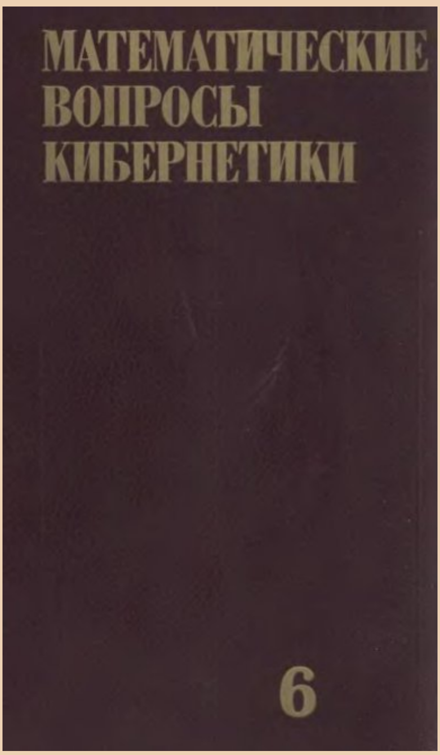

М. И. Гринчук

Сложность реализации 4-местных булевых функций схемами в базисе из всех 2-местных функций

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СЛОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ 4-МЕСТНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ В БАЗИСЕ ИЗ ВСЕХ 2-МЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

М. И. ГРИНЧУК

(МОСКВА)

Рассматривается задача нахождения сложности реализации каждой 4-местной функции алгебры схемами из функциональных элементов (под сложностью схемы понимается число составляющих ее элементов; все остальные необходимые определения см., например, в [1]) в базисе Б из всех 16 двуместных булевых функций. Эта задача была решена на основе компьютерных расчетов; в настоящей заметке излагается сводка соответствующих результатов.

Заметим, что задача поиска минимальной реализации булевых функций и связанная с ней задача точного нахождения сложности реализации той или иной конкретной функции относятся к трудным и требующим в «типичной» ситуации вычислительной работы, сопоставимой по объему с перебором всех схем заданной сложности [2]. Приводимые в настоящей заметке результаты потребовали нескольких часов вычислений на компьютере класса Pentium. Увеличение числа аргументов анализируемых булевых функций на единицу приводит, условно говоря, к возведению времени вычисления (числа операций) в квадрат, поэтому, возможно, 4 — наибольшее число переменных, для которых такая задача в принципе является (и, видимо, будет являться) полностью разрешимой.

Для изложения результатов удобно использовать тот известный и очевидный факт, что при реализации функций схемами в базисе Б:

1) при перестановке аргументов сложность функции не меняется;

2) сложность функций $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ совпадает, если только f отлична от x_i и от $\bar{x}_i$;

3) сложность функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\bar{f}(x_1, \ldots, x_n)$ совпадает, если f не имеет вид x_i или $\bar{x}_i$.

Свойства 1)–3) определяют на множестве булевых функций с заданным числом переменных некоторое отношение эквивалентности, почти во всех случаях (кроме класса $\{x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$) сохраняющее сложность. Поэтому информацию о сложности всех булевых функций можно представить компактнее, если указывать сложность только для одного представителя из каждого класса эквивалентности. В качестве такого представителя выберем функцию, являющуюся первой при лексикографическом упорядочении векторов значений на последовательных наборах значений переменных.

В табл. 1 для каждого возможного значения сложности (L) приведен список векторов значений 4-местных функций соответствующей сложности. Для всех классов эквивалентности приведен один, лексикографически первый, представитель, а для класса $\{x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ — два: тождественная функция сложности 0 и отрицание, имеющее сложность 1.

Таблица 1

$L = 0$			
0000 0000 1111 1111	—	—	—
$L = 1$			
0000 0000 0000 0000	0000 1111 1111 0000	0000 0000 0000 1111	1010 1010 1010 1010
$L = 2$			
0000 0000 0000 0011 0000 0000 0011 1100	0000 0000 0011 1111 0000 0011 1111 1100	0011 1100 1100 0011	—
$L = 3$			
0000 0000 0000 0001 0000 0000 0000 0110 0000 0000 0000 0111 0000 0000 0001 1110 0000 0000 0001 1111	0000 0000 0110 1001 0000 0000 0110 1111 0000 0000 0111 1111 0000 0001 1111 1110 0000 0011 0101 0110	0000 0011 0101 0111 0000 0011 1100 0000 0000 0011 1100 0011 0000 0011 1100 1111 0000 0110 0110 0000	0000 0110 0110 0110 0000 0110 1111 1001 0000 0111 1111 1000 0001 1110 1110 0001 0110 1001 1001 0110
$L = 4$			
0000 0000 0001 1000 0000 0000 0001 1001 0000 0000 0001 1011 0000 0000 0011 1101 0000 0000 0111 1110 0000 0001 1001 1000 0000 0001 1001 1001 0000 0001 1010 1000 0000 0001 1010 1001	0000 0001 1010 1010 0000 0001 1010 1011 0000 0001 1010 1110 0000 0001 1010 1111 0000 0001 1110 1110 0000 0001 1110 1111 0000 0011 0011 1100 0000 0011 0011 1111 0000 0011 0101 1001	0000 0011 0101 1010 0000 0011 0101 1011 0000 0011 0101 1111 0000 0011 1101 1100 0000 0011 1101 1110 0000 0110 1001 0000 0000 0110 1001 0110 0000 0110 1001 1111 0000 0110 1111 0000	0000 0110 1111 0110 0000 0111 1011 0000 0000 0111 1111 0000 0000 0111 1111 0010 0001 1000 1110 0111 0001 1001 1110 0110 0001 1011 1110 0100
$L = 5$			
0000 0000 0001 0110 0000 0000 0001 0111 0000 0000 0110 1011 0000 0001 0001 1110 0000 0001 0001 1111 0000 0001 0010 1100 0000 0001 0010 1101 0000 0001 0010 1111 0000 0001 0011 1100 0000 0001 0011 1101 0000 0001 0011 1110 0000 0001 0011 1111 0000 0001 0110 1000 0000 0001 0110 1001 0000 0001 0110 1110 0000 0001 0110 1111 0000 0001 1000 0000 0000 0001 1000 0001 0000 0001 1000 0010	0000 0001 1000 0011 0000 0001 1000 0110 0000 0001 1000 0111 0000 0001 1000 1001 0000 0001 1000 1011 0000 0001 1000 1111 0000 0001 1001 1010 0000 0001 1011 1110 0000 0001 1011 1111 0000 0001 1110 1010 0000 0001 1110 1011 0000 0011 0101 1000 0000 0011 0101 1110 0000 0011 0110 1001 0000 0011 0110 1010 0000 0011 0110 1011 0000 0011 0110 1100 0000 0011 0110 1110 0000 0011 0110 1111	0000 0011 0111 1100 0000 0011 0111 1110 0000 0011 1100 0001 0000 0011 1100 0101 0000 0011 1100 0110 0000 0011 1100 0111 0000 0011 1101 0100 0000 0011 1101 0101 0000 0011 1101 0110 0000 0011 1101 0111 0000 0011 1101 1001 0000 0011 1101 1101 0000 0110 0110 0010 0000 0110 0110 0011 0000 0110 0110 1001 0000 0110 0110 1111 0000 0110 0111 0011 0000 0110 0111 0110 0000 0110 1011 1001	0000 0110 1011 1101 0000 0110 1111 0001 0000 0111 0111 1000 0000 0111 1011 0100 0000 0111 1011 1100 0000 0111 1110 0000 0000 0111 1110 1001 0000 0111 1111 0001 0001 0110 1000 0110 0001 0110 1001 0110 0001 0110 1001 1001 0001 0110 1001 1110 0001 0110 1011 1100 0001 0110 1110 1001 0001 0111 1000 1110 0001 0111 1001 0110 0001 0111 1110 1000 0001 1011 1101 1000

Таблица 1 (продолжение)

$L = 6$			
0000 0001 0001 1000	0000 0001 1110 1001	0000 0110 1011 0000	0000 0111 1110 0110
0000 0001 0001 1001	0000 0011 0011 1101	0000 0110 1011 0001	0001 0110 0110 1000
0000 0001 0001 1010	0000 0011 0110 1000	0000 0110 1011 0010	0001 0110 0110 1001
0000 0001 0001 1011	0000 0011 0110 1101	0000 0110 1011 0011	0001 0110 0110 1011
0000 0001 0110 1010	0000 0011 0111 1101	0000 0110 1011 0100	0001 0110 0110 1110
0000 0001 0110 1011	0000 0011 1101 1000	0000 0110 1011 0101	0001 0110 0111 1110
0000 0001 0111 1110	0000 0011 1101 1011	0000 0110 1011 0110	0001 0110 1000 0011
0000 0001 0111 1111	0000 0110 0110 0001	0000 0110 1011 0111	0001 0110 1000 0111
0000 0001 1001 0110	0000 0110 0110 0111	0000 0110 1111 0010	0001 0110 1000 1001
0000 0001 1001 0111	0000 0110 0111 0010	0000 0111 0111 0110	0001 0110 1001 0111
0000 0001 1001 1011	0000 0110 0111 1000	0000 0111 0111 1010	0001 0110 1001 1010
0000 0001 1001 1110	0000 0110 0111 1001	0000 0111 0111 1110	0001 0110 1010 1001
0000 0001 1001 1111	0000 0110 0111 1010	0000 0111 1011 0001	0001 0110 1010 1101
0000 0001 1010 1100	0000 0110 0111 1011	0000 0111 1011 0101	0001 0111 0111 1110
0000 0001 1010 1101	0000 0110 0111 1110	0000 0111 1011 0110	0001 0111 1001 1000
0000 0001 1011 1100	0000 0110 1001 0001	0000 0111 1110 0001	0001 0111 1010 1100
0000 0001 1011 1101	0000 0110 1001 0011	0000 0111 1110 0010	0001 1001 1110 0001
0000 0001 1110 1000	0000 0110 1001 0111	0000 0111 1110 0011	0001 1001 1110 0011
$L = 7$ (самые сложные функции)			
0000 0001 0001 0110	0000 0111 0111 1001	0001 0110 1000 1011	0001 0110 1001 1011
0000 0001 0001 0111	0001 0110 0110 1010	0001 0110 1000 1110	0001 0110 1010 1100
0000 0110 0110 1011	0001 0110 1000 0001	0001 0110 1001 1000	0001 0111 1001 1010

Приведем некоторые наблюдения и выводы, которые можно сделать из анализа информации, указанной в этой таблице.

1. Можно найти (см. табл. 2) первые значения функции Шеннона $L(n)$, т. е. сложности реализации самой сложной функции, а также среднего (по всем 2^{2^n} функциям от n переменных) значения сложности в сравнении с величиной $2^n/n$, которой функция $L(n)$ асимптотически равна (см. [1]).

Таблица 2

n	1	2	3	4
Функция Шеннона $L(n)$	1	1	4	7
Средняя сложность	0,750	0,875	2,340	5,202
$2^n/n$	2	2	2,667	4

2. Приведем (см. табл. 3) распределение всех $2^{16} = 65536$ функций алгебры логики от 4 переменных по сложности.

Таблица 3

n	0	1	2	3	4	5	6	7
Число функций сложности n	4	66	456	2474	10624	24184	25008	2720

3. Среди самых сложных функций от 4 переменных еще содержатся симметрические функции

$$x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_2x_3x_4,$$

$$x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4$$

и эквивалентные им. Это явление особенно любопытно в свете того, что, как известно, при «достаточно большом» числе переменных симметрические функции относятся к одним из самых простых (их сложность не более чем линейна относительно числа переменных [1], причем коэффициент пропорциональности не более 5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
2. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 2. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 75–121.

Поступило в редакцию 28 IX 1996