ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю. Ф.

Кинематические параметры твердого тела с одной неподвижной точкой.

Ордена Ленина
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

Ю.Ф. Голубев

Кинематические параметры твердого тела с одной неподвижной точкой

Москва
1997г.

Ю.Ф. Голубев

Кинематические параметры твердого тела с одной неподвижной точкой

Аннотация

В работе предложена компактная общая теория параметров Эйлера, Кели–Клейна и кватернионов, основанная на изоморфизме групп SO(3), SU(2) и $\mathcal{H}$. В основу изоморфизма положены специально выбранные базисные косоэрмитовы матрицы, обеспечивающие совпадение свойств симметрии соответствующих базисов. С помощью указанных базисных косоэрмитовых матриц определено соответствие векторных операций, операций умножения косоэрмитовых матриц и алгебры кватернионов. Выявлена структурная идентичность преобразований движения в пространстве SU(2) с формулами Эйлерова поворота. Путем сопоставления объектов указанных пространств, предложены простые способы получения кинематических уравнений и формул пересчета от одних параметров к другим, включая также и угловые координаты.

Yu. F. Golubev

Kinematic Parameters of a Rigid Body with a Fixed Point

Abstract

This paper offers a compact general theory of Euler's parameters, Keli–Klein's parameters and quaternions. The theory is based on the isomorphism between groups SO(3), SU(2) and $\mathcal{H}$. This isomorphism is established with the help of specific base of skew-Hermitian matrices which was especially picked out to save the symmetry of bases. By means of this base of skew-Hermitian matrices in this paper the conformity of vector operations, the multiplication of skew-Hermitian matrices and the quaternion algebra is developed. The structural identity of motion transformations in SU(2) and Euler rotation formulas was found out. By means of comparison of objects in those groups simple methods were suggested for deducing kinematic equations and calculation formulas for transformation from one group of parameters to another including angular coordinates also.

Введение

Для повышения точности и быстродействия при численном исследовании движения твердого тела или систем твердых тел (особенно, если область возможных положений тел в фазовом пространстве заранее неизвестна) приходится вместо угловых переменных применять переменные, кинематические уравнения для которых не имеют вырождений во всей фазовой области. Примерами могут служить направляющие косинусы и связанные с ними уравнения Пуассона [1, 4], параметры Кэли–Клейна [7, 8, 5], параметры Родрига–Гамильтона [2, 5], параметры Эйлера [3], параметры Родрига [1]. Численное интегрирование уравнений Пуассона обладает слишком большой избыточностью и приводит из–за ошибок округления к нарушению ортонормированности базисных векторов. В этом смысле остальные группы параметров из перечисленных являются более предпочтительными. Вместе с тем свойства параметров Эйлера [9], параметров Кэли-Клейна [7, 8, 2, 4] и параметров Родрига проработаны с меньшей степенью подробности, чем, например, теория кватернионов [10, 2, 8, 4, 3]. И хотя очевидно, что все указанные группы параметров по смыслу чрезвычайно близки, традиционно только кватернионы нашли достаточно широкое практическое применение. Однако и другие группы параметров обладают определенными преимуществами. Например, параметры Эйлера позволяют использовать традиционные векторные операции трехмерного пространства, параметры Кэли–Клейна дают возможность использовать только операции сложения и умножения матриц, параметры Родрига позволяют работать с ненормированными кватернионами, в связи с чем можно не заботиться о нормированности параметров при численном интегрировании системы кинематических уравнений. Более того, свободой в выборе нормы параметров Родрига можно распорядиться с целью уменьшения влияния вычислительных погрешностей интегрирования кинематических уравнений на величину самой нормы.

Литература, посвященная рассматриваемому вопросу, имеет значительную историю и весьма обширна. В ней с использованием различных подходов выявлено много интересных приложений указанных кинематических характеристик. Настоящий препринт не претендует на добавление каких–либо новых свойств отдельных групп параметров. Развиваемый в нем подход основан на использовании специально подобранных косоэрмитовых матриц и позволяет установить прямой и прозрачный изоморфизм групп SO(3), SU(2) и кватернионов и избежать громозких преобразований и рассуждений при установлении формул и кинематических уравнений, необходимых для описания движения твердого тела. В результате изложение соответствующей теории приобретает целостность и становится весьма компактным.

1. Параметры Кели–Клейна

Рассматривается линейное пространство комплексных (2×2) матриц Q. В отличие от работ [7, 8, 10, 2, 5] в нем выделяется линейное подпространство с базисом косоэрмитовых матриц

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1,$$

где i – мнимая единица, а $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – спин–матрицы Паули:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Справедливы равенства

$$\rho_k^* = -\rho_k, \quad \rho_k\rho_k = -E, \ (k = 1, 2, 3), \quad \rho_1\rho_2 = -\rho_2\rho_1 = \rho_3,$$

$$\rho_2\rho_3 = -\rho_3\rho_2 = \rho_1, \quad \rho_3\rho_1 = -\rho_1\rho_3 = \rho_2.$$

Символ “$*$” означает переход к эрмитово сопряженной матрице.

В действительном аффинном пространстве A^3 вводится ортонормированный правоориентированный репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Положение двух произвольных точек $R,\ X \in A^3$ описывается радиусами–векторами

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{3} r_k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{3} x_k \mathbf{e}_k$$

с началом в неподвижной точке O. Векторам $\mathbf{r},\ \mathbf{x} \in R^3$ ставятся во взаимно–однозначное соответствие косоэрмитовы матрицы

$$P_r = \sum_{k=1}^{3} r_k\rho_k = \left(\begin{array}{cc} ir_1 & r_2 + ir_3 \\ -r_2 + ir_3 & -ir_1 \end{array} \right),$$

$$P_x = \sum_{k=1}^{3} x_k\rho_k = \left(\begin{array}{cc} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{array} \right).$$

Матрицы P_r и P_x обладают следующими свойствами:

$$P_r^* = -P_r, \quad P_x^* = -P_x, \quad \det P_r = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad \det P_x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Унитарная матрица $Q \in SU(2)$ представляется в виде

$$Q = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ -\overline{\gamma} & \overline{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix} = q_0 E + \sum_{k=1}^{3} q_k \rho_k .$$

Действительные коэффициенты $q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3$ удовлетворяют условию

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1,$$

так что $QQ^* = E$, $\det Q = 1$. В литературе встречаются разные определения параметров Кэли–Клейна. Например, в справочнике [8] так названы комплексные числа β, γ, определяющие матрицу Q. В книге [2] параметрами Кэли–Клейна названы четыре комплексных числа $\beta, \gamma, -\overline{\gamma}, \overline{\beta}$. В дальнейшем для единообразия изложения параметрами Кэли–Клейна будем называть четыре действительных числа $q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3$, представляющих собой действительную и мнимую части комплексных чисел β и γ соответственно:

$$\beta = q_0 + iq_1, \quad \gamma = q_2 + iq_3$$

и однозначно задающих разложение матрицы $Q \in SU(2)$ по матрицам $E, \rho_1, \rho_2, \rho_3$.

Можно показать, что для любого движения пространства A^3, при котором произвольная точка X переходит в соответствующую ей точку R, а точка O остается неподвижной, существует матрица $Q \in SU(2)$ такая, что $P_r = QP_xQ^*$, где символом Q^* обозначена сопряженная матрица по отношению к Q [8]. Это – преобразование подобия. Оно косоэрмитову матрицу переводит в косоэрмитову и сохраняет детерминант (длину вектора). Композиции вращений соответствует произведение унитарных матриц, взятое в том же порядке, в котором осуществляется композиция [4].

Представим указанное преобразование в виде суммы косоэрмитовых матриц.

Пусть $Q = q_0E + P_\alpha$, где $P_\alpha = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 + q_3\rho_3$. Тогда $Q^* = q_0E - P_\alpha$. Матрице P_α сопоставим вектор $\boldsymbol{\alpha} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$. По указанному выше правилу установим взаимно однозначное соответствие векторных произведений и косоэрмитовых матриц:

$$[\boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{x}] \longleftrightarrow P_{[\alpha,x]}\,, \quad [\boldsymbol{\alpha},\ [\boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{x}]] \longleftrightarrow P_{[\alpha,[\alpha,x]]}\,.$$

Справедливы соотношения

$$P_\alpha P_x = P_{[\alpha,x]} - E\sum_{k=1}^{3} x_k q_k, \quad P_\alpha P_{[\alpha,x]} = P_{[\alpha,[\alpha,x]]}\,,$$

$$P_{[\alpha,[\alpha,x]]} = P_\alpha \sum_{k=1}^{3} x_k q_k - \alpha^2 P_x,$$

последнее из которых есть очевидный аналог известной формулы для двойного векторного произведения. После несложных преобразований получается искомая формула:

$$P_r = (q_0 E + P_\alpha) P_x (q_0 E - P_\alpha) = (q_0 P_x + P_\alpha P_x)(q_0 E - P_\alpha) = q_0^2 P_x +$$

$$+ q_0 (P_\alpha P_x - P_x P_\alpha) - P_\alpha P_x P_\alpha = q_0^2 P_x + 2 q_0 P_{[\alpha,x]} + P_{[\alpha,[\alpha,x]]} +$$

$$+ P_\alpha \sum_{k=1}^{3} x_k q_k = q_0^2 P_x + 2 q_0 P_{[\alpha,x]} + 2 P_{[\alpha,[\alpha,x]]} + \alpha^2 P_x$$

или

$$P_r = P_x + 2 q_0 P_{[\alpha,x]} + 2 P_{[\alpha,[\alpha,x]]}.$$

Этой формуле в пространстве A^3 соответствует следующая последовательность операций:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + 2 q_0 [\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}] + 2[\boldsymbol{\alpha}, [\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}]],$$

совпадающая по виду с известной формулой Родрига [10], но отличающаяся от нее по смыслу переменных.

2. Параметры Эйлера

Справедлива теорема Эйлера, утверждающая, что перевод твердого тела из одного произвольного положения в другое произвольное положение, оставляющий неподвижной точку O, может быть выполнен путем единственного поворота на определенный угол ϕ вокруг некоторой оси, проходящей через через точку O [4]. Непосредственное использование этой теоремы для описания движения твердого тела можно найти в работах [6, 3, 9]. Пусть $\mathbf{e}$ – единичный вектор этой оси, $\mathbf{x}$ – радиус–вектор точки X, принадлежащей твердому телу в его исходном положении, $\mathbf{r}$ – радиус–вектор точки R, соответствующей точке X в положении твердого тела, повернутом на угол ϕ вокруг оси $\mathbf{e}$.

Будем считать, что вектор $\mathbf{x}$ не коллинеарен вектору $\mathbf{e}$. Чтобы написать преобразование $\mathbf{x} \to \mathbf{r}$ в этом случае, выберем правоориентированный репер $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ следующим образом:

$$\mathbf{e}_1' = \frac{[\mathbf{e}, [\mathbf{x}, \mathbf{e}]]}{|[\mathbf{e}, \mathbf{x}]|}, \quad \mathbf{e}_2' = \frac{[\mathbf{e}, \mathbf{x}]}{|[\mathbf{e}, \mathbf{x}]|}, \quad \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}.$$

Очевидно, что вектор $\mathbf{x}$ принадлежит плоскости $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_3'$, а вектор $\mathbf{r}$ – плоскости, повернутой относительно $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_3'$ на угол ϕ. В соответствии с этим получается преобразование

$$\mathbf{r} = (\mathbf{e}, \mathbf{x})\, \mathbf{e} + |[\mathbf{e}, \mathbf{x}]|\, (\mathbf{e}_1' \cos\phi + \mathbf{e}_2' \sin\phi).$$

После упрощений остается формула

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + 2q_0[\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}] + 2[\boldsymbol{\alpha}, [\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}]].$$

где $q_0 = \cos(\phi/2)$, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}\sin(\phi/2)$. При этом, очевидно, выполняется равенство $q_0^2 + \boldsymbol{\alpha}^2 = 1$. Заметим, что формула справедлива и в том случае, когда вектор $\mathbf{x}$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}$. Представим разложение вектора $\boldsymbol{\alpha}$ по базисным векторам неподвижного репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в виде $\boldsymbol{\alpha} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$. Четыре величины q_0, q_1, q_2, q_3, введенные указанным способом, называются параметрами Эйлера [3]. Сопоставив сказанное с результатом предыдущего раздела, видим, что если эти параметры численно совпадают с параметрами Кэли–Клейна, то они определяют преобразование трехмерного пространства, тождественно совпадающее с преобразованием, задаваемым параметрами Кэли–Клейна.

Зависимость компонент a_{ij} матрицы оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$ от параметров Эйлера дается формулами

$$a_{11} = 2(q_0^2 + q_1^2) - 1, \quad a_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3), \quad a_{13} = 2(q_1q_3 + q_0q_2),$$

$$a_{21} = 2(q_1q_2 + q_0q_3), \quad a_{22} = 2(q_0^2 + q_2^2) - 1, \quad a_{23} = 2(q_2q_3 - q_0q_1),$$

$$a_{31} = 2(q_1q_3 - q_0q_2), \quad a_{32} = 2(q_2q_3 + q_0q_1), \quad a_{33} = 2(q_0^2 + q_3^2) - 1.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, во что переходят базисные векторы $\mathbf{e}_k$ при рассматриваемом преобразовании:

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{e}_k + 2q_0[\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_k] + 2[\boldsymbol{\alpha}, [\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_k]],$$

Учтем, что

$$[\boldsymbol{\alpha}, [\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_k]] = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_k) - \mathbf{e}_k\alpha^2,$$

и рассмотрим скалярные произведения

$$a_{jk} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}'_k) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)(1 - 2\alpha^2) + 2q_0(\boldsymbol{\alpha}, [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j]) + 2q_jq_k.$$

Но $\alpha^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 - q_0^2$. Пусть теперь $j = k$. Очевидно, что тогда $a_{jj} = 2(q_j^2 + q_0^2) - 1$, и мы получаем все диагональные члены матрицы A. В том случае, когда $j \neq k$, будем иметь

$$a_{jk} = 2(q_jq_k + q_0(\boldsymbol{\alpha}, [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j])).$$

Перебирая последовательно индексы, найдем остальные члены искомой матрицы. В частности, пусть $j = 1$, $k = 2$. Имеем $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] = -\mathbf{e}_3$, и, следовательно, $a_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3)$.

Таким образом заключаем, что матрица всякого оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$ может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2(q_0^2+q_1^2)-1 & 2q_1q_2 & 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 & 2(q_0^2+q_2^2)-1 & 2q_2q_3 \\ 2q_1q_3 & 2q_2q_3 & 2(q_0^2+q_3^2)-1 \end{pmatrix} +$$

$$+2q_0 \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 – параметры Эйлера.

Сформулируем правило вычисления параметров Эйлера q_0, q_1, q_2, q_3 по заданным компонентам a_{pk} матрицы A. Пусть $A = (a_{pk})$ – матрица оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$. Тогда параметры Эйлера q_0, q_1, q_2, q_3 можно найти с помощью одной из следующих систем уравнений

I	II	III	IV
$4q_0^2 = 1 + \mathrm{Sp}(A) \neq 0$	$q_0 = 0$	$q_0 = 0$	$q_0 = 0$
$4q_0q_1 = a_{32} - a_{23}$	$2q_1^2 = 1 + a_{11} \neq 0$	$q_1 = 0$	$q_1 = 0$
$4q_0q_2 = a_{13} - a_{31}$	$2q_1q_2 = a_{12} = a_{21}$	$2q_2^2 = 1 + a_{22} \neq 0$	$q_2 = 0$
$4q_0q_3 = a_{21} - a_{12}$	$2q_1q_3 = a_{13} = a_{31}$	$2q_2q_3 = a_{23} = a_{32}$	$q_3^2 = 1$

Номер применяемой системы совпадает с номером первого отличного от нуля коэффициента в упорядоченном наборе (q_0, q_1, q_2, q_3).

Чтобы это доказать, вычислим след матрицы A:

$$\mathrm{Sp}(A) = \sum_{k=1}^{3} a_{kk} = \sum_{k=1}^{3} [2(q_0^2 + q_k^2) - 1] = 6q_0^2 - 3 + 2\sum_{k=1}^{3} q_k^2 = 4q_0^2 - 1,$$

так как $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ по определению параметров Эйлера. Отсюда

$$4q_0^2 = 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Если окажется, что $q_0 \neq 0$, то, учитывая выражения для $a_{pk}, \quad p \neq k$, через параметры q_0, q_1, q_2, q_3, получаем систему уравнений I.

Пусть $q_0 = 0$. Тогда заключаем, что матрица A симметричная. Коэффициент a_{11} выражается формулой

$$a_{11} = 2q_1^2 - 1.$$

Отсюда можно найти q_1. Если $q_1 \neq 0$, то получаем систему II. Если $q_1 = 0$, то применим уравнение

$$a_{22} = 2q_2^2 - 1,$$

позволяющее в этом случае найти q_2. При $q_2 \neq 0$ имеем систему III. При $q_2 = 0$ получим систему IV.

Заметим, что каждая из система уравнений для параметров Эйлера имеет ровно два решения, противоположных по знаку. Оба решения отвечают, как и следовало ожидать, вращению твердого тела на углы $\alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$. Все эти углы дают одно и то же положение твердого тела в пространстве.

3. Кватернионы

Кватернионы определяются [8, 5] как линейные комбинации вида

$$\mathbf{h} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

где a, b, c, d – действительные числа; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – линейно независимые символы, подчиняющиеся следующим правилам умножения "$\circ$" кватернионов:

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = \mathbf{j} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k} \circ \mathbf{k} = -1; \quad \mathbf{i} \circ \mathbf{j} = -\mathbf{j} \circ \mathbf{i} = \mathbf{k},$$

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{k} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \circ \mathbf{i} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

Между кватернионами и комплексными (2×2) матрицами устанавливается взаимно однозначное соответствие:

$$Q(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} a + bi, & c + di \\ -c + di, & a - bi \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$Q(\mathbf{i}) = \rho_1, \quad Q(\mathbf{j}) = \rho_2, \quad Q(\mathbf{k}) = \rho_3.$$

$$Q(\mathbf{i})Q(\mathbf{j}) = -Q(\mathbf{j})Q(\mathbf{i}) = \rho_1\rho_2 = \rho_3 = Q(\mathbf{k}) = Q(\mathbf{i} \circ \mathbf{j}),$$

$$Q(\mathbf{j})Q(\mathbf{k}) = -Q(\mathbf{k})Q(\mathbf{j}) = \rho_2\rho_3 = \rho_1 = Q(\mathbf{i}) = Q(\mathbf{j} \circ \mathbf{k}),$$

$$Q(\mathbf{k})Q(\mathbf{i}) = -Q(\mathbf{i})Q(\mathbf{k}) = \rho_3\rho_1 = \rho_2 = Q(\mathbf{j}) = Q(\mathbf{k} \circ \mathbf{i}),$$

$$Q(\mathbf{h}) = a + b\rho_1 + c\rho_2 + d\rho_3, \quad Q(\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2) = Q(\mathbf{h}_1)Q(\mathbf{h}_2).$$

Пусть задан кватернион $\mathbf{h} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Сопряженным к нему называется кватернион

$$\overline{\mathbf{h}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

Справедливы равенства

$$\overline{(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2)} = \overline{\mathbf{h}_1} + \overline{\mathbf{h}_2}, \quad \overline{\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2} = \overline{\mathbf{h}_2} \circ \overline{\mathbf{h}_1}.$$

Первое равенство с очевидностью следует из определения кватерниона. Для доказательства второго равенства заметим, что $Q(\overline{\mathbf{h}}) = Q^*(\mathbf{h})$, и воспользуемся взаимно однозначным соответствием элементов пространства $U(2)$ и кватернионов:

$$Q(\overline{\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2}) = Q^*(\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2) = (Q(\mathbf{h}_1)Q(\mathbf{h}_2))^* = Q^*(\mathbf{h}_2)Q^*(\mathbf{h}_1) = Q(\overline{\mathbf{h}}_2)Q(\overline{\mathbf{h}}_1).$$

Нормой кватерниона $\mathbf{h} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ называется величина $|\mathbf{h}| \geq 0$, определенная равенством

$$|\mathbf{h}|^2 = \mathbf{h}\overline{\mathbf{h}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Прямое вычисление показывает, что $|\mathbf{h}|^2 = \det Q(\mathbf{h})$. Поэтому норма обладает свойством

$$|\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2| = |\mathbf{h}_1||\mathbf{h}_2|.$$

Для каждого отличного от нуля кватерниона $\mathbf{h}$ имеем $|\mathbf{h}| \neq 0$ и существует обратный кватернион

$$\mathbf{h}^{-1} = \overline{\mathbf{h}}/|\mathbf{h}|^2,$$

обладающий свойствами $\mathbf{h} \circ \mathbf{h}^{-1} = 1, \quad \mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{h} = 1.$

Множество кватернионов с нормой, равной единице, обозначим $\mathcal{H}_1$. Если $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_1$, то $h^{-1} = \overline{\mathbf{h}}$. Очевидно, что множество $\mathcal{H}_1$ есть группа по умножению. Эта группа изоморфна группе $SU(2)$. Изоморфизм устанавливается с помощью равенств

$$a = q_0, \quad b = q_1, \quad c = q_2, \quad d = q_3,$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 – параметры Эйлера.

Пусть $\mathcal{H}_0$ – трехмерное пространство кватернионов $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}.$$

Метрика в этом пространстве задается формулой

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \circ \overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^2.$$

Пространство $\mathcal{H}_0$ изоморфно евклидову пространству E^3 .

Если $|\mathbf{h}| = 1$, то преобразование $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \overline{\mathbf{h}}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{H}_0$$

есть вращение трехмерного евклидова пространства.

Действительно, так как $\overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}, \quad \overline{\mathbf{h}} = \mathbf{h}^{-1}$, то

$$\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{h}^{-1}} = \overline{\mathbf{h}^{-1}} \circ \overline{\mathbf{x}} \circ \overline{\mathbf{h}} = -\mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{h}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\overline{\mathbf{z}} = -\mathbf{z}.$$

Далее,

$$|\mathbf{z}|^2 = \mathbf{z} \circ \overline{\mathbf{z}} = (\mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{h}^{-1}) \circ (\overline{\mathbf{h}^{-1}} \circ \overline{\mathbf{x}} \circ \overline{\mathbf{h}}) = \mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \overline{\mathbf{x}} \circ \mathbf{h}^{-1} = |\mathbf{x}|^2.$$

Другими словами, рассматриваемое преобразование сохраняет норму. Учитывая изоморфизм пространств $\mathcal{H}_0$ и E^3, получаем, что такое преобразование эквивалентно вращению трехмерного пространства.

Поскольку параметры Эйлера служат коэффициентами кватернионов из $\mathcal{H}_1$, имеется возможность найти оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$ по заданному кватерниону и обратно найти кватернион, описывающий то же движение, что и заданный оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$.

Заметим, что коэффициенты кватерниона из $\mathcal{H}_1$, задающего преобразование $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{z}$, называются параметрами Родрига–Гамильтона. Видим, что по смыслу параметры Эйлера–Кели–Клейна и параметры Родрига–Гамильтона совпадают.

Приняв $\mathbf{h} = q_0 + \mathbf{h}_\alpha$ и сопоставив [2]

$$\boldsymbol{\alpha} \longleftrightarrow \mathbf{h}_\alpha, \quad [\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}] \longleftrightarrow \mathbf{h}_{[\alpha,x]}, \quad [\boldsymbol{\alpha}, [\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}]] \longleftrightarrow \mathbf{h}_{[\alpha,[\alpha,x]]}\,,$$

найдем

$$\mathbf{h}_\alpha \circ \mathbf{h}_x = \mathbf{h}_{[\alpha,x]} - \sum_{k=1}^{3} x_k q_k, \quad \mathbf{h}_\alpha \circ \mathbf{h}_{[\alpha,x]} = \mathbf{h}_{[\alpha,[\alpha,x]]}\,,$$

$$\mathbf{h}_{[\alpha,[\alpha,x]]} = \mathbf{h}_\alpha \sum_{k=1}^{3} x_k q_k - \alpha^2 \mathbf{h}_x.$$

С учетом приведенных соотношений формула для движения абсолютно твердого тела представляется в виде

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{h}_x + 2q_0 \mathbf{h}_{[\alpha,x]} + 2\mathbf{h}_{[\alpha,[\alpha,x]]},$$

совпадающим с преобразованием с помощью самосопряженных матриц. В пространстве A^3 этой формуле отвечает формула Родрига, уже приведенная выше.

4. Параметры Родрига

Параметры Кэли–Клейна, Эйлера, Родрига–Гамильтона связаны обязательным условием

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Это не всегда удобно. Параметры Родрига p_0, p_1, p_2, p_3 вводятся [1] с помощью формул

$$p_0 = pq_0, \quad p_1 = pq_1, \quad p_2 = pq_2, \quad p_3 = pq_3,$$

где p – произвольный параметр, так что

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p^2.$$

Теория параметров Родрига аналогична теории параметров Кэли–Клейна, Эйлера, Родрига–Гамильтона. Для преобразований в пространстве (2×2) комплексных матриц применяются

$$D = p_0E + p_1\rho_1 + p_2\rho_2 + p_3\rho_3.$$

Такие матрицы уже не будут унитарными, так как $D^*D = p^2E$. Поэтому формулы, описывающие движение твердого тела, примут вид

$$P_r = p^{-2}DP_xD^*, \quad P_r = P_x + 2p^{-2}\left(p_0P_{[\delta,x]} + P_{[\delta,[\delta,x]]}\right).$$

Здесь $\boldsymbol{\delta} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3, \quad P_\delta = p_1\rho_1 + p_2\rho_2 + p_3\rho_3$, и попрежнему

$$[\boldsymbol{\delta},\mathbf{x}] \longleftrightarrow P_{[\delta,x]}, \quad [\boldsymbol{\delta},[\boldsymbol{\delta},\mathbf{x}]] \longleftrightarrow P_{[\delta,[\delta,x]]}.$$

В связи со сказанным очевидна формула

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + 2p^{-2}(p_0[\boldsymbol{\delta},\mathbf{x}] + [\boldsymbol{\delta},[\boldsymbol{\delta},\mathbf{x}]]),$$

определяющая правило использования параметров Родрига для описания движения в пространстве A^3.

Использование параметров Родрига в кватернионном методе задания движения твердого тела приводит к формулам

$$\mathbf{h}_r = p^{-2}\mathbf{h}\circ\mathbf{h}_x\circ\overline{\mathbf{h}},$$

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{h}_x + 2p^{-2}[p_0\mathbf{h}_{[\delta,x]} + \mathbf{h}_{[\delta,[\delta,x]]}],$$

где $\mathbf{h} = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$, а остальные отождествления совпадают с выполненными ранее.

5. Пересчет к угловым переменным

Предположим сначала, что твердое тело осуществляет два последовательных вращения. Выберем два неподвижных отличных друг от друга единичных вектора $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{e}''$. Первым осуществляется поворот на угол ϕ_1 вокруг вектора $\mathbf{e}'$. При этом вектор $\mathbf{e}''$ преобразуется в вектор $\hat{\mathbf{e}}''$. Вторым осуществляется поворот на угол ϕ_2 вокруг вектора $\hat{\mathbf{e}}''$, то есть образа вектора $\mathbf{e}''$ вследствие первого вращения. Тот же результат получится, если осуществить сначала поворот на угол ϕ_2 вокруг неподвижного вектора $\mathbf{e}''$, а затем повернуть твердое тело на угол ϕ_1 вокруг неподвижного вектора $\mathbf{e}'$. В результате такого движения тело займет новое угловое положение, и согласно теореме Эйлера существует такой единичный вектор $\mathbf{e}$, что переход из исходного в новое угловое положение можно осуществить одним поворотом на некоторый угол ϕ вокруг вектора $\mathbf{e}$. Найдем параметры Эйлера для этого поворота. Для простоты воспользуемся свойствами группы SU(2). Пусть параметры Эйлера для первого поворота задаются величинами

$$q_0' = \cos(\phi_1/2), \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}' \sin(\phi_1/2),$$

а для второго — величинами

$$q_0'' = \cos(\phi_2/2), \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}'' \sin(\phi_2/2).$$

Этим наборам параметров соответствуют унитарные матрицы

$$Q' = q_0' E + P_\beta, \quad Q'' = q_0'' E + P_\gamma\,,$$

а композиции поворотов — матрица $Q = Q'Q''$. Выполним умножение матриц

$$Q = (q_0' E + P_\beta)(q_0'' E + P_\gamma) = q_0' q_0'' E + q_0'' P_\beta + q_0' P_\gamma + P_\beta P_\gamma =$$

$$= (q_0' q_0'' - (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}))E + q_0'' P_\beta + q_0' P_\gamma + P_{[\beta,\gamma]}.$$

Как и прежде, представим $Q = q_0 E + P_\alpha$, так что $P_\alpha \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in E^3$. Тогда последняя формула может быть переписана в векторном виде

$$q_0 = q_0' q_0'' - (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\alpha} = q_0'' \boldsymbol{\beta} + q_0' \boldsymbol{\gamma} + [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}].$$

Эти формулы и определяют искомые параметры Эйлера для композиции двух вращений.

Если углы ϕ_1, ϕ_2 изменяются равномерно по времени, то рассмотренное движение составляет регулярную прецессию. В этом движении вектор $\hat{\mathbf{e}}''$ меняется по закону

$$\hat{\mathbf{e}}'' = \mathbf{e}'' + 2q_0'[\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}''] + 2[\boldsymbol{\beta}, [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}'']].$$

и задает направление оси собственного вращения тела. Параметры Эйлера для регулярной прецессии выражаются формулой

$$q_0 = \cos\frac{\phi_1}{2}\cos\frac{\phi_2}{2} - \sin\frac{\phi_1}{2}\sin\frac{\phi_2}{2}(\mathbf{e}', \mathbf{e}''),$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \cos\frac{\phi_2}{2}\sin\frac{\phi_1}{2}\mathbf{e}' + \cos\frac{\phi_1}{2}\sin\frac{\phi_2}{2}\mathbf{e}'' + \sin\frac{\phi_1}{2}\sin\frac{\phi_2}{2}[\mathbf{e}', \mathbf{e}''].$$

С помощью матричных операций легко решается также обратная задача. Пусть заданы параметры Эйлера для первого поворота, то есть величина q_0' и вектор $\boldsymbol{\beta}$, а также параметры Эйлера для желаемого результата композиции вращений, то есть величина q_0 и вектор $\boldsymbol{\alpha}$. Требуется найти параметры Эйлера, характеризующие вторую составляющую композиции вращений. В матричном виде имеем уравнение относительно Q''

$$Q'Q'' = Q, \quad Q' = q_0'E + P_\beta, \quad Q = q_0E + P_\alpha.$$

Отсюда

$$Q'' = (Q')^*Q = (q_0'E - P_\beta)(q_0E + P_\alpha) =$$
$$= (q_0'q_0 + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}))E - q_0P_\beta + q_0'P_\alpha - P_{[\beta,\alpha]}.$$

В векторном виде этому выражению соответствует формулы

$$q_0'' = q_0'q_0 + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\gamma} = -q_0\boldsymbol{\beta} + q_0'\boldsymbol{\alpha} - [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}].$$

Таким же путем можно получить и формулы для искомого первого поворота:

$$q_0' = q_0''q_0 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\beta} = -q_0\boldsymbol{\gamma} + q_0''\boldsymbol{\alpha} - [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}].$$

Следовательно, имея результирующий конечный поворот и один из двух составляющих, всегда и однозначно можно получить недостающую компоненту.

Система угловых переменных возникает вследствие композиции последовательных вращений твердого тела вокруг координатных осей. Пусть, например, одна из таких осей будет $\mathbf{e}_k$. Угол поворота вокруг нее обозначим ϕ_k. Руководствуясь смыслом параметров Эйлера, тогда найдем

$$q_0 = \cos\frac{\phi_k}{2}, \quad q_k = \sin\frac{\phi_k}{2}, \quad q_j = 0, \quad j \neq 0, k.$$

Соответствующая матрица Q_{ϕ_k} принимает вид $Q_{\phi_k} = E\cos(\phi_k/2) + \rho_k \sin(\phi_k/2)$. В частности, для углов Эйлера имеем [4]

$$Q_\psi = E\cos\frac{\psi}{2} + \rho_3 \sin\frac{\psi}{2},$$

$$Q_\theta = E\cos\frac{\theta}{2} + \rho_1 \sin\frac{\theta}{2},$$

$$Q_\varphi = E\cos\frac{\varphi}{2} + \rho_3 \sin\frac{\varphi}{2}.$$

В результате композиции вращений найдем $Q = Q_\psi Q_\theta Q_\varphi$. Выполнив операции с учетом свойств базисных косоэрмитовых матриц, получим

$$\frac{p_0}{p} = q_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{(\psi + \varphi)}{2}, \quad \frac{p_1}{p} = q_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{(\psi - \varphi)}{2},$$

$$\frac{p_2}{p} = q_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{(\psi - \varphi)}{2}, \quad \frac{p_3}{p} = q_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{(\psi + \varphi)}{2},$$

Аналогично, углы Крылова и углы Брайнта [2, 3, 9] определяются как углы последовательных вращений вокруг каждой из координатных осей. Пусть γ_1, γ_2, γ_3 углы вращений вокруг первой, второй и третьей осей соответственно. Тогда

$$Q_k = E\cos\frac{\gamma_k}{2} + \rho_k \sin\frac{\gamma_k}{2}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Если композиция вращений реализуется в порядке возрастания номеров (углы Брайнта), то ей соответствует матрица $Q = Q_1Q_2Q_3$. Если композиция вращений реализуется в порядке убывания номеров (углы Крылова), то $Q = Q_3Q_2Q_1$. Точно так же можно установить соотношения между параметрами и любыми другими угловыми переменными.

6. Кинематические уравнения

Кинематические уравнения связывают производные от параметров матрицы углового движения с компонентами угловой скорости. Рассмотрим сначала кинематические уравнения для параметров q_0, q_1, q_2, q_3. Пусть $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ и $Q \in SU(2)$. Тогда $\mathbf{v} \longleftrightarrow P_v$, и $P_v = \dot{P}_r$. Очевидно, что

$$\dot{P}_r = \dot{Q}P_xQ^* + QP_x\dot{Q}^* = \dot{Q}Q^*P_r + P_rQ\dot{Q}^* = (\dot{Q}Q^*)P_r + P_r(\dot{Q}Q^*)^*.$$

При этом $QQ^* = E \to \dot{Q}Q^* = -Q\dot{Q}^* \to (Q\dot{Q}^*)^* = -Q\dot{Q}^*$. С другой стороны $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$, где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости. По координатам вектора $\boldsymbol{\omega}/2$ в неподвижном репере построим косоэрмитову матрицу P_ω. В соответствии с формулами раздела 1 найдем:

$$P_v = (P_\omega)P_r + P_r(-P_\omega) = P_\omega P_r + P_r(P_\omega)^*.$$

Следовательно,

$$\dot{Q}Q^* = P_\omega \longleftrightarrow \dot{Q} = P_\omega Q.$$

Это и есть искомые кинематические уравнения для параметров Кели–Клейна–Эйлера–Родрига–Гамильтона. Если непосредственно разложить входящие в них матрицы по базисным косоэрмитовым матрицам, то, приравняв коэффициенты в правой и левой частях, получим стандартные кинематические уравнения в действительной форме. В самом деле, из первого равенства следует

$$P_\omega = (\dot{q}_0E + \dot{q}_1\rho_1 + \dot{q}_2\rho_2 + \dot{q}_3\rho_3)(q_0E - q_1\rho_1 - q_2\rho_2 - q_3\rho_3).$$

После перемножения с учетом свойств базисных матриц ρ_k и приведения подобных членов, найдем

$$\omega_1 = 2(q_0\dot{q}_1 - \dot{q}_0q_1 + q_2\dot{q}_3 - \dot{q}_2q_3),$$

$$\omega_2 = 2(q_0\dot q_2 - \dot q_0 q_2 + q_3\dot q_1 - \dot q_3 q_2),$$
$$\omega_3 = 2(q_0\dot q_3 - \dot q_0 q_3 + q_1\dot q_2 - \dot q_1 q_2).$$

Из второго равенства следует

$$\dot q_0 E + \dot q_1\rho_1 + \dot q_2\rho_2 + \dot q_3\rho_3 = \frac{1}{2}(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 + \omega_3\sigma_3)(q_0 E + q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3),$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\dot q_0 &= -\frac{1}{2}(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3),\\
\dot q_1 &= \quad \frac{1}{2}(\omega_1 q_0 + \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2),\\
\dot q_2 &= \quad \frac{1}{2}(\omega_2 q_0 + \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3),\\
\dot q_3 &= \quad \frac{1}{2}(\omega_3 q_0 + \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1).
\end{aligned}$$

Однако возможны и некоторые другие иногда удобные модификации. Чтобы получить их достаточно учесть, что

$$Q = Eq_0 + P_\alpha, \quad Q^* = Eq_0 - P_\alpha, \quad \dot Q = E\dot q_0 + \dot P_\alpha, \quad \sum_{k=0}^{3} q_k\dot q_k = 0,$$

$$P_\omega P_\alpha = \frac{1}{2}\left(P_{[\omega,\alpha]} - E\sum_{k=1}^{3}\omega_k q_k\right), \quad \dot P_\alpha P_\alpha = P_{[\dot\alpha,\alpha]} - E\sum_{k=1}^{3} q_k\dot q_k.$$

Тогда

$$P_\omega = \dot Q Q^* = (E\dot q_0 + \dot P_\alpha)(Eq_0 - P_\alpha) = \dot P_\alpha q_0 - P_\alpha\dot q_0 + P_{[\alpha,\dot\alpha]}$$

или в форме действительных чисел

$$\boldsymbol{\omega} = 2(\dot{\boldsymbol{\alpha}} q_0 - \boldsymbol{\alpha}\dot q_0 + [\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}]).$$

Аналогично

$$\dot Q = P_\omega(Eq_0 + P_\alpha) = -\frac{1}{2}E\sum_{k=1}^{3}\omega_k q_k + \left(P_\omega q_0 + \frac{1}{2}P_{[\omega,\alpha]}\right).$$

Таким образом, параметры $q_k, (k = 0, 1, 2, 3)$ удовлетворяют следующим кинематическим уравнениям

$$\dot q_0 = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\omega_k q_k, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{2}(q_0\boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}]).$$

Пусть P_Ω – косоэрмитова матрица, построенная по координатам

$$\boldsymbol{\Omega}/2 = (\Omega_1/2,\ \Omega_2/2,\ \Omega_3/2)$$

вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в репере, жестко связанном с телом. Тогда, очевидно

$$Q^* P_v Q = Q^* \dot{Q} P_x + P_x \dot{Q}^* Q,$$

$$Q^* P_v Q = P_\Omega P_x - P_x P_\Omega \leftrightarrow P_\Omega = Q^* \dot{Q}, \quad \dot{Q} = Q P_\Omega.$$

Отсюда

$$P_\Omega = \dot{P}_\alpha q_0 - P_\alpha \dot{q}_0 - P_{[\alpha,\dot{\alpha}]}\,, \quad \dot{Q} = -\frac{1}{2} E \sum_{k=1}^{3} \Omega_k q_k + (P_\Omega q_0 + \frac{1}{2} P_{[\alpha,\Omega]})\,.$$

или в форме действительных чисел

$$\boldsymbol{\Omega} = 2(\dot{\boldsymbol{\alpha}} q_0 - \boldsymbol{\alpha} \dot{q}_0 - [\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}]), \quad \dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \Omega_k q_k, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{2}(q_0 \boldsymbol{\Omega} + [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Omega}]).$$

В координатной форме выражения для компонент вектора угловой скорости в связанных с телом осях примут вид

$$\Omega_1 = 2(q_0 \dot{q}_1 - \dot{q}_0 q_1 - q_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_2 q_3),$$
$$\Omega_2 = 2(q_0 \dot{q}_2 - \dot{q}_0 q_2 - q_3 \dot{q}_1 + \dot{q}_3 q_2),$$
$$\Omega_3 = 2(q_0 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_3 - q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 q_2).$$

Дадим также соответствующую кординатную форму системы кинематических дифференциальных уравнений для параметров

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}(\Omega_1 q_1 + \Omega_2 q_2 + \Omega_3 q_3),$$
$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(\Omega_1 q_0 - \Omega_2 q_3 + \Omega_3 q_2),$$
$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}(\Omega_2 q_0 - \Omega_3 q_1 + \Omega_1 q_3),$$
$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}(\Omega_3 q_0 - \Omega_1 q_2 + \Omega_2 q_1).$$

Получим теперь кинематические уравнения для угловых переменных. Рассмотрим сначала регулярную прецессию. В этом случае $Q = Q' Q''$, причем

$$Q' = E \cos\frac{\phi_1}{2} + \rho' \sin\frac{\phi_1}{2}, \quad Q'' = E \cos\frac{\phi_2}{2} + \rho'' \sin\frac{\phi_2}{2}, \quad \rho' \leftrightarrow \mathbf{e}', \quad \rho'' \leftrightarrow \mathbf{e}'',$$

где единичные векторы $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ неподвижны в абсолютном пространстве. Представим вектор $\boldsymbol{\omega}$ компонентами в неподвижном репере. Тогда

$$P_\omega = \left(\frac{dQ'}{d\phi_1} Q'' \dot{\phi}_1 + Q' \frac{dQ''}{d\phi_2} \dot{\phi}_2\right) (Q'')^* (Q')^*$$

Справедливы соотношения

$$\frac{dQ'}{d\phi_1}(Q')^* = \frac{1}{2}\left(-E\sin\frac{\phi_1}{2} + \rho'\cos\frac{\phi_1}{2}\right)\left(E\cos\frac{\phi_1}{2} + \rho'\sin\frac{\phi_1}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho',$$

$$\frac{dQ''}{d\phi_2}(Q'')^* = \frac{1}{2}\left(-E\sin\frac{\phi_2}{2} + \rho''\cos\frac{\phi_2}{2}\right)\left(E\cos\frac{\phi_1}{2} + \rho''\sin\frac{\phi_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho''.$$

Следовательно

$$P_\omega = \frac{1}{2}[\dot\phi_1\rho' + \dot\phi_2 Q'\rho''(Q')^*].$$

Полученное равенство можно переписать также в виде

$$(Q')^* P_\omega Q' = \frac{1}{2}[\dot\phi_1\rho' + \dot\phi_2\rho''].$$

Таким образом, прообраз вектора $\boldsymbol{\omega}$, связанный с первым поворотом, должен принадлежать плоскости векторов $\mathbf{e}', \mathbf{e}''$. Любой момент времени можно принять в качестве начального. Для начального момента времени t_0 будем иметь

$$P_\omega(t_0) = \frac{1}{2}[\dot\phi_1\rho' + \dot\phi_2\rho''].$$

В векторном виде это соответствует равенству

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = \dot\phi_1\mathbf{e}' + \dot\phi_2\mathbf{e}'',$$

и если заданы, например, векторы $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$, то

$$\dot\phi_1 = \frac{([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}''], [\mathbf{e}', \mathbf{e}''])}{[\mathbf{e}', \mathbf{e}'']^2},$$

$$\dot\phi_2 = \frac{([\mathbf{e}', \boldsymbol{\omega}], [\mathbf{e}', \mathbf{e}''])}{[\mathbf{e}', \mathbf{e}'']^2}.$$

Аналогично можно найти и другие характеристики, связанные со скоростью регулярной прецессии.

Общий случай движения твердого тела характеризуется тремя угловыми координатами. Пусть это будут, например, углы Эйлера. Тогда, очевидно,

$$\dot Q = \frac{dQ_\psi}{d\psi}Q_\vartheta Q_\varphi\dot\psi + Q_\psi\frac{dQ_\vartheta}{d\vartheta}Q_\varphi\dot\vartheta + Q_\psi Q_\vartheta\frac{dQ_\varphi}{d\varphi}\dot\varphi.$$

Заметим, что

$$\frac{dQ_\psi}{d\psi}Q_\psi^* = \frac{1}{2}\rho_3, \quad \frac{dQ_\vartheta}{d\vartheta}Q_\vartheta^* = \frac{1}{2}\rho_1, \quad \frac{dQ_\varphi}{d\varphi}Q_\varphi^* = \frac{1}{2}\rho_3.$$

Поэтому

$$\dot Q Q^* = \frac{1}{2}(\dot\psi\rho_3 + \dot\vartheta Q_\psi\rho_1 Q_\psi^* + \dot\varphi Q_\psi Q_\vartheta\rho_3 Q_\vartheta^* Q_\psi^*) = P_\omega.$$

По смыслу первое слагаемое левой части выражает угловую скорость прецессии, направленную вдоль третьей координатной оси, второе слагаемое – угловую скорость нутации, направленную вдоль образа первой координатной оси после поворота на угол прецессии, третье слагаемое – угловую скорость собственного вращения, направленную вдоль образа третьей координатной оси после поворотов на углы працесии и нутации.

После алгебраических преобразований с учетом свойств косоэрмитовых матриц получим

$$P_\omega = \frac{1}{2}\{\dot\psi\rho_3 + \dot\vartheta(\rho_1\cos\psi + \rho_2\sin\psi) + \dot\varphi[\sin\vartheta(\rho_1\sin\psi - \rho_2\cos\psi) + \rho_3\cos\vartheta]\}.$$

Приравняв коэффициенты при базисных косоэрмитовых матрицах в правой и левой частях, найдем кинематические уравнения Эйлера в проекциях на оси неподвижного репера

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi + \dot\vartheta\cos\psi,\\
&\omega_2 = -\dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi + \dot\vartheta\sin\psi,\\
&\omega_3 = \dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Кинематические уравнения в проекциях на оси репера, жестко связанного с твердым телом можно получить, воспользововшись равенством $P_\Omega = Q^*\dot Q$. Легко проверить, что

$$Q_\psi^*\frac{dQ_\psi}{d\psi} = \frac{1}{2}\rho_3, \quad Q_\vartheta^*\frac{dQ_\vartheta}{d\vartheta} = \frac{1}{2}\rho_1, \quad Q_\varphi^*\frac{dQ_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2}\rho_3.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}(\dot\psi Q_\varphi^* Q_\vartheta^*\rho_3 Q_\vartheta Q_\varphi + \dot\vartheta Q_\varphi^*\rho_1 Q_\varphi + \dot\varphi\rho_3) = P_\Omega.$$

Здесь первое слагаемое выражает угловую скорость працесии, повернутую на углы собственного вращения и нутации, взятые с обратным знаком, так как вращение осуществляется относительно твердого тела. Второе слагаемое выражает угловую скорость нутации, повернутую на угол собственного вращения, взятый с обратным знаком по той же причине, третье слагаемое выражает угловую скорость собственного вращения. Выполним преобразования:

$$\frac{1}{2}\{\dot\psi[\sin\vartheta(\rho_1\sin\varphi + \rho_2\cos\varphi) + \rho_3\cos\vartheta] + \dot\vartheta(\rho_1\cos\varphi - \rho_2\sin\varphi) + \dot\varphi\rho_3\} = P_\Omega.$$

Отсюда получаются кинематические уравнения Эйлера в проекциях на оси репера, жестко связанного с твердым телом,

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 = \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\cos\varphi,\\
&\Omega_2 = \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi - \dot\vartheta\sin\varphi,\\
&\Omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta.
\end{aligned}$$

При использовании параметров Родрига получаются следующие кинематические уравнения

$$P_\omega = p^{-2}(\dot D D^* - p\dot p E) = p^{-2}(\dot P_\delta p_0 - P_\delta \dot p_0 + P_{[\delta,\dot\delta]})$$

или в векторной форме:

$$\boldsymbol{\omega} = 2p^{-2}(\dot{\boldsymbol{\delta}} p_0 - \boldsymbol{\delta}\dot p_0 + [\boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{\delta}}]).$$

Далее

$$\dot D = P_\omega D + p^{-1}\dot p\, D = \left(\frac{\dot p}{p}p_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\omega_k p_k\right)E + \left(P_\omega p_0 + \frac{1}{2}P_{[\omega,\delta]} + \frac{\dot p}{p}P_\delta\right).$$

Поэтому

$$\dot p_0 = \frac{\dot p}{p}p_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\omega_k p_k, \quad \dot{\boldsymbol{\delta}} = \frac{1}{2}(p_0\boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}]) + \frac{\dot p}{p}\boldsymbol{\delta}, \quad p^2 = \sum_{k=0}^{3}p_k^2.$$

Аналогичный вид имеют формулы, связывающие производные от параметров p_0, p_1, p_2, p_3 с проекциями угловой скорости на связанные оси.

$$\boldsymbol{\Omega} = 2p^{-2}(\dot{\boldsymbol{\delta}} p_0 - \boldsymbol{\delta}\dot p_0 - [\boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{\delta}}]).$$

$$\dot p_0 = \frac{\dot p}{p}p_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\Omega_k p_k, \quad \dot{\boldsymbol{\delta}} = \frac{1}{2}(p_0\boldsymbol{\Omega} + [\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Omega}]) + \frac{\dot p}{p}\boldsymbol{\delta}, \quad p^2 = \sum_{k=0}^{3}p_k^2.$$

Величина $\dot p$ – произвольная функция времени. Если принять $\dot p \equiv 0$, то, как и следовало ожидать, полученные уравнения допускают первый интеграл

$$\sum_{k=0}^{3}p_k^2 = const.$$

Если к системе кинематических уравнений добавить уравнение

$$\dot p = 1 - p,$$

то при $t \to \infty$ получим $p \to 1$, и при численном интегрировании указанной системы процесс вычислений будет устойчивым в смысле точности соблюдения равенства

$$\sum_{k=0}^{3}q_k^2 = 1,$$

так как при интегрировании будем иметь

$$p_k \to q_k, \quad t \to \infty, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Другими словами при $t \to \infty$ параметры Родрига будут асимптотически приближаться к параметрам Кели–Клейна–Эйлера независимо от начальных условий.

Заключение

В настоящей работе представлено нетрадиционное изложение основных разделов кинематики абсолютно твердого тела, основанное на систематическом использовании изоморфизма трехмерного Евклидова пространства на пространство (2×2) косоэрмитовых матриц. Введенные в работе базисные косоэрмитовы матрицы позволяют отождествить параметры Эйлера, параметры Кели–Клейна и параметры Родрига–Гамильтона и объединить преимущества работы в Евклидовом пространстве, пространствах комплексных матриц и кватернионов для сокращения промежуточных преобразований. Появляется возможность получить простым способом необходимые расчетные формулы кинематики без использования геометрических построений. Теория рассматриваемых параметров приобретает весьма компактный вид, а связи между различными кинематическими соотношениями становятся весьма прозрачными. Основными результатами работы служат:

1. Обоснование целесообразности применения в теории параметров Кели–Клейна предложенного в работе базиса косоэрмитовых матриц вместо традиционно используемых в этой теории матриц Паули.

2. Унификация работы в трехмерном Евклидовом пространстве, пространстве (2×2) комплексных матриц и пространстве кватернионов с целью экономного получения основных соотношений кинематики абсолютно твердого тела.

3. Компактное изложение теории указанных параметров, полученное вследствие объединения возможностей техники работы в Евклидовом пространстве, пространствах комплексных матриц и кватернионов.

4. Рекомендации для повышения устойчивости схем численного интегрирования кинематических уравнений для параметров Эйлера–Кели–Клейна–Родрига–Гамильтона, основанные на свойствах параметров Родрига.

Список литературы

1. Аппель П. Теоретическая механика/ Пер. с франц. Т. 2. М.: Наука, 1960.

2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.

3. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980.

4. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики: Учебник. М.: Изд–во МГУ, 1992.

5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

6. Ишлинский А. Ю. Некоторые вопросы теории автономного управления баллистическими ракетами. Типография МВД УССР, 1960.

7. Картан Э. Теория спиноров/ Пер. с франц. М.: Государственное изд–во иностранной литературы, 1947.

8. Корн Г. и Корн Е. Справочник по математике для научных работников и инженеров/ Пер. с англ. М.: Наука, 1970.

9. Лилов Л. К. Моделирование систем связанных тел. М.: Наука, 1993.

10. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.

Содержание

Работа поддержана грантом РФФИ 95-01-00176.