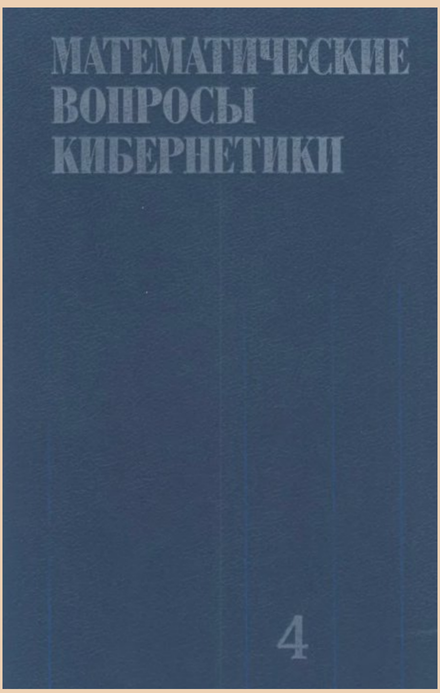

М. И. Гринчук

Нижняя оценка сложности реализации симметрических булевых функций контактными схемами

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ КОНТАКТНЫМИ СХЕМАМИ

М. И. ГРИНЧУК

(МОСКВА)

Данная работа фактически является продолжением статьи [1]. Описанный в [1] метод получения нижних оценок сложности при некотором видоизменении позволяет установить явно заданные нелинейные нижние оценки сложности реализации последовательностей симметрических булевых функций контактными схемами во всех случаях, когда такие оценки существуют (критерий этого доказан в [1, теорема 10]). Так, для функции голосования с n аргументами, ее отрицания, характеристической функции среднего слоя и т. п. получены нижние оценки сложности вида *) $\mathrm{const}\, n \log^{**} n$.

Изложение предполагает знакомство читателя со статьей [1]; определения, понятия и обозначения из этой работы используются ниже большей частью без дополнительных пояснений.

§ 1. Основные понятия и формулировка результата

Пусть f — симметрическая булева функция n переменных. Сопоставим ей последовательность нулей и единиц длины $n+1$ (характеристическую последовательность)

$$\tilde{\pi}_f = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n),$$

где π_i есть значение функции f на наборах значений переменных, содержащих i единиц.

Будем говорить, что функция f обладает T-свойством, если для элементов ее характеристической последовательности при всех i от T до $n - T - T!$ выполнены соотношения $\pi_i = \pi_{i+T!}$.

Основная теорема. *Если симметрическая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не обладает T-свойством, то сложность ее реализации контактными схемами при достаточно больших n не меньше* $(1/20)\, n \min(T, \log^{**} n)$.

Отличие метода доказательства этой теоремы от изложенного в [1] состоит в том, что вместо одной последовательности булевых функций $\{f_n^F\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, порожденных некоторой функцией $F\colon \mathbf{Z}_+ \to \{0, 1\}$ следующим образом:

$$f_n^F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

рассматривается целое множество таких функций F (и соответственно — все порожденные ими булевы функции). Итак, введем обозначения для

*) Определение и некоторые свойства функции $\log^{**}$ см. в § 5.

используемых при доказательстве величин, обозначая жирным шрифтом тот факт, что речь идет не об одной функции F: $\mathbf{Z}_+ \to \{0, 1\}$, а об их множестве:

$\mathbf{F}$ ($\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ и т. д.) — некоторое множество функций, отображающих множество целых неотрицательных чисел на $\{0, 1\}$;

$$\mathbf{f}_n^{\mathbf{F}} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{f_n^F \mid F \in \mathbf{F}\};$$

$$\mathscr{D}(\mathbf{F}) \underset{\mathrm{Df}}{=} \{G\colon \mathbf{Z}_+ \to \{0, 1\} \mid \exists F \in \mathbf{F}\ \forall n \in \mathbf{Z}_+ \quad G(n) = F(n+1)\};$$

$$L_{\mathbf{F}}(n) \underset{\mathrm{Df}}{=} \min \{L_F(n) \mid F \in \mathbf{F}\};$$

$$J_{\mathbf{F}}(m) \underset{\mathrm{Df}}{=} \max \{n \in \mathbf{Z}_+ \mid L_{\mathbf{F}}(n) \leqslant mn\}.$$

Наконец, определим для случая множества $\mathbf{F}$ центральное понятие, используемое в доказательстве,— нормальную последовательность контактных схем $\{S_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Аналогично [1] зададим ее следующими двумя условиями:

1) схема S_n реализует функцию, принадлежащую $\mathbf{f}_n^{\mathbf{F}}$;

2) для каждой схемы S_n при $n > 1$ и всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеет место соотношение *) $\mathscr{D}_i^0(S_n) = S_{n-1}$.

§ 2. Модификация метода доказательства из [1]

Практически все утверждения, доказанные в [1] для отдельной функции F: $\mathbf{Z}_+ \to \{0, 1\}$, остаются верными и для множеств таких функций при замене «индивидуальных» обозначений «групповыми». Сформулируем эти утверждения, не приводя доказательств, поскольку они не отличаются от данных в [1] для аналогичного «индивидуального» случая.

Лемма 1. *При $n > 1$ и непустом $\mathbf{F}$ выполнены неравенства*

$$L_{\mathbf{G}}(n-1) \leqslant L_{\mathbf{F}}(n) - \lceil L_{\mathbf{F}}(n)/n \rceil$$

и

$$L_{\mathbf{G}}(n-1)/(n-1) \leqslant L_{\mathbf{F}}(n)/n,$$

где $\mathbf{G}$ — любое из множеств $\mathbf{F}$ и $\mathscr{D}(\mathbf{F})$.

Лемма 2. *Неравенство $L_{\mathbf{F}}(n) \leqslant mn$ справедливо при всех n, $n \leqslant J_{\mathbf{F}}(m)$, и только в этом случае.*

Теорема 1 (аналог теоремы 1 из [1]). *Если конечен нижний предел $\varliminf_{n\to\infty} L_{\mathbf{F}}(n)/n$, то существуют такие целые неотрицательные константы $A_{\mathbf{F}}$, $B_{\mathbf{F}}$, $N_{\mathbf{F}}$, что при всех n, $n \geqslant N_{\mathbf{F}}$, справедливо равенство $L_{\mathbf{F}}(n) = A_{\mathbf{F}}n - B_{\mathbf{F}}$.*

Теорема 2 (аналог теоремы 2 из [1]). *Для каждого непустого множества $\mathbf{F}$ и каждого m, $m \geqslant 1$, существует нормальная последовательность схем с удельной сложностью не более m и длиной не менее k, где*

$$k = \lfloor 0{,}2 \log^* (J_{\mathbf{F}}(m)/(m+1)) - 0{,}3 \log m \rfloor,$$

причем схема S_n этой последовательности реализует функцию f_n, $f_n \in \mathbf{f}_n^{\mathbf{F}}$.

Лемма 3 (аналог леммы 5 из [1]). *При $m \geqslant 1$ имеет место неравенство $mn - L_{\mathbf{F}}(n) \leqslant mJ_{\mathbf{F}}(m-1)$.*

Центральное место в рассуждениях, изложенных в [1], занимает понятие нормальной последовательности достаточной длины, исследование свойств таких последовательностей. В «групповом» случае нормальной

---

*) Введенный в [1] оператор $\mathscr{D}_i^\nu$ определен для контактных схем, контакты которых управляются переменными $x_1, x_2, \ldots$ и их отрицаниями, как оператор подстановки константы ν вместо переменной x_i и последующего переименования переменных x_j в x_{j-1} при $j > i$.

последовательностью достаточной длины назовем нормальную последовательность с удельной сложностью m, если для этого m выполнено неравенство

$$\log^* J_{\mathbf{F}}(m) \geqslant \left(12\,600 m^6 (m J_{\mathbf{F}}(m-1)+2)^2 4^{4^m}\right)^m. \tag{1}$$

При таком определении на «групповой» случай без изменений переносятся все утверждения, доказанные в §§ 8—11 статьи [1].

§ 3. Об удельной сложности нормальных последовательностей

В [1] была введена функция $A(d)$, определенная для натуральных значений аргумента d, $d>1$, следующим образом. Пусть число d представлено в виде произведения простых как

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s} \qquad (p_i \text{ различны}).$$

Тогда

$$A(d) = 2\left(p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2} + \ldots + p_s^{\alpha_s}\right).$$

Лемма 4. *Пусть число d, $d \geqslant 2$, не является делителем числа $T!$. Тогда имеет место оценка*

$$A(d) \geqslant 2(T+1).$$

Доказательство. Число $T!$ делится на $\prod\limits_p p^{\lfloor \log_p T \rfloor}$, где произведение берется по всем простым числам. Поскольку d не делит $T!$, то в разложении числа d в произведение простых хотя бы одно из них — обозначим его p_0 — встречается в степени, большей $\lfloor \log_{p_0} T \rfloor$. Следовательно,

$$A(d) \geqslant 2 p_0^{\lfloor \log_{p_0} T \rfloor + 1} \geqslant 2(T+1),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть $\{S_n\}$ — нормальная последовательность достаточной длины для некоторого множества $\mathbf{F}$. Тогда существует такая почти периодическая функция F, что среди бесконечных нормальных последовательностей для нее найдется начинающаяся последовательностью $\{S_n\}$.*

Доказательство. Схома S_n нормальной последовательности достаточной длины строится из $n-2$ одинаковых с точностью до номера переменной блоков для $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ и двух блоков, возможно, другой структуры, для x_1 и x_n, причем способ соединения и вид этих блоков одинаковы для всех схем нормальной последовательности, начиная с S_1. Поэтому для каждого сколь угодно большого значения n можно осуществить процесс построения «аналогичной» схемы S'_n, причем однозначно. Покажем, что бесконечная последовательность так построенных схем является нормальной для некоторой функции F с удельной сложностью A_F.

Соотношение $S'_{n-1} = \mathscr{D}_i^0(S'_n)$ для всех n и i таких, что $n>1$ и $1 \leqslant i \leqslant n$, очевидно из построения последовательности схем $\{S'_n\}$, поэтому реализуемые ими функции симметричны и могут быть представлены в виде f_n^F для некоторой функции F, отображающей $\mathbf{Z}_+$ на $\{0, 1\}$.

Покажем теперь, что удельная сложность A построенной последовательности $\{S'_n\}$ совпадает с A_F. Неравенство $A \geqslant A_F$ очевидно. Пусть $A > A_F$. Тогда для F найдется бесконечная нормальная последовательность с удельной сложностью не более $A-1$. Поэтому все схемы последовательности $\{S'_n\}$, а значит, и исходной последовательности $\{S_n\}$, имеют растущую избыточность, что невозможно. Почти периодичность функции F вытекает из следствия 7 [1]. Таким образом, F — искомая почти периодическая функция.

Введем некоторое специальное понятие сложности симметрических функций. Пусть f — симметрическая булева функция n переменных. Рассмотрим все функции F: $\mathbf{Z}_+ \to \{0, 1\}$, для которых f_n^F есть f. Для каждой из этих функций F рассмотрим все нормальные последовательности достаточной длины, содержащие схему, реализующую f_n^F. Сложность самой простой из таких схем обозначим через $L_{\text{н п.}}(f)$.

Как было показано в лемме 5, значение $L_{\text{н п.}}(f)$ не изменится, если в определении ограничиться только бесконечными нормальными последовательностями.

Лемма 6. *Пусть симметрическая булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *не обладает* T*-свойством. Тогда имеет место оценка*

$$L_{\text{н.п.}}(f) \geqslant Tn + T.$$

Доказательство. Рассмотрим какую-либо бесконечную нормальную последовательность $\{S_i\}$, схема S_n которой реализует функцию f. Соответствующая этой последовательности почти периодическая функция F: $\mathbf{Z}_+ \to \{0, 1\}$ имеет либо больший T предпериод, либо не делящий $T!$ период. В первом случае по лемме 28 из [1] имеет место неравенство $A_F \geqslant T+1$, а во втором в силу теоремы 8 из [1] и леммы 4 — оценка $A_F \geqslant 2(T+1)$. Поэтому в любом случае можно оценить $A_F \geqslant T+1$.

Таким образом,

$$L_{\text{н.п.}}(f) \geqslant n \min_F A_F,$$

где минимум взят по всем рассмотренным функциям F, в силу чего имеет место утверждение леммы.

§ 4. Доказательство основной теоремы

Лемма 7. *Если для функции* f, *принадлежащей* $\mathbf{f}_n^{\mathbf{F}}$, *имеет место соотношение* $L_{\text{н.п.}}(f) = A_{\mathbf{F}} n$, *то при всех* m, $2 \leqslant m \leqslant A_{\mathbf{F}} - 1$, *выполнено неравенство*

$$\underbrace{\log^* \ldots \log^*}_{m-1} J_{\mathbf{F}}(m) \leqslant (m-2)(5 + 2\log^* m) + \max(6n, 2^{128}(J_{\mathbf{F}}(1))^4).$$

Доказательство. 1. Покажем, что из неравенства

$$\log^* J_{\mathbf{F}}(m) \geqslant (J_{\mathbf{F}}(m-1))^{2m} \cdot 2^{2^{2,5m+2}} \tag{2}$$

следует (1).

При $m \geqslant 2$ справедливы оценки

$$m/2^{2,5m} \leqslant 1/16,$$
$$(m \log m)/2^{2,5m} \leqslant 1/16,$$
$$m/2^{0,5m} \leqslant 3/(2\sqrt{2}) < 1{,}1,$$

поэтому можно записать

$$16m/2^{2,5m} + (8m \log m)/2^{2,5m} + 2m/2^{0,5m} < 4,$$
$$16m + 8m \log m + 2m4^m < 2^{2,5m+2},$$
$$\left(2^{16} m^8 4^{4^m}\right)^m < 2^{2^{2,5m+2}}.$$

При $m \geqslant 2$ имеет место неравенство $J_{\mathbf{F}}(m-1) \geqslant 1$, следовательно,

$$12\,600(1 + 2/(mJ_{\mathbf{F}}(m-1)))^2 \leqslant 12\,600 \cdot 4 < 2^{16}.$$

Таким образом,

$$\left(12\,600\,(1+2/(mJ_F(m-1)))^2\,m^8 4^{4^m}\right)^m < 2^{2^{2,5m+2}},$$

или

$$\left(12600m^6\,(mJ_F(m-1)+2)^2\,4^{4^m}\right)^m \leqslant 2^{2^{2,5m+2}}\,(J_F(m-1))^2,$$

что с учетом (2) очевидно влечет (1).

2. Покажем, что при выполнении условия (2) нормальная последовательность с удельной сложностью m, $m \geqslant 2$, имеет не менее $(1/6)\log^* J_F(m)$ членов.

В силу теоремы 2 длина этой последовательности не менее

$$\lfloor 0{,}2\log^*(J_F(m)/(m+1)) - 0{,}3\log m \rfloor.$$

Последовательно оценим

$$\lfloor (1/5)\log^*(J_F(m)/(m+1)) - (3/10)\log m \rfloor \geqslant$$
$$\geqslant (1/5)\log^* J_F(m) - (1/5)\log^*(m+1) - (3/10)\log m - 1 =$$
$$= (1/6)\log^* J_F(m) + (1/30)(\log^* J_F(m) - 6\log^*(m+1) - 9\log m - 30) \geqslant$$
$$\geqslant (1/6)\log^* J_F(m) + (1/30)\left(2^{2^{2,5m+2}}(J_F(m-1))^{2m} - 6\log^*(m+1) -\right.$$
$$\left. - 9\log m - 30\right) \geqslant (1/6)\log^* J_F(m) + (1/30)\left(2^{2^{2,5m+2}} - 6(m+1) - 9m - 30\right) \geqslant$$
$$\geqslant (1/6)\log^* J_F(m).$$

3. В силу того, что $L_{\text{н.п.}}(f) = A_F n$, для любого m, $2 \leqslant m \leqslant A_F - 1$, либо не выполнено условие (1), либо нормальная последовательность с удельной сложностью m содержит менее n членов. Поэтому справедливо хотя бы одно из неравенств

$$\log^* J_F(m) \leqslant 2^{2^{2,5m+2}}(J_F(m-1))^{2m},$$
$$(1/6)\log^* J_F(m) \leqslant n.$$

Следовательно,

$$\log^* J_F(m) \leqslant \max\left(6n,\ 2^{2^{2,5m+2}}(J_F(m-1))^{2m}\right). \tag{3}$$

4. Докажем лемму при $m = 2$. Неравенство (3) принимает в этом случае вид

$$\log^* J_F(2) \leqslant \max(6n,\ 2^{128}(J_F(1))^4),$$

который совпадает с утверждением леммы для $m = 2$.

5. Для $m > 2$ докажем лемму индукцией по m. Применив к обеим частям неравенства (3) функцию $\log^*$, оценим

$$\log^*\log^* J_F(m) \leqslant \max\left(\log^* 6n,\ \log^*\left(2^{2^{2,5m+2}}(J_F(m-1))^{2m}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \max\left(6n,\ \log^*\left(2^{2^{2,5m+2}}\right) + \log^*(J_F(m-1))^{2m}\right) =$$
$$= \max(6n,\ (2 + \log^*(2{,}5m+2)) + (1 + \log^*(2m\log J_F(m-1)))) \leqslant$$
$$\leqslant \max(6n,\ 2 + \log^* 4m + 1 + \log^* 2m + \log^*\log J_F(m-1)) \leqslant$$
$$\leqslant \max(6n,\ 2 + 2\log^* m + \log^* 4 + \log^* 2 + \log^* J_F(m-1)) =$$
$$= \max(6n,\ 5 + 2\log^* m + \log^* J_F(m-1)).$$

К обеим частям полученного неравенства

$$\log^*\log^* J_F(m) \leqslant \max(6n,\ 5 + 2\log^* m + \log^* J_F(m-1))$$

еще $m-3$ раза применим функцию $\log^*$. Получим

$$\underbrace{\log^*\ldots\log^*}_{m-1} J_{\mathbf{F}}(m)\leqslant$$
$$\leqslant \max(\underbrace{\log^*\ldots\log^*}_{m-3} 6n,\ 5+2\log^* m+\underbrace{\log^*\ldots\log^*}_{m-2} J_{\mathbf{F}}(m-1))\leqslant$$
$$\leqslant \max(6n,\ 5+2\log^* m+\underbrace{\log^*\ldots\log^*}_{m-2} J_{\mathbf{F}}(m-1)).$$

Теперь воспользуемся предположением индукции — неравенством

$$\underbrace{\log^*\ldots\log^*}_{m-2} J_{\mathbf{F}}(m-1)\leqslant(m-3)(5+2\log^*(m-1))+$$
$$+\max(6n,\ 2^{128}(J_{\mathbf{F}}(1))^4).$$

Получим окончательно

$$\underbrace{\log^*\ldots\log^*}_{m-1} J_{\mathbf{F}}(m)\leqslant\max(6n,\ 5+2\log^* m+(m-3)(5+2\log^*(m-1))+$$
$$+\max(6n,\ 2^{128}(J_{\mathbf{F}}(1))^4))\leqslant(m-2)(5+2\log^* m)+\max(6n,\ 2^{128}(J_{\mathbf{F}}(1))^4).$$

Лемма 7 доказана.

Через $\mathbf{F}_T$ обозначим множество функций F: $\mathbf{Z}_+\to\{0,1\}$, для которых верно соотношение $F(T)\neq F(T+T!)$.

Лемма 8. *Для множества $\mathbf{F}_T$ имеют место оценки*

$$T+1\leqslant A_{\mathbf{F}_T}\leqslant 2(T+1).$$

Доказательство. Верхняя оценка. Множество $\mathbf{F}_T$ содержит функцию $F(x)$, равную 1 при $x=T$ и 0 при всех остальных значениях x. В силу лемм 1 и 2 из [1] для этой функции справедливо неравенство $L_F(n)\leqslant 2(T+1)n$, из которого по теореме 1 следует оценка $A_{\mathbf{F}_T}\leqslant\leqslant 2(T+1)$.

Нижняя оценка. При $n\geqslant T!+2T$ функции из $\mathbf{F}_T$ не обладают T-свойством, поэтому для каждой $f, f\in\mathbf{f}_n^{\mathbf{F}_T}$, в силу леммы 6 выполнено неравенство $L_{\text{н.п.}}(f)\geqslant(T+1)n$, т. е. бесконечные нормальные последовательности для каждой функции F из $\mathbf{F}_T$ имеют удельную сложность не менее $T+1$, и по теореме 2 получаем оценку $A_{\mathbf{F}_T}\geqslant T+1$.

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Для множества $\mathbf{F}_T$ справедливо соотношение*

$$\underbrace{\log^*\ldots\log^*}_{A-2} J(A-1)<2^{133}T^{4T},$$

где $A=A_{\mathbf{F}_T}$, $J(x)=J_{\mathbf{F}_T}(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f, f\in\mathbf{f}_n^{\mathbf{F}_T}$, где $n=$ $=T!+2T$, для которой $L_{\text{н.п.}}(f)$ принимает минимальное значение. Оно, очевидно, не превосходит An. Бесконечной нормальной последовательности, на которой достигается значение $L_{\text{н.п.}}(f)$, соответствует некоторая функция F из $\mathbf{F}_T$, следовательно, удельная сложность этой нормальной последовательности не меньше A. Таким образом, выполнено соотношение $L_{\text{н п}}(f)=An$. Воспользуемся леммой 7, положив m равным $A-1$, а n — равным $T!+2T$. Получим оценку

$$\underbrace{\log^*\ldots\log^*}_{A-2} J(A-1)\leqslant$$
$$\leqslant(A-3)(5+2\log^*(A-1))+\max(6(T!+2T),\ 2^{128}(J(1))^4).$$

Покажем, что правая часть этого неравенства меньше, чем $2^{133}T^{4T}$.

1. В силу леммы 8 имеем $A \leqslant 2T + 2$.

2. Очевидно, что $J(1) \leqslant T! + T$ (среди всех симметрических булевых функций сложность, не превосходящую числа переменных, имеют только константы, дизъюнкция, конъюнкция и их отрицания).

3. В силу того, что при неотрицательных значениях x выполнено неравенство $\log^* x \leqslant x$, можно оценить

$$(A-3)(5+2\log^*(A-1)) \leqslant (A-3)(2A+3) \leqslant$$
$$\leqslant (2T-1)(4T+7) < 2^{132}T^{4T}.$$

4. Пользуясь соотношением $T \leqslant T! \leqslant T^T$, оценим

$$\max(6(T!+2T),\ 2^{128}(J(1))^4) \leqslant \max(18T!,\ 2^{128}(T!+T)^4) \leqslant$$
$$\leqslant \max(18T!,\ 2^{132}(T!)^4) = 2^{132}(T!)^4 \leqslant 2^{132}T^{4T}.$$

Таким образом,

$$\underbrace{\log^* \ldots \log^*}_{A-2} J(A-1) \leqslant (A-3)(5+2\log^*(A-1)) +$$
$$+ \max(6(T!+2T),\ 2^{128}(J(1))^4) < 2^{132}T^{4T} + 2^{132}T^{4T} = 2^{133}T^{4T},$$

что и требовалось доказать.

Введем обозначение $X(a, b)$ для наименьшего целого неотрицательного числа n, при котором выполнено неравенство

$$\underbrace{\log^* \ldots \log^*}_{a-2} n \geqslant 2^{133}b^{4b}.$$

Очевидно, что $X(a, b)$ — неубывающая функция по каждому из своих аргументов.

Теорема 3. *Для множества* $\mathbf{F}_T$ *имеет место оценка*

$$(T+1)n - (2T+2)X(2T+2, T) \leqslant L_{\mathbf{F}_T}(n) \leqslant (2T+2)n.$$

Доказательство. По лемме 3 при $m = A_{\mathbf{F}_T}$ имеем

$$A_{\mathbf{F}_T}n - L_{\mathbf{F}_T}(n) \leqslant A_{\mathbf{F}_T}J_{\mathbf{F}_T}(A_{\mathbf{F}_T}-1),$$

следовательно,

$$A_{\mathbf{F}_T}n - A_{\mathbf{F}_T}J_{\mathbf{F}_T}(A_{\mathbf{F}_T}-1) \leqslant L_{\mathbf{F}_T}(n) \leqslant A_{\mathbf{F}_T}n.$$

Воспользовавшись леммой 9 для оценки $J_{\mathbf{F}_T}$ и леммой 8 для оценки $A_{\mathbf{F}_T}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма 10. *Если натуральное число t не превосходит* $(1/3)\log^{**}r - 2$, *то* $X(2t+2, t)$ *не превосходит* r.

Доказательство. При $1 \leqslant t \leqslant (1/3)\log^{**}r - 2$ справедлива цепочка неравенств

$$\log^{**}r \geqslant 3t+6 > 2t+3+\log 5t > 2t+3+\log(4+\log t) =$$
$$= 2t+2+\log(8+2\log t) > 2t+2+\log\log(137t^2) >$$
$$> 2t+2+\log\log(133+4t\log t).$$

Пользуясь неравенствами ([1, § B1])

$$\log^* x \leqslant \log x + 1 \quad (\text{при } x \geqslant 1),$$
$$\log^* x \leqslant \log x - 1 \quad (\text{при } x \geqslant 32),$$

оценим далее следующим образом:

$$2t+2+\log\log(133+4t\log t) \geqslant 2t+1+\log^*\log(133+4t\log t) \geqslant$$
$$\geqslant 2t+1+\log^*(1+\log^*(133+4t\log t)).$$

Заменив в последнем выражении внешний сверхлогарифм на $\log^{**}$ и воспользовавшись затем определениями функций $\log^* x$ и $\log^{**} x$, получим

$$2t + 1 + \log^*(1 + \log^*(133 + 4t\log t)) \geqslant$$
$$\geqslant 2t + 1 + \log^{**}(1 + \log^*(133 + 4t\log t)) =$$
$$= 2t + 1 + \log^{**}\log^*(2^{133}t^{4t}) = 2t + \log^{**}(2^{133}t^{4t}).$$

Таким образом, при выполнении условий леммы имеет место неравенство

$$\log^{**} r - 2t > \log^{**}(2^{133}t^{4t}).$$

Пользуясь определением функции $\log^{**} x$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\log^{**}(\underbrace{\log^* \ldots \log^*}_{2t} r) > \log^{**}(2^{133}t^{4t}).$$

Функция $\log^{**} x$ является неубывающей, поэтому

$$\underbrace{\log^* \ldots \log^*}_{2t} r > 2^{133}t^{4t},$$

что в сопоставлении с определением величины $X(2t+2,\ t)$ влечет требуемую оценку $X(2t+2,\ t) \leqslant r$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Если симметрическая булева функция n переменных f не обладает T-свойством, то для каждого t, $t \leqslant T$, имеет место оценка*

$$L(f) \geqslant (t+1)((n/2) - 2X(2t+2,\ t)).$$

Доказательство. При указанном в формулировке леммы значении t функция f не обладает t-свойством, поэтому в ее характеристической последовательности $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ для некоторого i, $t \leqslant i \leqslant n - t - t!$, выполнено соотношение $\pi_i \neq \pi_{i+t!}$.

Рассмотрим симметрическую булеву функцию $\lceil n/2 \rceil$ переменных φ, характеристической последовательностью которой является при $2i \leqslant n - t!$ последовательность

$$(\pi_{i-t}, \pi_{i-t+1}, \ldots, \pi_{i-t+\lceil n/2 \rceil}),$$

а в противном случае — последовательность

$$(\pi_{i+t+t!}, \pi_{i+t+t!-1}, \ldots, \pi_{i+t+t!-\lceil n/2 \rceil}).$$

Так определенная функция φ принадлежит множеству $\mathbf{f}^{\mathbf{F}_t}_{\lceil n/2 \rceil}$. Согласно лемме 1 ее сложность удовлетворяет соотношению

$$L(\varphi)/\lceil n/2 \rceil \leqslant L(f)/n,$$

поэтому, пользуясь теоремой 3, имеем оценку

$$L(f) \geqslant L(\varphi)(n/\lceil n/2 \rceil) \geqslant L(\varphi) \geqslant L_{\mathbf{F}_t}(\lceil n/2 \rceil) \geqslant$$
$$\geqslant (t+1)(\lceil n/2 \rceil - 2X(2t+2, t)) \geqslant (t+1)((n/2) - 2X(2t+2, t)).$$

Лемма 11 доказана.

Доказательство основной теоремы. По лемме 11

$$L(f) \geqslant \max_{1 \leqslant t \leqslant T}(t+1)((n/2) - 2X(2t+2, t)).$$

Пусть n достаточно велико (например, $\log^{**} n \geqslant 15$). Выберем t равным $\min(T,\ (1/3)\log^{**} n - 3)$. При таком выборе выполнено соотношение $1 \leqslant t \leqslant (1/3)\log^{**}(n/8) - 2$, поэтому можно воспользоваться леммой 10, согласно которой в данном случае $X(2t+2,\ t) \leqslant n/8$. Поэтому справедлива оценка

$$L(f) \geqslant (t+1)(n/4) = (n/4)\min(T+1,\ (1/3)\log^{**} n - 2).$$

Преобразуем ее к указанному в формулировке виду:

$$L(f) \geqslant (n/4)\min(T+1,\ (1/3)\log^{**} n - 2) \geqslant$$
$$\geqslant (n/20)\min(T,\ (5/3)\log^{**} n - 10) \geqslant (n/20)\min(T,\ \log^{**} n).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть f_n — любая из следующих симметрических булевых функций:*

$$f_n^1(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sum_{i=1}^{n} x_i = \lfloor n/2 \rfloor, \\ 0 & \text{при } \sum_{i=1}^{n} x_i \neq \lfloor n/2 \rfloor; \end{cases}$$

$$f_n^2(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sum_{i=1}^{n} x_i > n/2, \\ 0 & \text{при } \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant n/2; \end{cases}$$

$$f_n^3(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f_n^1(x_1, \ldots, x_n)};$$

$$f_n^4(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f_n^2(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Тогда при достаточно больших n имеет место нижняя оценка сложности вида $L(f_n) \geqslant (1/20)n\log^{**} n$.

Доказательство следует из того факта, что при достаточно больших n указанные функции не обладают $(\log^{**} n)$-свойством.

§ 5. Определение и свойства функции $\log^{**}x$

Функцию вещественного аргумента $\log^{**} x$ определим рекурсивно*):

$$\log^{**}x = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 1 + \log^{**}\log^{*}x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Свойство 1. *Функция $\log^{**} x$ является неубывающей.*

Свойство 2. *При всех значениях x справедливы оценки*

$$0 \leqslant \log^{**} x \leqslant \log^{*} x.$$

Доказательство. Неотрицательность функции $\log^{**} x$ очевидна из определения. При $x \leqslant 16$ функции $\log^{**} x$ и $\log^{*} x$ совпадают. Для доказательства при $x > 16$ неравенства $\log^{**} x \leqslant \log^{*} x$ надо заметить, что в определении функции $\log^{**} x$ все использованные функции монотонны и не превосходят соответствующих функций, используемых в определении функции $\log^{*} x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринчук М. И. О сложности реализации симметрических булевых функций контактными схемами // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3.— М.: Наука, 1991.— С. 77—114.

*) Напомним, что функция $\log^{*} x$ (сверхлогарифм) задана следующим образом [1]:

$$\log^{*} x = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 1 + \log^{*}\log_2 x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Поступило в редакцию 20.III.90