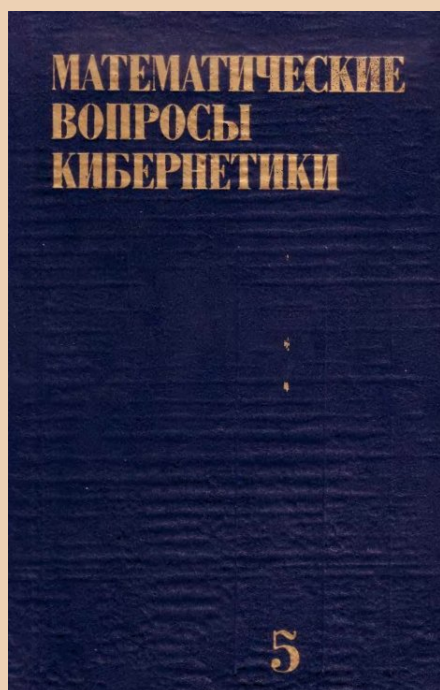




Н. И. Турдалиев
О
самокорректировании
схем из
функциональных
элементов для
некоторых булевых
функций

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Турдалиев Н. И. О самокорректировании схем из функциональных элементов для некоторых булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1994. — С. 280–294. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1994-280>

О САМОКОРРЕКТИРОВАНИИ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Н. И. ТУРДАЛИЕВ

(ТАШКЕНТ)

Известно, что для почти всех булевых функций минимальные самокорректирующиеся схемы имеют ту же сложность, что и обычные минимальные схемы [1—3, 6—10, 12, 13, 17, 19]. Но методы синтеза самокорректирующихся схем «для почти всех булевых функций» рассчитаны на сложнореализуемые функции и при применении к простореализуемым функциям не дают заметного выигрыша по сравнению с тривиальным дублированием. В работах [14—16] описаны методы синтеза нетривиальных самокорректирующихся схем из функциональных элементов для функций, допускающих простую декомпозицию.

В настоящей работе предложен метод синтеза нетривиальных самокорректирующихся схем из функциональных элементов для более сложных функций и операторов.

Рассматриваются схемы из элементов двух типов — надежных, имеющих достаточно большие веса, и ненадежных. Надежный элемент всегда реализует приписанную ему булеву функцию. Ненадежный элемент может находиться в исправном и неисправном состояниях. В исправном состоянии такой элемент реализует приписанную ему функцию, а в неисправном состоянии реализует любую булеву функцию от подаваемых на его входы переменных.

Схема из функциональных элементов [4, 18] называется *а-самокорректирующейся*, если при переходе в неисправное состояние любых a' ($a' \leq a$) ненадежных элементов она реализует ту же функцию, что и при исправном состоянии всех элементов.

Рассмотрим конечную полную систему булевых функций $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_b\}$. Пусть у нас имеются надежные функциональные элементы, реализующие функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_b$, и ненадежные функциональные элементы, реализующие $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_b$. В совокупности эти элементы образуют базис B , в котором мы будем осуществлять синтез схем. Таким образом, базис B состоит из «надежной» части B^1 и «ненадежной» части B^2 ; эти части функционально совпадают. Каждому элементу базиса приписано некоторое число — его вес. Вес любого ненадежного элемента положим равным 1, вес любого надежного элемента — равным N . Сложность схемы определяется суммой весов элементов схемы и обозначается через $L(S)$.

Упорядоченный набор m булевых функций от n переменных (одних и тех же) называется (n, m) -оператором. Сложность функции f (оператора F) в B^i ($i = 1, 2$) определяется как $\min L(S)$, где минимум берется по всем схемам S , состоящим только из элементов B^i и реализующим функцию f (оператор F); сложность функции f (оператора F) в B^i обозначается через $L_i(f)$ (соответственно $L_i(F)$). Схему S , состоящую из

элементов B^i ($i = 1, 2$), реализующую функцию f (оператор F), и такую, что $L(S) = L_i(f)$ (соответственно $L(S) = L_i(F)$), будем называть i -минимальной.

З а м е ч а н и е. Нетрудно заметить, что от любой 1-минимальной (2-минимальной) схемы можно перейти к 2-минимальной (1-минимальной) схеме, заменив каждый надежный (ненадежный) элемент на соответствующий ему ненадежный (надежный).

Через $L^a(f)$ ($L^a(F)$) обозначим $\min L(S)$, где минимум берется по всем a -самокорректирующимся схемам S , реализующим функцию f (оператор F).

Обозначим через $f_i(\tilde{x})$ функцию, реализуемую на выходе i -го элемента схемы S при отсутствии в ней неисправных элементов. Пусть значения переменных $x_1, \dots, x_n$, подаваемых на входы схемы S , равны соответственно $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Значение на выходе i -го элемента схемы будем называть *правильным*, если оно равно $f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Пусть $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ — набор значений на выходах i_1 -го, $\dots$, i_k -го элементов схемы на входном наборе $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$; набор $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ будем называть *правильным*, если

$$(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = (f_{i_1}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \dots, f_{i_k}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)).$$

§ 1. Пример, демонстрирующий алгоритм самокорректирования

В этом параграфе мы на простом примере покажем алгоритм, положенный в основу метода синтеза самокорректирующихся схем.

Пусть схема, реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, состоит из семи последовательно соединенных одинаковых блоков (рис. 1). В 5-самокорректирующуюся схему S для функции f будут входить в качестве подсхем шесть схем $A_1, \dots, A_6$, реализующих функцию f и построенных из ненадежных элементов (рис. 2). Кроме того, схема S содержит пять блоков $B_1, \dots, B_5$, каждый из которых устроен так же, как и блоки A_{ji} (напомним, что они все одинаковы), и состоит из ненадежных элементов. Пусть в схеме S имеется не более пяти неисправных элементов. Работу схемы S продемонстрируем на примере, изображенном на рис. 2. Предположим, к примеру, что выходы блоков $A_{11}, \dots, A_{61}$ совпадают и равны 0. Так как по крайней мере одна из схем $A_1, \dots, A_6$ не содержит неисправных элементов, то значение 0 — правильное. Выходы блоков $A_{12}, \dots, A_{62}$ отличаются. Следовательно, либо в двух блоках A_{12}, A_{32} , либо в четырех блоках $A_{22}, A_{42}, A_{52}, A_{62}$ имеются неисправные элементы. Последовательно на входы блоков $B_1, B_2, \dots$ подается значение 0 (именно это правильное значение подавалось на входы блоков $A_{12}, \dots, A_{62}$) до тех пор, пока на выходах блоков $A_{12}, \dots, A_{62}, B_1, B_2, \dots$ не будет пяти одинаковых значений. Пусть после подачи значения 0 на входы блоков B_1, B_2 их выходы имеют значение 1. Поскольку неисправных элементов в схеме S не более пяти, то правильное значение — на выходах блоков $A_{22}, A_{42}, A_{52}, A_{62}$ (в противном случае в шести блоках $A_{22}, A_{42}, A_{52}, A_{62}, B_1, B_2$ имелось бы по неисправному элементу, что невозможно). Далее нас будут интересовать лишь блоки A_2, A_4, A_5, A_6 , так как среди них есть блок без неисправных элементов.

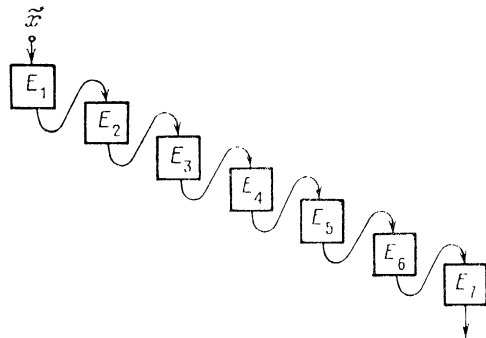


Рис. 1

Блоки A_1, A_3 заведомо содержат неисправные элементы. Поэтому в блоках $A_2, A_4, A_5, A_6, B_3, B_4$ может быть не более трех неисправных элементов. Выходы блоков $A_{23}, A_{43}, A_{53}, A_{63}$ совпадают и равны. 1. Учитывая вышесказанное, заключаем, что значение 1 правильное. Выходы блоков $A_{24}, A_{44}, A_{54}, A_{64}$ отличаются. На вход блока B_3 подаем значение 1 (именно это правильное значение подавалось на входы блоков

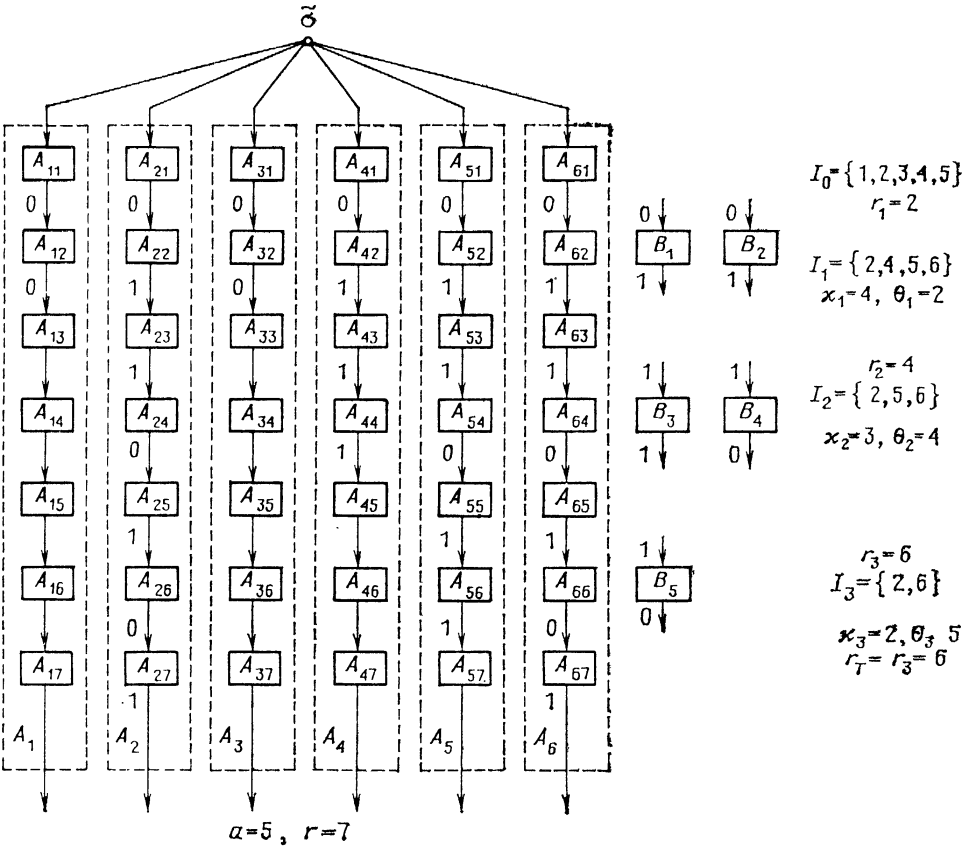


Рис. 2

$A_{24}, A_{44}, A_{54}, A_{64}$). На выходе B_3 получаем значение 1. На вход B_4 подаем значение 1 и на выходе получаем значение 0. На выходах блоков $A_{24}, A_{54}, A_{64}, B_4$ — четыре одинаковых значения. Так как в этих блоках не может быть четырех неисправных элементов, то значение 0 — правильное. Далее нас будут интересовать блоки A_2, A_5, A_6 . Блоки A_1, A_3, A_4 заведомо содержат неисправные элементы. Поэтому в блоках A_2, A_5, A_6, B_5 может быть не более двух неисправных элементов (на самом деле, учитывая неисправный элемент в блоке B_3 , можно сказать, что в блоках A_2, A_5, A_6, B_5 может быть не более одного неисправного элемента, но нам достаточно и более слабого вывода — подобные рассуждения встречаются и в общем случае в § 3). Выходы блоков A_{25}, A_{55}, A_{65} совпадают. Следовательно, значение 1 на выходах A_{25}, A_{55}, A_{65} является правильным. Выходы блоков A_{26}, A_{56}, A_{66} отличаются. На вход блока B_5 подается значение 1. На его выходе получаем 0. На выходах A_{26}, A_{66}, B_5 — три одинаковых значения. Следовательно, значение 0 на выходах этих блоков является правильным. Далее мы рассматриваем лишь блоки A_2, A_6 , в одном из которых отсутствуют неисправные элементы. Выходы блоков A_{27}, A_{67} совпадают. Следовательно, значение 1 на выходах блоков A_2, A_6 является правильным, т. е. значение функции f на наборе $\tilde{\sigma}$ равно 1: $f(\tilde{\sigma}) = 1$.

В приведенном примере мы не показали схемную реализацию алгоритма выбора блока A_{i_0} , правильно вычисляющего значение функции f (в нашем примере в качестве A_{i_0} можно выбрать A_2 или A_6). Это будет сделано в § 3 для общего случая. Следует отметить, что в общем случае, во-первых, не обязательно все блоки A_n должны быть устроены одинаково, во-вторых, на входы блоков A_n могут подаваться входы схемы, в-третьих, связи между блоками A_n могут быть более сложными.

§ 2. Некоторые обозначения, вспомогательные функции и операторы

В этом параграфе примем некоторые необходимые обозначения, определим вспомогательные функции и операторы.

Введем следующие обозначения:

$\tilde{0}$ — нулевой набор $(0, \dots, 0)$;

$\|(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$;

$N_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — номер первой единичной компоненты набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, например $N_1(0, 0, 1, 1, 0) = 3$;

$N(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — множество номеров единичных компонент набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, например $N(0, 1, 0, 1, 1) = \{2, 4, 5\}$;

$S_n^i(x_1, \dots, x_n)$ — симметрическая функция с рабочим числом i ;

$S_n^k(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1$, если $\|(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\| = k$ (известно [9, С. 59], что

$$L_i(S_n^k) \leq c_1 n, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

здесь и ниже через c , c_1 , c_2 и т. д. обозначены абсолютные константы);

$$|(\sigma_1, \dots, \sigma_n)| = \sum_{i=1}^n \sigma_i 2^{i-1};$$

$\varphi_{\text{совп}}^n(\tilde{x}, \tilde{y})$ — функция совпадения от двух наборов переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ длины n , которая определяется так:

$$\varphi_{\text{совп}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

(очевидно, что

$$L_i(\varphi_{\text{совп}}^n) \leq c_2 n, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$\varphi_{\text{срав}}^n(\tilde{x}, \tilde{y})$ — функция сравнения двух наборов переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ длины n , которая определяется так:

$$\varphi_{\text{срав}}^n(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\tilde{\alpha}| < |\tilde{\beta}|, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем нам понадобится $(b + d_1 + \dots + d_b, d)$ -оператор $H(\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^b, \tilde{\eta}) = (h_1(\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^b, \tilde{\eta}), \dots, h_d(\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^b, \tilde{\eta}))$; где $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_b)$, $\tilde{\xi}^i = (\xi^i_1, \dots, \xi^i_{d_i})$, $i = 1, \dots, b$; $d = \max_{1 \leq i \leq b} d_i$, здесь b , $d_1, \dots, d_b$ — некоторые параметры. Функции $h_1, \dots, h_d$ вычисляются по формулам

$$h_j = \xi^1_j \eta_1 \vee \xi^2_j \eta_2 \vee \dots \vee \xi^b_j \eta_b, \quad j = 1, \dots, d; \quad (3)$$

здесь $\xi^i_j = 0$ при $j > d_i$ ($i = 1, \dots, b$). Такой оператор H будем обозначать через $H^{b,d}(\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta})$ или $H^{b,d}$. Схемная реализация оператора $H^{b,d}(\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta})$ показана на рис. 3. Отметим следующее свойство этого оператора. Если у набора $\tilde{\eta}$ лишь одна k -я компонента равна 1, то

$$H^{b,d}(\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta}) = (\tilde{\xi}^k, \tilde{0}) = \overbrace{(\xi^k_1, \dots, \xi^k_d, 0, \dots, 0)}^d,$$

т. е. в этом случае оператор H «отбирает» из наборов $\xi^1, \dots, \xi_b$ набор ξ^k . Например,

$$H^{4,3}((0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1); (0, 1, 0, 0)) = (1, 1, 0).$$

Из (3) видно, что

$$L_i(H^{b,d}) \leq c_3 b d, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Функция $R^{b,q,p}(\xi^1, \dots, \xi^b; \tilde{\eta}; \tilde{\xi})$, или кратко $R^{b,q,p}$, определяется следующим образом. Пусть $\xi^1, \dots, \xi^b$ — наборы длины q , $\tilde{\eta}$ — набор длины b , $\tilde{\xi}$ — набор длины p . Будем говорить, что набор ξ^i соответствует набору $\tilde{\eta}$, если i -я компонента набора $\tilde{\eta}$ равна 1. Равенство

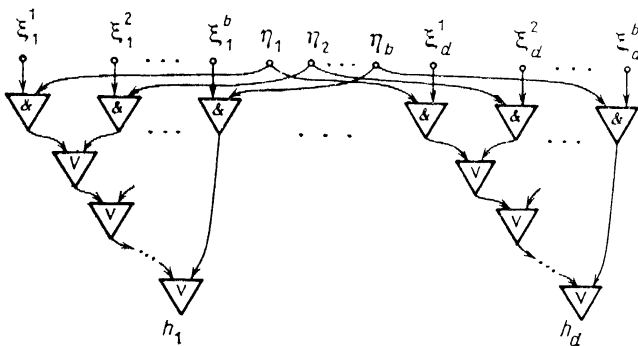


Рис. 3

$$R^{b,q,p}(\xi^1, \dots, \xi^b; \tilde{\eta}; \tilde{\xi}) = 1$$

выполняется тогда и только тогда, когда среди наборов $\xi^1, \dots, \xi^b$ будет не менее $\|\tilde{\xi}\|$ наборов, со-

ответствующих $\tilde{\eta}$ и равных между собой. Например:

$$R^{4,3,5}((1, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1); (1, 0, 1, 1); (1, 0, 0, 1, 0)) = 1,$$

так как два набора $(1, 1, 0)$ из трех соответствующих набору $(1, 0, 1, 1)$, равны друг другу, причем $2 \geq \|(1, 0, 0, 1, 0)\|$. Легко видеть, что если b, p — константы, то

$$L_i(R^{b,q,p}) \leq c_4 q, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Функция $Q^{b,q,p}(\chi; \xi^1, \dots, \xi^b; \tilde{\eta}; \tilde{\xi})$, или просто $Q^{b,q,p}$, определяется следующим образом. Пусть $\chi, \xi^1, \dots, \xi^b$ — наборы длины q , $\tilde{\eta}$ — набор длины b , $\tilde{\xi}$ — набор длины p . Равенство $Q^{b,q,p}(\chi; \xi^1, \dots, \xi^b; \tilde{\eta}; \tilde{\xi}) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда среди наборов $\xi^1, \dots, \xi^b$ будет не менее $\|\tilde{\xi}\|$ наборов, соответствующих $\tilde{\eta}$ и равных набору χ . Например:

$$Q^{4,3,5}((101); (000), (101), (101), (101); (1011); (01000)) = 1,$$

$$Q^{4,3,5}((101); (000), (101), (101), (111); (1110); (11100)) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что если b, p — константы, то

$$L_i(Q^{b,q,p}) \leq c_5 q, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

§ 3. Синтез самокорректирующихся схем

В этом параграфе мы приведем метод синтеза самокорректирующихся схем для операторов, удовлетворяющих некоторым требованиям.

Пусть множество переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ представимо в виде

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r,$$

где множества $X_1, \dots, X_r$ могут пересекаться. Мощность множества X_i ($i = 1, \dots, r$) обозначается через q_i . Наборы, соответствующие множествам $X, X_1, \dots, X_r$, обозначим через $\tilde{x}, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r$. Рассмотрим (n, m) -оператор $F(\tilde{x})$. Пусть схема S удовлетворяет следующим условиям.

1) Схема S состоит из ненадежных элементов; при правильной работе элементов схема реализует оператор F .

2) Схема S состоит из r блоков $E_1, \dots, E_r$ (рис. 4). На входы блока E_i ($i = 1, \dots, r$) подаются набор переменных $\tilde{x}_i$ и S_i выходов блоков $E_1, \dots, E_{i-1}$ (на входы первого блока E_1 подается лишь набор входных переменных $\tilde{x}_1$). Число выходов блока E_i равно t_i . Таким образом, блок E_i реализует $(q_i + s_i, t_i)$ -оператор, где $s_1 = 0$.

3) Выходами схемы S являются выходы блока E_r .

4) Каждый из блоков $E_1, \dots, E_r$ совпадает с одним из r' ($r' < r$) блоков $G_1, \dots, G_{r'}$ (т. е. число разных блоков среди $E_1, \dots, E_r$ равно r').

Блок G_i ($i = 1, \dots, r'$) реализует $(q_i^0 + s_i^0, t_i^0)$ -оператор. Ясно, что

$$(q_i, s_i, t_i) \in \{(q_1^0, s_1^0, t_1^0), (q_2^0, s_2^0, t_2^0), \dots, (q_{r'}^0, s_{r'}^0, t_{r'}^0)\}.$$

Введем обозначения

$$s = \max_{1 \leq i \leq r'} s_i^0, \quad t = \max_{1 \leq i \leq r'} t_i^0, \quad q = \max_{1 \leq i \leq r'} q_i^0.$$

Теорема 1. Для оператора F верно неравенство

$$L^a(F) \leq \min \left\{ NL(S), (a+1)L(S) + aL_2(H^{r,q}) + \right. \\ \left. + a \sum_{i=1}^{r'} L(G_i) + c(r \max(r', s, t) + m) \right\}.$$

Доказательство. Пусть $a > N - 1$. В этом случае в качестве a -самокорректирующей схемы для F предлагается схема S' , получающаяся из схемы S заменой каждого ненадежного элемента соответствующим надежным элементом (см. замечание на с. 281). Схема S' реализует оператор F и $L(S') = NL(S) < (a+1)L_2(F)$, что удовлетворяет теореме.

Пусть $a \leq N - 1$. Рассмотрим схему S^a , представленную на рис. 5 (устройство блока B подробно описано ниже). Далее мы подробно опишем устройство схемы S^a и докажем, что она является a -самокорректирующей схемой для оператора F .

Все блоки схемы S^a , кроме блоков $A_1, \dots, A_{a+1}, D_1, \dots, D_a$, построены из надежных элементов.

Каждый из блоков $A_1, \dots, A_{a+1}$ состоит из ненадежных элементов и совпадает со схемой S (рис. 4). Если в схеме S^a имеется не более a неисправных элементов, то среди блоков A_i найдется блок, в котором нет неисправных элементов и который правильно вычисляет значение оператора F . Блок B находит этот блок и выдает правильное значение оператора F .

Зафиксируем набор $\tilde{\sigma}$ значений входных переменных $\tilde{x}$. Обозначим набор значений переменных $\tilde{x}_i$ через $\tilde{\sigma}_i$.

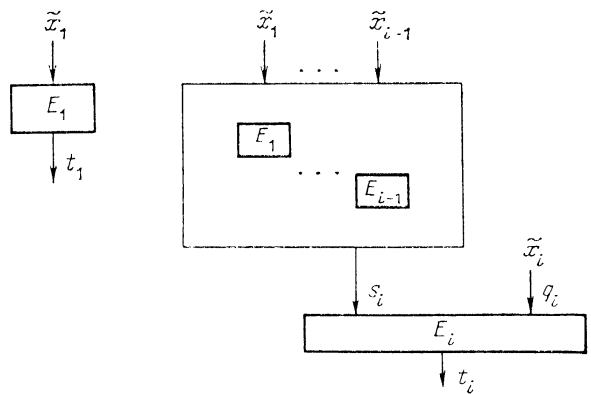


Рис. 4

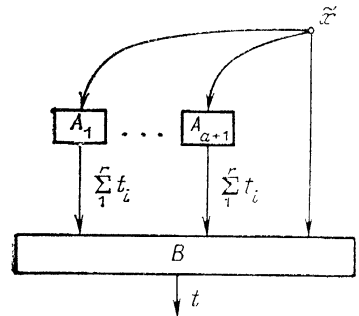


Рис. 5

правных элементов не все значения выходов блоков $D_1, \dots, D_{\theta_1}$ равны $\tilde{\alpha}_{r_1}$. Обозначим на выходах $D_1, \dots, D_{\theta_1}$ через $\tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^{\theta_1}$. Дополнительные вычисления проводим до тех пор, пока среди наборов $\tilde{\alpha}_{r_1}^1, \dots, \tilde{\alpha}_{r_1}^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^{\theta_1}$ не найдется $a+1$ одинаковых. Эти $a+1$ одинаковых наборов равны правильному набору $\tilde{\alpha}_{r_1}$ (так как в противном случае

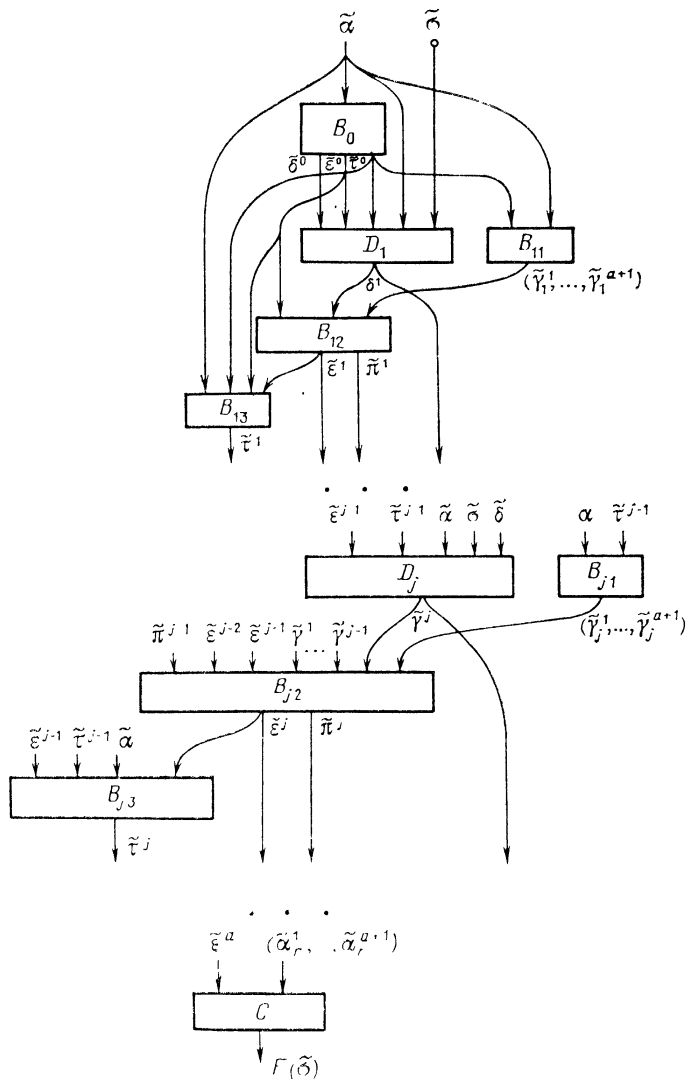


Рис. 7

в схеме S^a нашлось бы $a+1$ неисправных элементов). Остальные θ_1 наборов — неправильные. Следовательно, среди блоков $A_{1r_1}, \dots, A_{a+1, r_1}, D_1, \dots, D_{\theta_1}$ найдется θ_1 блоков, в каждом из которых имеется неисправный элемент.

Пусть из наборов $\tilde{\alpha}_{r_1}^1, \dots, \tilde{\alpha}_{r_1}^{a+1}$ правильному набору $\tilde{\alpha}_{r_1}$ равны следующие: $\tilde{\alpha}_{r_1}^{j(1,1)}, \dots, \tilde{\alpha}_{r_1}^{j(1, \kappa_1)}$. Полагаем $I_1 = \{j(1, 1), \dots, j(1, \kappa_1)\}$ (для примера из § 1 $I_1 = \{2, 4, 5, 6\}$). Понятно, что $I_1 \subset I_0$. В каждом блоке A_j , где $j \notin I_1$, имеется неисправный элемент. Поэтому в блоках $A_{j(1,1)}, \dots, A_{j(1, \kappa_1)}, D_{\theta_1+1}, \dots, D_a$ не может быть κ_1 неисправных элементов. Действительно, если бы в этих блоках было бы κ_1 неисправных элементов, то, учитывая $a+1 - \kappa_1$ неисправных элементов в

..., D_{θ_l} имеется $\theta_l - \theta_{l-1}$ неисправных элементов, мы заключаем, что в блоках A_j ($j \notin I_l$), $D_1, \dots, D_{\theta}$ имеется θ_l неисправных элементов.

Итак, мы имеем:

а) в блоках A_j ($j \notin I_l$), $D_1, \dots, D_{\theta_l}$ имеется θ_l неисправных элементов;

б) в каждом блоке A_j ($j \in I_l$) имеется неисправный элемент.

Пусть число T таково, что для всех $i \geq r_T$ выполняются равенства $\tilde{\alpha}_i^{j'} = \tilde{\alpha}_i^{j''}$ для любых $j', j'' \in I_T$ (для примера из § 1 $r_T = r_3 = 6$). Тогда в качестве искомого i_0 можно выбрать любой элемент множества I_T , например $j(T, 1)$, т. е. значение оператора F на наборе $\tilde{\sigma}$ равно $\tilde{\alpha}_r^{j(T,1)}$. Из п. а) следует, что число дополнительных вычислений, т. е. число блоков D_j , не превышает числа допустимых неисправных элементов в схеме S^a . Поэтому для всех дополнительных вычислений будет достаточно блоков $D_1, \dots, D_a$.

Перейдем к непосредственному описанию блока B схемы S^a (рис. 7). Заметим, что ниже в описании схемы S^a

наборы $\tilde{\epsilon}^j$ кодируют множества I_l ;

наборы $\tilde{T}^j$ кодируют числа r_l .

Блок B_0 . Этот блок по набору $\tilde{\alpha}$ выдает наборы $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_r, \tilde{\epsilon}^0, \tilde{\tau}^0$. Набор $\tilde{\delta}_i$ ($i = 1, \dots, r$) длины r' кодирует тип блока E_i в схеме S : если блок E_i совпадает с блоком G_k ($1 \leq k \leq r'$), то набор $\tilde{\delta}_i$ имеет вид: $\tilde{\delta}_i = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)$. Обозначим для удобства набор $(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_r)$ через $\tilde{\delta}$.

Набор $\tilde{\epsilon}^0$ длины $a+1$ кодирует множество I_0 , а именно множество номеров единичных компонент набора $\tilde{\epsilon}^0$ совпадает с множеством I_0 : $\tilde{\epsilon}^0 = (\overset{a+1}{1}, \dots, 1)$. Набор $\tilde{\tau}^0$ длины r кодирует число r_1 и имеет вид

$$\tilde{\tau}^0 = (0, \dots, 0, \overset{r_1}{1}, 0, \dots, 0).$$

В случае, если для всех $i = 1, \dots, r$ выполняются равенства

$$\tilde{\alpha}_i^1 = \tilde{\alpha}_i^2 = \dots = \tilde{\alpha}_i^{a+1},$$

полагаем $r_1 = r$. Компоненты набора $\tilde{\tau}^0$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tau_1^0 &= \bigwedge_{j=2}^{a+1} \varphi_{\text{совп}}(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_1^1), \\ \tau_i^0 &= \left(\bigwedge_{k=1}^{i-1} \tau_k \right) \bigwedge_{j=2}^{a+1} \varphi_{\text{совп}}(\tilde{\alpha}_i^j, \tilde{\alpha}_i^1), \quad i = 2, \dots, r-1, \\ \tau_r^0 &= \bigwedge_{k=1}^{r-1} \tau_k^0. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее при описании блоков схемы S^a будем считать, что $\theta_{l-1} + 1 \leq j \leq \theta_l$ (см. алгоритм). Отметим, что ниже набор $\tilde{\epsilon}^{j-1}$ длины $a+1$ кодирует множество I_{l-1} , а именно: множество единичных компонент набора $\tilde{\epsilon}^{j-1}$ совпадает с множеством I_{l-1} : $N(\tilde{\epsilon}^{j-1}) = I_{l-1}$; набор $\tilde{\tau}^{j-1}$ длины r кодирует число r_l :

$$\tilde{\tau}^{j-1} = (0, \dots, 0, \overset{r_l}{1}, 0, \dots, 0).$$

Блок D_j (рис. 8). Этот блок состоит из ненадежных элементов и при отсутствии неисправных элементов в нем вычисляет набор $\tilde{\alpha}_{r_l}$. Описание работы D_j приведем для случая отсутствия неисправных элементов в блоке. Блок D_j состоит из шести блоков $D_{j1}, \dots, D_{j6}$.

Блок D_{j1} вычисляет наборы $\tilde{\beta}_{r_l}^1, \dots, \tilde{\beta}_{r_l}^{a+1}$. Он состоит из $a+1$ блоков $D_{j1}^1, \dots, D_{j1}^{a+1}$. Блок $D_{j1}^k (k=1, \dots, a+1)$ по наборам $\tilde{\beta}_2^k, \dots, \tilde{\beta}_r^k$ и $\tilde{\tau}^{j-1}$ выдает набор $\tilde{\lambda}_j^k$ длины S , который равен набору $(\tilde{\beta}_{r_l}^k, \tilde{0})$ или нулевому набору $\tilde{0}$ (при $r_l=1$) и вычисляется по формуле

$$\tilde{\lambda}_j^k = H^{r-1, s}(\tilde{\beta}_2^k, \dots, \tilde{\beta}_r^k; (\tilde{\tau}_2^{j-1}, \dots, \tilde{\tau}_r^{j-1})). \quad (8)$$

Блок D_{j2} по $\tilde{\lambda}_j^1, \dots, \tilde{\lambda}_j^{a+1}$ и $\tilde{\varepsilon}^{j-1}$ выдает набор $\tilde{\lambda}^j$ длины s , который равен $(\tilde{\beta}_{r_l}^k, \tilde{0})$, где $k \in I_{l-1}$, т. е. правильному набору $(\tilde{\beta}_{r_l}, \tilde{0})$. Набор $\tilde{\lambda}^j$ вычисляется по формуле

$$\tilde{\lambda}^j = H^{a+1, s}(\tilde{\lambda}_j^1, \dots, \tilde{\lambda}_j^{a+1}; \tilde{\varepsilon}^{j-1}). \quad (9)$$

Блок D_{j3} по $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_r$ и $\tilde{\tau}^{j-1}$ выдает набор $\tilde{\xi}^j$ длины q , который равен $(\tilde{\sigma}_{r_l}, \tilde{0})$ и вычисляется по формуле

$$\tilde{\xi}^j = H^{r, q}(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_r; \tilde{\tau}^{j-1}). \quad (10)$$

Блок D_{j4} по $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_r$ и $\tilde{\tau}^{j-1}$ выдает набор $\tilde{\mu}^j$ длины r' , который равен $\tilde{\delta}_{r_l}$ и вычисляется по формуле

$$\tilde{\mu}^j = H^{r, r'}(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_r; \tilde{\tau}^{j-1}). \quad (11)$$

Блок D_{j5} состоит из r' блоков $D_{j5}^1, \dots, D_{j5}^{r'}$, которые совпадают с блоками $G_1, \dots, G_{r'}$ соответственно. Так как заранее неизвестно, с каким из блоков $G_1, \dots, G_{r'}$ совпадает блок E_{r_l} (заранее не известно число r_l), то в блоке D_{j5} вычисляются значения на выходах всех блоков $G_1, \dots, G_{r'}$. На входы каждого блока $D_{j5}^k (k=1, \dots, r')$ подаются $\tilde{\lambda}^j$ и $\tilde{\xi}^j$ (точнее, начала этих наборов: первые s_k^0 и q_k^0 компонент соответственно). Напомним, что при отсутствии неисправных элементов в D_j

наборы $\tilde{\lambda}^j$ и $\tilde{\xi}^j$ равны соответственно наборам $(\tilde{\beta}_{r_l}, \tilde{0})$ и $(\tilde{\sigma}_{r_l}, \tilde{0})$. На выходах блока D_{j5} реализуется набор $\tilde{v}_k^j$ длины t_k^0 . На выходе блока $D_{j5}^{N_1(\tilde{\mu}^j)}$ (число $N_1(\tilde{\mu}^j)$ равно $N_1(\tilde{\delta}_{r_l})$, т. е. номеру блока из множества $G_1, \dots, G_{r'}$, с которым совпадает блок E_{r_l} схемы S) будет реализован набор $\tilde{\alpha}_{r_l}$, т. е.

$$\tilde{v}_j^{N_1(\tilde{\mu}^j)} = \tilde{\alpha}_{r_l}.$$

Блок D_{j6} по $\tilde{v}_j^1, \dots, \tilde{v}_j^{r'}$ и $\tilde{\mu}^j$ отбирает пужный набор $\tilde{\alpha}_{r_l}$, а именно: выдает набор $\tilde{\gamma}^j$ длины t , который равен $(\tilde{v}_j^{N_1(\tilde{\mu}^j)}, \tilde{0}) = (\tilde{\alpha}_{r_l}, \tilde{0})$. Набор $\tilde{\gamma}^j$ вычисляется по формуле

$$\tilde{\gamma}^j = H^{r', t}(\tilde{v}_j^1, \dots, \tilde{v}_j^{r'}; \tilde{\mu}^j). \quad (12)$$

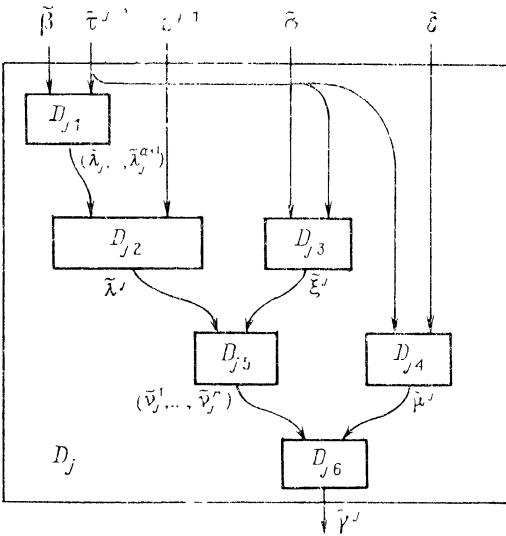


Рис. 8

Итак, при отсутствии неисправных элементов в блоке D_j на его выходах реализуется набор $\overbrace{(\tilde{\alpha}_{r_l}, \tilde{0})}^t$, т. е. блок D_j дублирует работу блока E_{r_l} схемы S .

Блок B_{j1} . Этот блок состоит из $a+1$ блоков $B_{j1}^1, \dots, B_{j1}^{a+1}$. Блок B_{j1}^k ($k = 1, \dots, a+1$) по $\tilde{\alpha}_1^k, \dots, \tilde{\alpha}_r^k$ и $\tilde{\tau}^{j-1}$ отбирает $\tilde{\alpha}_{r_l}^k$, точнее, на его выходах реализуется набор $\tilde{\gamma}_j^k$ длины l , равный $(\tilde{\alpha}_{r_l}^k, \tilde{0})$. Верна формула

$$\tilde{\gamma}_j^k = H^{r,l}(\tilde{\alpha}_1^k, \dots, \tilde{\alpha}_r^k, \tilde{\tau}^{j-1}). \quad (13)$$

Блок B_{j2} . В описании алгоритма отмечалось, что дополнительные вычисления набора $\tilde{\alpha}_{r_l}$ производятся $\theta_l - \theta_{l-1}$ раз до появления κ_{l-1} одинаковых наборов. Каждое дополнительное вычисление реализуется, как описывалось выше, в одном из блоков $D_{\theta_{l-1}+1}, \dots, D_{\theta_l}$. Необходимо запомнить номера $\theta_{l-1}+1, \dots, j$ блоков $D_{\theta_{l-1}+1}, \dots, D_j$, в которых уже произведены дополнительные вычисления. Это «запоминание» осуществляется блоком B_{j2} . Кроме того, в блоке B_{j2} кодируется множество I_{l-1} . На входы B_{j2} подаются наборы $\tilde{\gamma}_j^1, \dots, \tilde{\gamma}_j^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^j, \tilde{\pi}^{j-1}, \tilde{\varepsilon}^{j-2}, \tilde{\varepsilon}^{j-1}$. На выходах B_{j2} реализуется набор $\tilde{\pi}^j$ длины a , который «запоминает» номера $\theta_{l-1}+1, \dots, j$, и набор $\tilde{\varepsilon}^j$ длины $a+1$, кодирующий множество I_{l-1} . У набора $\tilde{\pi}^j$ компоненты с номерами $\theta_{l-1}+1, \dots, j$ равны 1, остальные равны 0: $\tilde{\pi}^j = (0, \dots, 0, \overset{\theta_{l-1}+1}{1}, \overset{j}{1}, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Компоненты набора $\tilde{\pi}^j$ можно выразить формулами

$$\begin{aligned} \pi_k^j &= \varphi_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\varepsilon}^{j-2}, \tilde{\varepsilon}^{j-1}) \cdot \bar{R}^{a+j+1, t, a+1}(\tilde{\gamma}_j^1, \dots, \tilde{\gamma}_j^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^j; \\ &(\tilde{\varepsilon}^{j-1}, \pi_1^{j-1}, \dots, \pi_{j-1}^{j-1}, 1); \tilde{\varepsilon}^{j-1}) \pi_k^{j-1} \quad \text{при } k < j, \\ \pi_k^j &= 1, \quad \pi_k^j = 0 \quad \text{при } k > j. \end{aligned} \quad (14)$$

Набор $\tilde{\varepsilon}^j$ при $\theta_{l-1}+1 \leq j < \theta_l$ кодирует множество I_{l-1} , а при $j = \theta_l$ — множество I_l : если $k \in I_{l-1}$ ($k \in I_l$ при $j = \theta_l$), то k -я компонента набора $\tilde{\varepsilon}^j$ равна 1, в противном случае k -я компонента равна 0. Ясно, что $\tilde{\varepsilon}_k^j = 1$ тогда и только тогда, когда:

во-первых, $k \in I_{l-1}$;

во-вторых, либо в множестве $\{\tilde{\gamma}_j^t, t \in I_{l-1}\} \cup \{\tilde{\gamma}^v, \theta_{l-1}+1 \leq v \leq j\}$ нет κ_{l-1} одинаковых наборов (т. е. $j < \theta_l$), либо в множестве $\{\tilde{\gamma}_j^t, t \in I_{l-1}\} \cup \{\tilde{\gamma}^v, \theta_{l-1}+1 \leq v \leq j\}$ есть κ_{l-1} одинаковых (т. е. $j = \theta_l$), и набор $\tilde{\gamma}_j^k$ является одним из них.

Поэтому верны формулы

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^j &= \varepsilon_k^{j-1} [Q^{a+1+j, t, a+1}(\tilde{\gamma}_j^k, \tilde{\gamma}_j^1, \dots, \tilde{\gamma}_j^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^j; (\tilde{\varepsilon}^{j-1} \pi_1^j, \dots, \pi_j^j); \tilde{\varepsilon}^{j-1}) \vee \\ &\vee \bar{R}^{a+1+j, t, a+1}(\tilde{\gamma}_j^1, \dots, \tilde{\gamma}_j^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^j; (\tilde{\varepsilon}^{j-1}, \pi_1^j, \dots, \pi_j^j); \tilde{\varepsilon}^{j-1})], \quad (15) \\ &k = 1, \dots, a+1. \end{aligned}$$

Блок B_{j3} . Этот блок по $\tilde{\alpha}, \tilde{\varepsilon}^{j-1}, \tilde{\varepsilon}^j, \tilde{\tau}^{j-1}$ выдает набор $\tilde{\tau}^j$, который кодирует

$$\text{либо } r_l \quad \text{при } \theta_{l-1}+1 \leq j < \theta_l: \tilde{\tau}^j = (0, \dots, 0, \overset{r_l}{1}, 0, \dots, 0),$$

$$\text{либо } r_{l+1} \quad \text{при } j = \theta_l: \tilde{\tau}^j = (0, \dots, 0, \overset{r_{l+1}}{1}, 0, \dots, 0).$$

Ясно, что

$$\tilde{\tau}^j = \begin{cases} \tau^{j-1} & \text{при } \tilde{\varepsilon}^{j-1} = \tilde{\varepsilon}^j \text{ или при равенстве наборов } \tilde{\alpha}_r^v, v \in I_l, \\ (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $k = \min \{i | i > r_l\}$, не все наборы $\tilde{\alpha}_i^v, v \in I_l$, равны между собой. Компоненты набора $\tilde{\tau}^j$ вычисляются по следующим формулам (в которых сомножитель $S_{i-1}^1(\tau_1^{j-1}, \dots, \tau_{i-1}^{j-1})$ соответствует условию $i > r_l$, т. е. $i > N_1(\tilde{\tau}^{j-1})$, а сомножитель $S_{i-1}^0(\tau_1^j, \dots, \tau_{i-1}^j)$ — условию, что в наборе τ^j не может быть двух единиц):

$$\begin{aligned} \tau_i^j = & \left[\varphi_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\varepsilon}^{j-1}, \tilde{\varepsilon}^j) \bigvee_{1 \leq v', v'' \leq a+1} (\bar{\varepsilon}_{v'}^j \vee \varphi_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\alpha}_r^{v'}, \tilde{\alpha}_r^{v''}) \vee \bar{\varepsilon}_{v''}^j) \right] \tau_i^{j-1} \bigvee \\ & \bigvee \left[\bar{\varphi}_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\varepsilon}^{j-1}, \tilde{\varepsilon}^j) \&_{1 \leq u', u'' \leq a+1} (\varepsilon_{u'}^j \varepsilon_{u''}^j \bar{\varphi}_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\alpha}_i^{u'}, \tilde{\alpha}_i^{u''})) \right] \& \\ & \& S_{i-1}^1(\tau_1^{j-1}, \dots, \tau_{i-1}^{j-1}) S_{i-1}^0(\tau_1^j, \dots, \tau_{i-1}^j); \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $S_0^0 \equiv 1$, $S_0^1 \equiv 0$.

Блок C (рис. 7). Этот блок, на входы которого подаются наборы $\tilde{\alpha}_r^1, \dots, \tilde{\alpha}_r^{a+1}, \tilde{\varepsilon}^a$, из множества $\{\tilde{\alpha}_r^1, \dots, \tilde{\alpha}_r^{a+1}\}$ выбирает значение правильного набора, заведомо имеющегося в этом множестве. На выходах C реализуется набор $\tilde{\varphi}$ длины m , определяемый так:

$$\varphi = H^{a+1, m}(\tilde{\alpha}_r^1, \dots, \tilde{\alpha}_r^{a+1}; \tilde{\varepsilon}^a). \quad (17)$$

То, что описанная схема S^a является a -самокорректирующей, непосредственно следует из изложенного выше алгоритма самокорректирования и построения схемы.

Подсчитаем сложность схемы S^a . Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{a+1} L(A_j) = (a+1)L(S).$$

Далее учтем, что a — константа. Из (2) и (7) следует, что

$$L(B_0) \leq c_6 r t.$$

Из (10) и описания блоков D_{j5} следует, что

$$L(D_{j3}) = L_2(H^{r, a}), \quad L_*(D_{j5}) = \sum_{i=1}^{r'} L(G_i), \quad j = 1, \dots, a.$$

Из (4), (8), (9), (11), (12) получаем

$$L(D_{j1}) + L(D_{j2}) + L(D_{j4}) + L(D_{j6}) \leq c_7 r \max(r', s, t), \quad j = 1, \dots, a.$$

Тогда

$$L(D_j) \leq L_2(H^{r, a}) + \sum_{i=1}^{r'} L(G_i) + c_7 r \max(r', s, t), \quad j = 1, \dots, a.$$

Из (1), (4) — (6), (13) — (16) получаем

$$L(B_{j1}) + L(B_{j2}) + L(B_{j3}) \leq c_8 r t.$$

Сложность блока C оцениваем по (17):

$$L(C) \leq c_9 m.$$

Следовательно,

$$L(S^a) \leq (a+1)L(S) + aL_2(H^{r,q}) + a \sum_{i=1}^{r'} L(G_i) + c(r \max(r', s, t) + m).$$

Теорема доказана

Теорема 2. Пусть

$$\sum_{i=1}^{r'} L(G_i) = o(n); \quad r \max(r', s, t) = o(n); \quad m = o(n);$$

$$L_2(H^{r,q}) \leq \varepsilon L_2(F), \quad \text{где } 0 < \varepsilon < 1.$$

Тогда

$$L^a(F) \leq ((1+\varepsilon)a+1)L_2(F).$$

Доказательство следует из теоремы 1.

Следствие. Для базиса $B = \{\&, \vee, -\}$ верна оценка

$$L^a(\varphi_{\text{срав}}^n) \leq (1,8a+1)5n \sim (1,8a+1)L_2(\varphi_{\text{срав}}^n).$$

Доказательство. Известно [11], что $L_2(\varphi_{\text{срав}}^n) = 5n - 3$, причем существует минимальная схема для $\varphi_{\text{срав}}^n$, для которой выполняются условия теорем 1 и 2, где $q = [2n/r]$. Из (3) следует, что $L_2(H^{r,q}) \leq 2rq \leq 4n$. Очевидно, что $m = 1$ ($\varphi_{\text{срав}}^n$ является $(2n, 1)$ -оператором) и $\varepsilon = 0,8$. Отсюда и из теоремы 2 следует требуемое неравенство.

В частности, изложенный метод позволяет построить 1-самокорректирующуюся схему для $\varphi_{\text{срав}}^n$, сложность которой асимптотически не превышает $14n$, в то время как при тривиальном способе самокорректирования сложность схемы асимптотически не меньше чем $15n$.

В заключение автор выражает благодарность Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Е. О синтезе самокорректирующихся управляющих систем // ДАН СССР.— 1984.— Т. 227. № 3.— С. 524—525.
2. Кириенко Г. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 12.— М.: Наука, 1964.— С. 29—37.
3. Кириенко Г. И. Синтез самокорректирующихся схем из функциональных элементов для случая растущего числа ошибок в схеме // Дискретный анализ. Вып. 16.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970.— С. 38—43.
4. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
5. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем—принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14.— М.: Наука, 1965.— С. 31—110.
6. Мадаян Х. А. О синтезе схем корректирующих размыкание контактов // ДАН СССР.— 1964.— Т. 159. № 2.— С. 290—293.
7. Нечипорук Э. И. О корректировании обрывов в вентильных и контактных схемах // Кибернетика.— 1968.— № 5.— С. 40—48.
8. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // ДАН СССР.— 1968.— Т. 179. № 4.— С. 786—789.
9. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21.— М.: Наука, 1968.— С. 5—102.
10. Потапов Ю. Г., Яблонский С. В. О синтезе самокорректирующихся контактных схем // ДАН СССР.— 1960.— Т. 134. № 3.— С. 544—547.
11. Редькин Н. П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 23.— М.: Наука, 1970.— С. 83—101.
12. Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 33.— М.: Наука, 1978.— С. 119—138.
13. Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 36.— М.: Наука, 1979.— С. 195—208.

14. Турдалиев Н. И. О самокорректировании схем для некоторых последовательностей булевых функций // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 3.— С. 77—86.
15. Турдалиев Н. И. О схемах, самокорректирующихся относительно однотипных константных неисправностей // Дискретный анализ. Вып. 49.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.— С. 60—74.
16. Турдалиев Н. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов для линейной функции // Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 2.— С. 150—154.
17. Улиг Д. О синтезе самокорректирующихся схем из функциональных элементов с малым числом надежных элементов // Мат. заметки.— 1974.— Т. 15, № 6.— С. 937—944.
18. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1986.
19. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1.— М.: Наука, 1988.— С. 5—25.

Поступило в редакцию 3 IV 1991