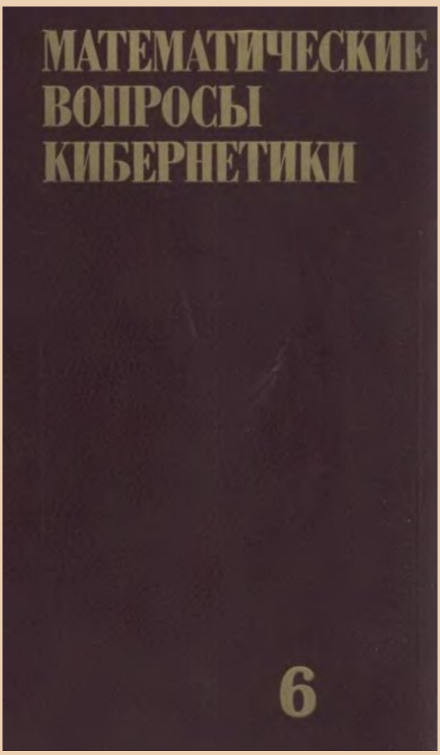

Н. А. Шимко

О надежности схем из ненадежных элементов

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ИЗ НЕНАДЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. А. ШИМКО

(МОСКВА)

Статья посвящена исследованию надежности схем из ненадежных элементов. В работах Дж. Неймана было установлено, что при наличии абсолютно надежного элемента для функции голосования $xy \vee xz \vee yz$ и ненадежных элементов для других функций можно строить сколь угодно надежные схемы для любых булевых функций (при условии полноты системы всех базисных функций). Им было также установлено, что из ненадежных элементов (при условии, что вероятности ошибок базисных элементов не превосходят $0,007$) можно строить схемы для любых булевых функций, вероятность ошибки которых стремятся к нулю при стремлении к нулю вероятности ошибок базисных элементов [5].

В статье исследован вопрос о реализации схем из ненадежных элементов в случае произвольных ограниченно-детерминированных (о.-д.) функций. В работе приводятся следующие основные результаты.

Показано, что в случае базисов, состоящих из функциональных элементов и элемента задержки для почти всех о.-д. функций существуют входные последовательности, на которых нельзя реализовать о.-д. функцию с вероятностью ошибки, меньшей $1/2 - \delta$ при сколь угодно малом $\delta > 0$, даже при вероятности ошибки элемента, стремящейся к нулю.

Показано, что почти все о.-д. функции на почти всех входных последовательностях можно реализовать только с положительной вероятностью ошибки даже при вероятностях ошибок элементов, стремящихся к нулю.

Рассмотрена реализация о.-д. функций в «широком смысле», т. е. при минимальных ограничениях.

Получена асимптотика поведения функционала надежности реализации автономных о.-д. функций.

§ 1. Основные понятия

Введем основные понятия, необходимые для изложения материала.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать схемы в произвольном базисе, состоящем из функциональных элементов и элемента задержки, входы и выходы которых принимают значения из алфавита $\{0, 1\}$, и будем называть такие схемы просто схемами. В каждый момент времени $t = 1, 2, \ldots$ элементы схемы допускают сбои, т. е. появление на их выходах значения 1 вместо 0 и наоборот. Сбои разных элементов независимы и вероятность сбоя каждого элемента не зависит от входного набора и момента времени. Сбои всех элементов происходят с одной и той же вероятностью ε, $0 < \varepsilon < 1/2$.

Пусть $f^{m,k}$ — о.-д. функция веса k с входным алфавитом, состоящим из m букв, и выходным алфавитом, состоящим из 0 и 1, и пусть $F(m, k)$ — множество всех таких о.-д. функций, у которых $k \geqslant 2$. Для реализации о.-д.

функции $f^{m,k}$ схемой необходимо закодировать буквы входного алфавита и состояния о.-д. функции двоичными наборами. Очевидно, что длина таких наборов для букв входного алфавита должна быть не меньше*) $\lceil\log m\rceil$, а для состояний — не меньше $\lceil\log k\rceil$).

Обозначим через $S^{n,p}$ схему с n входами, одним выходом и p элементами задержек. Общий вид такой схемы представлен на рис. 1.

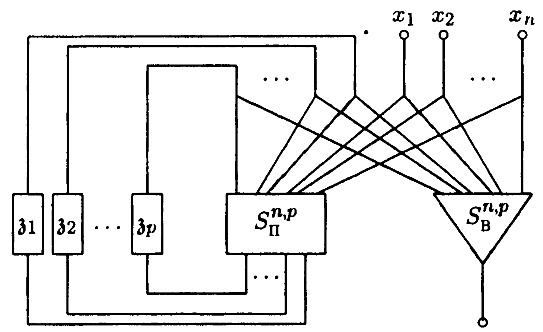

Рис. 1

Здесь $S_{\text{П}}^{n,p}$ и $S_{\text{В}}^{n,p}$ — схемы из функциональных элементов, а $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_p$ — элементы задержки. Схема $S_{\text{П}}^{n,p}$ имеет $n+p$ входов и p выходов, а схема $S_{\text{В}}^{n,p}$ имеет $n+p$ входов и один выход.

Отметим, что говоря о реализации о.-д. функции $f^{m,k}$ схемой $S^{n,p}$, предполагают выполнение следующих условий:

а) $n \geqslant \lceil\log m\rceil$;

б) при отсутствии сбоев выходная последовательность схемы $S^{n,p}$ на произвольной входной последовательности $\mathfrak{A}$ совпадает с выходным словом о.-д. функции $f^{m,k}$ на входном слове, соответствующем последовательности $\mathfrak{A}$. Отметим, что из выполнения условия б) следует, что $p \geqslant \lceil\log k\rceil$.

Для простоты изложения будем предполагать, что на входы схемы $S^{n,p}$ подают только m двоичных наборов $\widetilde{\alpha}_i$ длины n, соответствующих буквам a_i входного алфавита о.-д. функции $f^{m,k}$. Всюду в дальнейшем букву a_i входного алфавита и соответствующий ей набор $\widetilde{\alpha}_i$ не будем различать.

Введем критерий оценки качества реализации о.-д. функции f схемой S из ненадежных элементов на конечной входной последовательности $\mathfrak{A} = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_\mu\}$, где $\widetilde{\alpha}_i = (\widetilde{\alpha}_{i_1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{i_n})$ и $\widetilde{\alpha}_{i_j} \in \{0, 1\}$.

Пусть на вход схемы S с начальным состоянием q, реализующей о.-д. функцию f, поступает входная последовательность $\mathfrak{A}$ и пусть Δ — константа, принадлежащая отрезку $[0, 1]$. Через $\gamma_{\mathfrak{A}}^{f,S}(t)$ обозначим вероятность ошибки схемы в момент времени t.

Момент времени t для схемы S, реализующей о.-д. функцию f, на входной последовательности $\mathfrak{A}$ назовем Δ-моментом, если $\gamma_{\mathfrak{A}}^{f,S}(t) \leqslant \Delta$.

О.-д. функции f, реализующей ее схеме S, входной последовательности $\mathfrak{A}$ и порогу Δ сопоставим функционал $D(f, S, \Delta, \mathfrak{A})$, равный отношению числа Δ-моментов к длине последовательности $\mathfrak{A}$.

Легко проверить, что вероятность ошибки схемы не меньше вероятности сбоя выходного элемента схемы. Поэтому при $\Delta < \varepsilon$ для любой о.-д. функции f и любой схемы S, ее реализующей, выход которой является выходом элемента, для любой входной последовательности $\mathfrak{A}$

$$D(f, S, \Delta, \mathfrak{A}) = 0.$$

Поэтому в дальнейшем, учитывая естественное ограничение $\Delta < 1/2$, будем полагать, что $\Delta \in (\varepsilon, 1/2)$.

Результат, полученный Дж. Нейманом в [5], в терминах функционала $D(f, S, \Delta, \mathfrak{A})$ можно сформулировать следующим образом.

Назовем о.-д. функцию ациклической, если ее можно получить из о.-д. функций базиса, указанного выше, только операцией суперпозиции.

*) Всюду в этой работе $\log a$ обозначает логарифм по основанию 2, а $\lceil a\rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее a.

Для любой ациклической о.-д. функции f существует схема S в базисе, содержащем медиану, функцию голосования или штрих Шеффера, реализующая о.-д. функцию f, такая, что для любых $\varepsilon \in (0, 0.007)$ и $\Delta \in (\widehat{\varepsilon}, 1/2)$, где $\widehat{\varepsilon} = 4\varepsilon + 153\varepsilon^2$,

$$D(f, S, \Delta, \mathfrak{A}) = 1$$

на всех входных последовательностях $\mathfrak{A}$.

В работе исследуется поведение функционала $D(f, S, \Delta, \mathfrak{A})$ в случае произвольных о.-д. функций.

§ 2. Поведение схем из ненадежных элементов на последовательностях специального вида

Состоянием схемы называют набор состояний ее элементов задержки.

Схеме $S^{n,p}$ из ненадежных элементов сопоставим вероятностный автомат с $r = 2^p$ состояниями, n входами и одним выходом. Согласно [1], вероятностный автомат задается системой условных вероятностей $\xi(q_j, \sigma/q_i, \widetilde{\alpha})$ его перехода из состояния q_i при входном наборе $\widetilde{\alpha}$ в состояние q_j при значении выхода равном σ, $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

Нас будут интересовать обобщенные характеристики вероятностного автомата

$$q_{i,j}(\widetilde{\alpha}) = \xi(q_j, 0/q_i, \widetilde{\alpha}) + \xi(q_j, 1/q_i, \widetilde{\alpha}), \qquad \beta_{i,\sigma}(\widetilde{\alpha}) = \sum_{j=1}^{r} \xi(q_j, \sigma/q_i, \widetilde{\alpha}).$$

Отметим, что $q_{i,j}(\widetilde{\alpha})$ является вероятностью перехода автомата из состояния q_i при входном наборе $\widetilde{\alpha}$ в состояние q_j, а $\beta_{i,\sigma}(\widetilde{\alpha})$ — вероятностью появления σ на выходе автомата, находящегося в состоянии q_i и воспринимающего входной набор $\widetilde{\alpha}$.

Очевидно, что для любых i и $\widetilde{\alpha}$

$$\beta_{i,0}(\widetilde{\alpha}) + \beta_{i,1}(\widetilde{\alpha}) = 1.$$

Найдем обобщенные характеристики вероятностного автомата, сопоставленного схеме $S^{n,p}$. В [6] показано, как по схеме из ненадежных функциональных элементов и по вероятностям значений входов схемы находится вероятность значений ее выхода. Из определения состояния схемы $S^{n,p}$ следует, что

$$q_{i,j}(\widetilde{\alpha}) = \prod_{u=1}^{p} q_{i,j}^{u}(\widetilde{\alpha}),$$

где $q_{i,j}^{u}(\widetilde{\alpha})$ — вероятность перехода u-й задержки схемы $S^{n,p}$ из состояния q_i^u в состояние q_j^u при входном наборе $\widetilde{\alpha}$.

Пусть $\theta_{u,\sigma}(q_i, \widetilde{\alpha})$ — вероятность появления значения σ на u-м выходе схемы $S_{\Pi}^{n,p}$ при условии, что схема $S^{n,p}$ находится в состоянии q_i и на ее вход поступает набор $\widetilde{\alpha}$. Вероятность $\theta_{u,\sigma}(q_i, \widetilde{\alpha})$ находим согласно [6], учитывая, что значение выхода элемента задержки равно его состоянию с вероятностью $1 - \varepsilon$.

Переходные матрицы элемента задержки определяются следующим образом:

$$Q_3(0) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad Q_3(1) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$q_{i,j}^{u}(\widetilde{\alpha}) = \begin{cases} \theta_{u,0}(q_i, \widetilde{\alpha})(1-\varepsilon) + \theta_{u,1}(q_i, \widetilde{\alpha})\varepsilon, & \text{если } q_j^u = 0, \\ \theta_{u,0}(q_i, \widetilde{\alpha})\varepsilon + \theta_{u,1}(q_i, \widetilde{\alpha})(1-\varepsilon), & \text{если } q_j^u = 1, \end{cases}$$

Отсюда и из соотношения

$$\theta_{u,0}(q_i,\widetilde{\alpha}) + \theta_{u,1}(q_i,\widetilde{\alpha}) = 1$$

получаем, что

$$q^u_{i,j}(\widetilde{\alpha}) = \begin{cases} (1-2\varepsilon)\theta_{u,0}(q_i,\widetilde{\alpha}) + \varepsilon, & \text{если } q^u_j = 0, \\ 1-(1-2\varepsilon)\theta_{u,0}(q_i,\widetilde{\alpha}) - \varepsilon, & \text{если } q^u_j = 1, \end{cases} \tag{1}$$

$$1 \leqslant i,j \leqslant r, \quad 1 \leqslant u \leqslant p, \quad r = 2^p.$$

Вероятности $\beta_{i,\sigma}(\widetilde{\alpha})$, $\sigma \in \{0,1\}$, определяем по схеме $S^{n,p}_{\text{B}}$. Таким образом, по схеме $S^{n,p}$ находим переходные и выходные матрицы соответствующего ей вероятностного автомата:

$$Q_{S^{n,p}}(\widetilde{\alpha}) = (q_{i,j}(\widetilde{\alpha})), \quad 1 \leqslant i,j \leqslant r,$$
$$B_{S^{n,p},\sigma}(\widetilde{\alpha}) = (\beta_{i,\sigma}(\widetilde{\alpha})), \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad \sigma \in \{0,1\}$$

Пусть на вход схемы S с вектором распределения начальных состояний, называемого начальным вектором состояний, $\overrightarrow{\rho} = (\rho_1,\ldots,\rho_r)$, где ρ_i — вероятность того, что схема S в начальный момент находится в состоянии q_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, поступает входная последовательность $\mathfrak{A} = \{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_t,\ldots\}$. Через $P^{S,\overrightarrow{\rho}}_{\mathfrak{A},i}(t)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, обозначим вероятность того, что схема S в момент времени t находится в состоянии q_i. Как известно [1], вектор $\overrightarrow{P}^{S,\overrightarrow{\rho}}_{\mathfrak{A}}(t) = (P^{S,\overrightarrow{\rho}}_{\mathfrak{A},1}(t),\ldots,P^{S,\overrightarrow{\rho}}_{\mathfrak{A},r}(t))$ определяется соотношением

$$P^{S,\overrightarrow{\rho}}_{\mathfrak{A}}(t) = \overrightarrow{\rho} \cdot Q_S(\widetilde{\alpha}_1)\ldots Q_s(\widetilde{\alpha}_t). \tag{2}$$

Обозначим через $P^\sigma(S,\overrightarrow{\rho},\mathfrak{A},t)$ — вероятность появления константы $\sigma \in \{0,1\}$ в момент времени t на выходе схемы S с начальным вектором состояний $\overrightarrow{\rho}$ при подаче на нее последовательности $\mathfrak{A}$. Значение $P^\sigma(S,\overrightarrow{\rho},\mathfrak{A},t)$ определяется соотношением

$$P^\sigma(S,\overrightarrow{\rho},\mathfrak{A},t) = \sum_{i=1}^{r} P^{S,\overrightarrow{\rho}}_{\mathfrak{A},i}(t)\cdot\beta_{i,\sigma}(\widetilde{\alpha}_t). \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда каждый элемент входной последовательности схемы S является одним и тем же входным набором $\widetilde{\alpha}$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}^t$ последовательность, состоящую из t наборов $\widetilde{\alpha}$ и через $\widetilde{\alpha}^\infty$ — бесконечную последовательность, состоящую из повторяющегося набора $\widetilde{\alpha}$. При введенных ограничениях на сбои элементов вероятности $q_{i,j}(\widetilde{\alpha})$ и $\beta_{i,\sigma}(\widetilde{\alpha})$ положительны и зависят только от входного набора $\widetilde{\alpha}$. Так как при любом $\widetilde{\alpha}$ все элементы матрицы $Q_S(\widetilde{\alpha})$ положительны, то $Q_S(\widetilde{\alpha})$ — регулярная переходная матрица и, следовательно, схема из ненадежных элементов, на вход которой поступает последовательность $\widetilde{\alpha}^\infty$, является регулярной конечной цепью Маркова. Из свойства сходимости регулярной переходной матрицы к предельному значению [2] и соотношений (2) и (3) следует

Лемма 1. *Для любой схемы S из ненадежных элементов, для любого начального вектора состояний $\overrightarrow{\rho}$ существует константа $\sigma \in \{0,1\}$ такая, что*

$$P^\sigma(S,\overrightarrow{\rho},\widetilde{\alpha}^\infty,t) \geqslant 1/2 - \delta(t),$$

где $\delta(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

§ 3. Особенности строения ограниченно-детерминированных функций некоторого класса

Будем задавать о.-д. функции с помощью графа переходов.

Подграф графа переходов о.-д. функции f, полученный удалением всех его дуг, соответствующих всем буквам входного алфавита $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, отличным от буквы a_i, и удалением первых компонент меток оставшихся дуг, назовем *i-слоем* о.-д. функции f. Таким образом, дуги i-слоя помечены только буквами выходного алфавита.

Из определения графа переходов следует, что i-слой произвольной о.-д. функции $f^{m,k}$ для любого i представляет собой содержащий k вершин помеченный ориентированный граф, обладающий следующими свойствами: из каждой вершины его исходит ровно одна дуга; каждая его компонента связности состоит из единственного ориентированного цикла, и возможно, одного или нескольких непересекающихся ориентированных к корню деревьев; корни этих деревьев являются вершинами, принадлежащими циклу.

Граф, являющийся i-слоем о.-д. функции f при некоторых f и i, будем называть просто *слоем*.

Множество всех слоев, каждый из которых состоит из k вершин и r компонент связности, будем обозначать через $A(r,k)$. Теоретико-множественное объединение графов, полученных из слоев, принадлежащих $A(r,k)$, удалением меток дуг, будем обозначать через $G(r,k)$. Рассмотрим множество $G(1,k)$ и его подмножество $G(1,k,l)$, состоящее из графов с длиной цикла равной l. Известно [4], что

$$|G(1,k,l)| = C_k^l l! k^{k-l-1}, \qquad |G(1,k)| = \sum_{l=1}^{k} |G(1,k,l)|, \tag{4}$$

$$|G(1,k)| \sim \sqrt{\pi/2}\, k^{k-1/2}. \tag{5}$$

Используя соотношения (4) и оценки числа графов из $G(1,k)$ с длиной цикла не большей $\sqrt{k}/\log k$, получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Длина цикла у почти всех графов из $G(1,k)$ больше $\sqrt{k}/\log k$.*

Обозначим через $G_1(2,k)$ подмножество графов из $G(2,k)$, каждая компонента связности которых имеет не менее $\sqrt{k}$ вершин. Легко проверить, что

$$|G_1(2,k)| = \sum_{i=\lceil\sqrt{k}\rceil}^{\lfloor k/2\rfloor} C_k^i |G(1,i)||G(1,k-i)| + \\ + (k/2 - \lfloor k/2\rfloor - 1/2) C_k^{\lfloor k/2\rfloor} |G(1,\lfloor k/2\rfloor)|^2.$$

Отсюда и из (5) с использованием формулы Стирлинга и легко доказуемой оценки $\displaystyle\sum_{i=\lceil\sqrt{k}\rceil}^{\lfloor k/2\rfloor} \frac{1}{i(k-i)} \sim \frac{\ln k}{2k}$ следует

Лемма 3. *При $k \to \infty$ имеет место соотношение*

$$|G_1(2,k)| \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{8} k^{k-1/2} \ln k.$$

Для каждого графа из $G_1(2,k)$ число вершин в меньшей компоненте не меньше $\sqrt{k}$, а в большей не меньше $k/2$, поэтому из леммы 2 следует, что для почти всех графов из $G_1(2,k)$ имеют место неравенства

$$l_1 \geqslant 2\sqrt[4]{k}/\log k, \qquad l_2 \geqslant \sqrt{2k}/(2\log k), \tag{6}$$

где l_1 (l_2) — длина цикла в меньшей (большей) компоненте связности.

Обозначим через $G_2(2,k)$ подмножество графов из $G_1(2,k)$, для которых выполнены неравенства (6). Из леммы 3 следует

Лемма 4. *При $k \to \infty$ имеет место соотношение*

$$|G_2(2,k)| \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{8} k^{k-1/2} \ln k.$$

Обозначим через $A_1(2,k)$ множество слоев из $A(2,k)$ таких, что выполнены следующие условия.

1. Граф, полученный из слоя удалением меток дуг, принадлежит $G_2(2,k)$;

2. Доля помеченных нулем дуг в цикле i-й компоненты слоя принадлежит отрезку $[1/2 - 1/\sqrt{l_i}, 1/2 + 1/\sqrt{l_i}]$, где l_i — длина цикла i-й компоненты и $i \in \{1,2\}$.

Оценим, сколькими способами можно пометить дуги каждого графа из $G_2(2,k)$ нулями и единицами так, чтобы при этом получился слой, принадлежащий $A_1(2,k)$. Используя лемму 4, получим следующее утверждение.

Лемма 5. *При $k \to \infty$ имеет место соотношение*

$$|A_1(2,k)| \gtrsim \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi e^4} k^{k-1/2} 2^k \ln k.$$

Заметим, что число различных слоев, составленных из k вершин, равно $k^k 2^k$. Отсюда, из леммы 5 и очевидного факта, что число о.-д. функций, ни один слой которых не принадлежит $A_1(2,k)$, не больше числа неизоморфных инициальных автоматов, ни один слой которых не принадлежит $A_1(2,k)$, следует, что число таких о.-д. функций не больше

$$(2k)^{km} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^4} \frac{\ln k}{\sqrt{k}}\right)^m \frac{1}{(k-1)!}. \tag{7}$$

В [4] показано, что при любых $m > 2\ln k$, $k \geqslant 2$ и $m + k \to \infty$ число о.-д. функций из $F(m,k)$ асимптотически равно $(2k)^{mk}/(k-1)!$. Отсюда и из (7) следует, что доля о.-д. функций, никакие слои которых не принадлежат $A_1(2,k)$, стремится к нулю при $m > \sqrt{k}$ и $k \to \infty$. Поэтому имеет место

Лемма 6. *При $m > \sqrt{k}$ для почти любой о.-д. функции f из $F(m,k)$ существует буква a_i входного алфавита такая, что i-слой о.-д. функции f принадлежит $A_1(2,k)$.*

Обозначим через $A_1(1,k)$ множество слоев из $A(1,k)$ таких, что каждый слой содержит цикл четной длины и метки, соответствующие любым соседним дугам цикла, различны. Очевидно, что множество $A_1(1,k)$ не пусто при любом $k \geqslant 2$.

Оценивая число о.-д. функций, слои которых не принадлежат $A_1(1,k)$, и сравнивая их с числом всех о.-д. функций, получаем, что доля таких о.-д. функций стремится к нулю, если $k = \mathrm{const}$ и $m \to \infty$.

Таким образом, имеет место

Лемма 7. *При любой константе $k \geqslant 2$ и $m \to \infty$ почти все о.-д. функции из $F(m,k)$ содержат слой, принадлежащий $A_1(1,k)$.*

Теорема 1. *Для почти любой о.-д. функции из $F(m,k)$ при $m > \sqrt{k}$ существует буква a_{i_0} входного алфавита такая, что на входной последовательности $\mathfrak{A} a_i^t$, где $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная входная последовательность, доля значений о.-д. функции, равных нулю, стремится к $1/2$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $k \to \infty$. Из леммы 6 следует, что для почти любой о.-д. функции $f^{m,k}$ из $F(m,k)$ при $m > \sqrt{k}$ существует буква a_{i_0} входного алфавита такая, что i_0-слой принадлежит $A_1(2,k)$.

Рассмотрим входную последовательность $\mathfrak{A}a_{i_0}^t$. Очевидно, что значения о.-д. функции, начиная с момента времени*) $t_0 = |\mathfrak{A}| + k$, будут определяться метками дуг одного из циклов i_0-слоя. Отсюда и из свойства слоев, принадлежащих $A_1(2,k)$, следует, что доля нулей при $t \to \infty$ принадлежит отрезку

$$\left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\log k}{2k^{1/4}}},\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\log k}{2k^{1/4}}}\right].$$

Отсюда следует утверждение теоремы при $k \to \infty$.

Рассмотрим случай, когда k является константой. Из леммы 7 следует, что для почти любой о.-д. функции $f^{m,k}$ из $F(m,k)$ при $m > \sqrt{k}$ и $k \geqslant 2$ существует буква a_{i_1} входного алфавита такая, что i_1-слой принадлежит $A_1(1,k)$. Рассмотрим входную последовательность $\mathfrak{A}a_{i_1}^t$. Очевидно, что значения о.-д. функции, начиная с момента времени $t_1 = |\mathfrak{A}| + k - 1$, будут определяться метками дуг цикла i_1-слоя. Отсюда и из свойств слоев, принадлежащих $A_1(1,k)$ следует, что доля нулей при $t \to \infty$ стремится к $1/2$. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Обозначим через $A_2(2,k)$ множество слоев из $A(2,k)$ таких, что выполнены следующие условия:

1. Граф, полученный из слоя удалением меток дуг, принадлежит $G_2(2,k)$;
2. Доля дуг цикла, помеченных нулем, в каждой компоненте слоя принадлежит отрезку $[1/3, 2/3]$.

Из оценки числа способов помечивания дуг графов из $G_2(2,k)$ нулями и единицами так, чтобы при этом получились слои, принадлежащие $A_2(2,k)$, при использовании оценки числа графов из $G_2(2,k)$ (лемма 4), следует

Лемма 8. *При $k \to \infty$ имеет место соотношение*

$$|A_2(2,k)| \gtrsim \frac{\sqrt{2\pi}}{8} 2^k k^{k-1/2} \ln k.$$

Обозначим через $A_3(r,k)$ множество слоев из $A(r,k)$, таких, что доля помеченных нулями дуг в цикле каждой компоненты принадлежит отрезку $[1/3, 2/3]$. Положим $A_3(k) = \bigcup\limits_{r=1}^{k} A_3(r,k)$. Обозначим через $H(m,k)$ множество о.-д. функций $f^{m,k}$, у которых существует буква a_i входного алфавита такая, что i-слой принадлежит $A_3(k)$. Очевидно, что на входной последовательности a_i^t значения о.-д. функции определяются метками i-слоя.

Пусть о.-д. функция $f^{m,k}$ находится в своем произвольном состоянии и пусть t_1 — время достижения цикла из этого состояния. Очевидно, что $0 \leqslant t_1 \leqslant k$.

Если $t > 2k$, то на входной последовательности a_i^t цикл будет пройден хотя бы один раз. Если i-слой о.-д. функции $f^{m,k}$ принадлежит $A_3(k)$, то при прохождении наименьшее число равных нулю (единице) значений о.-д. функции возможно, если $t - t_1 = (5/3)l$, где l — длина цикла, и все метки дуг, равные нулю (единице), расположены в конце цикла. Отсюда следует

Лемма 9. *Пусть $f^{m,k}$ — произвольная о.-д. функция из $H(m,k)$ и пусть a_i буква входного алфавита такая, что i-слой о.-д. функции $f^{m,k}$ принадлежит $A_3(k)$. Тогда на входной последовательности a_i^t ($t \geqslant 2k$) о.-д. функция $f^{m,k}$ примет значение ноль (единица) не менее $t/10$ раз.*

---

*) Через $|a|$ будем обозначать число букв в слове a.

Используя соотношения $A_3(k) \supset A_1(1,k)$, $A_3(k) \supset A_2(2,k)$ и леммы 7 и 8, можно показать (аналогично доказательству леммы 6), что для почти любой о.-д. функции из $F(m,k)$ при $m > \sqrt{k}$ и $m+k \to \infty$ существует буква a_i входного алфавита такая, что i-слой о.-д. функции принадлежит множеству $A_3(k)$. Отсюда следует

Лемма 10. *$|H(m,k)| \sim |F(m,k)|$ при $m > \sqrt{k}$ и $m+k \to \infty$.*

§ 4. Доказательство основных результатов

Пусть S — произвольная схема из ненадежных элементов, реализующая о.-д. функцию f, и пусть $\overrightarrow{\rho}$ — начальный вектор состояний схемы S.

Вероятность $\gamma_{\mathfrak{A}}^{f,S}(t)$ ошибки схемы S в момент времени t на входной последовательности $\mathfrak{A}$ ($|\mathfrak{A}| \geqslant t$) определяется как $P^{\sigma}(S, \overrightarrow{\rho}, \mathfrak{A}, t)$ при условии, что значение о.-д. функции f в момент времени t равно $\overline{\sigma}$. Здесь $\overrightarrow{\rho} = (1,0,0,\ldots,0)$.

В дальнейшем потребуется следующее свойство слов длины t в m-буквенном алфавите $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$.

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{M}_m^t = \{(a_{j_1},\ldots,a_{j_t}) \mid a_{j_k} \in A\}$ и $n_{i,\widetilde{\alpha}}$ — число букв a_i в слове $\widetilde{\alpha}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда для почти всех слов $\widetilde{\alpha}$ из $\mathfrak{M}_m^t$, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, при $t \to \infty$ и $2 \leqslant m \leqslant t/\ln t$ имеет место соотношение $n_{i,\widetilde{\alpha}}/|\widetilde{\alpha}| = (1/m)(1+o(1))$.*

Теорема 2. *Для почти любой о.-д. функции f из $F(m,k)$ при $m > \sqrt{k}$, для любой реализующей ее схемы S, для любых $\varepsilon \in (0,1/2)$, $\delta > 0$ и $\Delta \in (\varepsilon, 1/2)$ существуют последовательности $\mathfrak{A}$ такие, что $D(f,S,\Delta,\mathfrak{A}) \leqslant 1/2+\delta$.*

Доказательство следует из теоремы 1 и леммы 11.

Теорема 3. *Для любой о.-д. функции $f^{m,k}$ из $H(m,k)$ и любой реализующей ее схемы $S^{n,p}$, для любых $\varepsilon \in (0,1/2)$ и $\Delta \in (\varepsilon,1/2)$ на почти всех входных последовательностях $\mathfrak{A}$*

$$D(f^{m,k}, S^{n,p}, \Delta, \mathfrak{A}) \leqslant 1-\eta,$$

где $\eta = \eta(m,k,p,\varepsilon,\Delta) > 0$.

Доказательство. Докажем сначала теорему при $m \geqslant 2$. Пусть $f^{m,k}$ — произвольная о.-д. функция из $H(m,k)$ и пусть $S^{n,p}$ — произвольная реализующая ее схема из ненадежных элементов. Схема $S^{n,p}$ имеет p элементов задержки и, следовательно, $r = 2^p$ состояний. Пусть a_ν — буква входного алфавита такая, что ν-слой о.-д. функции $f^{m,k}$ принадлежит $A_3(k)$.

Вначале найдем момент времени $t_1 = t_1(r,\Delta,a_\nu)$ и константу σ, $\sigma \in \{0,1\}$ такие, что для произвольного начального вектора состояний $\overrightarrow{\rho}$ и входной последовательности $\mathfrak{A} = a_\nu^\infty$ неравенство

$$P^{\sigma}(S^{n,p}, \overrightarrow{\rho}, \mathfrak{A}, t) > \Delta \tag{8}$$

выполняется при любом $t > t_1$.

Константу σ выбираем из условия

$$\sum_{j=1}^{r} \theta_j \beta_{j,\sigma}(a_\nu) \geqslant \frac{1}{2}, \tag{9}$$

где $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_r)$ — предельный вектор матрицы переходов.

Из соотношений (2) и (3) и из свойств регулярной цепи Маркова [2] следует

$$P^{\sigma}(S^{n,p},\overrightarrow{\rho},\mathfrak{A},t)=\sum_{j=1}^{r}P_{\mathfrak{A}j}^{S^{n,p},\overrightarrow{\rho}}\cdot\beta_{j,\sigma}(a_\nu)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{r}(\theta_j-\delta(t))\beta_{j,\sigma}(a_\nu)\geqslant\sum_{j=1}^{r}\theta_j\beta_{j,\sigma}(a_\nu)-\delta(t)\cdot r, \qquad (10)$$

где $\delta(t)\leqslant(1-2\overline{q})^t$ и $\overline{q}$ — наименьший элемент матрицы $Q_{S^{n,p}}(a_\nu)$.

Из (1), учитывая, что $\theta_{u,0}(q_i,a_\nu)\in[0,1]$ и $\varepsilon\in(0,1/2)$, легко получить неравенство $q_{i,j}^{u}(a_\nu)\geqslant\varepsilon$. Отсюда и из равенства $q_{i,j}(a_\nu)=\prod_{u=1}^{p}q_{i,j}^{u}(a_\nu)$ получаем оценку $q_{i,j}(a_\nu)\geqslant\varepsilon^p$, т. е. $\overline{q}\geqslant\varepsilon^p$.

Отсюда, из (9) и (10) следует, что $P^{\sigma}(S^{n,p},\overrightarrow{\rho},a_\nu^{\infty},t)\geqslant 1/2-(1-2\varepsilon^p)^t r$. Следовательно, (8) выполняется при любом t,

$$t>t_1=\left\lceil\frac{\log(1/2-\Delta)-p}{\log(1-2\varepsilon^p)}\right\rceil.$$

Пусть $t_2=\max(t_1,2k)$. Из леммы 9 следует, что о.-д. функция $f^{m,k}$ из $H(m,k)$ на входной последовательности $a_\nu^{t_2}$ примет значение $\overline{\sigma}$ по крайней мере $t_2/10$ раз.

Рассмотрим произвольную конечную последовательность $\mathfrak{A}$ длины $t\geqslant t_2^2m^{t_2+1}$. Разобьем ее на подпоследовательности длины t_2 и каждой такой подпоследовательности поставим в соответствие букву алфавита $B=\{b_1,\ldots,b_h\}$, где $h=m^{t_2}$. Таким образом, последовательности $\mathfrak{A}$ длины t будет сопоставлена последовательность $\mathfrak{B}$ длины $\lceil t/t_2\rceil$ в алфавите B. Учитывая, что $t_2\geqslant 4$ и $m\geqslant 2$, легко проверить, что при $t\geqslant t_2^2m^{t_2+1}$ условия леммы 11 выполнены для любой последовательности $\mathfrak{B}$ длины $\lceil t/t_2\rceil$ в алфавите B. Таким образом, почти во всех входных последовательностях $\mathfrak{B}$ буква b_ν, соответствующая последовательности $a_\nu^{t_2}$, встречается не менее $|\mathfrak{B}|/h+o(|\mathfrak{B}|/h))$ раз. Отсюда получаем, что во всех последовательностях $\mathfrak{A}$ подпоследовательность $a_\nu^{t_2}$ встречается не менее $|\mathfrak{A}|/(t_2m^{t_2})+o(|\mathfrak{A}|/(t_2m^{t_2}))$ раз, т. е. при достаточно больших $|\mathfrak{A}|$ не менее $|\mathfrak{A}|/(2t_2m^{t_2})$ раз.

Следовательно,

$$D(f^{m,k},S^{n,p},\Delta,\mathfrak{A})\leqslant 1-1/(20m^{t_2}). \qquad (11)$$

Докажем теперь теорему при $m=1$. Пусть $f^{1,k}$ — произвольная о.-д. функция из $H(m,k)$. В этом случае о.-д. функция $f^{1,k}$ имеет единственный слой. Он принадлежит $A_3(k)$. На вход о.-д. функции поступает единственная последовательность $\mathfrak{A}=a_1^{\infty}$. Так же, как это делалось в случае $m\geqslant 2$, выбираем t_2 и σ.

Из леммы 9 следует, что о.-д. функция $f^{m,k}$ из $H(m,k)$ на входной последовательности a_1^t примет значение $\overline{\sigma}$ по крайней мере $t/10$ раз. Отсюда получаем, что при $t>t_2$

$$D(f^{1,k},S^{n,p},\Delta,\mathfrak{A})\leqslant 1-1/10.$$

Из этого неравенства и (11) следует утверждение теоремы.

Подробные доказательства приведенных выше результатов изложены в [6].

Результаты, аналогичные теоремам 2 и 3, имеют место для случая реализации о.-д. функций правильными схемами в произвольных ненадежных автоматных базисах [7].

§ 5. Способы реализации ограниченно-детерминированных функций схемами из ненадежных элементов

В ставшей классической постановке задачи синтеза схем из ненадежных элементов в базисе, состоящем из функциональных элементов и элемента задержки, предложенной фон Нейманом, предполагается, что схема $S^{n,p}$ из ненадежных элементов, реализующая о.-д. функцию $f^{m,k}$, удовлетворяет следующим условиям:

1) $n \geqslant \lceil \log m \rceil$,

2) при отсутствии сбоев схема $S^{n,p}$ реализует о.-д. функцию $f^{m,k}$ в обычном смысле.

Такую реализацию о.-д. функций схемами из ненадежных элементов будем называть реализацией «в узком смысле».

Будем теперь о.-д. функции $f^{m,k}$ сопоставлять схему из ненадежных элементов, для которой выполняется (необходимое) условие 1, а условие 2 может не выполняться. Такое сопоставление будем называть реализацией «в широком смысле». Очевидно, что если схема реализует о.-д. функцию в узком смысле, то она реализует ее и в широком смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, так как схемой, реализующей о.-д. функцию в широком смысле, может быть произвольная схема, число входов которой позволяет подать на входы схемы двоичные наборы, являющиеся кодами букв входного алфавита.

В § 1 был введен функционал $D(f, S, \Delta, \mathfrak{A})$ качества реализации в узком смысле о.-д. функции f схемой S из ненадежных элементов на входной последовательности $\mathfrak{A}$.

Введем функционал $D_{\text{у}}(f, S, \Delta, \mathfrak{A}, t)$, равный отношению числа Δ-моментов на входной последовательности $\mathfrak{A}$, начиная с момента времени t, к числу $|\mathfrak{A}| - t + 1$, если схема S реализует о.-д. функцию в узком смысле и длина последовательности $\mathfrak{A}$ не меньше t, и равный нулю в противном случае. Отметим, что при $t = 1$ введенный функционал совпадает с функционалом $D(f, S, \Delta, \mathfrak{A})$ для всех схем S, реализующих о.-д. функцию f в узком смысле.

О.-д. функции f, схеме S, реализующей ее в широком смысле, конечной последовательности $\mathfrak{A}$ и порогу Δ сопоставим функционал $D_{\text{ш}}(f, S, \Delta, \mathfrak{A}, t)$, равный отношению числа Δ-моментов схемы S на входной последовательности $\mathfrak{A}$, начиная с момента времени t, к числу $|\mathfrak{A}| - t + 1$, если $|\mathfrak{A}| \geqslant t$, и равный нулю в противном случае.

При доказательстве теорем 2 и 3 не использовалось то, что схема реализует о.-д. функцию в узком смысле, поэтому эти теоремы верны и для схем, реализующих о.-д. функции в широком смысле.

Введем функционалы

$$D_{\text{у}}(f^{m,k}, p, d, \Delta, \mathfrak{A}, t) = \max D_{\text{у}}(f^{m,k}, S^{n,\mu}, \Delta, \mathfrak{A}, t),$$
$$D_{\text{ш}}(f^{m,k}, p, d, \Delta, \mathfrak{A}, t) = \max D_{\text{ш}}(f^{m,k}, S^{n,\mu}, \Delta, \mathfrak{A}, t),$$

где максимум берется по всем схемам $S^{n,\mu}$, реализующим о.-д. функцию $f^{m,k}$ в широком смысле, таким, что, $\mu \leqslant p$ и число функциональных элементов в схеме $S^{n,\mu}$ не больше d. Очевидно, что

$$D_{\text{ш}}(f^{m,k}, p, d, \Delta, \mathfrak{A}, t) \geqslant D_{\text{у}}(f^{m,k}, p, d, \Delta, \mathfrak{A}, t).$$

Обозначим через $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}$ наименьшую вероятность ошибки, с которой можно реализовать произвольную о.-д. функцию $f^{m,1}$ веса 1 в базисе Б и через $L_{\text{Б}}(f^{m,1})$ — наименьшую сложность схемы в базисе Б, реализующей функцию $f^{m,1}$ с вероятностью ошибки не более $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}$.

Через φ_r будем обозначать булеву функцию

$$\varphi_r(y_1, y_2, \ldots, y_r, z_1, z_2) = z_1\overline{y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_r} \vee z_2(y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_r).$$

Теорема 4. *Для базиса Б с $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} < 1/2$ для любой о.-д. функции $f^{m,k}$, для любых p и d, на любой входной последовательности $\mathfrak{A}$, для любого порога $\Delta \in (\varepsilon, 1/2)$, для любого $\delta \in (0,1)$ существуют p', d' и Δ' такие, что при достаточно больших t*

$$D_{\text{у}}(f^{m,k}, p', d', \Delta', \mathfrak{A}, t) \geqslant D_{\text{ш}}(f^{m,k}, p, d, \Delta, \mathfrak{A}, t),$$

причем

$$p \leqslant p' \leqslant p + \lceil \log k \rceil - \lceil \log \delta \rceil + 1, \quad d \leqslant d' \leqslant d + c_{\text{Б}} 2^{n + \lceil \log k \rceil} + L_{\text{Б}}(\varphi_r),$$

где $c_{\text{Б}}$ — константа, зависящая от базиса Б, и

$$r = -\lceil \log \delta \rceil + 1, \qquad \Delta \leqslant \Delta' \leqslant \Delta + (1 - 2\Delta)\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} + \delta.$$

Доказательство. Пусть $f^{m,k}$ — произвольная о.-д. функция и пусть $S^f_{\text{ш}}$ и $S^f_{\text{у}}$ — схемы, реализующие $f^{m,k}$ в широком и в узком смысле, причем схема $S^f_{\text{ш}}$ такова, что $D_{\text{ш}}(f^{m,k}, S^f_{\text{ш}}, \Delta, \mathfrak{A}, t) = D_{\text{ш}}(f^{m,k}, p, d, \Delta, \mathfrak{A}, t)$, а схема $S^f_{\text{у}}$ содержит минимально возможное число элементов задержки, равное $\lceil \log k \rceil$, и минимальное число функциональных элементов.

Рассмотрим схему S, построенную из схем $S^f_{\text{ш}}$, $S^f_{\text{ш}}$, r элементов задержки и схемы S^{φ_r}, реализующей в узком смысле булеву функцию φ_r с вероятностью ошибки, не превосходящей $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}$, согласно рис. 2.

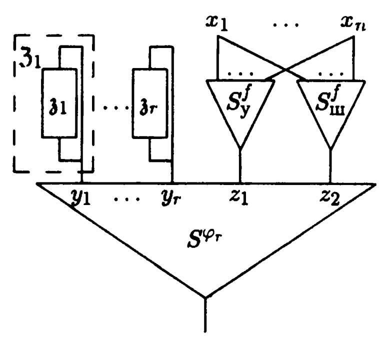

Рис. 2

Начальным состоянием q схемы S являются нулевые состояния r элементов задержки, начальное состояние $q_{\text{ш}}$ схемы $S^f_{\text{ш}}$ и начальное состояние $q_{\text{у}}$ схемы $S^f_{\text{у}}$.

Легко проверить, что схема S при отсутствии сбоев реализует о.-д. функцию $f^{m,k}$, т. е. реализует ее в узком смысле.

Параметр r выбираем по параметру δ описанным ниже способом.

Рассмотрим поведение автономного автомата $\mathfrak{Z}$, состоящего из ненадежного элемента задержки $\mathfrak{z}$, охваченного обратной связью. Найдем переходную матрицу автомата $\mathfrak{Z}$. У автомата $\mathfrak{Z}$ нет входов, поэтому в обозначениях его переходных характеристик будем опускать символ $\widetilde{\alpha}$.

Из соотношения (1) и определения выходной матрицы элемента задержки получаем, что

$$Q_{\mathfrak{Z}} = \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon(1-\varepsilon) & 2\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon) & 1 - 2\varepsilon(1-\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица $Q_{\mathfrak{Z}}$ — дважды стохастическая, следовательно, ее предельной матрицей будет $\theta_{\mathfrak{Z}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Из того, что $\varepsilon \in (0, 1/2)$, следует, что $2\varepsilon(1-\varepsilon)$ является минимальным элементом переходной матрицы $Q_{\mathfrak{Z}}$. Отсюда и из свойства регулярных конечных цепей Маркова следует, что $P^0(\mathfrak{Z}, \vec{\rho}_{\mathfrak{Z}}, t) - 1/2 \leqslant (1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon))^t$.

Следовательно, $P_{\widetilde{0}}(t) \leqslant (1/2)^r(1 + 2(1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon))^t)^r$, где $P_{\widetilde{0}}(t)$ — вероятность появления на всех первых r входах схемы S^{φ_r} значения 0 в любой момент времени t.

Нетрудно проверить, что при

$$t \geqslant t_0 = \left\lceil \frac{\log(2^{1/r}-1)-1}{\log(1-4\varepsilon(1-\varepsilon))} \right\rceil$$

имеет место неравенство $(1 + 2(1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon))^t)^r \leqslant 2$. Таким образом, при $t \geqslant t_0$ выполнено $P_{\widetilde{0}}(t) \leqslant (1/2)^{r-1}$.

Полагаем $r = \lceil \log \delta \rceil + 1$. Тогда

$$P_{\widetilde{0}}(t) \leqslant \delta \qquad (t \geqslant t_0). \tag{12}$$

Пусть момент времени t_1 ($t_1 > t_0$) является Δ-моментом схемы $S^f_{\text{ш}}$ на входной последовательности $\mathfrak{A}$, т. е.

$$P^\sigma(S^f_{\text{ш}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{ш}}, \mathfrak{A}, t_1) \geqslant 1 - \Delta. \tag{13}$$

Из структуры схемы S (см. рис. 2), следует, что при нулевых значениях первых r входов схемы S^{φ_r} и правильной ее работе значение выходов схемы S будет равно значению выхода схемы $S^f_{\text{у}}$, а при сбое схемы S^{φ_r} — отрицанию этого значения. Аналогично, при ненулевом значении хотя одного из первых r входов схемы S^{φ_r} и правильной ее работе значение выхода схемы S будет равно значению выхода схемы $S^f_{\text{ш}}$, а при сбое схемы S^{φ_r} — отрицанию этого значения.

Пусть ε_{φ_r} — вероятность ошибки схемы S^{φ_r}. Найдем вероятность появления значения σ на выходе схемы S в момент времени t_1:

$$\begin{aligned} P^\sigma(S, \overrightarrow{\rho}, \mathfrak{A}, t_1) &= (1 - P_{\widetilde{0}}(t_1))\{P^\sigma(S^f_{\text{ш}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{ш}}, \mathfrak{A}, t_1)(1-\varepsilon_{\varphi_r}) + \\ &+ (1 - P^\sigma(S^f_{\text{ш}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{ш}}, \mathfrak{A}, t_1))\varepsilon_{\varphi_r}\} + P_{\widetilde{0}}(t_1)\{P^\sigma(S^f_{\text{у}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{у}}, \mathfrak{A}, t_1)(1-\varepsilon_{\varphi_r}) + \\ &+ (1 - P^\sigma(S^f_{\text{у}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{у}}, \mathfrak{A}, t_1))\varepsilon_{\varphi_r}\} = (1-2\varepsilon_{\varphi_r})P^\sigma(S^f_{\text{ш}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{ш}}, \mathfrak{A}, t_1) + \varepsilon_{\varphi_r} + \\ &+ P_{\widetilde{0}}(t_1)(1-2\varepsilon_{\varphi_r})\{P^\sigma(S^f_{\text{у}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{у}}, \mathfrak{A}, t_1) - P^\sigma(S^f_{\text{ш}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{ш}}, \mathfrak{A}, t_1)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Из того, что вероятность ошибки схемы не меньше вероятности сбоя ε выходного элемента схемы, и из (13) следует, что

$$\varepsilon \leqslant P^\sigma(S^f_{\text{у}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{у}}, \mathfrak{A}, t_1) \leqslant 1 - \varepsilon, \qquad 1 - \Delta \leqslant P^\sigma(S^f_{\text{ш}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{ш}}, \mathfrak{A}, t_1) \leqslant 1 - \varepsilon.$$

Из этих неравенств получаем, что

$$-1 + 2\varepsilon \leqslant P^\sigma(S^f_{\text{у}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{у}}, \mathfrak{A}, t_1) - P^\sigma(S^f_{\text{ш}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{ш}}, \mathfrak{A}, t_1) \leqslant \Delta - \varepsilon.$$

Отсюда, из (12)–(14) и условия

$$\varepsilon_{\varphi_r} \leqslant \widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} < 1/2 \tag{15}$$

получаем

$$P^\sigma(S, \overrightarrow{\rho}, \mathfrak{A}, t_1) \geqslant 1 - (\Delta - (1-2\Delta)\varepsilon_{\varphi_r}) - \delta(1-2\varepsilon_{\varphi_r})(1-2\varepsilon). \tag{16}$$

Оценим значение нового порога Δ' такого, чтобы момент t_1 был Δ-моментом схемы S, т. е. чтобы

$$P^\sigma(S, \overrightarrow{\rho}, \mathfrak{A}, t_1) \geqslant 1 - \Delta'. \tag{17}$$

Из (15)–(17) следует, что $\Delta' \leqslant \Delta + \widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}(1-2\Delta)+\delta$. Таким образом, каждый Δ-момент схемы $S_{\text{Ш}}^{f}$ при $t>t_0$ является Δ'-моментом схемы S, где

$$\Delta' \leqslant \Delta + \widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}(1-2\Delta)+\delta.$$

Отсюда и из свойств схемы $S_{\text{Ш}}^{f}$ следует, что при $t>t_0$

$$D_{\text{У}}(f,S,\Delta',\mathfrak{A},t) \geqslant D_{\text{Ш}}(f,p,d,\Delta,\mathfrak{A},t).$$

С учетом очевидного неравенства $D_{\text{У}}(f,p',d',\Delta',\mathfrak{A},t) \geqslant D_{\text{У}}(f,S,\Delta',\mathfrak{A},t)$ получаем отсюда, что при $t>t_0$

$$D_{\text{У}}(f,p',d',\Delta',\mathfrak{A},t) \geqslant D_{\text{Ш}}(f,p,d,\Delta,\mathfrak{A},t).$$

Покажем, что $\Delta' \in (\varepsilon, 1/2)$, т. е. для Δ' выполняются ограничения, наложенные на значения порога. В самом деле, ввиду того, что $\varepsilon<\Delta$ и $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}<1/2$, величины Δ и $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}$ можно представить в виде

$$\Delta = 1/2-\gamma', \qquad \widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} = 1/2-\gamma'',$$

где γ' и γ'' принадлежат интервалу $(0,1/2)$. Из того, что

$$\Delta' \leqslant \Delta + (1-2\Delta)\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} + \delta = 1/2 - 2\gamma'\gamma'' + \delta,$$

следует, что при достаточно малом δ верно $\Delta'<1/2$.

Наконец, из $\Delta' \geqslant \Delta$ и $\Delta>\varepsilon$ следует, что $\Delta'>\varepsilon$. Теорема доказана.

Наибольший практический интерес представляют случаи, когда ε и $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}$ значительно меньше Δ. Из теоремы 4 следует, что в этих случаях реализация в широком смысле не дает существенного выигрыша по сравнению с реализацией в узком смысле.

§ 6. Реализация автономных ограниченно-детерминированных функций схемами из ненадежных элементов

О.-д. функцию называют *автономной*, если значения ее выхода не зависят от входной последовательности, т. е. она реализует единственную выходную последовательность. Таким образом, входная переменная автономной о.-д. функции является фиктивной.

Последовательность $\beta_1\beta_2\ldots\beta_j\ldots$ называют *периодической*, если существуют числа τ и T такие, что для всех $i>\tau$ выполняется равенство

$$\beta_{i+T}=\beta_i. \tag{18}$$

Если $\tau=0$, то периодическую последовательность называют *чисто периодической.*

Известно, что выходная последовательность автономной о.-д. функции является периодической.

Минимальное значение числа T, для которого выполняется (18), называют *длиной периода* последовательности. Минимальное значение числа τ такое, что последовательность $\beta_{\tau+1}\ldots\beta_{\tau+j}\ldots$ является чисто периодической, называют *длиной предпериода* последовательности.

Очевидно, что любую периодическую последовательность

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_j\ldots$$

можно единственным образом представить в виде

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_\tau(\beta_{\tau+1}\ldots\beta_{\tau+T})^\infty,$$

где τ — длина предпериода последовательности, а T — длина ее периода. В дальнейшем только последовательности

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_\tau, \qquad \beta_{\tau+1}\ldots\beta_{\tau+T}$$

будем называть предпериодом и периодом последовательности

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_\tau(\beta_{\tau+1}\ldots\beta_{\tau+T})^\infty.$$

Легко показать, что вес автономной о.-д. функции равен сумме длин предпериода и периода ее выходной последовательности.

Последовательность $\beta_0\ldots\beta_{T-1}$ назовем *ациклической*, если все ее $T-1$ циклических сдвигов отличны от нее самой.

Для получения асимптотики поведения функционала надежности реализации автономных о.-д. функций необходима оценка числа автономных о.-д. функций. Приведем без доказательства ряд лемм о свойствах периодических последовательностей, из которых будет следовать оценка числа автономных о.-д. функций.

Лемма 12. *Последовательность $\beta_0\ldots\beta_{T-1}$ является периодом чисто периодической последовательности $(\beta_0\ldots\beta_{T-1})^\infty$ тогда и только тогда, когда она ациклическая.*

Лемма 13. *Последовательность $\alpha_1\ldots\alpha_\tau$ является предпериодом последовательности $\alpha_1\ldots\alpha_\tau(\beta_0\ldots\beta_{T-1})^\infty$ с длиной периода T тогда и только тогда, когда $\alpha_\tau\neq\beta_{T-1}$.*

Из лемм 12 и 13 и того, что вес автономной о.-д. функции равен сумме длин периода и предпериода ее выходной последовательности, следует

Лемма 14. *Последовательности $\alpha_1\ldots\alpha_\tau$ и $\beta_0\ldots\beta_{T-1}$ такие, что $\tau+T=k$, являются предпериодом и периодом выходной последовательности автономной о.-д. функции веса k тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) $\alpha_\tau\neq\beta_{T-1}$;

б) *последовательность $\beta_0\ldots\beta_{T-1}$ — ациклическая.*

Лемма 15. *Последовательность $\beta_0\ldots\beta_{T-1}$ ациклична тогда и только тогда, когда*

$$\beta_0\ldots\beta_i\ldots\beta_{T-1}\neq(\beta_0\ldots\beta_{i-1})^{T/i}$$

для всех i, являющихся делителями T, отличными от T.

Лемма 16. *Число автономных о.-д. функций веса k асимптотически равно $k2^{k-1}$.*

Доказательство. Оценим число N пар наборов $\alpha_1\ldots\alpha_\tau$ и $\beta_0\ldots$ $\ldots\beta_{T-1}$ таких, что $\tau+T=k$, $0\leqslant\tau\leqslant k-1$, $\alpha_\tau\neq\beta_{T-1}$ и набор $\beta_0\ldots\beta_{T-1}$ — ациклический.

Очевидно, что $N=\sum\limits_{T=1}^{k-1}2^{k-T-1}M(T)+M(k)$, где $M(l)$ — число ациклических наборов длины l. Из леммы 15 следует, что $M(l)\geqslant 2^l-\sum\limits_i 2^i$, где i — делители числа l, отличные от l. Из этого неравенства получаем, что $M(l)\geqslant 2^l-s(l)2^{l/d_l}$, где d_l — наименьший делитель числа l, отличный от единицы, а $s(l)$ — число делителей числа l, отличных от l.

Легко проверить, что $s(l)\leqslant l$ и $d_l\geqslant 2$. Следовательно,

$$N\geqslant\sum_{T=1}^{k-1}2^{k-T-1}(2^T-s(T)2^{T/d_T})+2^k-s(k)2^{k/d_k}\geqslant$$

$$\geqslant(k-1)2^{k-1}+2^k-k2^{k/2}-\sum_{T=1}^{k-1}\frac{T}{2^{T/2}}.$$

Используя известное выражение для суммы $\sum_{j=0}^{n} jx^j$ при $x \neq 1$ (см., например, [3, с. 64]), получаем

$$\sum_{T=1}^{k-1} \frac{T}{(\sqrt{2})^T} = \frac{\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^2} + \frac{((k-1)2^{-(k+1)/2} - k2^{-k/2})2}{(1-\sqrt{2})^2}.$$

Следовательно, $N \geqslant k2^{k-1} - O(2^k) \gtrsim k2^{k-1}$.

С другой стороны, число автономных о.-д. функций веса k не больше, чем число наборов $\alpha_1 \ldots \alpha_\tau$ и $\beta_0 \ldots \beta_{T-1}$ таких, что $\tau + T = k$ и $\alpha_\tau \neq \beta_{T-1}$, т. е. не больше $k2^{k-1}$. Лемма доказана.

Лемма 17. *У почти всех автономных о.-д. функций доля нулей в выходной последовательности асимптотически равна* $1/2$.

Доказательство. У почти всех автономных о.-д. функций веса k длина периода T выходной последовательности больше $\log k$. В самом деле, если $T \leqslant \log k$, то число таких автономных о.-д. функций не больше, чем $2^k \log k$, т. е. $o(k2^{k-1})$. Отсюда и из леммы 16 получаем, что у почти всех автономных о.-д. функций $T > \log k$. Из последнего соотношения и леммы 11 следует утверждение леммы.

У автономных о.-д. функций аргументы являются фиктивными, поэтому будем рассматривать их реализацию схемами без входов.

Введем функционалы

$$\begin{aligned}
D^1_{\text{у}}(f, S, \Delta, \mathfrak{A}) &= D_{\text{у}}(f, S, \Delta, \mathfrak{A}, 1),\\
D^1_{\text{у}}(f, p, d, \Delta, \mathfrak{A}) &= D_{\text{у}}(f, p, d, \Delta, \mathfrak{A}, 1),\\
D^1_{\text{ш}}(f, S, \Delta, \mathfrak{A}) &= D_{\text{ш}}(f, S, \Delta, \mathfrak{A}, 1),\\
D^1_{\text{ш}}(f, p, d, \Delta, \mathfrak{A}) &= D_{\text{ш}}(f, p, d, \Delta, \mathfrak{A}, 1).
\end{aligned}$$

Ввиду фиктивности аргументов автономной о.-д. функции в функционалах оценки качества их реализации параметр $\mathfrak{A}$ будем опускать, заменяя его длиной выходной последовательности t.

Пусть c^f_σ — доля константы σ в периоде выходной последовательности автономной о.-д. функции f и пусть

$$c_f = \max(c^f_0, c^f_1). \tag{19}$$

Теорема 5. *Для любой автономной о.-д. функции f, для любой схемы S, для любых $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $\Delta \in (\varepsilon, 1/2)$ и $\delta \in (0, 1)$ существует t_1 такое, что $D^1_{\text{ш}}(f, S, \Delta, t) \leqslant c_f + \delta$ при $t > t_1$.*

Доказательство. Произвольную схему S из ненадежных элементов без входов можно рассматривать как вероятностный автомат с единственной переходной матрицей и эта матрица регулярна, поэтому для такой схемы верно утверждение леммы 1. Таким образом, начиная с некоторого момента t_2 схема S будет реализовывать некоторую константу σ с вероятностью большей Δ, а, следовательно, константу $\overline{\sigma}$ с вероятностью меньшей $1-\Delta$. Таким образом, при $t > t_2$ все моменты времени, в которые значение выходной последовательности о.-д. функции f равно $\overline{\sigma}$ не будут Δ-моментами схемы S. Пусть $t_3 = \max(t_2, t_4)$, где t_4 — длина предпериода выходной последовательности автономной о.-д. функции f. Тогда

$$D^1_{\text{ш}}(f, S, \Delta, t) \leqslant \frac{t_3 + (t - t_3)c^f_\sigma}{t} \leqslant c^f_\sigma + \frac{(1 - c^f_\sigma)t_3}{t}.$$

Отсюда и из (19) следует утверждение теоремы при

$$t \geqslant t_1 = (1 - c^f_\sigma)t_3/\delta.$$

Пусть S^σ — схема в базисе Б, реализующая константу σ с наименьшей вероятностью ошибки $\varepsilon_{\text{Б}}^\sigma$ и пусть σ_f — константа, для которой выполняется равенство $c_f = c_{\sigma_f}^f$.

Теорема 6. *Для любой автономной о.-д. функции f существует схема S в базисе* Б *такая, что для любых $\varepsilon_{\text{Б}}^{\sigma_f} \in (\varepsilon, 1/2)$, $\Delta \in (\varepsilon_{\text{Б}}^{\sigma_f}, 1/2)$ и $\delta \in (0,1)$ существует t_0 такое, что*

$$D_{\text{ш}}^1(f, S, \Delta, t) \geqslant c_f - \delta$$

при $t > t_0$.

Доказательство. В качестве схемы S возьмем схему S^{σ_f} реализующую константу σ_f с наименьшей вероятностью ошибки. Теорема доказана.

Из теорем 5 и 6 следует

Теорема 7. *Для любой автономной о.-д. функции f существуют p_0 и d_0 такие, что для любых $\varepsilon \in (0,1/2)$, $\varepsilon_{\text{Б}}^{\sigma_f} \in \varepsilon, 1/2)$ и $\Delta \in (\varepsilon_{\text{Б}}^{\sigma_f}, 1/2)$*

$$D_{\text{ш}}^1(f, p, d, \Delta, t) \sim c_f$$

при $p \geqslant p_0$ и $d \geqslant d_0$.

Из теоремы 7 и леммы 17 следует

Теорема 8. *Для почти любой автономной о.-д. функции f существуют p_0 и d_0 такие, что для любых $\varepsilon \in (0,1/2)$, $\varepsilon_{\text{Б}}^{\sigma_f} \in (\varepsilon, 1/2)$ и $\Delta \in (\varepsilon_{\text{Б}}^{\sigma_f}, 1/2)$*

$$D_{\text{ш}}^1(f, p, d, \Delta, t) \sim 1/2$$

при $p \geqslant p_0$ и $d \geqslant d_0$.

В доказательстве теоремы 5 нигде не использовался тот факт, что схема реализует автономную о.-д. функцию в широком смысле, поэтому имеет место

Теорема 9. *Для любой автономной о.д. функции f для любой схемы S, реализующей ее в узком смысле, для любых $\varepsilon \in (0,1/2)$, $\Delta \in$ $\in (\varepsilon, 1/2)$ и $\delta \in (0,1)$ существует t_1 такое, что*

$$D_{\text{у}}^1(f, S, \Delta, t) \leqslant c_f + \delta$$

при $t > t_1$.

Теорема 10. *Для любой автономной о.-д. функции f существует схема S в базисе* Б, *реализующая ее в узком смысле, такая, что для любых $\varepsilon \in (0,1/2)$, $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} \in (\varepsilon, 1/2)$, $\delta \in (0,1)$ и $\Delta \in (\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} + \delta, 1/2)$ существует t_0 такое, что*

$$D_{\text{у}}^1(f, S, \Delta, t) \geqslant c_f - \delta$$

при $t > t_0$.

Доказательство. Пусть f — произвольная автономная о.-д. функция, σ_f — константа, для которой выполняется равенство $c_f = c_{\sigma_f}^f$, $S_{\text{у}}^f$ — схема, реализующая о.-д. функцию f в узком смысле, и $S^{\chi_{r,f}}$ — схема, реализующая булеву функцию

$$\chi_{r,f}(y_1, y_2, \ldots, y_r, z) = (y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_r)\sigma_f \vee \overline{y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_r} z.$$

с вероятностью ошибки $\varepsilon_{\chi_{r,f}}$, не превосходящей $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}}$.

Рассмотрим схему S, построенную из схем $S^f_{\text{у}}$, $S^{\chi_{r,f}}$ и r элементов задержки согласно рис. 3. Начальным состоянием q схемы S являются нулевые состояния r элементов задержки и начальное состояние $q_{\text{у}}$ схемы $S^f_{\text{у}}$. Схема S реализует о.-д. функцию f в узком смысле. Так же, как это было сделано в доказательстве теоремы 4, получаем, что $P_{\tilde{0}}(t) \leqslant \delta$ при

$$t \geqslant t_1 = \left\lceil \frac{\log(2^{1/r} - 1) - 1}{\log(1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon))} \right\rceil$$

и $r = -\lceil \log \delta \rceil + 1$.

Найдем вероятность появления значения σ_f на выходе схемы S в момент времени t:

$$P^{\sigma_f}(S, \overrightarrow{\rho}, t) = (1 - P_{\tilde{0}}(t))(1 - \varepsilon_{\chi_{r,f}}) + P_{\tilde{0}}(t)[(1 - \varepsilon_{\chi_{r,f}})P^{\sigma_f}(S^f_{\text{у}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{у}}, t) + \\ + \varepsilon_{\chi_{r,f}}(1 - P^{\sigma_f}(S^f_{\text{у}}, \overrightarrow{\rho}_{\text{у}}, t))] \geqslant 1 - (\varepsilon_{\chi_{r,f}} + P_{\tilde{0}}(t)).$$

Отсюда следует, что при $t > t_1$

$$P^{\sigma_f}(S, \overrightarrow{\rho}, t) \geqslant 1 - (\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} + \delta).$$

Таким образом, при $t > t_1$ моменты работы схемы S, в которые значения выходной последовательности автономной о.-д. функции f равны σ_f, являются Δ-моментами.

Пусть t_2 — длина предпериода выходной последовательности о.-д. функции f и k — ее вес. Тогда число значений выходной последовательности о.-д. функции f, равных σ_f, при $t > t_2 + k$ больше, чем

$$\frac{(t - (t_2 + k))c_f}{t} = c_f - \frac{(t_2 + k)c_f}{t}.$$

Таким образом, при $t > t_0$, где $t_0 = \max(t_1, t_3)$ и

$$t_3 = \left(\frac{t_2 + k}{\delta}\right) c_f.$$

следует утверждение теоремы.

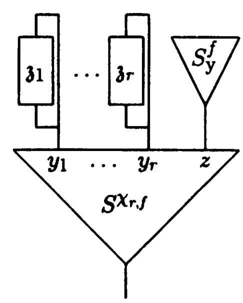

Рис. 3

Из теорем 9 и 10 следует

Теорема 11. *Для любой автономной о.-д. функции f существуют p_0 и d_0 такие, что для любых $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} \in (\varepsilon, 1/2)$, $\delta \in (0,1)$ и $\Delta \in (\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} + \delta, 1/2)$*

$$D^1_{\text{у}}(f, p, d, \Delta, t) \sim c_f$$

при $p \geqslant p_0$ и $d \geqslant d_0$.

Из теоремы 11 и леммы 17 следует

Теорема 12. *Для почти любой автономной о.-д. функции f существуют p_0 и d_0 такие, что для любых $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} \in (\varepsilon, 1/2)$, $\delta \in (0,1)$ и $\Delta \in (\widehat{\varepsilon}_{\text{Б}} + \delta, 1/2)$*

$$D^1_{\text{у}}(f, p, d, \Delta, t) \sim 1/2$$

при $p \geqslant p_0$ и $d \geqslant d_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов. — М.: Наука, 1985.
2. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970.
3. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. Основные алгоритмы. — М.: Мир, 1976.
4. Коршунов А. Д. О перечислении конечных автоматов // Проблемы кибернетики. Вып. 34. — М.: Наука, 1978. — С. 5–82,
5. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы: сб. статей. — М.: ИЛ, 1956. — С. 68–139.
6. Шимко Н. А. Об особенностях реализации ограниченно-детерминированных функций схемами из ненадежных элементов // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 1. — С. 43–59.
7. Шимко Н. А. О надежности дискретных устройств в случае произвольных базисов // Математическое и программное обеспечение вычислительных информационных и управляющих систем: Межвузовский сб. научных трудов. — М.: Изд-во МИЭМ, 1990. — С. 119–123.

Поступило в редакцию 13 XII 1991