что $H(y_j) \neq y_j$. Пусть $F(x) = H(x) - H(H(x))$. Функция F, очевидно, сохраняет нули функции H. Кроме того, $F(td) = 0$ и $F(jd) \neq 0$. Значит, $1 \leqslant N(F) < N(H)$.

3.2. Для каждого i выполнено $H(y_i) = y_i$, и среди ненулевых значений $y_1, \ldots, y_{p-1}$ есть одинаковые. Можем считать, что одинаковые значения y_{i_1} и y_{i_2} равны d, иначе применим преобразование П3. Пусть $i_2 - i_1 = l$, $l \in \{1, \ldots, p - 1\}$. Положим $j \equiv i_1 l^{-1} \pmod p$, $F(x) = H(lx)$. При этом для некоторого r, $r \geqslant 2$, получаем

$$F(jd) = F((j+1)d) = \ldots = F((j+r-1)d) = d, \quad F((j+r)d) \neq d.$$

Пусть $G(x) = F(x + F(x)) - F(x)$. Функция F принимает те же значения, что и функция H, но в других точках (если $l \neq 1$), поэтому $N(F) = N(H)$. Далее, если $F(x) = 0$, то и $G(x) = 0$. Кроме того, $G(jd) = 0$ и $G((j+r-1)d) \neq 0$. Следовательно, $1 \leqslant N(G) < N(H)$.

3.3. Для всех i выполнено $H(y_i) = y_i$, и среди ненулевых значений y_i нет одинаковых. Тогда при всех i из E_p либо $y_i = 0$, либо $y_i = id$. Так как $\sigma(H) \equiv 0 \pmod k$ и $2 \leqslant N(H) \leqslant p-2$, то функция H не может принимать все $N(H)$ ненулевых значений в точках $x = d, 2d, \ldots, N(H)d$. Значит, найдется такое l, $l \geqslant 2$, что $y_l = ld \neq 0$, $y_{l-1} = 0$. При этом найдется и j, $j > l$, для которого $y_j = jd \neq 0$. Пусть $c \equiv j^{-1} \pmod p$, $F(x) = cH(x + (l-1)d)$. Тогда $F(0) = 0$, $F((j-l+1)d) = d$, $F(d) \neq d$. Рассматривая вместо $H(x)$ функцию F, приходим к случаю 3.1.

4. Пусть $\sigma(H) \equiv 0 \pmod k$, $N(H) = p-1$. Для функции $F(x) = \chi_d(x) - H(x)$ получаем $F(0) = F(td) = 0$. Так как $H(x) \notin R(d)$, то $F(jd) \neq 0$ при некотором j. Случай сведен к одному из предыдущих. Теорема доказана.

§ 6. Классы $R(d)$ и Pol

Рассмотрим замкнутый класс $\mathrm{Pol} = [\{1, x+y, xy\}]$ всех функций в P_k, представимых полиномами по модулю k, и класс $M(k) = \bigcap\limits_{d:\ d|k} C(d)$.

Если $d^2 \equiv 0 \pmod k$, то, как установлено выше, $R(d) = [\{1, x + y, xy, g_d(x)\}]$.

Следствие 13. *Если* $d^2 \equiv 0 \pmod k$, *то* $\mathrm{Pol} \subseteq R(d)$.

Очевидно также, что $\mathrm{Pol} \subseteq M(k)$.

Теорема 10. *Пусть* $t, s \in \mathbf{N}$, $t \geqslant s$; $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 2$; $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_t \in \{0, 1\}$. *Пусть* $k = \prod\limits_{i=1}^{t} k_i$ *где* $k_i = p_i^{\alpha_i}$, *и* $d_j = k/p_j$ *при* $j = 1, \ldots, s$.

Тогда $M(k) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{s} R(d_j) = \mathrm{Pol}$ *и между классами* Pol *и* $M(k)$ *имеется ровно* $2^s - 2$ *замкнутых классов, образующих (вместе с* Pol *и* $M(k)$*) решетку по включению, изоморфную* s*-мерному единичному кубу, коатомами которой являются классы* $M(k) \cap R(d_j)$, $j = 1, \ldots, s$.

Справедливость этого результата вытекает, в частности, из теорем 4, 5 статьи [10], следствия 13 и лемм 16, 17 настоящей работы.

Следствие 14. *Класс* Pol *является предполным в* $M(k)$ *в том и только том случае, когда* $k = p_1^2 p_2 p_3 \ldots p_s$, $s \geqslant 1$.

Теорема 11 [6, 14]. *Равенство* $M(k) = \mathrm{Pol}$ *имеет место в том и только том случае, когда* $k = p_1 \ldots p_s$, *где* $s \geqslant 1$.

Доказательство. Если $k = p_1 \ldots p_s$, $s \geqslant 1$, то $M(k) = \mathrm{Pol}$ в силу теоремы 10.

Пусть $k \equiv 0 \pmod{p^2}$. Укажем функции из $M(k) \setminus \mathrm{Pol}$. Возможны два случая.

1. $k = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 2$. Если $d = p^{\alpha-1}$, то $\psi_d(x, y) \in M(k) \setminus R(p^{\alpha-1})$; следовательно, $\psi_d(x, y) \notin \mathrm{Pol}$.

2. $k = p^\alpha Q$, где $\alpha \geqslant 2$, $Q > 1$, $(p, Q) = 1$. Тогда функция $\Phi(x, y) = p^{\alpha-1} Q g_{p^\alpha}(x, y)$ принадлежит классу $M(k) \setminus R(p^{\alpha-1}Q)$, и $\Phi(x, y) \notin \mathrm{Pol}$. Теорема доказана.

Замечание 10. Этот результат впервые получен А. Н. Череповым [14]. Автор [6] пришел к нему позже независимым образом. Оба доказательства, [14] и [6], опирались на результат Н. Н. Айзенберга и И. В. Семйо-

на [1] о том, что $M_k = \mathrm{Pol}$ при $k = p_1 \dots p_s$, $s \geqslant 1$. Приведенное здесь доказательство его не использует.

Следствие 15 [15]. *Равенства* $\mathrm{Pol} = P_k = M(k)$ *имеют место только при* $k = p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзенберг Н. Н., Семйон И. В. Некоторые критерии представимости функций k-значной логики полиномами по модулю k // Многоустойчивые элементы и их применение. — М.: Сов. радио, 1971. — С. 84–88.
2. Гаврилов Г. П. О надструктуре класса полиномов в многозначных логиках // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, вып. 3. — С. 90–97.
3. Гаврилов Г. П. О замкнутых классах многозначной логики, содержащих класс полиномов // Дискретная математика. — 1997. — Т. 9, вып. 2. — С. 12–23.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977.
5. Крохин А. А., Сафин К. Л., Суханов Е. В. О строении решетки замкнутых классов полиномов // Дискретная математика. — 1997. — Т. 9, вып. 2. — С. 24–39.
6. Мещанинов Д. Г. О полиномиальной реализации функций k-значной логики / Деп. ВИНИТИ 23.10.87, № 7441–В87. — М., 1987.
7. Мещанинов Д. Г. Некоторые условия представимости функций из P_k полиномами по модулю k // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 299, № 1. — С. 50–53.
8. Мещанинов Д. Г. О некоторых свойствах надструктуры класса полиномов в P_k // Матем. заметки. — 1988. — Т. 44, № 5. — С. 673–681.
9. Мещанинов Д. Г. О вторых p-разностях функций p^α-значной логики // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 131–139.
10. Мещанинов Д. Г. Метод построения полиномов для функций k-значной логики // Дискретная математика. — 1995. — Т. 7, вып. 3. — С. 48–60.
11. Мещанинов Д. Г. О классе Кузнецова в p^α-значной логике // Проблемы теоретической кибернетики. Тез. докл. XI Междунар. конф. Ульяновск, 10–14 июня 1996 г. — М.: Изд-во РГГУ, 1996. — С. 142–143.
12. Ремизов А. Б. О надструктуре замкнутого класса полиномов по модулю k // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 1. — С. 3–15.
13. Черепов А. Н. Описание структуры замкнутых классов в P_k, содержащих класс полиномов // Проблемы кибернетики. Вып. 40. — М.: Наука, 1983. — С. 5–18.
14. Черепов А. Н. Надструктура класса сохранения отношений сравнения в k-значной логике по всем модулям — делителям k: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 1986.
15. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
16. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
17. Carlitz L. Functions and polynomials (mod p^n) // Acta Arithmetica. — 1964. — V. 9. — P. 66–78.
18. Rozenberg I. G. Polynomial functions over finite rings // Glasnik Matematicki. — 1975. — V. 10, № 1. — P. 25–33.
19. Spira R. Polynomial interpolation over commutative rings // Amer. Math. Monthly. — 1968. — V. 75, № 6. — P. 638–640.

Поступило в редакцию 22 IX 1997