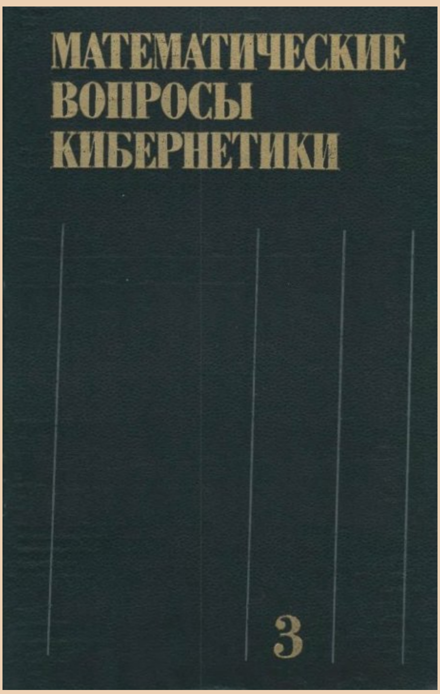

В. А. Козловский

Локальные неисправности автомата и их обнаружение

ЛОКАЛЬНЫЕ НЕИСПРАВНОСТИ АВТОМАТА И ИХ ОБНАРУЖЕНИЕ

В. А. КОЗЛОВСКИЙ

(ДОНЕЦК)

Введение

Одной из основных задач теории управляющих систем является задача контроля их функционирования. В подходе к ее решению можно выделить два направления: структурное и функциональное. Первое опирается на представление системы в виде схемы: релейно-контактной, логической, из функциональных элементов. Такое представление позволяет естественным образом описать класс неисправных систем как следствие локальных «поломок» схемы — эталона: отсутствия замыкания и размыкания контактов, наличия константных неисправностей на линиях схемы. В технической диагностике дискретных устройств наряду с константными неисправностями часто рассматриваются и другие подобные неисправности [8]; короткие замыкания, инверсии сигналов, перепутывания внешних входов устройств. В рамках структурного направления в работах Чегис И. А. и Яблонского С. В. [10], Рота [12], ряда других авторов были получены алгоритмы, решающие задачу контроля схем, реализующих в первую очередь булевы функции при указанных выше различных локальных неисправностях.

Функциональное направление формировалось в основном в рамках теории конечных автоматов, для которых задача контроля решается построением контрольного эксперимента, однозначно выделяющего автомат — эталон в классе «неисправных автоматов». При этом обычно предполагалось, что неисправными являются все автоматы с заданной верхней границей числа состояний. Это фактически означает, что неисправность может как угодно сильно нарушать функционирование эталона, чего обычно не бывает при неисправностях реальных управляющих систем. Более адекватными в таком случае являются структурные локальные неисправности.

В настоящей работе предлагается понятие локальной неисправности на функциональном уровне. При таких неисправностях «ломается» граф переходов эталона в окрестностях его отдельных состояний. Последовательности таких неисправностей образуют локально порожденный класс автоматов. Такие неисправности, например, могут быть проявлением упоминавшихся выше локальных неисправностей схемы, реализующей эталон, при определенных способах кодирования его состояний. Кроме того, как оказалось, и широкий класс структурных неисправностей на входах автомата охватывается введенным понятием. В работе изучается структура локально порожденного класса автоматов и его место в традиционном классе неисправностей. Далее изучается структура контрольных экспериментов относительно локально порожденного класса автоматов в предположении, что эталоном является автомат, у которого любые два различных состояния на любой входной сигнал дают различную реакцию. Этот выбор эталона определяется тем, что такие автоматы обладают максимальным разнообразием в поведении по сравнению с другими видами автоматов. Поэтому свойство «быть контрольным экспериментом» для такого автомата есть в определенном смысле необходимое свойство контрольных экспериментов для произвольного автомата. В заключение рассматривается задача распознавания контрольного эксперимента относительно заданного класса автоматов: по предъявленным эксперименту и автомату определить, принадлежит ли этот эксперимент дополнению множества контрольных экспериментов предъявленного автомата относительно заданного класса автоматов. Показано, что задача распознавания в случае локально порожденного класса автоматов решается полиномиальным алгоритмом, а в случае класса всех автоматов с заданным числом состояний является полиномиально полной.

§ 1. Критерий локальной порождаемости

Под автоматом, если не оговорено противное, будем понимать конечный всюду определенный автомат Мили $A=(S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y — конечные множества состояний, входов, и выходов соответственно, δ — функция переходов, λ — функция выходов. Через $\delta(s, p)$ обозначаем состояние автомата, в которое он переходит из состояния s под действием слова $p=x_1\ldots x_k$, через $\lambda(s, p)=y_1\ldots y_k$ — выходное слово, которое выдает автомат при переходе из состояния s под действием слова p. Пара (p, q) называется *вход-выходным словом, порожденным состоянием* s. Иногда ее будем отождествлять со словом $w=(x_1, y_1)\ldots$ $\ldots(x_k, y_k)$ в алфавите $X\times Y$. Длину слова p обозначим через $d(p)$. Если необходимо, при отображениях δ и λ будем ставить нижний индекс, указывающий на их принадлежность рассматриваемому автомату. Полагаем, что $|S|=n$, $|X|=m$, $|Y|=l$.

Автомат A задается в виде графа переходов. В дальнейшем иногда удобно будет отождествлять автомат со списком упорядоченных четверок вида (s, x, y, t), где s и t — состояния автомата, $x\in X$, $y\in Y$, причем $\delta(s, x)=t$ и $\lambda(s, x)=y$. Эти четверки будем называть также *дугами*. Пара (x, y) называется *отметкой дуги* (s, x, y, t). Если $s=t$, то дуга называется *петлей*. Дуги, не являющиеся петлями и отличающиеся только отметками, будем называть *параллельными*. Все рассматриваемые в дальнейшем автоматы будем считать заданными на одних и тех же множествах S, X и Y.

Окрестностью состояния s *в автомате* A назовем множество $O_A(s)$ тех его состояний, которые смежны с s в графе переходов автомата A, причем s всегда принадлежит своей окрестности.

Автомат B назовем *непосредственно порожденным автоматом* A, если B получен из A заменой некоторой дуги (s, x, y, t) дугой (s, x, y, r), где r принадлежит окрестности состояния s.

Иногда для явного указания такой замены будем писать: $(s, x, y, t)\lhd(s, x, y, r)$. Из определения следует, что любой автомат непосредственно порождает самого себя.

Автомат B назовем *локально порожденным автоматом* A, если существует такая последовательность автоматов, начинающаяся с A и кончающаяся B, в которой каждый последующий непосредственно порожден из предыдущего.

Пишем $B\preccurlyeq A$, если автомат B локально порождается автоматом A. Множество всех автоматов, локально порожденных автоматом A, назовем *локально порожденным классом* и обозначим его через $F(A)$.

Множество всех автоматов с n состояниями (заданных на множествах S, X и Y) будем называть *n-полным* классом и обозначим через F_n. Из определения следует, что отношение порождаемости $\preccurlyeq$ на этом множестве является рефлексивным и транзитивным, т. е. отношение порождаемости есть отношение предпорядка на множестве F_n. Сужение отношения $\preccurlyeq$ на множество $F(A)$ для любого A из F_n также является отношением предпорядка. По отношению предпорядка естественным образом определяется отношение эквивалентности $\equiv$ на том же множестве: $B\equiv A$ (*B эквивалентно A*) тогда и только тогда, когда $B\preccurlyeq A$ и $A\preccurlyeq B$ Фактор-множество всякого множества F по отношению эквивалентности $\equiv$, заданному на нем, т. е. множество классов эквивалентности, будем обозначать через $F/_\equiv$. Как известно [3], если $\preccurlyeq$ — предпорядок на множестве F, то на фактор-множестве $F/_\equiv$ он превращается в частичный порядок $\leqslant$: $[B]\leqslant[A]$ тогда и только тогда, когда $B\preccurlyeq A$ ($[B]$ обозначает класс эквивалентности, содержащий элемент B). Изучению структуры фактор-множества $F(A)/_\equiv$ и посвящен настоящий параграф.

Вначале определим условия порождаемости одного автомата другим. Для этого введем ряд вспомогательных понятий. Автомату A поставим в соответствие неориентированный граф $G_A=(S,\ U_A)$, множество вершин которого совпадает с множеством состояний автомата A, и две его различных вершины смежны в том и только в том случае, если они смежны в графе переходов автомата A. Граф G_A характеризует совокупность окрестностей всех состояний автомата и определяет, как будет видно в дальнейшем, границы локальных преобразований автомата A. Автомат $A'=(S',\ X,\ Y,\ \delta',\ \lambda')$ будем называть *подавтоматом* автомата A, если $S'\subseteq S$, δ' и λ' — сужения функций δ и λ соответственно на множество $S'\times X$, причем для любой пары $(s',\ x)$ из $S'\times X$ состояние $\delta(s',\ x)$ принадлежит множеству S'. Так как локальные преобразования не затрагивают функцию выходов автомата A, то в дальнейшем будем рассматривать, если не оговорено противное, соответствующий ему автомат без выхода, и будем обозначать его также через $A=(S,\ X,\ \delta)$. Если $\delta(s,\ x)=t$, то дугу, соответствующую этому переходу, будем обозначать тройкой $(s,\ x,\ t)$, а x считать отметкой этой дуги.

Подавтомат A' автомата A назовем *критическим*, если в нем нет петель, параллельных дуг и циклов длины 2.

Из определения критического подавтомата следует, что если состояние s' принадлежит критическому подавтомату, то в автомате, полученном заменой произвольной дуги $(s',\ x,\ t)$ дугой $(s',\ x,\ t')$, $t\neq t'$, $t'\in O_A(s)$, окрестность состояния s' будет уже другой. В этом смысле подавтомат и является критическим. Если максимальный по включению критический подавтомат автомата A совпадает с автоматом A, то A также будем называть критическим автоматом.

Вместо произвольных автоматов в дальнейшем будет полезно рассматривать автоматы специального вида, эквивалентные исходным по порождению.

Автомат A назовем *нормальным*, если в нем нет параллельных дуг и циклов длины 2.

Как видно из определения, всякий критический автомат является нормальным. Если же автомат A не является критическим, то ему всегда можно поставить в соответствие эквивалентный ему по порождению нормальный автомат, например, следующим образом. Пусть число дуг, инцидентных одновременно двум различным состояниям s и t в автомате A не меньше двух. Зафиксируем среди них одну, а все остальные дуги заменим петлями при соответствующих вершинах, т. е. если, например, дуга $(s,\ x,\ t)$ не фиксировалась, то она заменяется петлей $(s,\ x,\ s)$. Очевидно, что порожденный таким образом автомат A_N является нормально эквивалентным (по порождению) исходному автомату. Всякий такой автомат будем называть нормальной формой автомата A. Ясно, что нормальная форма автомата единственна лишь в случае, когда сам автомат является нормальным.

Произвольные преобразования, вообще говоря, выводят из класса нормальных автоматов. Выделим из множества локальных преобразований такие, которые сохраняют класс нормальных автоматов. Пусть дуги (s, x, t) и (t, x', t') принадлежат автомату A. Последовательность из двух преобразований $(t, x', t)\triangleleft(t, x', s)$, $(s, x, t)\triangleleft(s, x, s)$ назовем *элементарным нормальным преобразованием* (запишем это как $(s, x, t^0)\triangleleft\triangleleft(t, x', s^0))$, а последовательность элементарных нормальных преобразований — *нормальным преобразованием*. Автомат B, полученный из A нормальным преобразованием, назовем *нормально порожденным автоматом* A. Как следует из определения, нормальные преобразования обратимы, поэтому если автомат B нормально порождается автоматом A, то и A нормально порождается автоматом B. В связи с этим A и B будем называть также нормально эквивалентными.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия и результаты теории потоков в сетях, приведенные, например, в [2]. *Сетью* называют ориентированный связный граф $N=(V, U)$ обычно без петель с двумя выделенными вершинами (источником и стоком), каждой дуге которого приписано неотрицательное число $c(u)$, называемое *пропускной способностью дуги*. Пусть v — вершина сети. Обозначим через $U^-(v)$ множество дуг, входящих в v, а через $U^+(v)$ — множество дуг, выходящих из v. Функция f, заданная на множестве дуг сети и принимающая действительные значения, называется *потоком в сети*, если она удовлетворяет условию: для любой вершины v, кроме выделенных, выполняется равенство

$$\sum_{u\in U^+(v)} f(u) - \sum_{u\in U^-(v)} f(u) = \operatorname{div}_f(v) = 0.$$

Если для выделенной вершины s выполнено $\operatorname{div}_f(s)\geqslant 0$, то эта величина называется *мощностью потока* f, а сама вершина s — *источником*. Вторая выделенная вершина t тогда называется *стоком*. Поток f называется *суммой потоков* $f_1, f_2, \ldots, f_k$, если $f(u)=\sum_{i=1}^{k} f_i(u)$ для любой дуги u сети. Если f обладает наибольшей мощностью среди всех потоков в сети, таких, что $f(u)\leqslant c(u)$ для любой дуги u из U, то он называется *максимальным потоком*. Если при этом для любой дуги u из $U^-(t)$ выполняется равенство $f(u)=c(u)$, то поток называется *насыщающим*. «*Потребностью*» $d(v)$ *вершины* v сети называется величина, равная пропускной способности дуги, идущей из v в сток t, если она существует, и нулю в противном случае, а «*потребностью*» $d(V')$ *множества вершин* $V'\subseteq\subseteq V$ — величина $\sum_{u\in V'} d(v)$. Через $c(U^-(V'))$ обозначим сумму пропускных способностей дуг, входящих во множество V'. Справедлива

Теорема [2]. *Насыщающий поток в сети $N=(V, U)$ существует тогда и только тогда, когда для любого множества $V'\subseteq V$ ее вершин, не содержащего источника и стока, выполняется неравенство $c(U^-(V'))\geqslant d(V')$.*

Используя эту теорему, докажем справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.1. *Нормальные автоматы A и B эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

1) *окрестности любого состояния $s\in S$ в автоматах A и B совпадают;*
2) *критические подавтоматы этих автоматов также совпадают.*

Доказательство. Пусть A и B нормально эквивалентны. Из определения локальных преобразований следует, что они не увеличивают окрестности состояний и критические подавтоматы. Отсюда и следует необходимость приведенных условий.

Обратно, пусть для автоматов A и B выполняются условия 1) и 2). Этой паре автоматов поставим в соответствие сеть $N(A, B)$ следующим образом: в графе переходов автомата A удалим петли и отметки всех дуг, а ориентацию всех дуг изменим на противоположную; к полученному графу добавим две вершины s (источник) и t (сток). Проведем дуги из s к тем вершинам v сети, для которых $\Delta_{A-B}(v) = d_A^0(v) - d_B^0(v) > 0$, где $d_A^0(v)$ — число петель при вершине v автомата A. Пропускные способности для этих дуг положим равными $\Delta_{A-B}(v)$. Аналогично, из вершин v, для которых $\Delta_{A-B}(v) < 0$, проведем дуги в вершину t и положим их пропускные способности равными $-\Delta_{A-B}(v)$. Пропускные способности остальных дуг считаем равными единице. Сеть $N(A, B)$ полностью определена. Покажем, что в этой сети существует насыщающий поток из s в t.

Пусть в автомате A для любого подмножества Q его состояний $U_A^0(Q)$, $U_A^+(Q)$, $U_A^-(Q)$, $U_A(Q)$ суть множества петель при вершинах $v \in Q$, дуг, выходящих из Q, дуг, входящих в Q и внутренних дуг множества Q соответственно. Через S^+ обозначим множество вершин $v \in S$, для которых $\Delta_{A-B}(v) > 0$, а через S^- — множество вершин $v \in S$, для которых $\Delta_{A-B}(v) < 0$. Справедливо равенство: $|U_A^+(Q)| + |U_A^0(Q)| = |U_B^+(Q)| + |U_B^0(Q)|$. Пусть $S_Q = Q \cap S^+$, $T_Q = Q \cap S^-$. Очевидно

$$|U_A^0(Q)| = |U_A^0(S_Q)| + |U_A^0(T_Q)| + |U_A^0(Q - (S_Q \cup T_Q))|,$$
$$|U_B^0(Q)| = |U_B^0(S_Q)| + |U_B^0(T_Q)| + |U_B^0(Q - (S_Q \cup T_Q))|,$$
$$|U_A^0(Q - (S_Q \cup T_Q))| = |U_B^0(Q - (S_Q \cup T_Q))|$$

по определению S_Q и T_Q. Тогда

$$|U_A^+(Q)| + |U_A^0(S_Q)| + |U_A^0(T_Q)| = |U_B^+(Q)| + |U_B^0(S_Q)| + |U_B^0(T_Q)|,$$
$$|U_A^+(Q)| + |U_A^0(S_Q)| - |U_B^0(S_Q)| = |U_B^+(Q)| + |U_B^0(T_Q)| - |U_A^0(T_Q)|.$$

Из определения величины $d(Q)$ следует, что для сети $N(A, B)$ справедливо равенство $d(Q) = |U_B^0(T_Q)| - |U_A^0(T_Q)|$, и

$$c\left(U_N^-(Q)\right) = |U_A^+(Q)| + |U_A^0(S_Q)| - |U_B^0(S_Q)|,$$

где $c\left(U_N^-(Q)\right)$ — пропускная способность множества дуг сети $N(A, B)$, входящих в Q. Так как $|U_A^0(S_Q)| - |U_B^0(S_Q)| \geqslant 0, |U_A^+(Q)| \geqslant 0$, $|U_B^+(Q)| \geqslant 0$, то $C\left(U_N^-(Q)\right) \geqslant d(Q)$. Следовательно, по теореме о насыщающем потоке такой поток f в сети $N(A, B)$ существует. Как известно, этот поток можно представить в виде суммы потоков единичной мощности, $f = \sum_{i=1}^{k} f_i$, вдоль некоторых путей, идущих из s в t. Каждому такому пути поставим в соответствие нормальное преобразование автомата A, в результате которого петля из некоторого состояния v, $v \in S^+$, «переносится» в некоторое состояние w, $w \in S^-$, а дуги пути при этом изменяют ориентацию. Пусть $s v_1 v_2 \ldots v_l t$ — некоторый путь в сети из s в t, и f_i — поток единичной мощности вдоль него. Тогда в автомате A из состояния v_l в состояние v_1 существует путь, состоящий из дуг (v_l, x_l, v_{l-1}), $(v_{l-1}, x_{l-1}, v_{l-2})$, ..., (v_2, x_2, v_1). Кроме того, при вершине v_1 имеется петля (v_1, x_1, v_1), так как в сети $N(A, B)$ из s в v_1 ведет дуга. Определим последовательность нормальных преобразований, соответствующую потоку f_i: $(v_2, x_2, v_1^0) \lhd (v_1, x_1, v_2^0)$, $(v_3, x_3, v_2^0) \lhd (v_2, x_2, v_3^0)$, ..., $(v_l, x_l, v_{l-1}^0) \lhd (v_{l-1}, x_{l-1}, v_l^0)$. Выполнив для каждого потока f_i, $i=1, \ldots, k$, все такие преобразования, получим автомат A', нормально эквивалентный автомату A. От автомата B он отличается, может быть, только ориентацией некоторых не пересекающихся по дугам циклов, если не учитывать отметки дуг. Пусть $C = v_0v_1 \ldots v_kv_0$ — один из таких циклов. Очевидно, что этот цикл не принадлежит ни одному из критических подавтоматов автомата A. Тогда либо какая-то вершина v_i этого цикла имеет петлю, либо существует путь p' из этой вершины в вершину v', имеющую петлю. Описанным выше способом вдоль пути p' строится последовательность нормальных преобразований, осуществляющая «перенос» петли из вершины v' в вершину v_i. При этом ориентация дуг пути p' меняется на противоположную. Аналогичным образом определяются нормальные преобразования, «переносящие» петлю из состояния v_i вдоль цикла снова в то же состояние. Теперь ориентация этого цикла совпадает с его ориентацией в автомате B. Остается теперь лишь «вернуть» с помощью нормальных преобразований петлю из состояния v_i в состояние v'. Ориентация пути p', противоположная исходной, позволяет это сделать. При этом ориентация этого пути возвращается к исходной. Поступив таким же образом с остальными циклами, получим автомат A'', нормально эквивалентный автомату A.

Автомат A'', если не принимать во внимание метки дуг, совпадает с автоматом B. Пусть дуга (s, x, t) в автомате A'' отличается от соответствующей дуги (s, x', t) в автомате B лишь меткой, т. е. $x \neq x'$. Значит, состояние s не принадлежит критическому подавтомату автомата A'', т. е. существует путь из состояния s в некоторое состояние v, при котором существует петля. Перенесем ее нормальными преобразованиями в состояние s, получившийся в результате этого автомат A''' имеет петлю (s, x'', s). Пусть в A''' дуга с меткой x' есть (s, x', r). Последовательность локальных преобразований $(s, x'', s) \lhd (s, x'', r)$, $(s, x', r) \lhd \lhd (s, x', t)$, $(s, x, t) \lhd (s, x, s)$ приводит к автомату, в котором, как и в автомате B, дуга, идущая из s в t имеет ту же отметку x'. Нормальными преобразованиями вдоль пути p'' (имеющего противоположную по сравнению с исходной ориентацию) петлю при вершине s возвращаем в состояние v. Получившийся автомат A^{IV} отличается от автомата B отметками уже меньшего по сравнению с автоматом A''' числа дуг. Применив для этих дуг описанные преобразования, получим автомат B. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству критерия порождаемости одного автомата другим.

Теорема 1.1. *Автомат A локально порождает автомат B тогда и только тогда, когда выполняются два условия*:

1) *для любого состояния s справедливо включение $O_B(s) \subseteq O_A(s)$*;

2) *всякий критический подавтомат автомата B является критическим подавтоматом автомата A.*

Доказательство. При локальных преобразованиях автомата A, как следует из определения, окрестности состояний могут уменьшаться. Если при этом изменилась окрестность некоторого состояния, принадлежащего критическому подавтомату, то это состояние уже не будет принадлежать критическому подавтомату порожденного автомата. Отсюда следует необходимость условий 1) и 2).

Обратно, пусть условия теоремы выполняются Для автоматов A и B построим их нормальные формы A_N и B_N. Вначале предположим, что для любого состояния его окрестности в автоматах A и B совпадают. Покажем, что тогда совпадают и их критические подавтоматы. Действительно, пусть $A' = (S, X, \delta)$ — некоторый критический подавтомат автомата A. Из определения G_A следует, что число ребер в графе $G_{A'}$ равно mn_1, где n_1 — число состояний автомата A', $n_1 \leqslant n$. Так как окрестности всех состояний у автоматов A и B совпадают, то граф $G_{A'}$ является подграфом графа G_B. Значит, состояния множества S' образуют критический подавтомат B' автомата B. Из условия 2) следует, что $B'=A'$, т. е. критические подавтоматы автоматов A и B совпадают. Но тогда автоматы A_N и B_N в силу леммы 1.1 эквивалентны (по порождению), а значит, эквивалентны автоматы A и B.

Пусть теперь для некоторого состояния $s\in S$ выполняется строгое включение $O_B(s)\subset O_A(s)$. Тогда в графе G_A имеется множество $U'=\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ ребер, которые отсутствуют в графе G_B. Каждому ребру $u_i\in U'$, инцидентному состояниям s_i и t_i, в автомате A_N соответствует дуга (s_i, x_i, t_i). Выполнив для каждой такой дуги локальное преобразование $(s_i, x_i, t_i)\lhd(s_i, x_i, s_i)$, получим автомат C, окрестности состояний которого совпадают с окрестностями этих состояний в автомате B_N, а критические подавтоматы являются критическими подавтоматами автомата A_N. Так как условие 2) выполняется и для автомата B_N, то, рассуждая как в предыдущем случае, получаем равенство критических подавтоматов у автоматов C и B_N. Следовательно, по лемме 1.1, эти автоматы эквивалентны, а, значит, эквивалентны и автоматы C и B. Теорема доказана.

Доказательства леммы 1.1 и теоремы 1.1 конструктивны и фактически дают процедуру поиска последовательности локальных преобразований, которыми из автомата A можно породить автомат B, по схеме: $A\leftrightarrow A_N\longrightarrow C\leftrightarrow B_N\leftrightarrow B$. При переходе от C к B_N для нахождения максимального потока в сети $N(C, B_N)$ можно воспользоваться любым из известных алгоритмов построения максимального потока [2].

Полученный критерий позволяет теперь описать структуру фактор-множества $F(A)|_{\equiv}$.

Теорема 1.2. *Множество $F(A)|_{\equiv}$, упорядоченное по отношению $\leqslant$, изоморфно некоторой булевой алгебре.*

Доказательство. Вначале заметим, что если автоматы B и C локально порождаются автоматом A, причем $O_B(s)=O_C(s)$ для любого $s\in S$, то B и C эквивалентны по порождению. Доказательством этого утверждения фактически является вторая часть доказательства теоремы 1.1. Тогда каждому классу эквивалентности $[B]$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие граф $G_B=(S, U_B)$. Из вышесказанного следует, что как только $[B]\leqslant[C]$, B, $C\in F(A)$, то $U_B\subseteq U_C$, и обратно. Следовательно, множество $F(A)|_{\equiv}$, упорядоченное по отношению $\leqslant$, изоморфно множеству U_A ребер графа G_A, упорядоченному по отношению включения $\subseteq$. Тогда на множестве $F(A)|_{\equiv}$ можно ввести булевы операции $\bigvee$, $\bigwedge$, $\overline{}$ следующим образом:

$$[B]\bigvee[C]=[D]\Leftrightarrow U_B\bigcup U_C=U_D,$$

$$[B]\bigwedge[C]=[D]\Leftrightarrow U_B\bigcap U_C=U_D,$$

$$\overline{[B]}=[D]\qquad\Leftrightarrow U_A-U_B=U_D.$$

Теорема доказана.

В заключение параграфа покажем, что локально порожденными в смысле введенного определения являются также неисправности, часто рассматривающиеся в технической диагностике [8].

Вместо абстрактного входного алфавита будем рассматривать структурный алфавит, т. е. под входным алфавитом будем понимать множество $X=\{x_0, x_1, \ldots, x_{2^k-1}\}$ двоичных наборов размерности k, $m=2^k$. Считаем, что набор x_i есть двоичное представление числа i.

Пусть f — некоторое отображение множества X в себя. Обозначим через $f(A)$ такой автомат B, который отличается от A лишь функцией переходов δ_B, определяемой следующим образом: $\delta_B(s, x)=\delta(s, f(x))$.

Пусть функция f принадлежит некоторому множеству R функций, отображающих X в себя. Тогда $R(A)=\{f(A)\mid f\in R\}$.

Пусть R состоит из всех не взаимно однозначных функций. Покажем, что $R(A)\subseteq F(A)$. Действительно, из определения автомата $f(A)=$ $=B$ следует, что для любого s, $s\in S$, справедливо включение $O_B(s)\subseteq$ $\subseteq O_A(s)$. Так как для некоторых различных элементов x_1, x_2 из X $f(x_1)=f(x_2)$, то из любого состояния s, $s\in S$, в автомате B исходит, по крайней мере, две параллельные дуги. Значит, B не имеет критических подавтоматов. Отсюда, по теореме 1.2, следует, что $f(A)\in F(A)$.

Зададим функцию f следующим образом. Зафиксируем номера $i_1, i_2, \ldots, i_l$, $1\leqslant i_j\leqslant k$, $1\leqslant j\leqslant l$, $1\leqslant l\leqslant k$, и каждому номеру i_j поставим в соответствие двоичную константу $\alpha\in\{0, 1\}$. Тогда, если $x\in X$, $x=(\beta_1, \ldots, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_l}, \ldots, \beta^k)$, то $f(x)=(\beta_1, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots, \beta_k)$. Если $l=1$, то называется *одиночной константной неисправностью* (на входе автомата), в противном случае — *кратной*. Автомат $f(A)$ также называется *константной неисправностью*. Из определения константных неисправностей и только что доказанного включения следует, что константные неисправности являются локально порожденными.

В технической диагностике часто рассматриваются константные неисправности, которые ломают не только функцию переходов, но и функцию выходов. Если f — такая неисправность, и $B=f(A)$, то $\delta_B(s, x)=$ $=\delta(s, f(x))$ и $\lambda_B(s, x)=\lambda(s, f(x))$ для любых s, x, $s\in S$, $x\in X$. Вообще говоря, такие неисправности уже не включаются в класс $F(A)$. Но если функция выходов λ такова, что для любых различных x_1, x_2 из X $\lambda(s, x_1)=\lambda(s, x_2)$ для каждого $s\in S$, то и эти неисправности являются локально порожденными.

Другим широким классом неисправностей на входах автомата являются *короткие замыкания*. Принято считать, что появление короткого замыкания на входах автомата эквивалентно появлению на входах дополнительной комбинационной схемы, реализующей дизъюнкцию или конъюнкцию, в зависимости от технологии изготовления устройства, некоторого числа переменных. Более точно функция f при этом задается следующим образом: если $i_1, i_2, \ldots, i_l$ — фиксированные номера (обычно соседние и $l=2$), а $x=(\beta_1, \ldots, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_l}, \ldots, \beta^k)$, то $f(x)=(\beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_{i_1}*\ldots*\beta_{i_l}, \ldots, \beta_{i_1}*\ldots*\beta_{i_l}, \ldots, \beta_k)$, где $*$ есть либо $\vee$, либо $\wedge$. Обозначим класс всех таких функций через KZ. Легко проверить, что такие функции входят в класс R, и, значит, соответствующие им неисправности являются локально порожденными.

Пусть теперь R — множество всех взаимно однозначных функций на множестве X. Такого типа функциями задаются инверсии и перепутывания на входах автомата. Точнее, функцию f называем инверсией, если для выбранных номеров $i_1, i_2, \ldots, i_l$ на любом наборе $x=(\beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_l}, \ldots, \beta_k)$ $f(x)=(\beta_1, \ldots, \bar\beta_{i_1}, \ldots, \bar\beta_{i_l}, \ldots, \beta_k)$. Функция f называется *перепутыванием*, если существует такая перестановка π на множестве номеров $i_1, i_2, \ldots, i_l$, что $f(x)=(\beta_1, \ldots, \beta_{\pi(i_1)}, \ldots, \beta_{\pi(i_l)}, \ldots, \beta_k)$. Если автомат имеет критический подавтомат и f — взаимно однозначная функция, то $f(A)\notin F(A)$. Как только в качестве эталона будет выбран автомат без критических подавтоматов, $f(A)$ будет принадлежать $F(A)$ в силу того, что окрестности у автомата $f(A)$ либо остаются без изменений по сравнению с автоматом A, либо уменьшаются.

Таким образом, практически все рассматриваемые в технической диагностике неисправности на входах автомата могут быть локально порожденными в смысле введенного определения.

§ 2. Базис локальной порождаемости n-полного класса автоматов

Базисом n-полного класса F_n назовем минимальное по мощности множество M автоматов, которыми в совокупности локально порождаются все автоматы из F_n, т. е.

$$F_n = \bigcup_{A \in M} F(A).$$

Из определения отношения порождаемости следует, что оно сохраняет функцию выходов. В свою очередь, множество F_n распадается на непересекающиеся подмножества $F_n(\lambda)$, каждое из которых состоит из всех автоматов с одной и той же функцией λ. В соответствии с этим базис M также распадается на непересекающиеся равномощные подмножества M_λ. Поэтому зафиксируем некоторую функцию выходов λ и под базисом в дальнейшем будем понимать базис M_λ множества $F_n(\lambda)$.

В дальнейшем нам понадобится понятие турнира из теории графов [9]. Ориентированный граф $\Gamma = (V, U)$ называется *турниром*, если для каждой пары различных вершин s, t в этом графе имеется дуга, идущая из s в t или в обратном направлении, и других дуг нет. *Количеством очков вершины* s графа называется число дуг, исходящих из нее. Для турниров справедливо следующее утверждение.

Теорема [9]. *Расстояние от вершины с наибольшим количеством очков до любой другой равно* 1 *или* 2.

Здесь под расстоянием от вершины s до вершины t понимается число дуг в кратчайшем пути, ведущем из s в t.

Перейдем теперь к характеристике базиса множества $F_n(\lambda)$.

Теорема 2.1. *При $m \leqslant (n-1)/2$ базис M_λ единственный и состоит из тех и только тех автоматов A, которые удовлетворяют условию: число ребер в графе G_A равно mn. При $m > (n-1)/2$ все базисы M_λ одноэлементны и каждый из них состоит из некоторого автомата A, у которого граф G_A полный.*

Доказательство. Пусть $m \leqslant (n-1)/2$, и число ребер в графе G_A равно mn. Тогда A — критический автомат. Если автомат B удовлетворяет этому же условию, то A и B не порождают друг друга. Пусть теперь $C \in F_n$ и $|U_C| < mn$, т. е. в автомате C_N имеются петли. Предположим, что (s, x, s) — единственная петля в C_N. Если s и t не смежны в C_N, то заменив эту петлю дугой (s, x, t), получим автомат $B \geqslant C_N$, у которого $|U_B| = mn$. Пусть теперь s смежно со всеми состояниями C_N, а состояния t и r не смежны в C_N. Тогда существует путь из t в s длины 1 или 2. Действительно, из t исходит m дуг, а из s $m-1$ дуг, и если дуги (t, x, s) в C_N нет, то среди состояний, в которые идут дуги из состояния t, найдется хотя бы одно, в которое не идут дуги из состояния s. Так как s смежно со всеми состояниями, то значит, в s идет дуга из состояния t. Но тогда петлю (s, x, s) можно «перенести» в состояние t, а затем заменить ее дугой, ведущей из t в r. Полученный автомат B порождает C, причем $|U_B| = mn$. Предположим, что теперь всякий автомат с не более, чем k петлями, $k \geqslant 1$, порождается некоторым автоматом, у которого $|U_A| = mn$, и пусть C_N имеет $k+1$ петель. Пусть состояние s имеет наибольшее число петель. Если s не смежно с r, то можно получить автомат с k петлями, порождающий автомат C_N. Пусть s смежно со всеми состояниями, а t и r не смежны. Если существует вершина q с таким же числом петель, что и в s, то из q в s или из s в q можно перенести петлю. Таким образом, в новом автомате, эквивалентном старому, единственная вершина (например, s) имеет наибольшее число петель. Тогда рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что существует путь длины 1 или 2 из t в s. Перенеся петлю вдоль этого пути из s в t, а затем заменив ее дугой, получим автомат с k петлями, порождающий исходный. Отсюда, по принципу математической индукции, следует справедливость теоремы при $m \leqslant (n-1)/2$.

Пусть теперь автомат A таков, что граф G_A полный, и $m > (n-1)/2$. Покажем, что A не имеет критических подавтоматов. Для этого достаточно показать, что для любой вершины s, $s \in S$, существует нормальная форма A_N, в которой при s есть петля. Пусть A_N — нормальная форма A, при s нет петли, т. е. из s исходит m дуг, идущих в m различных состояний. Так как $m > (n-1)/2$, то в A_N существует состояние t, при котором есть петля. Тогда, по теореме [9], из s в t существует путь длины 1 или 2. Но тогда существует нормальное преобразование автомата A_N, переносящее петлю из t в s. Так как s произвольно, то отсюда следует, что в A_N, а, значит, и в A, нет критических подавтоматов. Но тогда два автомата A и B, у которых G_A и G_B полные и $m > (n-1)/2$, эквивалентны. Всякий другой автомат C, у которого G_C не является полным, также не имеет критических подавтоматов, и порождается, следовательно, любым автоматом A, у которого G_A полный. Теорема доказана.

Теорема 2.1 и 1.2 позволяют теперь описать структуру фактор-множества $F_n/_\equiv$.

Следствие 2.1. *Множество $F_n/_\equiv$ есть объединение некоторого множества булевых алгебр.*

Следующее свойство локально порожденных классов в определенной степени характеризует плотность, с которой булевы алгебры покрывают множество $F_n/_\equiv$.

Теорема 2.2. *Если $A \in M_\lambda$ и $m \leqslant (n-1)/2$, то для любого автомата $B \in F(A)$, $B \neq A$, найдется такой автомат $C \in M_\lambda$, что $B \in F(C)$.*

Доказательство. Пусть $B \in F(A)$, $|U_A| - |U_B| = 1$. Тогда в B_N имеется ровно одна петля, например, при вершине s. Пусть в A из s в t идет дуга, а в B она заменена петлей. Тогда, как показано ранее, существует локальное преобразование, меняющее метки дуг при вершине s. Заменив затем петлю при s дугой, идущей в t, получим автомат $C \in M_\lambda$, порождающий B, но не эквивалентный A. Ясно, что это же справедливо и для всех $B' \in F(B)$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что булевы алгебры достаточно плотно покрывают фактор-множество $F_n/_\equiv$.

§ 3. Контрольные эксперименты относительно базиса n-полного класса

Введем ряд определений, необходимых в дальнейшем.

По определению под *диагностируемым порядка* 1 *автоматом* (ОД-1-автоматом) понимается автомат, у которого любое входное слово (кроме пустого), является диагностическим, т. е. любые два состояния автомата различимы любым непустым входным словом. Такой автомат обладает наиболее выраженными диагностическими свойствами по сравнению с другими автоматами, что позволяет просто решить для них ряд вопросов, возникающих при построении контрольных экспериментов. В качестве одного из основных при этом выступает вопрос об исходном множестве идентификаторов состояний [4], необходимом для построения эксперимента.

Пусть s — состояние автомата A. Через λ_s обозначим множество вход-выходных слов, порождаемых состоянием s, а через λ_s^1 — подмножество λ_s из слов единичной длины. Аналогично, через Ψ_s обозначается множество вход-выходных слов, порождаемых состояниями автомата A и оканчивающихся в состоянии s, а через Ψ_s^1 — подмножество Ψ_s из слов единичной длины.

Множеством экспериментов автомата A называется множество вход-выходных слов

$$\Phi_A = \bigcup_{s \in S} \lambda_s.$$

Подмножество множества Φ_A, состоящее из слов длины 1, будем обозначать через Φ_A^1.

Пусть A и B — некоторые (вообще говоря, частичные) автоматы.

Гомоморфизмом автомата A в автомат B будем называть, как обычно, любое отображение φ множества состояний автомата A в множество состояний автомата B, удовлетворяющее условию: если автомат A содержит дугу (s, x, y, t), то автомат B содержит дугу $(\varphi(s), x, y, \varphi(t))$.

Вход-выходному слову $w = (x_1, y_1)(x_2, y_2)\ldots(x_k, y_k)$ поставим в соответствие частичный автомат $A(w) = (S_w, X, Y, \delta_w, \lambda_w)$, состоящий из дуг (v_1, x_1, y_1, v_2), (v_2, x_2, y_2, v_3), ..., (v_k, x_k, y_k, v_{k+1}). Если слово w порождается некоторым состоянием s автомата A, то естественным образом определяется гомоморфизм φ автомата $A(w)$ в автомат A:

$$\varphi(v_1) = s, \ \varphi(v_{i+1}) = \delta(s, x_1, \ldots, x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Как обычно, два состояния s и t автомата называются *эквивалентными*, если $\lambda_s = \lambda_t$. Аналогичо определяется эквивалентность состояний, принадлежащих различным автоматам. Два автомата называются *эквивалентными*, если для любого состояния одного из них найдется эквивалентное ему состояние другого и обратно. Автомат A называется *приведенным*, если все его состояния попарно неэквивалентны.

Пусть F — некоторое множество автоматов, и A — выделенный в нем автомат, называемый эталоном.

Подмножество $\Phi_A(F)$ множества Φ_A называется *множеством контрольных экспериментов автомата A относительно класса F*, если для любого автомата B из F такого, что $\Phi_A(F) \cap \Phi_B \neq \varnothing$, в автомате B имеется подавтомат, эквивалентный автомату A. Элементы множества $\Phi_A(F)$ называются *контрольными экспериментами для автомата A относительно класса F*.

Перейдем к изложению полученных результатов. В работе [4] для анализа структуры контрольного эксперимента было предложено использовать так называемый предельный автомат — частичный автомат, строящийся по исходному слову. Однако при этом необходима некоторая априорная информация об идентификаторах состояний исследуемого автомата. Понятие идентификатора состояния, впервые введенное в работе [4], нам понадобится в дальнейшем. *Идентификатором состояния s автомата A* называется такая пара $I = (P, Q)$ множеств вход-выходных слов, где $P \subseteq \Psi_s$, $Q \subseteq \lambda_s$, что любое состояние t, $t \in S$, для которого справедливы включения $P \subseteq \Psi_t$, $Q \subseteq \lambda_t$, эквивалентно s. Если $P = \varnothing$, то Q называется *начальным идентификатором*, если $Q = \varnothing$, то P — *конечный идентификатор*.

Исходной информации об идентификаторах исследуемого автомата может и не быть. Тогда эту информацию приходится извлекать из самого слова w. В общем случае эта задача является весьма сложной. Однако в случае, когда рассматриваются ОД-1-автоматы, начальное множество идентификаторов легко определить. Рассмотрим этот случай.

Предположим, что в дальнейшем автомат A, если не оговорено противное, является ОД-1-автоматом. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Если $w \in \Phi_A(M)$, то $\Phi_A^1 = \Phi_{A(w)}^1$.*

Доказательство. Так как $w \in \Phi_A$, то $\Phi_{A(w)}^1 \subseteq \Phi_A^1$. Пусть $(x, y) \in \Phi_A^1 - \Phi_{A(w)}^1$. Тогда в силу того, что A есть ОД-1-автомат, в нем имеется единственная дуга (s, x, y, t) с отметкой (x, y). Заменив в A эту дугу некоторой дугой (s, x, y', t), где $y \neq y'$, получим неизоморфный автомату A автомат $A' \in M$. Ясно, что $w \in \Phi_{A'}$, и, значит, $w \in \Phi_A(M)$. Лемма доказана.

Пусть для слова $w \in \Phi_A$ равенство $\Phi_A^1 = \Phi_{A(w)}^1$ выполняется. Если для автомата B слово w принадлежит Φ_B, то B также является ОД-1-автоматом, т. е. каждое слово $(x, y) \in \Phi_A^1$ является начальным идентификатором некоторого состояния автомата B. Поэтому множество Φ_A^1 можно принять в качестве начальной информации об идентификаторах исследуемого автомата, исходя из которой будет строиться предельный автомат. В связи со сказанным введем следующие отношения α и ε на множестве S_w: $(v_i, v_j) \in \alpha$, если $(x_i, y_i) = (x_j, y_j)$ или $(x_{i-1}, y_{i-1}) = (x_{j-1}, y_{j-1})$; $\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{\infty} \alpha^i$ есть транзитивное замыкание отношения α [3]. Из симметричности и рефлексивности α следует, что ε есть эквивалентность на множестве S_w. Покажем, что ε есть конгруентность на S_w.

Лемма 3.2. *Если $w \in \Phi_A$ и A — ОД-1-автомат, то ε есть конгруентность на множестве S_w.*

Доказательство. Пусть A — ОД-1-автомат, и вход-выходное слово w принадлежит Φ_A, т. е. существует гомоморфизм φ автомата $A(w)$ в автомат A. Предположим, что дуги (v_i, x, y, v_{i+1}) и (v_j, x, y, v_{j+1}) принадлежат автомату $A(w)$. По определению, $(v_i, v_j) \in \alpha$ и $(v_{i+1}, v_{j+1}) \in \alpha$. Так как A — ОД-1-автомат, то в нем имеется единственная дуга (s, x, y, t) с отметкой (x, y). Поэтому $\varphi(v_i) = \varphi(v_j) = s$, $\varphi(v_{i+1}) = \varphi(v_{j+1}) = t$. Тогда, если $\lambda(v_{i+1}, x')$ и $\lambda(v_{j+1}, x')$ определены, то они и равны. Следовательно, ε — конгруентность на множестве S_w состояний автомата $A(w)$. Лемма доказана.

Отношение конгруентности ε на множестве состояний автомата $A(w)$ теперь позволяет построить автомат, который и является предельным автоматом в смысле работы [4]. Обозначим его через $C(w) = (T, X, Y, \Delta, \Lambda)$, где множество состояний T этого автомата есть множество классов конгруентности ε; если $\varepsilon(v_i)$ — класс конгруентности, содержащий состояние v_i, и дуга (v_i, x, y, v_{i+1}) принадлежит $A(w)$, то $\Delta(\varepsilon(v_i), x) = \varepsilon(v_{i+1})$, $\Lambda(\varepsilon(v_i), x) = y$.

Ясно, что существует гомоморфизм θ автомата $C(w)$ в автомат A, причем $\theta(\varepsilon(v)) = \varphi(v)$, где φ — гомоморфизм автомата $A(w)$ в A.

Поставим в соответствие автомату $C(w)$ обыкновенный неориентированный граф $G(w)$: множеством его вершин является множество $T = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ состояний автомата $C(w)$; вершины E_i и E_j, $i \neq j$, соединяются ребром лишь в том случае, если $X(E_i) \cap X(E_j) \neq \varnothing$, где $X(E)$ — множество тех x, $x \in X$, для которых определено $\Delta(E, x)$. Приведем необходимое нам в дальнейшем понятие n-раскрашиваемого графа [9]. Граф называется *n-раскрашиваемым*, если существует такое отображение (*n-раскраска*) множества вершин графа в некоторое множество из n элементов, при котором смежные вершины графа имеют различные образы. Если θ — отображение некоторого множества S в множество T, то как обычно ядром этого отображения называется разбиение $\ker \theta$ на множестве S, определяемое следующим образом: два элемента принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда их образы совпадают. Две раскраски называются *изоморфными*, если их ядра совпадают. Граф назовем *однозначно n-раскрашиваемым*, если все его n-раскраски изоморфны. Ясно, что граф $G(w)$ n-раскрашиваем, так как отображение θ есть раскраска: если $\theta(E_i) = \theta(E_j)$, то $X(E_i) \cap X(E_j) = \varnothing$ в силу определения автомата $C(w)$. В работе [6] была доказана теорема, следствием которой является следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Слово w принадлежит множеству $\Phi_A(F_n)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $w \in \Phi_A$;
2) $\Phi_A^1 = \Phi_{A(w)}^1$;
3) *граф $G(w)$ однозначно n-раскрашиваем.*

Рассмотрим теперь аналогичный критерий для контрольных экспериментов относительно базиса M n-полного класса.

Пусть $w \in \Phi_A$, и $C(w)$ — предельный автомат, построенный по w. Поставим автомату $C(w)$ в соответствие граф $H(w)$ следующим образом: в графе переходов автомата $C(w)$ удалим отметки всех дуг, и снимем ориентацию; в полученном графе соединим ребрами те вершины, расстояние между которыми равно двум, или те, которые несовместимы как состояния автомата $C(w)$.

Теорема 3.2. *Слово w принадлежит множеству $\Phi_A(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются три условия:*

1) $w \in \Phi_A$;
2) $\Phi_A^1 = \Phi_{A(w)}^1$;
3) *граф $H(w)$ однозначно n-раскрашиваем.*

Доказательство. Пусть $w \in \Phi_A(M)$. Тогда условие 1) следует из определения контрольного эксперимента, а необходимость условия 2) следует из леммы 3.1. Из условий 1) и 2) следует, что если $w \in \Phi_B$, $B \in M$, то гомоморфизм φ: $C(w) \to B$ есть отображение «на». Предположим, что условие 3) не выполняется, т. е. существуют две разные раскраски θ_1 и θ_2 графа $H(w)$. Покажем вначале, что если θ — n-раскраска графа $H(w)$, то θ — также и гомоморфизм на фактор-автомат $C(w)/_\theta$, который изоморфен одному из автоматов множества M, и обратно. Итак, пусть θ — n-раскраска графа $H(w)$. Если $(a, b) \in \ker\theta$, то это означает, что $X(a) \cap X(b) = \varnothing$, и, значит, a и b совместимы. В данном случае этого достаточно, чтобы Θ была конгруенцией. Покажем, что $C(w)/_\theta$ изоморфен одному из автоматов множества M. Пусть $\theta(a) = \theta(b)$. Так как расстояние между a и b в $C(w)$ больше двух, то в $C(w)$ нет дуги (a, x, y, b); нет также следующих пар дуг: (c, x', y', a), (c, x'', y'', b); (a, x', y', c), (b, x'', y'', c); (a, x', y', c), (c, x'', y'', b). Следовательно, в $C(w)/_\theta$ нет петель, циклов длины 2 и параллельных дуг, и он полон в силу условия 2), т. е. $C(w)/_\theta$ изоморфен одному из автоматов множества M. Обратно пусть θ — гомоморфизм $C(w)$ на автомат $B \in M$, и $\theta(a) = \theta(b) = s$, $s \in S_B$, $a \neq b$. Тогда a и b совместимы, и так как $C(w)$ — предельный автомат, то $X(a) \cap X(b) = \varnothing$. Так как $B \in M$, т. е. в B нет петель, циклов длины 2 и параллельных дуг, то в $C(w)$ отсутствуют такие же дуги. Значит, расстояние между a и b больше двух, и вершины a и b не смежны в графе $H(w)$. Следовательно, θ — n-раскраска.

Пусть n-раскраски θ_1 и θ_2 графа $H(w)$ разные, т. е. $\ker\theta_1 \neq \ker\theta_2$. Тогда θ_1 — гомоморфизм на автомат $C(w)/_{\theta_1}$, а θ_2 — гомоморфизм на $C(w)/_{\theta_2}$. Так как эти автоматы являются ОД-1-автоматами и принадлежат M, то они неизоморфны, т. е. $w \notin \Phi_A(M)$.

Обратно, пусть условия 1) — 3) выполняются и $w \in \Phi_B$, $B \in M$, т. е. существует гомоморфизм θ' автомата $C(w)$ в B. В силу условий 1) и 2) B является ОД-1-автоматом и θ' — отображение «на», т. е. θ' есть n-раскраска графа $H(w)$. Если θ — гомоморфизм $C(w)$ на A, то по условию 3) $\ker\theta = \ker\theta'$, а, значит, $C(w)/_\theta$ и $C(w)/_{\theta'}$ изоморфны. Следовательно, автоматы B и A эквивалентны. Теорема доказана.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что проверка свойства «быть контрольным экспериментом» для рассмотренных классов сводится к проверке однозначной раскрашиваемости специальных графов. Эти графы достаточно близки по своей структуре, а, значит, близки по структуре и соответствующие им контрольные эксперименты. В то же время, как будет показано в следующем параграфе, контрольные эксперименты относительно локально порожденного класса в этом смысле существенно отличаются от рассмотренных случаев.

§ 4. Контрольный эксперимент относительно локально порожденного класса

Пусть A — некоторый автомат. Обозначим через $\Pi(A)$ автомат, полученный из A удалением всех одноэлементных компонент связности, т. е. всех состояний, которые инцидентны только петлям в графе переходов автомата A и назовем его *существенным подавтоматом* автомата A.

Обходом автомата A из состояния s будем называть такое вход-выходное слово $w=(p, q)$, порожденное состоянием s, что для любой дуги (r, x, y, t) автомата A слово w можно представить в виде $w = w_1(x, y)w_2$, $w_i=(p_i, q_i)$, $i=1, 2$, причем $\delta(s, p_1)=r$. Слово p иногда также будем называть обходом.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Слово w принадлежит множеству $\Phi_A(F(A))$ тогда и только тогда, когда выполняются условия*:

1) $w\in\Phi_{\Pi(A)}$;

2) $\Phi^1_{A(w)}=\Phi^1_{\Pi(A)}$;

3) *если $w=w_1(x, y)$, то (x, y) входит в слово w_1.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $w\in\Phi_A(F(A))$. Условие 1) очевидно. Если не выполняется условие 2), т. е. в автомате $\Pi(A)$ существует дуга (s, x, y, t), но (x, y) не входит в слово w, то в $F(A)$ найдется автомат A', отличающийся от A тем, что дуга (s, x, y, t) заменена петлей (s, x, y, s), если $s\neq t$, либо наоборот, петля заменяется дугой в окрестности состояния s. Такое преобразование существует, так как s принадлежит автомату $\Pi(A)$. Ясно, что $w\in\Phi_{A'}$. но A и A' не изоморфны. Аналогичные рассуждения влекут необходимость условия 3).

Достаточность. Пусть $w\in\Phi_B$ для некоторого $B\in F(A)$ и выполнены условия теоремы. Пусть также дуга (s, x, y, t) принадлежит автомату A. Так как функции выходов автоматов A и B совпадают, то в автомате B имеется дуга (s, x, y, t'). Из условия 2) следует, что пара (x, y) входит в слово w, а из условия 3) — что существует слово $(x, y)(x_1, y_1)$, входящее в w. Значит, дуга (t, x, y, r) принадлежит автомату A, а дуга (t', x, y, r') — автомату B. В силу того, что A и B являются ОД-1-автоматами с одинаковыми функциями выходов, t и t' равны. Следовательно, в автомате B имеется подавтомат $\Pi(B)$, состоящий из того же множества дуг, что и $\Pi(A)$, т. е. $\Pi(A)=\Pi(B)$. Так как одноэлементные компоненты связности сохраняются при локальной порождаемости, то, значит, равны и автоматы A и B. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Слово w принадлежит множеству $\Phi_A(F(A))$ тогда и только тогда, когда оно порождается автоматом A и имеет вид $w=w_1(x, y)$, где w_1 — обход автомата* $\Pi(A)$.

Таким образом, структура контрольных экспериментов относительно локально порожденного класса оказывается существенно более простой по сравнению с контрольными экспериментами относительно n-полного класса и его базиса, но разрыв по сложности сохраняется не всегда.

Обозначим через D множество таких автоматов, у которых во все состояния, кроме одного, входит ровно по одной дуге. Будем считать, что таким особым состоянием всегда является состояние s_1. Приведем пример ОД-1-автомата из этого класса, который понадобится нам в дальнейшем. Обозначим его через $D_{n,m}$ и положим $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$; $\delta(s_i, x_1)=s_{i+1}$ для $1\leqslant i\leqslant n-1$;

$\delta(s_n, x_1)=s_1$; для остальных i и x выполнено $\delta(s_i, x)=s_1$; $\lambda(s_i, x)=y_i$ для любых $s_i \in S$, $x \in X$. Покажем, что для любого автомата C из D всякий его обход w вида $w_1(x, y)$, где w_1 — также обход, является контрольным экспериментом относительно n-полного класса. Пусть w — слово указанного вида и для определенности считаем, что $C=D_{n,m}$. Рассмотрим предельный автомат $C(w)$, построенный по слову w. Так как w — обход, то для каждого состояния s_i, $i>1$, в w имеется по крайней мере m отрезков $(x_1, y_{i-1})(x_1, y_i)$, $(x_1, y_{i-1})(x_2, y_i)$, ..., $(x_1, y_{i-1})(x_m, y_i)$, т. е. если φ — гомоморфизм автомата $C(w)$ в $D_{n,m}$, то $|\varphi^{-1}(s_i)|=1$. Так как для любой пары $(x, y) \in \Phi^1_A$ в слове w имеется отрезок вида $(x, y)(x_1, y_1)$, то в автомате $C(w)$ из каждого состояния исходит хотя бы одна дуга. Значит, в графе $G(w)$ каждая вершина смежна с некоторой другой вершиной. Для каждого i, $i=2, \ldots, n$, вершина $\varphi^{-1}(s_i)$ смежна в графе $G(w)$ с остальными его вершинами. Вершины из множества $\varphi^{-1}(s_i)$ попарно не смежны между собой, но каждая из них смежна с остальными вершинами, не входящими в это множество. Таким образом, граф $G(w)$ однозначно n-раскрашиваем, и по теореме 3.1 слово w является контрольным экспериментом для автомата $D_{n,m}$ относительно n-полного класса. Следовательно, множество контрольных экспериментов для автомата $D_{n,m}$ относительно n-полного класса совпадает с $\Phi_{D_{n,m}}(F(D_{n,m}))$.

Аналогичный пример можно привести для базиса n-полного класса. Соответствующий автомат $K_{n,m}$ строится следующим образом:

$$S=\{a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{2m}, s_1, s_2, \ldots, s_n\},$$

$$X=\{x_0, \ldots, x_{m-1}\}, \quad Y=S;$$

$$\delta(s_i, x_0)=s_{i+1}, \quad i=1, \ldots, n-1;$$

$$\delta(s_n, x_0)=a_m,$$

$$\delta(s_i, x_j)=a_j, \qquad i=1, \ldots, n, \; j=1, \ldots, m-1,$$

$$\lambda(s, x)=s \text{ для любых } s \in S,\; x \in X.$$

На остальных парах (s, x) функция δ определена так, что подграф графа $\Gamma(K_{n,m})$, порожденный состояниями $a_1, \ldots, a_{2m}$, s_1, является полным без одного ребра. Длина любого кратчайшего контрольного эксперимента для $K_{n,m}$ относительно базиса при начальном состоянии s_1 как легко видеть, равна $m(n-2m+1)+(m-1)(n-2m+1)(n-2m)/2+O(m^2)$. При $m=o(\sqrt{n})$, $n\to\infty$, эта величина асимптотически равна длине обхода этого автомата, а также длине кратчайшего контрольного эксперимента для этого автомата относительно всего n-полного класса. Длина кратчайших контрольных экспериментов относительно локально порожденного класса автоматов всегда «почти» совпадает с длиной кратчайшего обхода автоматов. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Если A — ОД-1-автомат и $F(A)=F$, то выполняется неравенство*

$$mn+1 \leqslant d_{\min} \leqslant d_{\max} \leqslant mn+(m-1)n(n-1)/2+1,$$

где $d_{\min}$ — длина кратчайшего контрольного эксперимента относительно $F(A)$, $d_{\max}$ — длина наибольшего из всех кратчайших контрольных экспериментов, порождаемых отдельными состояниями автомата.

Доказательство. Справедливость неравенства непосредственно вытекает из следствия 4.1. Покажем достижимость этих оценок. Нижняя оценка достигается для автомата $C_{n,m}$, определяемого следующим образом:

$$S=\{0, 1, \ldots, n-1\},\ X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\},\ Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\};$$
$$\delta(i, x_1)=i+1 \text{ для любого } i<n-1,\ \delta((n-1), x_1)=0;$$
$$\delta(i, x)=i \text{ при } x\neq x_1;$$
$$\lambda(i, x)=y_{i+1} \text{ при } i=0, \ldots, n-1,\ x\in X.$$

В качестве слова w можно выбрать слово $((x_2x_3\ldots x_mx_1)^nx_1, \lambda(0, (x_2\ldots x_mx_1)^nx_1))$. Для получения верхней оценки рассмотрим автомат $D_{n,m}$. Пусть $p=x_1x_2\ldots x_{m-1}x_mx_1x_mx_2\ldots x_mx_{n-1}x_m^2x_1\ldots x_m^2x_{m-1}\ldots$ $\ldots x_m^{n-1}x_1\ldots x_m$ — входное слово. Его длина, как легко подсчитать, равна $mn+(m-1)n(n-1)/2$, и это слово, как показано в [4], является кратчайшим обходом графа переходов автомата. Тогда слово $w=(px_1, \lambda(s_1, px_1)$ является кратчайшим в $\Phi_{D_{n,m}}(F(D_{n,m}))$. Из теоремы 4.1 следует, что длина кратчайшего слова в $\Phi_A(F(A))$ хотя бы на единицу больше длины кратчайшего обхода. Теорема доказана.

Интересно сравнить полученные оценки с оценками контрольных экспериментов относительно n-полного класса автоматов. В работе [6] было показано, что для контрольных экспериментов относительно n-полного класса при $n>2^{m-1}-1$, $m\geqslant 2$

$$d_{\min}\geqslant(2m-1)n-2^{m-1}+2,$$

т. е. при $m=o(\log n)$, $n\to\infty$, $d_{\min}\sim(2m-1)n$. Верхняя оценка для ОД-1-автомата получается как частный случай из оценки работы [5] и равна $(2m-1)n+(m-1)n(n-1)/2+1$, т. е. верхние оценки для этих классов, в отличие от нижних, асимптотически совпадают.

§ 5. Сложность распознавания контрольных экспериментов

В настоящем параграфе продолжается дальнейшее сравнительное изучение контрольных экспериментов относительно локально порожденного класса и контрольных экспериментов относительно n-полного класса — теперь уже со стороны задачи распознавания. Эта задача как задача проверки теста на полноту или как задача определения момента окончания генерации тестовых воздействий возникает при построении проверяющих тестов случайными методами. Полученные ранее результаты позволяют оценить относительную сложность решения задачи распознавания в рамках теории NP-полноты.

Как обычно через $P(NP)$ будет обозначать класс задач, распознаваемых детерминированными (недетерминированными) машинами Тьюринга за полиномиальное время. Под сводимостью будем понимать полиномиальную по времени сводимость в смысле Карпа [1]. Сформулируем теперь задачу распознавания контрольного эксперимента.

Пусть для каждого автомата A определен некоторый класс F_A автоматов, $A\in F_A$. По заданному автомату $A=(S, X, Y, \delta, \lambda)$ и вход-выходному слову w в алфавите $X\times Y$ нужно определить, будет ли слово w принадлежать дополнению множества контрольных экспериментов автомата A относительно класса F_A.

Исходной информацией для алгоритма, решающего задачу распознавания, будут пары (w, A), которые можно закодировать в виде строк из нулей и единиц. Если автомат имеет m входных сигналов, n состояний и l выходных сигналов, то для задания функции переходов-выходов достаточно строки длиной $mn\log nl$, где $\log n$ — длина двоичной записи числа n. Если слово w имеет длину k, то для его кодирования достаточно строки длиной $k\log ml$. Кроме двух символов 0 и 1, для удобства в роли разделителя можно использовать специальный символ, например, $*$. Таким образом, в конечном алфавите получим слово, описывающее исходную информацию для работы алгоритма.

Пусть в задаче распознавания в качестве класса F_A выбран локально порожденный класс $F(A)$. Справедливо утверждение.

Теорема 5.1. *Задача распознавания контрольных экспериментов для* ОД-1-*автомата относительно локально порожденного класса принадлежит классу* P.

Доказательство. По теореме 4.1, вначале необходимо из A выделить подавтомат $\Pi(A)$, т. е. удалить из A все изолированные состояния. Для этого достаточно в каждом состоянии для любой дуги, исходящей из него, сравнить ее конец с началом. Ясно, что для этого достаточно $O(mn)$ шагов. Далее, по условию 1) теоремы 4.1 определяется принадлежность слова w множеству $\Phi_{\Pi(A)}$. На это также необходимо $O(mn)$ шагов. Проверка равенства $\Phi^1_{A(w)} = \Phi^1_{\Pi(A)}$ (условие 2)) требует $O(mnk)$ шагов, а условие 3) — $O(k)$ шагов. В целом же на решение задачи распознавания множества $\Phi_A(F(A))$ потребуется $O(mn)+O(mn)+ + O(mnk)+O(k)=O(mnk)$ шагов, т. е. задача принадлежит классу P (логарифмические множители опускаются).

Теперь покажем, что задача распознавания контрольного эксперимента для n-полного класса или его базиса принадлежит классу NP.

Лемма 5.1. *Задача распознавания контрольного эксперимента для* ОД-1-*автомата относительно n-полного класса или его базиса принадлежит классу* NP.

Доказательство. В теоремах 3.1 и 3.2 условия 1) и 2) аналогичны условиям 1) и 2) теоремы 4.1 и требуют для проверки $O(mn)+ + O(mnk)=O(mnk)$ шагов. Кроме того, по условию 3) необходимо проверить однозначную раскрашиваемость графов $G(w)$ и $H(w)$. Задача построения этих графов может быть решена полиномиальным алгоритмом. Граф $G(w)$ может быть построен в два этапа. Вначале по $A(w)$ строится граф $G'(w)$, соответствующий отношению α, и строится его транзитивное замыкание с выделением компонент связности. На все это требуется $O(k^3)$ шагов. Для построения графа $G(w)$ необходимо определить попарные пересечения множеств входных сигналов, соответствующих компонентам связности графа $G'(w)$. Эта операция требует $O(k^3)$ шагов. Следовательно, граф $G(w)$ может быть построен за $O(k^3)$ шагов. При построении графа $H(w)$ вначале строится предельный автомат $C(w)$ ($O(k^3)$ шагов). Добавление ребер между вершинами, находящимися на расстоянии 2 друг от друга, и ребер, соединяющих несовместимые состояния, может быть выполнено за $O(k^3)$ шагов, т. е. граф $H(w)$ также может быть построен за $O(k^3)$ шагов. Заметим также, что при проверке условия 1 теорем 3.1 и 3.2 может быть также построен и гомоморфизм автомата $A(w)$ в автомат A, а, значит, установлена и эталонная n-раскраска графов $G(w)$ и $H(w)$ (за $O(mnk)$ шагов). Тогда легко построить недетерминированную машину Тьюринга, которая вначале будет «угадывать» различные раскраски графов $G(w)$ и $H(w)$, а затем сравнивать их с эталонной за полиномиальное время. Значит, рассматриваемая задача принадлежит классу NP.

Сформулируем задачу, называемую задачей раскраски, которая понадобится нам в дальнейшем: для заданных графа G и целого $k>0$ определить, можно ли раскрасить его k красками. Как показано в [1], задача раскраски является полиномиально полной.

Докажем теперь справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.2. *Задача распознавания контрольного эксперимента относительно n-полного класса для* ОД-1-*автомата является* NP-*полной.*

Доказательство. Докажем более сильный результат, а именно, что ОД-1-автомат можно выбрать среди автоматов вида $C_{3,m}$. В работе [11] показано, что задача 3-раскрашиваемости 4-регулярных планарных графов является NP-полной. Пусть $G=(V, U)$-планарный 4-регулярный граф, $V=\{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество вершин, $U=\{p_1, \ldots, p_l\}$ —

множество ребер графа, $l=2n$. В [11] приведена конструкция графа $G'=(V', U')$, строящегося следующим образом: множество вершин V' состоит из трех копий вершин графа G, $V'=\{v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n}, v_{2,1}, \ldots \ldots, v_{2,n}, v_{3,1}, v_{3,2}, \ldots, v_{3,n}\}$; вершины из одной копии в графе G' не смежны; вершины $v_{i,j}$ (копия вершины $v_j\in V$) и $v_{k,l}$ (копия вершины $v_l\in V$) смежны лишь в том случае, если смежны вершины v_j и v_l в графе G. Ясно, что $|V'|=3n$, $|U'|=12n$. Там же показано, что граф G не раскрашиваем в 3 цвета тогда и только тогда, когда граф G' однозначно раскрашиваем в 3 цвета. Одноцветные классы состоят в этом случае из вершин, принадлежащих одной копии, т. е. $\chi=\{C_1, C_2, C_3\}$ — ядро любой раскраски графа G', где $C_1=\{v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n}\}$, $C_2= =\{v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,n}\}$, $C_3=\{v_{3,1}, v_{3,2}, \ldots, v_{3,n}\}$. Пусть $U'=\{u_1, u_2, \ldots, u_{12n}\}$. По графу G' построим граф G''. К множеству вершин V' добавим вершины $z_1, z_2, \ldots, z_{12n}$ и соединим ребрами вершину z_i с концами ребра u_i, $i=1, \ldots, 12n$. В графе G'' число вершин равно $|V''|=15n$, а число ребер $|U''|=36n$. Ясно, что G'' однозначно раскрашиваем тогда и только тогда, когда G' однозначно раскрашиваем. Раскраске χ графа G' соответствует раскраска χ' графа G'', $\chi'=\{C_1', C_2', C_3'\}$, где $C_i'=C_i\cup \cup\{z_{i1}, \ldots, z_{i4n}\}$, причем z_{ij} соединена с концами ребра u_{ij}, не принадлежащими классу C_i, $i=1, 2, 3$, $j=1, \ldots, 4n$. По разбиению χ' на множестве U' построим семейство R из трех разбиений R_1, R_2, R_3: если вершине $v_{i,j}\in C_l$, $l=1, 2, 3$, инцидентны ребра $u_{ij}^{(1)}, u_{ij}^{(2)}, \ldots, u_{ij}^{(8)}$, то они образуют класс разбиения R_l; каждой вершине $z_{ij}\in C_l'$ соответствует одноэлементный класс $\{u_{ij}\}$ разбиения R_l. Итак, пусть

$$R_1=\{\{u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{1,8}\}, \{u_{1,9}, \ldots, u_{1,16}\}, \ldots$$
$$\ldots, \{u_{1,8n-7}, u_{1,8n-6}, \ldots, u_{1,8n}\}, \{u_{1,8n+1}\}, \ldots, \{u_{1,12n}\}\},$$
$$R_2=\{\{u_{2,1}, u_{2,2}, \ldots, u_{2,8}\}, \ldots, \{u_{2,12n}\}\},$$
$$R_3=\{\{u_{3,1}, u_{3,2}, \ldots, u_{3,8}\}, \ldots, \{u_{3,12n}\}\}.$$

В автомате $C_{3,12n}$ положим $X=U'$ и $x_1=u_{1,12n}$, $x_2=u_{1,12n-1}, \ldots, x_{12n}= =u_{1,1}$. По семейству R построим слово $w(R)$: классы R_2 и R_3 переупорядочим таким образом, чтобы классы, содержащие $u_{1,12n}$, оказались последними в списке классов. В свою очередь, найденные классы переупорядочиваются таким образом, что $u_{1,12n}$ оказалось последним в списке элементов класса. Тогда слово $w(R)$ состоит из трех частей $w(R_1)$, $w(R_2)$, $w(R_3)$, соответствующих разбиениям R_1, R_2, R_3:

$$w(R_1)=u_{1,1}^2u_{1,2}^2\ldots u_{1,7}^2u_{1,8}u_{1,9}^2\ldots u_{1,15}^2u_{1,16}\ldots u_{1,8n+1}\ldots u_{1,12n};$$

если $u_{1,12n}$ принадлежит классам $\{u_{2,i+1}, u_{2,i+2}, \ldots, u_{2,i+8}\}$ и $\{u_{3,j+1}, \ldots \ldots, u_{3,j+8}\}$, то

$$w(R_2)=u_{2,1}^2u_{2,2}^2\ldots u_{2,8}\ldots u_{2,i+1}^2u_{2,i+2}^2\ldots u_{2,i+7}^2u_{2,i+8},$$
$$w(R_3)=u_{3,1}^2u_{3,2}^2\ldots u_{3,8}\ldots u_{3,j+1}^2u_{3,j+2}^2\ldots u_{3,j+7}^2u_{3,j+8},$$
$$w(R)=w(R_1)\,w(R_2)\,w(R_3)\,u_{1,1}.$$

Покажем теперь, что вход-выходное слово $(w(R), \lambda(0, w(R)))$ является контрольным экспериментом для автомата $C_{3,12n}$ относительно n-полного класса тогда и только тогда, когда граф G'' (а значит, и граф G') однозначно раскрашиваем. Действительно, пусть $w=(w(R), \lambda(0, w(R)))$ — контрольный эксперимент с $C_{3,12n}$. Из построения слова w следует, что граф $G(w)$ изоморфен графу G''. Так как w — контрольный эксперимент, то по теореме 3.3 граф $G(w)$ (а, значит, и G'') однозначно раскрашиваем. Обратно, если G'' однозначно раскрашиваем, то однозначно раскрашиваем граф $G(w)$. Условия 1) и 2) теоремы 3.2 следуют из построения слова w. Следовательно, w — контрольный эксперимент с $C_{3,12n}$ относительно n-полного класса. Так как построение слова w и автомата $C_{3,12n}$ по графу G выполняется за полиномиальное время, то теорема доказана.

Покажем теперь, что сужение n-полного класса до его базиса не выводит задачу распознавания контрольного эксперимента из класса NP-полных задач.

Теорема 5.3. *Задача распознавания контрольного эксперимента для* ОД-1-*автомата* $A \in M$ *относительно базиса* M *является* NP-*полной.*

Доказательство. При доказательстве теоремы воспользуемся построениями, выполненными при доказательстве теоремы 5.2. Пусть дан автомат $C_{3,m}$ и слово $w=(x_{11}, y_1)^2(x_{12}, y_1)^2 \ldots (x_{1k_1}, y_1)(x_{1k_1+1}, y_1)^2 \ldots$ $\ldots (x_1, y_1)(x_{21}, y_2)^2 \ldots (x_{2k_2}, y_2) \ldots (x_1, y_3)(x_1, y_1)$ имеет такой же вид, что и слово $w(R)$ в теореме 5.2. Как было показано, задача определения того, является ли слово w контрольным экспериментом для автомата $C_{3,m}$ относительно 3-полного класса, является NP-полной. По автомату $C_{3,m}$ построим слово w' и автомат A из базиса $[3(2m+1)(m-1)+3]$-полного класса. Для состояния i, $i=1, 2, 3$ и входного сигнала x_j, $j=2, 3, \ldots, m$, добавляются $2m+1$ состояний $n_{ij}^{(1)}, n_{ij}^{(2)}, \ldots, n_{ij}^{(2m+1)}$ и функция переходов для них доопределяется следующим образом: $\delta(i, x_j)=n_{ij}^{(1)}$, $\delta(n_{ij}^{(2m+1)}, x_j)=i$, $\delta(n_{ij}^{(k)}, x_j)=n_{ij}^{(k+1)}$, $k<2m+1$; $\delta(n_{ij}^{(k)}, x_1)=n_{ij}^{(k+2)}, \ldots$ $\ldots, \delta(n_{ij}^{(k)}, x_{j-1})=n_{ij}^{(k+j)}$, $\delta(n_{ij}^{(k)}, x_{j+1})=n_{ij}^{(k+j+1)}, \ldots, \delta(n_{ij}^{(k)}, x_m)=n_{ij}^{(k+m)}$, $k<2m+1$ (сложение выполняется по $\mathrm{mod}\,(2m+1)$; $\delta(n_{ij}^{(2m+1)}, x_1)=$ $=n_{ij}^{(1)}, \ldots, \delta(n_{ij}^{(2m+1)}, x_{j-1})=n_{ij}^{(j-1)}$, $\delta(n_{ij}^{(2m+1)}, x_{j+1})=n_{ij}^{(j)}, \ldots, \delta(n_{ij}^{(2m+1)}, x_m)=n_{ij}^{(m-1)}$; $\lambda(i, x_j)=y_i$, $\lambda(n_{ij}^{(k)}, x_l)=n_{ij}^{(k)}$ при любых $k\leqslant 2m+1$ и $l\leqslant m$. Построенный автомат имеет $3(2m+1)(m-1)+3$ состояний и принадлежит базису M класса F_n, $n=3(2m+1)(m-1)+3$. Пусть p — слово в алфавите X следующего вида:

$$p=x_1^{2m}x_2p_1^{2m}x_2x_1^{2m-1}x_3x_1^{2m-2}\ldots x_mx_1^{2m+1-m},$$

где $p_1=x_2x_1^{2m-3}x_2x_3x_1^{2m-4}x_2 \ldots x_mx_1^{2m-1-m}x_2x_1$. Длина слова p, как легко подсчитать, равна $d(p)=3m(m-1)(2m+1)/2+5m+1$. Через p_j обозначим слово, получаемое из p заменой символа x_1 на x_j, а x_j на x_1. По слову $w=(r, q)$ построим теперь слово w': если в слове r имеется отрезок $x_{i_k}^2 (i_k\neq 1)$, то он заменяется словом $p_{i_k}x_{i_k}^{2m+2}$; одиночный символ x_{i_k} заменяется словом p_{i_k}. Символ x_1 остаётся без изменений. Обозначим получившееся слово через r'. Тогда $w'=(r', \lambda_A(1, r'))$. Если длина w равна d, то длина слова w' не превосходит величины $(3m(m-1)(2m+1)/2+5m+1)d$. Покажем теперь, что w является контрольным экспериментом для автомата $C_{3,m}$ относительно класса F_3 тогда и только тогда, когда w' — контрольный эксперимент для A относительно базиса M. Построим по слову w' предельный автомат $C(w')$. Заметим, что если φ — гомоморфизм автомата $C(w')$ на A, то для любого состояния $n_{ij}^{(k)}$ автомата A $\varphi^{-1}(n_{ij}^{(k)})$ состоит ровно из одного элемента. Так как для любого $x_j\in X$ реакция на этот сигнал состояния $a_{ij}^{(k)}=$ $=\varphi^{-1}(n_{ij}^{(k)})$ определена, то оно несовместимо ни с одним из состояний автомата $C(w')$. Отсюда следует, что графы $G(w')$ и $H(w')$ совпадают (квадрат графа $C(w')$ вкладывается в граф $G(w')$). В графе $H(w')$ вершины $a_{ij}^{(k)}$ смежны с остальными его вершинами. Легко видеть, что если в графе $H(w')$ удалить все вершины $a_{ij}^{(k)}$, то получившийся граф будет совпадать с графом $G(w)$, построенным по слову w. Следовательно, граф $G(w)$ однозначно раскрашивается в 3 цвета тогда и только тогда, когда граф $H(w')$ однозначно раскрашивается в $3(2m+1)(m-1)+3$ цветов. Так как условия 1) и 2) теоремы 3.4 для слова w' выполняются, в силу построения, тогда и только тогда, когда они выполняются для слова w, то отсюда и следует справедливость доказываемой теоремы.

Итак, определить, является ли искомое слово w контрольным экспериментом для ОД-1-автомата A относительно базиса n-полного класса не менее сложно, чем решить эту задачу для всего n-полного класса. В определенном смысле базис концентрирует в себе основную сложность при решении этой задачи. В то же время, для локально порожденного класса эта задача решается, видимо, значительно проще, так как ни для одной из NP-полных задач до сих пор неизвестно эффективного алгоритма решения.

Автор выражает глубокую благодарность В. Б. Кудрявцеву и И. С. Грунскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М.: Мир, 1979.— 536 с.
2. Берж К. Теория графов и ее применение. М.: ИЛ, 1962.— 320 с.
3. Биркгоф Г. Теория структур.— М.: ИЛ, 1952.— 407 с.
4. Богомолов А. М., Грунский И. С., Сперанский Д. В. Контроль и преобразование дискретных автоматов.— Киев: Наукова думка, 1975.— 174 с.
5. Грунский И. С. Контрольный эксперимент с сильносвязным диагностируемым автоматом // Автоматика и телемеханика.— 1972.— № 3.— С. 138—141.
6. Козловский В. А. О структуре контрольного эксперимента с автоматом // Кибернетика.— 1978.— № 3.— С. 19—23.
7. Козловский В. А. О распознавании автомата относительно локально порожденного класса // ДАН СССР.— 1981.— Т. 258, № 5.— С. 1047—1049.
8. Основы технической диагностики/Под ред. П. П. Пархоменко.— М.: Энергия, 1975.— 464 с.
9. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с.
10. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1958.— Т. 50.— С. 270—360.
11. Dailey D. F. Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete // Discrete Mathematics.— 1980.— V. 30, N 3.— P. 289—293.
12. Roth J. P. Diagnosis of automata failures: a calculus and a method // IBM Journal of Research and Development.— 1966.— V. 10.— P. 278—291.