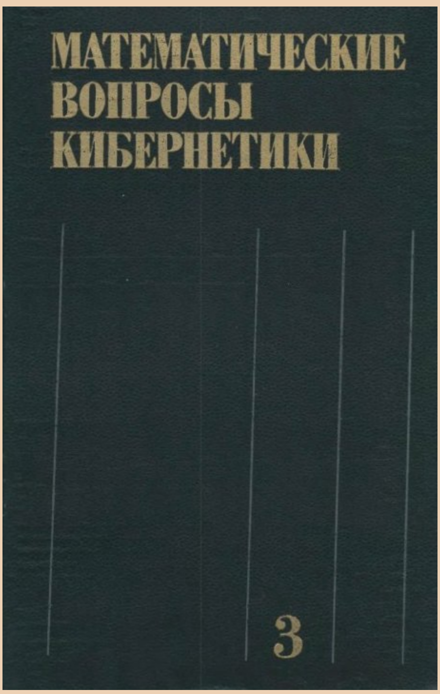

А. А. Часовских

О полноте в классе линейных автоматов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3. — М.: Наука, 1991. — С. 140–166. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1991-140

О ПОЛНОТЕ В КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТОВ

А. А. ЧАСОВСКИХ

(МОСКВА)

При изучении свойств функциональной системы возникает задача о существовании алгоритма проверки полноты конечных подмножеств. Один из сложившихся подходов к решению этой задачи состоит в нахождении максимальных замкнутых подсистем (так называемых предполных классов) данной функциональной системы. При этом для ряда функциональных систем невключение некоторого множества функций ни в одну из максимальных подсистем равносильно его полноте. Таким свойством обладает класс $P_{\text{о.д.}}$ конечных автоматов с операциями композиции [8].

В работе [7] показано, что мощность множества предполных классов в $P_{\text{о.д.}}$ равна континууму. Отсюда следует отсутствие эффективного критерия полноты в терминах предполных классов. Как показано в [6], никакой другой подход также не приводит к построению алгоритма, распознающего полноту конечных систем в $P_{\text{о.д.}}$ Алгоритмическая неразрешимость этой задачи ставит перед необходимостью рассматривать аналогичную задачу не для всего $P_{\text{о.д.}}$, а для подклассов, обладающих теми или иными интересными свойствами. В этом направлении различные классы о.-д. функций изучались в [1] и [3].

В настоящей работе рассматриваются проблемы полноты в классе L линейно-автоматных функций. Линейные автоматы, вычисляющие линейно-автоматные функции, представляют интерес для вычислительной техники, связи, моделирования и т. д.

Для класса L строится счетная система J всех предполных классов, а критерий полноты, формулируемый в терминах предполных классов, приводит к алгоритму распознавания полноты конечных множеств. Находится длина кратного эксперимента, проверяющего полноту конечной системы. Изучаются базисы в L. Показано, что не существует универсальных линейно-автоматных функций, но для каждого k, $k \geqslant 2$, существует базис, состоящий из k функций. Описаны в определенном смысле минимальные базисы. Кроме того, изучаются вопросы A-полноты в L.

В работе использован ряд понятий и теорем, имеющихся в [8].

§ 1. Линейные автоматы и линейно-автоматные функции

Множество, состоящее из всех натуральных чисел 1, 2, ... и нуля, обозначим через N, а поле из двух элементов 0, 1 — через E_2. Множество слов α из нулей и единиц длины s обозначим E_2^s. Положим $E_2^* = \bigcup_{s=1}^{\infty} E_2^s$.

Множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц

$$\{\alpha | \alpha = \alpha(0)\alpha(1)\ldots \ \alpha(t) \in E_2, \ t = 0, 1, \ldots\},$$

т. е. множество всех сверхслов над E_2 обозначим E_2^∞. Если M — множество, то через M^k обозначим $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{k}$. Пусть $\{\alpha, \beta\} \subset E_2^*$. Периодическое сверхслово $\alpha\beta\beta\ldots$ обозначим $\alpha\beta^\infty$. Множество всех периодических сверхслов обозначим P_2^∞.

Будем пользоваться переменными из трех счетных алфавитов

$$U^1, U^2, U^3\colon U^i = \{u_j^i \mid j = 1, 2, \ldots\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для переменных из U^1, U^2, U^3 используем метаобозначения x, y, q. Каждая из введенных переменных принимает значения из E_2^∞, если не оговорено противное. Таким образом, $x = x(0)x(1)\ldots$, $y = y(0)y(1)\ldots$, $q = q(0)q(1)\ldots$, где переменные $x(t)$, $y(t)$, $q(t)$ принимают значения из E_2. Запись $Y = (\varepsilon_{ij})_{s\times m}$ мы используем для обозначения того, что Y — матрица, имеющая s строк, m столбцов и элементы ε_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, m$, а запись $Y = (\varepsilon_j)_s$ — для обозначения того, что Y — столбец высоты s с элементами ε_j, $j = 1, 2, \ldots s$.

Матрицу, получаемую из Y транспонированием, обозначаем Y^T. Столбец матрицы Y с номером i обозначаем Y_i.

Линейный автомат $\mathfrak{A}$ задается следующей системой канонических уравнений над полем E_2:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}(t+1) &= A\mathbf{q}(t) + B\mathbf{x}(t), \\ y(t) &= C\mathbf{q}(t) + D\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $q_0 = (e_i)_r$, $A = (a_{ij})_{r\times r}$, $B = (b_{ij})_{r\times n}$, $C = (c_i)_r^T$, $D = (d_i)_n^T$, $q(t) = (q_i(t))_r$, $x(t) = (x_i(t))_n$ и a_{ij}, b_{ij}, c_i, d_i, e_i — числа из E_2.

Линейный автомат $\mathfrak{A}$ работает во времени, которое предполагается дискретным $t = 0, 1, \ldots$

Значением столбца переменных $x(t)$ или $q(t)$ назовем столбец значений этих переменных. Значения векторов $q(t)$, $x(t)$ и переменной $y(t)$ назовем *состояниями*, *входами* и *выходами* автомата $\mathfrak{A}$ в момент t. Вектор q_0 — начальное состояние $\mathfrak{A}$.

Равенства (1) по входам $\alpha(\nu)$, $\alpha(\nu) = (\alpha_i(\nu))_n$, в моменты ν, $\nu = 0, 1, \ldots, t$, позволяют вычислить выход $\mathfrak{A}$ в момент t:

$$\beta(t) = CA^t q_0 + \sum_{\nu=0}^{t-1} CA^{t-\nu-1} B\alpha(\nu) + D\alpha(t). \tag{2}$$

Таким образом, линейный автомат $\mathfrak{A}$ вычисляет функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $(E_2^\infty)^n$ в E_2^∞,

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(t) = \beta(t).$$

Нетрудно видеть, что $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — о.-д. функция [8]. Будем называть ее *линейно-автоматной функцией* (*л.-а. функцией*).

Лемма 1. 1. *Для любой л.-а. функции* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *найдутся* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *и* γ *из* P_2^∞ *такие, что*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{t} \mu_i(t-\nu) x_i(\nu) + \gamma(t). \tag{3}$$

2. *Для любых* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *и* γ *из* P_2^∞ *найдется л.-а. функция* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *задаваемая равенством* (3).

Доказательство. Докажем утверждение 1 леммы. Пусть л.-а. функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вычисляется линейным автоматом $\mathfrak{A}$ с системой канонических уравнений (1). Положим

$$\mu_i = D_i,\ CB_i,\ CAB_i,\ \ldots,\ CA^{t-1}B_i,\ \ldots,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

$$\gamma = Cq_0,\ CAq_0,\ \ldots,\ CA^{t-1}q_0,\ \ldots \tag{5}$$

Утверждение 1 леммы вытекает теперь из равенства (2) и периодичности последовательности матриц $A, A^2, \ldots, A^t, \ldots$

Докажем утверждение 2 леммы. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и γ — элементы P_2^∞. Тогда найдется r' из N такое, что справедливы равенства

$$\mu_i = \mu_i(0)\,\mu_i'\,(\mu_i'')^\infty, \qquad \gamma = \gamma'\,(\gamma'')^\infty,$$

$$\mu_i' = \mu_i(1)\,\mu_i(2)\ldots\mu_i(r'), \qquad \mu_i'' = \mu_i(r'+1)\,\mu_i(r'+2)\ldots\mu_i(2r')$$

$$\gamma' = \gamma(0)\,\gamma(1)\ldots\gamma(r'-1), \quad \gamma'' = \gamma(r')\gamma(r'+1)\ldots\gamma(2r'-1).$$

Пусть линейный автомат $\mathfrak{A}$ задается системой канонических уравнений (1), причем

$$A = \begin{pmatrix} A' & \widetilde{A} \\ \widetilde{A} & A'' \end{pmatrix},\quad A' = (a_{ij}')_{r'\times r'},\quad A'' = (a_{ij}'')_{r'\times r'},$$

$$\widetilde{A} = (0)_{r'\times r'},\quad a_{ij}' = \begin{cases} 1, & \text{если}\quad i = j+1, \\ 0, & \text{если}\quad i \neq j+1, \end{cases}$$

$$a_{ij}'' = \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ i = j+1\ (\mathrm{mod}\, r'), \\ 0, & \text{если}\ \ i \neq j+1\ (\mathrm{mod}\, r'), \end{cases}\quad B = \begin{pmatrix} B' \\ B'' \end{pmatrix},$$

$$B' = (b_{ij}')_{r'\times n},\quad B'' = (b_{ij}'')_{r'\times n},$$

$$b_{ij}' = \mu_j(r'-i+1) + \mu_j(2r'-i+1),\quad b_{ij}'' = \mu_j(2r'-i+1),$$

$$C = (c_i)_{2r'}^T,$$

$$c_i = \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ i = r'\ \ \text{или}\ \ i = 2r', \\ 0, & \text{если}\ \ i \neq r'\quad \text{и}\quad i \neq 2r', \end{cases}\quad D = (\mu_i(0))_n^T,$$

$$q_0 = \begin{pmatrix} q_0' \\ q_0'' \end{pmatrix},\quad q_0' = (\gamma(r'-i) + \gamma(2r'-i))_{r'},\ \ q_0'' = (\gamma(2r'-i))_{r'}.$$

Нетрудно проверить справедливость равенств (4), (5), поэтому л.-а. функция, вычисляемая автоматом $\mathfrak{A}$, задается равенством (3). Лемма доказана.

Л.-а. функции $\mathrm{Id}(x)$, $F_+^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi(x)$, $\xi_1(x)$, заданные равенствами

$$\mathrm{Id}(x)(t) = x(t),$$

$$F_+^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t),$$

$$\xi(x)(t) = \begin{cases} 0, & \text{если}\ \ t = 0, \\ x(t-1), & \text{если}\ \ t \neq 0, \end{cases}$$

$$\xi_1(x)(t) = \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ t = 0, \\ x(t-1), & \text{если}\ \ t \neq 0, \end{cases}$$

называются соответственно *проводником*, *сумматором от n переменных*, *задержкой с начальным состоянием* 0 и *задержкой с начальным состоянием* 1.

Переменная x_i называется *фиктивной* переменной л.-а. функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если для любых сверхслов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_i'$ имеет место $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Функция $F_c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, все переменные которой фиктивны, называется *константой*.

По лемме 1 для константы $F_c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ найдется $\beta, \beta \in P_2^\infty$, такое, что для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из E_2^∞ имеет место $F_c(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \beta$. Константу $F_c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в дальнейшем обозначаем ее значением β. Множество всех констант обозначим L_c.

Если x_i не является фиктивной переменной функции F, то она называется *существенной* переменной F. Через $X(F)$ обозначим множество существенных переменных функции F. Пусть $X(F) = X(F')$ и $X(F) = \{x_1', \ldots, x_{n''}'\}$. Тогда если значения функций F, F' совпадают на любом наборе значений переменных из $X(F)$, то функции F и F' равны.

Будем считать, что если задана какая-либо л.-а. функция, то заданы все л.-а. функции, равные ей. Таким образом, мы рассматриваем л.-а. функции с точностью до отношения равенства.

Л.-а. функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная равенством (3), *зависит от переменной x_i со сдвигом*, если $\mu_i(0) = 0$. В случае $\mu_i(0) = 1$ x_i называется *непосредственной* переменной функции F. Если F — функция с одной существенной переменной x_i, которая является непосредственной переменной, то F называется *взаимнооднозначной* [8].

§ 2. Операции композиции. Схемы линейных автоматов

Множество всех л.-а. функций обозначим буквой L. На L введем операции композиции. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$ и $F'(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+n'}) \in L$, $x_i \neq x_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n + n'$. Будем говорить, что:

1° Функция $F^{\mathrm{II}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, отображающая $(E_2^\infty)^{n-1}$ в E_2^∞ по правилу $F^{\mathrm{II}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1})$, *получена из F отождествлением переменных* x_{n-1} и x_n и обозначать F^{II} через $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$.

2° Функция $F^{\mathrm{III}}(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $x_i' \neq x_j'$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, отображающая $(E_2^\infty)^n$ в E_2^∞ по правилу $F^{\mathrm{III}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *получена переименованием переменных F с $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $x_1', x_2', \ldots, x_n'$* и обозначать F^{III} через $F(x_1', x_2', \ldots, x_n')$.

3° Функция $F^{\mathrm{IV}}(x_1, \ldots, x_{n+n'-1})$, отображающая $(E_2^\infty)^{n+n'-1}$ в E_2^∞ по правилу $F^{\mathrm{IV}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+n'-1}) = F'(\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+n'-1}, F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, *получена подстановкой $F(x_1, \ldots, x_n)$ вместо переменной $x_{n+n'}$ функции* $F'(x_{n+1}, \ldots, x_{n+n'})$ и обозначать F^{IV} через $F'(x_{n+1}, \ldots, x_{n+n'-1}, F(x_1, \ldots, x_n))$.

4° Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ зависит со сдвигом от переменной x_n. Из F построим новую функцию $F^{\mathrm{V}}(x_1, \ldots, x_{n-1})$, отображающую $(E_2^\infty)^{n-1}$ в E_2^∞ следующим образом. Рассмотрим произвольный набор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ сверхслов из E_2^∞. Через $\beta(0)$ обозначим число $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0^\infty)(0)$. Если $\beta(t-1)$ определено, то положим

$$F^{\mathrm{V}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(t) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta(0)\ldots\beta(t-1)0^\infty)(t).$$

Будем говорить, что F^{V} *получена из F применением операции обратной связи к переменной x_n функции F* и обозначать F^{V} через $\text{Об}_{x_n}(F(x_1, \ldots, x_n))$.

Введенные операции отождествления переменных, переименования переменных и подстановки будем называть *суперпозициями*. Суперпозиции и обратная связь называются *композициями*. Множество всех л.-а. функций, которые можно получить, используя операции композиции, из множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, обозначим $K(\mathfrak{M})$.

Будем говорить, что л.-а. функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет сверхслово* 0^∞, если $F(0^\infty, \ldots, 0^\infty) = 0^\infty$. Положим

$$L^0 = \{F \mid F \in L \text{ и } F \text{ сохраняет сверхслово } 0^\infty\}.$$

В L выделим множество L_1 всех функций, зависящих от одной переменной. Имеет место включение $L_c \subset L_1$.

Положим $L_1^0 = L^0 \cap L_1$. Множество всех функций из L_1^0, зависящих от переменной x, обозначим $L_1^0(x)$.

Справедливы включения:

$$\{\mathrm{Id}(x),\ F_+^{(n)}(x_1, \ldots, x_n),\ \xi(x)\} \subset L^0,$$
$$\{\mathrm{Id}(x),\ \xi(x),\ \xi_1(x)\} \subset L_1,$$
$$\{\mathrm{Id}(x),\ \xi(x)\} \subset L_1^0.$$

Лемма 2. 1. *Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) \in L$. Тогда найдутся функции $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ из L_1^0 и найдется γ из L_c, доставляющие равенство*:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_+^{(n+1)}(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n), \gamma). \tag{6}$$

2. *Для любых $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ из L_1^0 и любой γ из L_c функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, заданная равенством* (6), *содержится в L.*

Доказательство. Докажем утверждение 1 леммы. Пусть л.-а. функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ задается равенством (3). Из утверждения 2 леммы 1 вытекает, что найдутся л.-а. функции $F_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задаваемые равенствами

$$F_i(x_i)(t) = \sum_{\nu=0}^{t} \mu_i(t-\nu)\, x_i(\nu), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Используя л.-а. функции $F_+^{(n+1)}(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $F_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, γ и операции подстановки, получим функцию $F_+^{(n+1)}(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n), \gamma)$ равную $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Докажем утверждение 2 леммы. Пусть $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ — некоторый (произвольный) набор л.-а. функций из L_1^0 и γ — некоторая (произвольная) константа. Тогда для некоторых $\mu_i, \mu_i \in P_2^\infty$, $i = 1, \ldots, n$, имеют место равенства (7). Поэтому для функции F, $F = F_+^{(n+1)}(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n), \gamma)$, выполнено (3). Отсюда и из утверждения 2 леммы 1 вытекает $F \in L$. Лемма доказана.

Рассмотрим л.-а. функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$. Найдутся такие $F_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и γ, что выполнено (6). Через F_0 обозначим л.-а. функцию $F_+^{(n)}(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$, а через $U(F)$ — множество $\{F_i(x) \mid i = 1, \ldots, n\}$. Для любого $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, множества $\{F_0 \mid F \in \mathfrak{M}\}$ и $\bigcup_{F \in \mathfrak{M}} U(F)$ обозначим $\mathfrak{M}^0$ и $U(\mathfrak{M})$ соответственно.

Пусть $F_i(x) \in L_1$, $i = 1, 2$. Через F_1F_2 обозначим $F_2(F_1(x))$, а через $F_1 + F_2 - F_+^{(2)}(F_1(x), F_2(x))$. Для любых α, β из E_2^∞ положим

$$\alpha + \beta = \alpha(0) + \beta(0),\ \alpha(1) + \beta(1),\ \ldots$$

Нетрудно видеть, что в случае $F \in L_1^0$ выполнено

$$F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta). \tag{8}$$

Через $E_2[z]$ обозначим кольцо многочленов переменной z над полем E_2 с обычными операциями сложения и умножения многочленов

$$E_2[z] = \{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \mid n \in N,\ a_i \in E_2,\ i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Лемма 3[5]. 1. *Пусть $u(z) \in E_2[z]$ и z не делит $u(z)$. Тогда найдется n, $n \in N$, и найдется $u'(z)$ такие, что $u(z)u'(z) = 1 + z^n$.*

2. *Многочлен $1 + z^n$ делит $1 + z^m$ тогда и только тогда, когда n делит m.*

Дроби $\frac{u}{v}$ и $\frac{u'}{v'}$, $\{u, v, u', v'\} \subset E_2[z]$, *равны*, если для некоторых многочленов u_1, u_2 из $E_2[z]\setminus\{0\}$ справедливы равенства: $uu_1 = u'u_2$, $vu_1 = v'u_2$. Дроби будем рассматривать с точностью до отношения равенства.

Рассмотрим множество $Q_2(z)$:

$$Q_2(z) = \left\{\frac{u}{v} \,\middle|\, u \in E_2[z], v \in E_2[z]\setminus\{0\}\right.$$

$$\left.\text{и если } \frac{u'}{v'} \text{ — несократимая дробь, равная } \frac{u}{v}, \text{ то } v' \text{ не делится на } z\right\}$$

с обычными операциями сложения и умножения дробей. В дальнейшем используем множества $zQ_2(z)$ и $1+zQ_2(z)$:

$$zQ_2(z) = \left\{z\frac{u}{v} \,\middle|\, \frac{u}{v} \in Q_2(z)\right\},$$

$$1 + zQ_2(z) = \left\{1 + z\frac{u}{v} \,\middle|\, \frac{u}{v} \in Q_2(z)\right\}.$$

Лемма 4. 1. *Существует изоморфизм* Φ *множества* L_1^0 *на* $Q_2(z)$ *такой, что*

$$\Phi(\mathrm{Id}) = 1, \tag{9}$$

$$\Phi(F_1 + F_2) = \Phi(F_1) + \Phi(F_2), \quad \Phi(F_1 \cdot F_2) = \Phi(F_1)\Phi(F_2). \tag{10}$$

2. *Операция обратной связи применима к переменной* x_1 *функции* $F_+^{(2)}(F_1(x), F_2(x_1))$, $F_i \in L_1^0$, $i = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(F_2) \in zQ_2(z). \tag{11}$$

Если (11) *имеет место, то*

$$\Phi\left(\text{Об}_{x_1}\left(F_+^{(2)}(F_1(x), F_2(x_1))\right)\right) = \frac{\Phi(F_1)}{1+\Phi(F_2)}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $F \in L_1^0$. Найдется μ, $\mu \in P_2^\infty$, такое, что

$$F(x)(t) = \sum_{\nu=0}^{t} \mu(t-\nu)\,x(\nu).$$

Формальный ряд $\mu(0) + \mu(1)z + \ldots + \mu(t)z^t + \ldots$ обозначим μ_z.

В работе [8] показано, что множество L_1^0 с операциями $+$ и $\cdot$ образует кольцо и отображение Φ_1, задаваемое равенством $\Phi_1(F) = \mu_z$, есть изоморфизм L_1^0 на множество $PR_2(z)$, $PR_2(z) = \{\mu_z \mid \mu \in P_2^\infty\}$, рассматриваемое с обычными операциями сложения и умножения рядов. Кроме того, имеют место равенства:

$$\Phi_1(\mathrm{Id}) = 1, \; \Phi_1(\xi) = z. \tag{13}$$

Рассмотрим сверхслово μ из P_2^∞. Пусть $\mu = \alpha\beta^\infty$ и $\beta = \beta(0)\beta(1)\ldots\ldots\beta(T-1)$. Тогда найдется многочлен $u(z)$, удовлетворяющий равенству $\mu_z(1+z^T) = u(z)$. Введем отображение Φ_2 из $PR_2(z)$ в $Q_2(z)$, положив:

$$\Phi_2(\mu_z) = \frac{u(z)}{1+z^T}.$$

Воспользовавшись леммой 3, нетрудно показать, что Φ_2 — изоморфизм $PR_2(z)$ на $Q_2(z)$. Кроме того, справедливы равенства:

$$\Phi_2(1) = 1, \quad \Phi_2(z) = z. \tag{14}$$

Обозначим композицию $\Phi_2\Phi_1$ через Φ. Отображение Φ — изоморфизм L_1^0 на $Q_2(z)$. Поэтому имеют место равенства (10). Из (13), (14) вытекает (9). Утверждение 1 леммы доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть $\Phi_1(F_2)=\mu_z$. По правилу 4° операция обратной связи применима к переменной x_1 функции $F_+^{(2)}(F_1(x), F_2(x_1))$ в точности тогда, когда $\mu(0)=0$, что в свою очередь равносильно свойству (11).

Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось показать справедливость равенства (12). Нетрудно видеть, что л.-а. функция $\text{Об}_{x_1}\left(F_+^{(2)}(F_1(x), F_2(x_1))\right)$ получается подстановкой $F_1(x)$ вместо переменной x' л.-а. функции $F_3(x')$, $F_3(x')=\text{Об}_{x_1}\left(F_+^{(2)}(x', F_2(x_1))\right)$.

Для некоторого μ, $\mu\in P_2^\infty$, имеет место

$$F_2(x)(t)=\sum_{\nu=0}^{t-1}\mu(t-\nu)\,x(\nu).$$

Пусть $\tilde\mu$ таково, что

$$\tilde\mu(0)=1,\quad \tilde\mu(t)=\sum_{\nu=1}^{t}\tilde\mu(t-\nu)\,\mu(\nu),\quad t=1, 2, \ldots$$

Докажем, что для всякого t, $t=0, 1, \ldots$, имеет место

$$F_3(x)(t)=\sum_{\nu=0}^{t}\tilde\mu(t-\nu)\,x(\nu). \tag{15}$$

При $t=0$ равенство (15) справедливо. Пусть (15) выполнено для всех t, $t\leqslant t_1$. Справедливость (15) для $t=t_1+1$ получим следующим образом

$$\begin{aligned}F_3(x)(t)&=x(t)+\sum_{\nu=0}^{t-1}\mu(t-\nu)\,y(\nu)=\\&=\tilde\mu(0)\,x(t)+\sum_{\nu=0}^{t-1}\mu(t-\nu)\sum_{\tilde\nu=0}^{\nu}\tilde\mu(\nu-\tilde\nu)\,x(\tilde\nu)=\\&=\tilde\mu(0)\,x(t)+\sum_{\tilde\nu=0}^{t-1}x(\tilde\nu)\sum_{\nu=\tilde\nu}^{t-1}\mu(t-\nu)\,\tilde\mu(\nu-\tilde\nu)=\sum_{\tilde\nu=0}^{t}\tilde\mu(t-\tilde\nu)\,x(\tilde\nu).\end{aligned}$$

Равенство (15) доказано для любого t, $t=0, 1, \ldots$

Покажем, что

$$F_3(F_4(x))=x, \tag{16}$$

где $F_4(x)=F_+^{(2)}(x, F_2(x))$. Имеем

$$F_3(F_4(x))(0)=F_4(x)(0)=x(0).$$

Пусть выполнено $F_3(F_4(x))(t)=x(t)$. Тогда

$$F_3(F_4(x))(t+1)=$$
$$=x(t+1)+\sum_{\nu=0}^{t}\mu(t+1-\nu)\,x(\nu)+\sum_{\nu=0}^{t}\mu(t+1-\nu)\,x(\nu)=x(t+1).$$

Следовательно, соотношение (16) имеет место.

Положим $\mu'(t)=\begin{cases}1, & \text{если } t=0,\\ \mu(t), & \text{если } t\neq 0.\end{cases}$ Выполнено

$$F_4(x)(t)=\sum_{\nu=0}^{t}\mu'(t-\nu)\,x(\nu).$$

В [8] показано, что найдется л.-а. функция F'_4, удовлетворяющая соотношению

$$F'_4(F_4(x)) = F_4(F'_4(x)) = x. \tag{17}$$

Обозначим через β_0 сверхслово $F'_4(10^\infty)$. Из (16) и (17) вытекает $F'_4(F_4(\beta_0)) = F_3(F_4(\beta_0))$, откуда

$$F'_4(10^\infty) = F_3(10^\infty). \tag{18}$$

Для некоторого μ'', $\mu'' \in P_2^\infty$, имеет место

$$F'_4(x)(t) = \sum_{\nu=0}^{t} \mu''(t-\nu)\, x(\nu), \quad t = 0, 1, \ldots$$

Поэтому $F'_4(10^\infty) = \mu''$. Кроме того, из (15) следует $F_3(10^\infty) = \tilde{\mu}$. Отсюда, учитывая (18), получим $\tilde{\mu} \in P_2^\infty$. Таким образом, $F_3(x)$ — л.-а. функция и $(\mathrm{Id} + F_1)\cdot F_3 = \mathrm{Id}$, откуда вытекает равенство (12). Лемма доказана.

По лемме 4 для любой л.-а. функции $F(x)$, $F(x) \in L_1^0$, найдутся $a_0, a_1, \ldots, a_{s+s'}$ из E_2, удовлетворяющие равенству

$$F(x) = \text{Об}_{x_1}\left(F_+^{(2)}\left(a_0 \,\mathrm{Id}(x) + a_1\xi(x) + \ldots + a_s\xi^s(x),\ a_{s+1}\xi(x_1) + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots + a_{s+s'}\xi^{s'}(x_1)\right)\right),$$

где

$$a_0\,\mathrm{Id}(x) = \begin{cases} \mathrm{Id}(x), & \text{если } a_0 = 1, \\ 0^\infty, & \text{если } a_0 = 0, \end{cases}$$

$$a_i\xi^j(x) = \begin{cases} \xi^j(x), & \text{если } a_i = 1, \\ 0^\infty, & \text{если } a_i = 0. \end{cases}$$

При этом справедливо

$$\Phi(F) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_s z^s}{1 + a_{s+1} z + \ldots + a_{s+s'} z^{s'}}.$$

В дальнейшем (когда это не приводит к путанице) для л.-а. функции Id мы используем обозначение 1, для 0^∞ — обозначение 0, а для л.-а. функции F — обозначение $\dfrac{a_0 + a_1\xi + \ldots + a_s\xi^s}{1 + a_{s+1}\xi + \ldots + a_{s+s'}\xi^{s'}}$. В этих обозначениях L_1^0 есть введенное ранее кольцо $Q_2(\xi)$ и для любых $\dfrac{u_1}{v_1}, \dfrac{u_2}{v_2}$ из L_1^0 справедливы равенства:

$$\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{v_1 v_2}, \tag{19}$$

$$\frac{u_1}{v_1}\cdot\frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2}, \tag{20}$$

$$\text{Об}\left(\frac{u_2}{v_2}, \frac{u_1}{v_1}\right)^{-1} = \frac{v_1}{u_1}\left(1 + \frac{u_1}{v_1}\right), \tag{21}$$

причем операция Об применима в точности тогда, когда $\dfrac{u_1}{v_1} \notin 1 + \xi L_1^0$.

Замыкание множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L_1^0$, по операциям $+$, $\cdot$ обозначим $K_c^1(\mathfrak{M})$, а по операциям $+$, $\cdot$ и Об обозначим $K^1(\mathfrak{M})$.

Из леммы 4 следует

Лемма 5. 1. *Пусть* $\mathfrak{M} \subseteq L_1^0$ *и* $F \in K_c^1(\mathfrak{M})$. *Тогда найдутся* F_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ *такие, что выполнено* $F = \sum_{i=1}^{k} F_{i1} \cdot F_{i2} \cdot \ldots \cdot F_{in_i}$

2. *Множество* $K_c^1\{1, \xi\}$ *есть кольцо многочленов* $E_2[\xi]$.

3. *Пусть* $\mathfrak{M} \subseteq L_1^0$ *и* $F \in K^1(\mathfrak{M})$. *Тогда найдутся* F_1, F_2 *из* $K_c^1(\mathfrak{M})$ *такие, что имеет место* $F = \frac{F_1}{1+F_2}$ *и* $F_2 \in \xi L_1^0$.

4. *Пусть* $\gamma \in L_c$. *Тогда найдется л.-а. функция* $F(x)$ *из* $L_1^0(x)$, *удовлетворяющая равенству*

$$\gamma = F(10^\infty). \tag{22}$$

Если для константы γ имеет место (22) и $F' \in \xi L_1^0$, то через $\frac{\gamma}{1+F'}$ обозначается константа $\frac{F}{1+F'}(10^\infty)$. Степень многочлена u из $E_2[\xi]$ обозначим $\deg u$. По определению полагаем $\deg 0^\infty = -\infty$. Если u_1, u_2 — многочлены из $E_2[\xi]$, то их наибольший общий делитель обозначается (u_1, u_2). Известно [4], что для любых u_1, u_2 из $E_2[\xi]$ найдутся u', u'' из $E_2[\xi]$ такие, что $u_1u' + u_2u'' = (u_1, u_2)$.

Многочлен p, $p \in E_2[\xi]$, называется *неприводимым*, если он не имеет делителей в множестве $E_2[\xi] \setminus \{1, p\}$. Для любого $\tilde{u}$ из $E_2[\xi] \setminus E_2$ найдется набор различных неприводимых многочленов $p_1, p_2, \ldots, p_m$ такой, что для некоторых натуральных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_m$ справедливо $u = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{i_m}$ и это разложение u на неприводимые многочлены единственно с точностью до перестановки сомножителей $p_j^{i_j}$.

В дальнейшем для задания функций из L_1^0 используем несократимые дроби. *Степенью дроби* F, $F = \frac{u}{v}$, называем число $\max(\deg u, \deg v)$ и обозначаем его $\deg F$.

Лемма 6. 1. *Операции композиции в* L *сохраняют равенство л.-а. функций.*

2. *Пусть функции* F *и* F' *таковы, что*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_+^{(n+1)}(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n), \gamma), \tag{23}$$

$$F'(x_{n+1}, \ldots, x_{n+n'}) = F_+^{(n'+1)}(F_{n+1}(x_{n+1}), \ldots, F_{n+n'}(x_{n+n'}), \gamma'). \tag{24}$$

Тогда для функций, построенных из F *и* F' *по правилам* 1°—4° *имеют место равенства*:

$$F^{\mathrm{II}} = F_+^{(n)}(F_1(x_1), \ldots, F_{n-2}(x_{n-2}), (F_{n-1} + F_n)(x_{n-1}), \gamma) \tag{25}$$

$$F^{\mathrm{III}} = F_+^{(n+1)}(F_1(x_1'), \ldots, F_n(x_n'), \gamma), \tag{26}$$

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{IV}} = F_+^{(n+n')}(&F_{n+n'}F_1(x_1), \ldots, F_{n+n'}F_n(x_n), \\ &F_{n+1}(x_{n+1}), \ldots, F_{n+n'-1}(x_{n+n'-1}), F_{n+n'}\gamma + \gamma'). \end{aligned} \tag{27}$$

Если F *зависит со сдвигом от* x_n, *то*

$$F^{\mathrm{V}} = F_+^{(n)}\left(\frac{F_1}{1+F_n}(x_1), \ldots, \frac{F_{n-1}}{1+F_n}(x_{n-1}), \frac{\gamma}{1+F_n}\right). \tag{28}$$

3. *Операции композиции не выводят из* L.

4. $K\{F_+^{(2)}(x_1, x_2), \xi_1(x)\} = L$.

Доказательство. Утверждение 1 леммы доказывается с использованием определения равенства л.-а. функций.

Докажем утверждение 2. Равенство (25) вытекает из утверждения 1 и соотношения

$$F_+^{(n+1)}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = F_+^{(n)}\left(x_1, \ldots, x_{n-2}, F_+^{(2)}(x_{n-1}, x_n), x_{n+1}\right).$$

Справедливость равенства (26) следует из определения операции переименования переменных.

По свойству (8) функций из L_1^0:

$$F_+^{(n'+1)}\left(x_{n+1}, \ldots, x_{n+n'-1}, F_{n+n'}\left(F_+^{(n+1)}(x_1, \ldots, x_n, x)\right), x'\right) =$$
$$= F_+^{(n'+1)}(x_{n+1}, \ldots, x_{n+n'-1}, F_{n+n'}(x_1), \ldots, F_{n+n'}(x_n), F_{n+n'}(x), x').$$

Отсюда с использованием утверждения 1 и равенства (25) получим (27).

Из $\text{Об}_{x_n}F_+^{(n+1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, F_n(x_n), x) = \text{Об}_{x_n}F_+^{(2)}\left(F_+^{(n)}(x_1, \ldots \ldots, x_{n-1}, x), F_n(x_n)\right)$ с учетом свойства (8) функцийиз $L_1{}^0$ получим

$$\text{Об}_{x_n}F_+^{(n+1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, F_n(x_n), x) =$$
$$= F_+^{(n)}\left(\text{Об}_{x_n}\left(F_+^{(2)}(x_1, F_n(x_n))\right), \ldots, \text{Об}_{x_n}\left(F_+^{(2)}(x_{n-1}, F_n(x_n))\right),\right.$$
$$\left.\text{Об}_{x_n}\left(F_+^{(2)}(x, F_n(x_n))\right)\right).$$

Отсюда и из утверждения 1 вытекает (28). Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3 нетрудно доказать, используя лемму 2 и равенства (25)—(28).

Докажем утверждение 4. Нетрудно видеть справедливость включения

$$\{0^\infty, 10^\infty, F_+^{(n)}, \xi, \mathrm{Id}\} \subseteq K\{F_+^{(2)}, \xi_1\}. \tag{29}$$

Покажем, что

$$F \in K\{\xi_1, F_+^{(2)}\} \tag{30}$$

для любой л.-а. функции F из L_1^0.

Пусть $F \in L_1^0$. Найдутся числа $a_0, a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_{s+s'}$ из E_2 такие, что $F = \dfrac{a_0 + a_1\xi + \ldots + a_s\xi^s}{1 + a_{s+1}\xi + \ldots + a_{s+s'}\xi^{s'}}$. Построим л.-а. функцию $F^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots \ldots, s+s'$, следующим образом. Функцию $F^{(0)}$ получим подстановкой л.-а. функции a_0x_0 вместо переменной x_0 л.-а. функции $F_+^{(s+s'+1)}(x_0, x_1, \ldots \ldots, x_{s+s'})$. Если функции $F^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, построены, то $F^{(k+1)}$ получим подстановкой $a_{k+1}\xi^{k+1}(x_{k+1})$ вместо x_{k+1} л.-а. функции $F^{(k)}$, если $k+1 \leqslant s$ или подстановкой $a_{k+1}\xi^{k+1-s}(x_{k+1})$ вместо x_{k+1} л.-а. функции $F^{(k)}$, если $s < k+1 \leqslant s+s'$. Имеет место равенство

$$F(x) = \text{Об}_{x_1}\left(F^{(s+s')}\left(\underbrace{x, \ldots, x}_{s+1}, x_1, \ldots, x_1\right)\right).$$

Отсюда вытекает (30).

Любая константа содержится в $K(\{F_+^{(2)}, \xi_1\})$, что следует из утверждения 4 леммы 5, включения (29) и свойства (30), справедливого для любой F из L_1^0.

Используя произвольный набор функций $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ из L_1^0, константу γ, сумматор $F_+^{(n+1)}$ и операцию подстановки, можно получить функцию

$$F_+^{(n+1)}(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n), \gamma).$$

Поэтому с учетом леммы 2 получаем, что любая л.-а. функция содержится в $K\{\xi_1, F_+^{(2)}\}$. Лемма доказана.

Из леммы 6 следуют соотношения:

$$K(\mathfrak{M}^0) = (K(\mathfrak{M}))^0, \tag{31}$$

$$K(\{\xi, F_+^{(2)}\}) = L^0, \tag{32}$$

$$U(K(\mathfrak{M})) \subseteq K^1(U(\mathfrak{M})). \tag{33}$$

Функциям из L будем сопоставлять схемы следующим образом. Л.-а. функциям $F_+^{(2)}(x_1, x_2)$, $\xi_1(x)$ и $\xi(x)$ сопоставим схемы, изображенные на рис. 1, *а*, 1, *б* и 1, *в* соответственно.

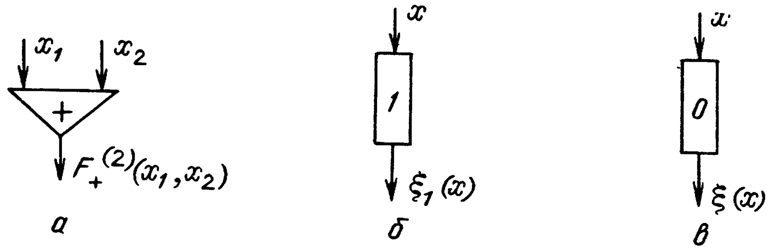

Рис. 1

Если л.-а. функциям $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $F'(x_{n+1}, \ldots, x_{n+n'})$ уже сопоставлены схемы, то функциям F^{II}, F^{III}, F^{IV}, F^{V}, полученным из F и F' с использованием операций 1°—4°, сопоставляем схемы в соответствии с правилами, имеющимися в [8]. В [8] также вводится понятие функционирования схемы.

Каждая схема, таким образом, реализует некоторую л.-а. функцию. Если две схемы (два линейных автомата) реализуют (вычисляют) равные л.-а. функции, то будем говорить, что они *эквивалентны*. В дальнейшем будем считать, что если задана какая-либо схема (задан какой-либо линейный автомат), то задана любая схема (задан любой линейный автомат), эквивалентная (эквивалентный) ей (ему). Таким образом, мы рассматриваем схемы (линейные автоматы) с точностью до отношения эквивалентности.

Из утверждения 4 леммы 6 следует, что любая л.-а. функция реализуется некоторой схемой.

§ 3. Система замкнутых классов J

Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, называется замкнутым классом, если $K(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$.

Приступим теперь к описанию замкнутых классов из системы J. Положим

$T_a = \{F | F \in L$ и для любого набора сверхслов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеет место $F(a\alpha_1, \ldots, a\alpha_n)(0) = a\}$, $a = 0, 1$,

$V_1 = \{F | F \in L$ и F имеет не более одной непосредственной переменной$\}$,

$V_{\text{н}} = \{F | F \in L$ и F имеет нечетное число непосредственных переменных$\}$,

$R_{\text{с}} = \{F | F \in L$ и F имеет одну существенную переменную$\}$,

$R_{\text{н}} = \{F | F \in L$ и F имеет одну непосредственную переменную$\}$.

Упорядочим все неприводимые многочлены из L_1^0 в порядке возрастания степеней: $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, $\deg p_1 \leqslant \deg p_2 \leqslant \ldots \leqslant \deg p_i \leqslant \ldots$, так, что $p_1 = \xi$.

Рассмотрим дробь $\frac{u}{v}$ из L_1^0. (Любую дробь мы задаем в несократимом виде, о чем уже говорилось выше.) Л.-а. функция F, $F = \frac{u}{v}$, обладает 0-*свойством*, если имеет место 1) или 2):

1) $\frac{u}{v} \in R_{\text{н}}$, $\deg u = \deg v$,

2) $\frac{u}{v} \notin R_{\text{н}}$, $\deg u < \deg v$.

Если $u+v$ или u делится на ξp_i, то F обладает i-свойством, $i=1, 2, \ldots$

Л.-а. функция F обладает $0'$-*свойством*, если $\deg u < \deg v$, и F обладает $0''$-*свойством*, если $\deg u \leqslant \deg v$. Л.-а. функция F обладает i'-*свойством*, если u делится на p_i, и F обладает i''-*свойством*, если v не делится на p_i, $i=2, 3, \ldots$

Положим

$$M_i^{(1)} = \{F \mid F \text{ обладает } i\text{-свойством}\}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

$$R_i^{(1)} = \{F \mid F \text{ обладает } i'\text{-свойством}\}, \quad i = 0, 2, \ldots,$$

$$M_i = \{F \mid F \in L, \ U(F) \subset M_i^{(1)}\}, \ i = 0, 1, \ldots,$$

$R_i^{\text{с}} = \{F \mid F \in L, \ F = F_+^{(n+1)}(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n), \beta)$, если x_j — единственная существенная переменная F, то F_j обладает i''-свойством, в противном случае F_j обладает i'-свойством$\}$,

$R_i^{\text{н}} = \{F \mid F \in L, \ F = F_+^{(n+1)}(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n), \beta)$, если x_j — единственная непосредственная переменная F, то F_j обладает i''-свойством, в противном случае F_j обладает i'-свойством$\}$.

В дальнейшем для множеств $R_{\text{с}}$ и $R_{\text{н}}$ мы используем метаобозначение R_ρ, а для $R_i^{\text{с}}$ и $R_i^{\text{н}}$ — метаобозначение R_i^ρ.

Через $J^{(1)}$ обозначим множество $\{M_i^{(1)}, R_j^{(1)} \mid i = 0, 1, \ldots, \ j = 0, 2, 3, \ldots\}$, а через J — множество

$$\{T_0, T_1, V_1, V_{\text{н}}, M_i, R_j^\rho \mid \rho = \text{с, н}, \ i = 0, 1, \ldots, \ j = 0, 2, 3, \ldots\}.$$

Теорема 1. *Для каждого* θ, $\theta \in J$,

$$K(\theta) = \theta, \quad \theta \neq L. \tag{34}$$

Доказательство. Пусть $\theta \in \{T_0, T_1, V_1, V_{\text{н}}\}$. Рассмотрим функции F и F' из θ, заданные равенствами (23), (24). Нетрудно видеть, что л.-а. функции F^{II}, F^{III}, F^{IV}, F^{V}, полученные из F и F' с использованием операций 1°—4°, содержатся в θ. Отсюда следует $K(\theta) = \theta$. (Использованный здесь прием доказательства замкнутости θ называется индукцией по построению.)

Используя соотношения $F_+^{(2)} \notin T_1 \cup V_1 \cup V_{\text{н}}$, $\xi_1 \notin T_0$, получим (34) для каждого θ из $\{T_0, T_1, V_1, V_{\text{н}}\}$.

Пусть $\theta = M_i$. Заметим, что для любой F, $F \in K(M_i)$, из соотношения (33) и равенств (19)—(21) следует $U(F) \subset M_i^{(1)}$. Поэтому $F \in M_i$ и $M_i = K(M_i)$.

Кроме того, $\xi \notin M_i$. Соотношения (34) в случае $\theta = M_i$ доказаны.

Доказательство (34) для $\theta = R_j^\rho$ проведем индукцией по построению элементов из $K(R_j^\rho)$. Для этого рассмотрим л.-а. функции F и F' из R_j^ρ, заданные равенствами (23), (24). Пусть F^{II}, F^{III}, F^{IV}, F^{V} получены из F и F' применением операций 1°—4°. Тогда справедливы равенства (25)—(28). Очевидно, что $F^{\text{III}} \in R_j^\rho$. Докажем соотношения

$$F^\omega \in R_j^\rho, \quad \omega = \text{II, IV, V}. \tag{35}$$

Пусть $F_i = \frac{u_i}{v_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n + n'$.

Рассмотрим л.-а. функцию F^{II}. Будем считать, что x_{n-1} и x_n — существенные переменные F, так как в противном случае (35) при $\omega = \text{II}$

очевидно. Следовательно, $F \notin R_c$. При этом справедливо равенство

$$F_{n-1} + F_n = \frac{u_{n-1}v_n + u_n v_{n-1}}{v_{n-1}v_n} \tag{36}$$

Если $F \notin R_\rho$, то $F_1, \ldots, F_n$ обладают j'-свойством. Поэтому из (36) следует, что $F_{n-1} + F_n$ обладает j'-свойством, т. е. $U(F^{\mathrm{II}}) \subseteq R_j^{(1)}$. Отсюда следует соотношение (35) для $\omega = \mathrm{II}$.

Осталось доказать, что в случае $F \in R_н$ справедливо $F^{\mathrm{II}} \in R_j^{н}$. Действительно, в этом случае $F^{\mathrm{II}} \in R_н$ и имеет место 1) или 2):

1) $\{F_{n-1}, F_n\} \cap R_н = \varnothing$, 2) $\{F_{n-1}, F_n\} \cap R_n \neq \varnothing$.

Если имеет место 1), то $F_{n-1} + F_n$ обладает j'-свойством. Поэтому (35) справедливо при $\omega = \mathrm{II}$. Если выполнено 2), то $F_{n-1} + F_n$ обладает j''-свойством и $F_{n-1} + F_n \in R_н$, т. е. здесь также справедливо (35), $\omega = \mathrm{II}$.

Таким образом, операция отождествления переменных не выводит из R_j^ρ.

Докажем (35) при $\omega = \mathrm{IV}$. Предположим $F_{n+n'} \neq 0^\infty$. (В противном случае доказательство тривиально.) Для всякого i, $i = 1, 2, \ldots, n$, справедливо равенство

$$F_i \cdot F_{n+n'} = \frac{u_i u_{n+n'}}{v_i v_{n+n'}}. \tag{37}$$

Если $F' \notin R_\rho$, то из (37) следует, что всякая л.-а. функция из $U(F^{\mathrm{IV}})$ обладает j'-свойством. Поэтому (35) справедливо при $\omega = \mathrm{IV}$.

Пусть $F' \in R_\rho$.

Если $F' \in R_c$, то число существенных переменных у F^{IV} и у F совпадают. Поэтому из равенства (37) и $F \in R_j^c$ вытекает $F^{\mathrm{IV}} \in R_j^c$.

Если $F' \in R_н$, то рассмотрим два случая:

1) $F_{n+n'} \notin R_н$, 2) $F_{n+n'} \in R_н$.

В первом случае имеем $F^{\mathrm{IV}} \in R_н$, и из (37) следует, что $F_i \cdot F_{n+n'}$ обладает j'-свойством, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому здесь имеет место $F^{\mathrm{IV}} \in R_н$.

В случае 2) множества непосредственных переменных у F^{IV} и у F совпадают. Кроме того, множество $U(F^{\mathrm{IV}}) \setminus R_j^{(1)}$ непусто лишь при $F \in R_н$. Отсюда и из (37) следует справедливость соотношения (35), $\omega = \mathrm{IV}$.

Таким образом, (35) при $\omega = \mathrm{IV}$ доказано.

Докажем справедливость (35), $\omega = \mathrm{V}$. (Л.-а. функция F^{V} может быть построена, когда F зависит со сдвигом от x_n.) Пусть x_n — существенная переменная функции F (в противном случае доказательство (35), $\omega = \mathrm{V}$, несложно) и пусть $F^{\mathrm{V}} \notin L_c$.

Имеет место равенство $F^{\mathrm{V}} = (F_n + 1)^{-1}(F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0^\infty))$. Отсюда, учитывая (35), $\omega = \mathrm{IV}$, и включение $\{(F_n + 1)^{-1}, 0^\infty\} \subset R_j^c \cap R_j^н$, получим (35), $\omega = \mathrm{V}$. Следовательно, операция обратной связи не выводит из R_j^ρ и R_j^ρ замкнут.

Заметим, что $F_+^{(2)} \notin R_j^c$, $F_+^{(2)} \notin R_j^н$, $j = 0, 2, 3, \ldots$

Теорема доказана.

§ 4. Критерий полноты в L

Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, называется полным, если $K(\mathfrak{M}) = L$.

Теорема 2. *Множество $\mathfrak{M}$ полно в точности тогда, когда $\mathfrak{M} \not\subseteq T^a$ для каждого a, $a \in \{0, 1\}$, и, кроме того, для некоторых констант β и β' в $K(\mathfrak{M})$ содержатся функции $F_1(x_1, x_2)$, $F_2(x)$,*

$$F_1(x_1, x_2) = F_+^{(3)}(x_1, x_2, \beta), \tag{38}$$

$$F_2(x) = F_+^{(2)}(\xi(x), \beta'). \tag{39}$$

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы следует из определения полноты.

Достаточность. Предположим, что функции F_1, F_2 из $K(\mathfrak{M})$ удовлетворяют равенствам (38), (39), $F^* \in \mathfrak{M} \setminus T_0$, $F^{**} \in \mathfrak{M} \setminus T_1$.

Тогда $\beta = F_1(x, x)$. Множество $\{\beta, F^*(\beta, \ldots, \beta), F^{**}(\beta, \ldots, \beta)\}$ включает константы β_0 и β_1, $\beta_0 = 0\widetilde{\beta}_0$, $\beta_1 = 1\widetilde{\beta}_1$.

Докажем соотношение

$$0^\infty \in K(\mathfrak{M}). \tag{40}$$

Если $\beta_0 = 0^\infty$, то (40) доказано. Пусть $\beta_0 \neq 0^\infty$. По лемме 5 найдутся F' и F'' из L_1^0, $F' = \frac{u'}{v'}$, $F'' = \frac{u''}{v''}$, такие, что $\beta_0 = F'(10^\infty)$, $\beta_1 = F''(10^\infty)$. Положим $m = \max(\deg u'v'', \deg u''v')$. Для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ имеют место равенства

$$u''v' = 1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_m\xi^m, \quad u'v'' = b_1\xi + b_2\xi^2 + \ldots + b_m\xi^m.$$

Через $\widetilde{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_{2i+1})$ обозначим л.-а. функцию

$$F_+^{(2i+1)}\left(x_1, \xi(x_2), \xi(x_3), \xi^2(x_4), \xi^2(x_5), \ldots, \xi^i(x_{2i}), \xi^i(x_{2i+1})\right).$$

Заметим, что

$$F_+^{(3)} = F_1(x_1, F_1(x_2, x_3)),$$
$$\widetilde{F}_1 = F_+^{(3)}(x_1, F_2(x_2), F_2(x_3)),$$
$$\widetilde{F}_{i+1} = \widetilde{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_{2i}, \widetilde{F}_1(x_{2i+1}, x_{2i+2}, x_{2i+3})).$$

Таким образом, $\widetilde{F}_m \in K(\mathfrak{M})$. Вместо переменной x_1 и переменных x_{2i+1} л.-а. функции $\widetilde{F}_m$, где i таково, что $a_i = 1$ и $i = 1, 2, \ldots, m$ подставим константу β_0. Получим л.-а. функцию $\widetilde{F}'_m$. Для каждого j, $j = 1, 2, \ldots, m$, константу β_1 подставим вместо переменной x_{2j} л.-а. функции $\widetilde{F}'_m$ в точности тогда, когда $b_j = 1$. Отождествим все переменные полученной л.-а. функции. Полученная функция $\widetilde{F}(x)$ содержится в $L_1^0 \setminus R_{\text{н}}$ и имеет место *)

$$\text{Об}_x(\widetilde{F}(x)) = 0^\infty.$$

Очевидно, справедливо включение

$$\{F_+^{(2)}, \xi\} \subseteq K\left(\{F_+^{(3)}, 0^\infty, \widetilde{F}_1\}\right).$$

Из (32) следует $\frac{v''}{u''}\beta_1 = 10^\infty$, $10^\infty \in K(\mathfrak{M})$. Поэтому из равенства $\xi_1 = F_+^{(2)}(\xi(x), 10^\infty)$ вытекает полнота множества $\mathfrak{M}$.

Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о многочленах.

Рассмотрим кольцо многочленов от двух переменных над полем E_2:

$$E_2[z_1, z_2] = \left\{\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}z_1^i z_2^j \,\middle|\, m, n \in N, \ a_{ij} \in E_2\right\}.$$

Полной степенью многочлена $\lambda(z_1, z_2)$,

$$\lambda(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}z_1^i z_2^j,$$

называется число $\max\{i + j \mid a_{ij} \neq 0\}$, которое обозначается $\deg_0 \lambda(z_1, z_2)$.

---

*) Пусть л.-а. функция $\widetilde{F}(x)$ зависит со сдвигом от x. Найдется л.-а. функция $F'(x, x')$, равная $\widetilde{F}(x)$, переменная x' которой фиктивна. Функцией, полученной применением операции обратной связи к переменной x функции $\widetilde{F}(x)$ мы называем $\text{Об}_x(F'(x, x'))$.

Лемма 7 [4]. *Для любой пары* F_1, F_2 *из* $L_1^0\backslash E_2$ *найдется ненулевой многочлен* $\lambda(z_1, z_2)$ *такой, что* $\lambda(F_1, F_2)=0$.

Порядком зависимости л.-а. функций F_1 и F_2 из $L_1^0\backslash E_2$ назовем число n,

$$n=\min\{\deg_0\lambda(z_1, z_2)\,|\,\lambda\neq 0,\ \lambda(F_1, F_2)=0\},$$

а любой многочлен $\lambda(z_1, z_2)$ со свойствами $\lambda\neq 0$, $\lambda(F_1, F_2)=0$, $\deg_0\lambda = n$ — *многочленом зависимости* F_1 и F_2.

Пусть для F имеет место (6). Через $E(F)$ обозначим множество $\{F_i|$ переменная x_i не является единственной существенной переменной или единственной непосредственной переменной функции $F\}$.

Для множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\subseteq L$, положим $E(\mathfrak{M})=\bigcup\limits_{F\in\mathfrak{M}}E(F)$. Таким образом, $E(\mathfrak{M})\subseteq U(\mathfrak{M})\backslash\{0\}$.

Лемма 8. *Пусть* $\mathfrak{M}\subseteq L^0$, $\mathfrak{M}\nsubseteq V_1$, $\mathfrak{M}\nsubseteq V_{\text{н}}$ *и* $\{F_1, \ldots, F_n\}\subseteq E(\mathfrak{M})$. *Тогда найдется такое* l, *что для л.-а. функции* F, $F(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = F_+^{(2n)}\left(F_1^{2^l}(x_1), F_1^{2^l}(x_2), F_2^{2^l}(x_3), F_2^{2^l}(x_4), \ldots, F_n^{2^l}(x_{2n-1}), F_n^{2^l}(x_{2n})\right)$ *имеет место*

$$F\in K(\mathfrak{M}). \tag{41}$$

Доказательство. Мы наметим лишь основные этапы доказательства леммы 8. Более подробное доказательство не представляет принципиальных затруднений.

Этап 1. Устанавливаем, что $\{0^\infty, \widetilde{F}(x_1, x_2)\}\subset K(\mathfrak{M})$, где $\widetilde{F}(x_1, x_2) = F_+^{(2)}(F'(x_1), F'(x_2))$, $F'\in R_{\text{н}}$.

Этап 2. Предположим, что $F_+^{(2)}\notin K(\mathfrak{M})$. (В противном случае (41) устанавливается для $l=0$.) Отсюда следует, что $1\notin E(\mathfrak{M})$.

Этап 3. Для каждого i, $i=1, 2, \ldots, n$, в $K(\mathfrak{M})$ содержится л.-а. функция F_i^*, $= F_i^*F_+^{(2)}\left(F_i(x_{1,i}), F_i'(x_{2,i})\right)$, где $F_i'\in R_{\text{н}}$, если $F_i\in R_{\text{н}}$. Положим $\widetilde{F}_i = F'\cdot F_i'$. Из предположения, сделанного на этапе 2, вытекает $\widetilde{F}_i\in L_1^0\diagdown E_2$. Пусть $\lambda_i(z_1, z_2)$ — многочлен зависимости функций F_i и $\widetilde{F}_i$, и $\deg_0\lambda_i=n_i$. По лемме 3, для каждого i найдутся натуральные числа j_i и j_i', $j_i<j_i'$, и многочлен $\widetilde{\lambda}(z_1, z_2)$, удовлетворяющие равенству

$$F_i^{j_i}+F_i^{j_i'}=\widetilde{F}_i\widetilde{\lambda}_i(F_i, \widetilde{F}_i). \tag{42}$$

Положим $l_i=j_i'-j_i$. Из (42) для некоторых л.-а. функций $\Pi_{i,\nu}$, $\Pi_{i,\nu}=\widetilde{F}^{\tau_{i,\nu}'}F^{\tau_{i,\nu}}$,

$$\{\tau_{i,\nu}', \tau_{i,\nu}\,|\,\nu=1, 2, \ldots, r_i,\ i=1, 2, \ldots, n\}\subset N$$

и некоторого p_i, $p_i\in N$, справедливо:

$$F_i^{j_i}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r_i}\Pi_{i,\nu}\frac{\widetilde{F}_i}{1+F_i^{l_i}}, & \text{если } F_i\notin R_{\text{н}},\\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{r_i}\Pi_{i,\nu}\frac{\widetilde{F}_i}{1+F_i^{l_i}+\widetilde{F}_i^{p_i}}, & \text{если } F_i\in R_{\text{н}}.\end{cases}$$

Этап 4. Положим $r=2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}r_i$. Выберем r_0, $r_0\in N$, удовлетворяющее неравенству $2^{2^{r_0}-1}\geqslant r$. Положим $m=2^{r_0}-1$. Для функции F_λ, $F_\lambda =$

$=F_+^{(r)}(\widetilde{F}_1^m(x_1), \ldots, \widetilde{F}_1^m(x_{2r_1}), \widetilde{F}_2^m(x_{2r_1+1}), \ldots, \widetilde{F}_2^m(x_{2r_1+2r_2}), \ldots, \widetilde{F}_n^m(x_{r-2r_k+1}), \ldots$
$\ldots, \widetilde{F}_n^m(x_r))$ имеет место $F_\lambda \in K(\mathfrak{M})$.

Этап 5. Для л.-а. функции $\widehat{F}_{i,\nu}$,

$$\widehat{F}_{i,\nu} = \begin{cases} \Pi_{i,\nu}^{2^{r_0}} \dfrac{\widetilde{F}_i}{1+F_i^{2^{r_0}l_i}}, & \text{если} \quad F_i \notin R_{\text{н}}, \\ \Pi_{i,\nu}^{2^{r_0}} \dfrac{\widetilde{F}_i}{1+F_i^{2^{r_0}l_i}+\widetilde{F}_i^{p_i 2^{r_0}}}, & \text{если} \quad F_i \in R_{\text{н}}, \end{cases}$$

имеем

$$\widehat{F}_{i,\nu} \in K(\{F_i^*, \widetilde{F}, 0\})$$

Справедливо включение $\{F_i^*, \widetilde{F}, 0\} \subseteq K(\mathfrak{M})$.

Для л.-а. функции F'_λ,

$$F'_\lambda = F_\lambda(\widehat{F}_{1,1}(x_1), \widehat{F}_{1,2}(x_1), \ldots, \widehat{F}_{1,r_1}(x_1), \widehat{F}_{1,1}(x_2), \widehat{F}_{1,2}(x_2), \ldots$$
$$\ldots, \widehat{F}_{1,r_1}(x_2), \widehat{F}_{2,1}(x_3), \widehat{F}_{2,2}(x_3), \ldots, \widehat{F}_{2,r_2}(x_3), \widehat{F}_{2,1}(x_4),$$
$$\widehat{F}_{2,2}(x_4), \ldots, \widehat{F}_{2,r_2}(x_4), \ldots, F_{n,1}(x_{2n-1}), \widehat{F}_{n,2}(x_{2n-1}), \ldots$$
$$\ldots, \widehat{F}_{n,r_n}(x_{2n-1}), \widehat{F}_{n,1}(x_{2n}), \widehat{F}_{n,2}(x_{2n}), \ldots, \widehat{F}_{n,r_n}(x_{2n})),$$

справедливо

$$F'_\lambda = F_+^{(2n)}\Big(F_1^{j_1 2^{r_0}}(x_1), F_1^{j_1 2^{r_0}}(x_2), F_2^{j_2 2^{r_0}}(x_3),$$
$$F_2^{j_2 2^{r_0}}(x_4), \ldots, F_n^{j_n 2^{r_0}}(x_{2n-1}), F_n^{j_n 2^{r_0}}(x_{2n})\Big). \quad (43)$$

Пусть l, $l \in N$, таково, что $2^l \geqslant \max\limits_i (j_i \cdot 2^{r_0})\cdot$ Тогда (41) следует из (43).

Исследование операций композиции в L мы сводим в известном смысле к рассмотрению операций $+$, $\cdot$, Об на множестве L_1^0. Поэтому нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть* $\mathfrak{M} \subseteq L_1^0$, $\mathfrak{M} \not\subseteq \theta^{(1)}$ *для каждого* $\theta^{(1)}$, $\theta^{(1)} \in J^{(1)}$, *и среди элементов* $\mathfrak{M}$ *найдется хотя бы одна взаимнооднозначная л.-а. функция. Тогда* $K^1(\mathfrak{M}) = L_1^0$.

Доказательство. Докажем, что для некоторых F и F' из L_1^0 имеют место соотношения

$$\mathfrak{M} \subseteq K^1(\{1, F\}), \ \{F', FF'\} \subset K_c^1(\mathfrak{M}), \ F' \neq 0. \quad (44)$$

На множестве L_2^0,

$$L_2^0 = \{F_+^{(2)}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \mid F_1 \in L_1^0, \ F_2 \in L_1^0 \setminus \{0\}\},$$

введем d-эквивалентность следующим образом. Функции F_a, F_b,

$$F_a = F_+^{(2)}(F_1(x_1), F_2(x_2)), \ F_b = F_+^{(2)}(F_3(x_1), F_4(x_2)) \quad (45)$$

будем называть *d-эквивалентными*, если найдутся $\widetilde{F}_1$ и $\widetilde{F}_2$ из $L_1^0 \setminus \{0\}$ такие, что справедливо равенство

$$F_+^{(2)}(\widetilde{F}_1 F_1(x_1), \widetilde{F}_1 F_2(x_2)) = F_+^{(2)}(\widetilde{F}_2 F_3(x_1), \widetilde{F}_2 F_4(x_2)).$$

Для обозначения d-эквивалентности F_a и F_b используется обозначение $F_a \sim F_b$, а совокупность функций $\{F \mid F \sim F_a\}$ обозначается через $|F_a|$.

На множестве $L_2^0/\sim$, $L_2^0/\sim = \{\,|F|\,|\,F\in L_2^0\}$, введем операции сложения и умножения следующим образом

$$|F_a| + |F_b| = |F_+^{(2)}((F_1F_4+F_2F_3)(x_1),\ F_2F_4(x_2))|,$$
$$|F_a|\cdot|F_b| = |F_+^{(2)}(F_1F_3(x_1),\ F_2F_4(x_2))|$$

(для F_a и F_b имеют место равенства (45)). Нетрудно видеть, что эти операции определены корректно и превращают $L_2^0/\sim$ в поле, которое мы обозначим через P_2. Поле P_2 изоморфно полю отношений $E_2(z)$,

$$E_2(z) = \left\{\frac{u}{v}\,\middle|\, u\in E_2[z],\ v\in E_2[z]\setminus\{0\}\right\},$$

где, как и раньше, $\frac{u}{v}=\frac{u'}{v'}$, если $uu_1=u'u_2$ и $vu_1=v'u_2$ для некоторых u_1 и u_2 из $E_2[z]\setminus\{0\}$. Изоморфизм полей P_2 и $E_2(z)$ устанавливается отображением

$$\Phi^{(2)}\left(F_+^{(2)}\left(\frac{u'}{v'}(x_1),\ \frac{u''}{v''}(x_2)\right)\right) = \frac{\Phi(u'v'')}{\Phi(v'u'')},$$

где Φ — изоморфизм L_1^0 и $Q_2(z)$, рассмотренный в лемме 4.

Пусть

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \{\,|F_+^{(2)}(F^*(x_1),\ x_2)|\,|\,F^*\in\mathfrak{M}\}.$$

Через $\Phi^{(2)}(\widetilde{\mathfrak{M}})$ обозначим множество $\{\Phi^{(2)}(\widetilde{F})\,|\,\widetilde{F}\in\widetilde{\mathfrak{M}}\}$. Тогда в $\Phi^{(2)}(\widetilde{\mathfrak{M}})\setminus E_2$ найдется дробь $\frac{u^*(z)}{v^*(z)}$.

Совокупность всех дробей, получаемых из элементов множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}\subseteq E_2(z)$, с использованием конечного числа операций сложения, умножения и деления, обозначим $\langle\mathfrak{N}\rangle$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}' = \langle\Phi^{(2)}(\widetilde{\mathfrak{M}})\rangle$, поле и $E_2\subset\mathfrak{N}'\subseteq E_2(z)$. По теореме Люрота [4] существует $\mu(z)$, $\mu(z)\in\mathfrak{N}'$, удовлетворяющий равенству $\mathfrak{N}'=\langle\{\mu(z)\}\rangle$. Из $\mu(z)\notin E_2$ следует

$$\langle\{\mu(z)\}\rangle = \langle\{\mu^{-1}(z)\}\rangle = \langle\{\mu(z)+1\}\rangle.$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $\mu(z)\in zQ_2(z)$. Для некоторой F, $F\in L_1^0$, имеет место

$$(\Phi^{(2)})^{-1}(\mu(z)) = |F_+^{(2)}(F(x_1),\ x_2)|.$$

Теперь несложными рассуждениями можно показать, что найдется F', удовлетворяющая вместе с F соотношениям (44).

Заметим, что ввиду соотношений $\mathfrak{M}\not\subseteq M_j^{(1)}$, $j=0,1,\ldots$, имеет место $F\not\subseteq\bigcup_{j=0}^{\infty}M_j^{(1)}$. Таким образом, для F выполнено $F\in\left\{\xi,\ \frac{\xi}{1+\xi}\right\}$.

Из (44) для некоторой взаимнооднозначной функции F'', $F''=\frac{u''}{v''}$ и некоторого k, $k\in N$, следует

$$\{\xi^{k+1}F'',\ \xi^kF''\}\subset K^1(\mathfrak{M}). \tag{46}$$

Можно показать, что для $\mathfrak{M}$ ввиду соотношений $\mathfrak{M}\not\subseteq M_0^{(1)}$, $\mathfrak{M}\not\subseteq R_0^{(1)}$, имеет место хотя бы один из следующих двух случаев.

Случай 1. Найдется взаимнооднозначная функция F_d, $F_d\in K^1(\mathfrak{M})$, $F_d=\frac{u_d}{v_d}$ такая, что $\deg u_d>\deg v_d$.

Случай 2. Найдется F_e, $F_e\in K^1(\mathfrak{M})$, $F_e=\frac{u_e}{v_e}$, со свойствами $\deg u_e=\deg v_e$, $F_e\in R_c\setminus R_н$.

В случае 1 положим $F_g = F''F_d^{r_0}$, где $r_0 \geqslant 0$, $r_0 \geqslant \deg v'' - \deg u''$, в случае 2 — $F_g = \frac{F''}{1+F^{2^s}}$, где $2^s \geqslant \deg v'' - \deg u''$. Для несократимой дроби $\frac{u_g}{v_g}$, $\frac{u_g}{v_g} = F_g$, имеем $\deg u_g \geqslant \deg v_g$, $\frac{u_g}{v_g} \in 1 + \xi Q_2(\xi)$. Кроме того, $\{\xi^k F_g, \xi^{k+1}F_g\} \subset K^1(\mathfrak{M})$.

Теперь покажем, что для некоторого r из N и любых i, j из $N \backslash \{0\}$ справедливо

$$\xi^{i2^r} F_g^{j2^r} \in K^1(\mathfrak{M}). \tag{47}$$

Через n_1 и n_2 обозначим $\deg u_g$ и $\deg v_g$ соответственно. Тогда для некоторых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{n_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}$ из E_2 имеют место равенства

$$u_g = a_0 + a_1\xi + a_1\xi^2 + \ldots + a_{n_1-1}\xi^{n_1-1} + \xi^{n_1},$$

$$v_g = 1 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \ldots + b_{n_2-1}\xi^{n_2-1} + b_{n_2}\xi^{n_2},$$

где $b_{n_2} = 1$ в точности тогда, когда $n_2 > 0$. Кроме того, $a_0 = 1$ при условии $n_1 > 0$.

В случае $n_1 = 0$ для любых i, j из N (47) справедливо для r, удовлетворяющих неравенству $2^r \geqslant k^2$.

Рассмотрим случай $n_1 \geqslant 1$. Предположим, что $k > 0$. Через $\tilde{K}_i$ и $\tilde{B}_j$ обозначим следующие множества пар целых чисел:

$$\tilde{K}_i = \{(t, l) \mid l = (k+1)t + i;\ t \in N\},$$
$$\tilde{B}_j = \{(t, l) \mid l = kt - j;\ t \in N;\ l \in N\},$$
$$i \in N\backslash\{0\},\ j \in N\backslash\{0\}.$$

Пусть $\tilde{A}$, $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$, ...— множества пар натуральных чисел, определенных следующим образом:

$$\tilde{A} = \{(t, l) \mid t \in N,\ l \in N,\ t \geqslant k + n_1,\ l \geqslant k(k+n_1)\},$$
$$\tilde{A}_0 = \{(t, l) \mid (t, l) \in \tilde{A},\ kt \leqslant l \leqslant (k+1)t\},$$
$$\tilde{A}_i = \tilde{A} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i} (\tilde{K}_j \cup \tilde{B}_j) \cup \tilde{A}_0\right), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Используя соотношение $\xi^l F_g^t \in K^1(\mathfrak{M})$, справедливое для каждой пары (t, l) из $\tilde{A}_0$ и равенства

$$\xi^l F_g^t = b_1\xi^{l+1}F_g^t + b_2\xi^{l+2}F_g^t + \ldots + b_{n_2}\xi^{l+n_2}F_g^t + \xi^l F_g^{t-1} +$$
$$+ a_1\xi^{l+1}F_g^{t-1} + \ldots + a_{n_1-1}\xi^{l+n_1-1}F_g^{t-1} + \xi^{l+n_1}F_g^{t-1},$$

$$\xi^l F_g^t = \xi^{l-n_1}F_g^{t+1} + b_1\xi^{l-n_1+1}F_g^{t+1} + b_2\xi^{l-n_1+2}\cdot F_g^{t+1} + \ldots$$
$$\ldots + b_{n_2}\xi^{l-n_1+n_2}F_g^{t+1} + \xi^{l-n_1}F_g^t + a_1\xi^{l-n_1+1}F_g^t + \ldots + a_{n_1-1}\xi^{l-1}F_g^t,$$

справедливые для $(t, l) \in \tilde{B}_i$ и $(t, l) \in \tilde{K}_i$ соответственно, получим

$$\xi^l F_g^t \in K^1(\mathfrak{M})$$

для любой пары (t, l) из $\tilde{A}$.

Таким образом, для любого натурального r, удовлетворяющего неравенству $2^r \geqslant k(k+n_1)$, и любых i, j из $N\backslash\{0\}$ выполнено (47).

При $k = 0$ доказательство (47) проводится аналогично, необходимо лишь исключить из рассмотрения множества $\tilde{B}_j$.

Докажем теперь, что для любого неприводимого многочлена $p_i(\xi)$, $p_i \neq \xi$, найдутся многочлены u_{p_i} и v_{p_i} такие, что $F_{p_i} = \frac{u_{p_i}}{p_i v_{p_i}}$, $(u_{p_i}, p_i) = 1$, $F_{p_i} \in K^1(\mathfrak{M})$.

Действительно, по условию леммы в $\mathfrak{M}$ найдутся л.-а. функции F_1 и F_2, не содержащиеся в $M_i^{(1)}$ и $R_i^{(1)}$ соответственно. Тогда множество $\{F_1, F_2, F_1 + F_1^2, F_1 + F_2\}$ содержит л.-а. функцию F_h из $(L_1^0 \setminus M_i^{(1)}) \setminus R_{\text{н}}$. Рассмотрим несократимую дробь $\frac{u_h}{v_h}$, равную F_h. Если p_i делит v_h, то положим $F_{p_i} = F_h$, и в этом случае справедливо $F_{p_i} \in K^1(\mathfrak{M})$. В противном случае рассмотрим многочлен зависимости $\lambda(z_1, z_2)$ л.-а. функций F_h и p_i. Имеет место равенство $\lambda(F_h, p_i) = 0$. Для некоторых неотрицательных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_k$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, где $k \geqslant 2$, имеет место

$$\lambda(z_1, z_2) = z_1^{i_1} + z_2^{i_2} + \ldots + z_1^{i_k} + z_2 \lambda'(z_1, z_2).$$

Положим $F_{p_i} = \dfrac{F_h}{1 + F_h^{i_2 - i_1} + F_h^{i_3 - i_1} + \ldots + F_h^{i_k - i_1}}$. Тогда F_{p_i} совпадает с некоторой несократимой дробью $\frac{u_{p_i}}{p_i v_{p_i}}$.

Из (47) и

$$F_{p_i} \in K^1(\mathfrak{M}), \tag{48}$$

справедливого для любого p_i, $i \neq 1$, вытекает

$$\xi^{2^r} \in K^1(\mathfrak{M}). \tag{49}$$

Действительно, для любых i, j из $N \setminus \{0\}$:

$$\xi^{i 2^r} u_g^{j 2^r} \in K_c^1(\{\xi^{\tilde{i} 2^r} F_g^{\tilde{j} 2^r} \mid \tilde{i}, \tilde{j} \in N \setminus \{0\}\}).$$

Мы воспользуемся разложением u_g в произведение неприводимых многочленов $u_g = p_{i_1}^{j_1} p_{i_2}^{j_2} \ldots p_{i_k}^{j_k}$. Для любых i, j из $N \setminus \{0\}$ справедливо

$$\xi^{i 2^r} \left(u_g F_{p_i}^{j_1}\right)^{j 2^r} \in K^1(\mathfrak{M}).$$

Отсюда для некоторого многочлена $u'_{i_1}(\xi)$ взаимнопростого с p_{i_1}, получим:

$$\xi^{i 2^r} \left(u'_{i_1}\right)^{j 2^r} \in K^1(\mathfrak{M}), \quad i, j \in N \setminus \{0\}.$$

Для некоторых целых неотрицательных чисел $j'_2, j'_3, \ldots, j'_k$, некоторых $\tilde{F}^*$ и $\tilde{F}^{**}$ из $E_2[\xi]$ и функции F^{**}, $F^{**} = (u'_{i_1}, u_g)$, справедливы:

$$F^{**} = \tilde{F}^* u'_{i_1} + \tilde{F}^{**} u_g,$$

$$F^{**} = p_{i_2}^{j'_2} \cdot p_{i_3}^{j'_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}^{j'_k}.$$

Отсюда получаем

$$\xi^{i 2^r} (F^{**})^{j 2^r} \in K^1(\mathfrak{M}), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Соотношение (49) доказывается индукцией по числу k неприводимых многочленов $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$ с использованием рассмотренного приема.

Найдется $\tilde{F}$, $\tilde{F} \in \mathfrak{M} \setminus M_1^{(1)}$. Тогда л.-а. функция $\tilde{F} + \tilde{F}^2$ совпадает с произведением $\xi \tilde{F}_a$, где $\tilde{F}_a$ взаимнооднозначна.

Теперь из взаимнооднозначной функции $\widehat{F}$, $\widehat{F}\in\mathfrak{M}$, и функции ξ^{2^r} построим проводник следующим образом. Пусть дробь $\dfrac{1+c_1\xi+c_2\xi^2+\ldots+c_m\xi^m}{1+d_1\xi+d_2\xi^2+\ldots+d_m\xi^m}$ несократима и равна $\widehat{F}$. Тогда

$$1=\widehat{F}^{2^r}+d_1\xi^{2^r}\widehat{F}^{2^r}+\ldots+d_m\xi^{m2^r}\widehat{F}^{2^r}+c_1\xi^{2^r}+\ldots+c_m\xi^{m2^r},$$

т. е. $1\in K^1(\mathfrak{M})$.

Из (46), (49) получим $\{\xi^{\nu+1},\ \xi^\nu\}\subset K^1(\mathfrak{M})$, где через ν обозначено число 2^rk. Теперь нетрудно видеть, что $K^1(\mathfrak{M})$ содержит ξ^t для любого t, $t\geqslant\nu^2$. По лемме 3 для некоторого T_1, $T_1\geqslant\nu^2$, $\widetilde{F}_a=\dfrac{\widetilde{u}_a}{1+\xi^{T_1}}$, где $\widetilde{u}_a\in 1+\xi E_2[\xi]$. Поэтому $\xi\widetilde{u}_a\in K^1(\mathfrak{M})$. Для некоторого e_2 из E_2 имеет место $\xi\widetilde{u}_a=\xi+e_2\xi^2+\xi^3\widetilde{u}_b$. Найдется e_3, $e_3\in E_2$ такое, что выполнено:

$$\xi\widetilde{u}_a+e_2(\xi\widetilde{u}_a)^2=\xi+e_3\xi^3+\xi^4\widetilde{u}_c.$$

Для некоторого e' из E_2 и $\widetilde{u}_d$ из $E_2[\xi]$ можно показать справедливость соотношения

$$\xi+e'\xi^{\nu^2}+\xi^{1+\nu^2}\widetilde{u}_d\in K^1(\mathfrak{M}).$$

Отсюда следует, что $K^1(\mathfrak{M})$ содержит задержку ξ.

Для завершения доказательства леммы осталось воспользоваться равенством $K^1(\{1,\ \xi\})=L_1^0$.

Л е м м а 10. *Пусть* $\mathfrak{M}\subseteq L^0$ *и для всякого* θ, $\theta\in J\setminus\{T_0,\ T_1\}$, *справедливо* $\mathfrak{M}\not\subseteq\theta$. *Тогда для некоторого множества л.-а. функций* $\mathfrak{M}'$ *и любого* $\theta^{(1)}$, $\theta^{(1)}\in J^{(1)}$, $|\mathfrak{M}'|<\infty$, $\mathfrak{M}'\subseteq K(\mathfrak{M})$, $E(\mathfrak{M}')\not\subseteq\theta^{(1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $K(\mathfrak{M})$ содержит константу 0^∞ и функцию F, $F=F_+^{(2)}(F_a(x_1),\ F_a(x_2))$, с двумя непосредственными переменными.

Мы рассмотрим случай $F_a\neq 1$. (В противном случае доказательство леммы не представляет затруднений.)

Положим $U_1=\{r\mid F_a\in M_r^{(1)}\}$. Множество U_1 конечно. По условию леммы $U(\mathfrak{M})\setminus M_r^{(1)}\neq\varnothing$ для каждого r из U_1. Пусть

$$\mathfrak{M}_1=\{F\left(F_r'(x_1),\ F_r'(x_2)\right),\ F(x_1,\ x_2)\mid F_r'\in U(\mathfrak{M})\setminus M_r^{(1)},\ r\in U_1\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_1$ удовлетворяет соотношениям

$$|\mathfrak{M}_1|<\infty,\quad \mathfrak{M}_1\subset K(\mathfrak{M}),\quad E(\mathfrak{M}_1)\not\subseteq M_i^{(1)},\quad i=0,1,\ldots \tag{50}$$

Теперь построим множество $\mathfrak{M}_2$ со свойствами:

$$|\mathfrak{M}_2|<\infty,\quad \mathfrak{M}_2\subset K(\mathfrak{M}),\quad E(\mathfrak{M}_2)\not\subseteq R_i^{(1)},\quad i=0,2,3,\ldots \tag{51}$$

Нетрудно видеть, что множество U_2 всех чисел r из N, для которых выполнено $F_a\in R_r^{(1)}$, конечно. Для каждого r, $r\in U_2$, имеет место хотя бы один из следующих трех случаев.

С л у ч а й 1. В $\mathfrak{M}$ содержится функция F_r'', множество $E\left(F_r''\right)$ которой не обладает r'-свойством.

С л у ч а й 2. Среди элементов множества $U(\mathfrak{M})$ найдется $\bar{F}$, не обладающая r''-свойством.

С л у ч а й 3. Найдутся $\widehat{F}_r$ и $\widetilde{F}_r$ такие, что

$$\widehat{F}_r\in(R_{\text{н}}\cap\mathfrak{M})\setminus R_r^{\text{c}},\quad \widetilde{F}_r\in(R_{\text{c}}\cap\mathfrak{M})\setminus R_r^{\text{н}}.$$

В каждом из перечисленных случаев для некоторой F_r'', $r\in U_2$, выполнено $F_r''\in K(\mathfrak{M})$, $E\left(F_r''\right)\not\subseteq R_r^{(1)}$.

Через $\mathfrak{M}_2$ обозначим множество $\{F, F''_r \mid r \in U_2\}$. Множество $\mathfrak{M}_2$ удовлетворяет соотношениям (51).

Положим $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$. Учитывая (50), (51), получим: $|\mathfrak{M}'| < \infty$, $\mathfrak{M}' \subseteq K(\mathfrak{M})$, $E(\mathfrak{M}') \not\subseteq \theta^{(1)}$ для любого $\theta^{(1)}$, $\theta^{(1)} \in J^{(1)}$. Лемма доказана.

Теперь сформулируем и докажем критерий полноты в L.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M} \subseteq L$. Равенство $K(\mathfrak{M}) = L$ справедливо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не содержится ни в одном из классов системы J.*

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы следует из теоремы 1.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{M} \not\subseteq \theta$ для любого θ из J. При этом $\mathfrak{M}^0$ не содержится ни в одном из классов системы $J \setminus \{T_0, T_1\}$. Мы докажем равенство $K(\mathfrak{M}^0) = L^0$. После этого достаточность утверждения теоремы 3 вытекает из теоремы 2.

По лемме 10 найдется конечное множество $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \subset K(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}' \not\subseteq V_1$, $\mathfrak{M}' \not\subseteq V_{\text{н}}$, удовлетворяющее для каждого $\theta^{(1)}$, $\theta^{(1)} \in J^{(1)}$ соотношению $E(\mathfrak{M}') \not\subseteq \theta^{(1)}$. Пусть $E(\mathfrak{M}') = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$. По лемме 8 имеет место (41).

Для некоторых F' и F'' из $K_c(E(\mathfrak{M}'))$ имеет место $\dfrac{F'}{1+F''} = 1$, откуда $1 = F' + F''$. Таким образом, по лемме 5 для некоторых функций $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_r$, построенных из элементов множества $E(\mathfrak{M}')$ с использованием лишь операций умножения, справедливо: $1 = \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots \ldots + \Pi_r$.

Выберем натуральное m, удовлетворяющее неравенству $2^{2^m} \geqslant 2r$ и положим $\tau = l + m$, $m' = 2^{2^m - 1}$.

Функцию $\widetilde{F}$,

$$\widetilde{F} = F_+^{(2nm')}\Big(F_1^{2^\tau}(x_1), \ldots, F_1^{2^\tau}(x_{2m'}), F_2^{2^\tau}(x_{2m'+1}), \ldots \\ \ldots, F_2^{2^\tau}(x_{4m'}), \ldots, F_n^{2^\tau}(x_{2(n-1)m'+1}), \ldots, F_n^{2^\tau}(x_{2nm'})\Big),$$

получаем из F и 0^∞ с использованием операции подстановки. Из элементов множества $\{\widetilde{F}, F_1, F_2, \ldots, F_n, 0^\infty\}$, используя операцию подстановки, получаем функцию

$$\widehat{F} = F_+^{(2r)}\Big(\Pi_1^{2^\tau}(x_1), \Pi_2^{2^\tau}(x_2), \ldots, \Pi_r^{2^\tau}(x_r), \Pi_1^{2^\tau}(x_{r+1}), \Pi_2^{2^\tau}(x_{r+2}), \ldots, \Pi_r^{2^\tau}(x_{2r})\Big).$$

Сумматор $F_+^{(2)}(x_1, x_{r+1})$ получаем отождествлением переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и переменных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{2r}$ функции $\widehat{F}$.

Из лемм 9 и 5 вытекает, что для некоторых F_a и F_b из $K_c^1(E(\mathfrak{M}'))$ выполнено $\xi = \dfrac{F_a}{1+F_b}$. Отсюда следует $\xi \in K(\mathfrak{M}^0)$. Равенство $K(\mathfrak{M}^0) = L^0$ вытекает теперь из (32). Теорема доказана.

Множество замкнутых классов $\mathcal{J}$ называется *критериальной системой*, если для любого $\mathfrak{M}$ из L выполнено: $\mathfrak{M}$ полно в точности тогда, когда $\mathfrak{M} \not\subseteq \theta$ для любого θ, $\theta \in \mathcal{J}$. Критериальная система $\mathcal{J}$ называется *приведенной*, если никакая собственная подсистема $\mathcal{J}$ не является критериальной.

Замкнутый класс $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, называется предполным, если $\mathfrak{M} \neq L$, но для любой F, $F \in L \setminus \mathfrak{M}$, выполнено: $K(\mathfrak{M}) \cup \{F\} = L$.

С использованием известной конструкции [8] доказывается

Лемма 11. *Приведенная критериальная система в L является множеством всех предполных классов.*

Теорема 4. *Система J есть приведенная критериальная система в L и представляет собой множество всех предполных классов.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что J — критериальная система.

Каждому θ из J сопоставим множество $\tilde{\theta}$ л.-а. функций следующим образом:

$$\tilde{T}_0 = \{\xi, F_+^{(2)}\}, \quad \tilde{T}_1 = \{F_+^{(2)}(\xi, 10^\infty), F_+^{(3)}(x_1, x_2, 10^\infty)\},$$

$$\tilde{V}_1 = \{1^\infty, F_+^{(2)}(\xi(x_1), \xi(x_2))\},$$

$$\tilde{V}_\text{н} = \{F_+^{(6)}(\xi(x_1), \xi(x_2), x_3, x_4, x_5, 10^\infty)\},$$

$$\tilde{R}_0^\text{c} = \left\{F_+^{(2)}\left(\frac{1}{1+\xi}(x_1), \frac{1}{1+\xi}(x_2)\right), F_+^{(2)}\left(\frac{\xi}{1+\xi}(x_1), 10^\infty\right)\right\},$$

$$\tilde{R}_i^\text{c} = \{\xi, F_+^{(3)}(p_i(x_1), p_i(x_2), 10^\infty)\}, \quad i = 2, 3, \ldots,$$

$$\tilde{R}_0^\text{н} = \left\{F_+^{(2)}\left(\frac{1}{1+\xi}(x_1), \frac{1}{1+\xi}(x_2)\right), F_+^{(3)}\left(x_1, \frac{\xi}{1+\xi^2}(x_2), 10^\infty\right)\right\},$$

$$\tilde{R}_i^\text{н} = \{F_+^{(3)}(x_1, \xi p_i(\xi)(x_2), 10^\infty), F_+^{(2)}(p_i(\xi)(x_1), p_i(\xi)(x_2))\},$$
$$i = 2, 3, \ldots,$$

$$\tilde{M}_0 = \left\{F_+^{(2)}, F_+^{(2)}\left(\frac{1+\xi+\xi^2}{1+\xi^2}(x_1), 10^\infty\right)\right\},$$

$$\tilde{M}_1 = \{F_+^{(2)}, F_+^{(2)}(\xi^2(x), 10^\infty)\},$$

$$\tilde{M}_i = \{F_+^{(2)}, F_+^{(2)}(\xi p_i(x), 10^\infty)\}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Для каждого θ из J выполнено $\tilde{\theta} \subset \theta$ и для любого θ', $\theta' \in J\setminus\{\theta\}$, справедливо $\tilde{\theta} \not\subseteq \theta'$. Отсюда следует, что J — приведенная критериальная система. Для завершения доказательства теоремы осталось воспользоваться леммой 11.

§ 5. Алгоритмическая разрешимость задачи о полноте

Теорема 5. *Проблема полноты конечных систем л.-а. функций алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq L$, $|\mathfrak{M}| < \infty$.

Если $\mathfrak{M} \not\subseteq M_0$, то в $\mathfrak{M}\setminus M_0$ найдется л.-а. функция F_a и в $U(F_a)\setminus M_0^{(1)}$ найдется л.-а. функция F, что $F = \frac{u}{v}$. Нетрудно видеть, что F_a не содержится ни в одном из классов множества J',

$$J' = \{M_j | \xi p_j \text{ не делит } u(u+v)\},$$
$$\text{и } \{M_j | j = 0, 1, \ldots\}\setminus J' \text{ — конечно.}$$

Путем аналогичных рассуждений в случае $\mathfrak{M} \not\subseteq V_1$ можно построить совокупность классов J'',

$$J'' = \{R_j^\text{c} | \mathfrak{M} \not\subseteq R_j^\text{c}\} \cup \{R_j^\text{н} | \mathfrak{M} \not\subseteq R_j^\text{н}\},$$

такую, что $\{R_j^\text{c}, R_j^\text{н} | j = 0, 2, 3, \ldots\}\setminus J''$ — конечно.

Таким образом, для $\mathfrak{M}$ можно построить $J_\mathfrak{M}$, $J_\mathfrak{M} \subseteq J$, $|J_\mathfrak{M}| < \infty$, такое, что $\mathfrak{M}$ полно в точности тогда, когда для любого θ из $J_\mathfrak{M}$ выполнено $\mathfrak{M} \not\subseteq \theta$. Конечность процедуры проверки включения $\mathfrak{M} \subseteq \theta$ для любого θ из J очевидна. Теорема доказана.

Область определения л.-а. функции расширим следующим образом. Пусть $F \in L$ и F вычисляется линейным автоматом с системой канонических уравнений (1). Для любого набора слов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из E_2^s положим

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \beta(0)\beta(1)\ldots\beta(s-1),$$

где $\beta(t)$ задается равенством (2). Таким образом, л.-а. функция F отображает множество $(E_2^s)^n$ в E_2^s.

Теорема 6. *Пусть функции из $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, могут быть реализованы схемами, содержащими не более l задержек. Тогда полнота $\mathfrak{M}$ проверяется на словах длины $2l+1$.*

Доказательство. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}$. Тогда имеет место (6). Индукцией по построению F из л.-а. функций $F_+^{(2)}$, ξ_1, ξ, используя равенства (23)—(28), нетрудно доказать следующие свойства F:

$$\gamma = F_{n+1}(10^\infty), \quad F_i \in K^1(\{1, \xi\}) \quad \text{и} \quad \deg F_i \leqslant l, \tag{52}$$
$$i = 1, \ldots, n+1.$$

Для любого α из E_2 имеет место равенство

$$F_i(\alpha) = F(\underbrace{0 \ldots 0}_{s}, \ldots, \underbrace{0 \ldots 0}_{s}, \alpha, \underbrace{0 \ldots 0}_{s}, \ldots$$
$$\ldots, \underbrace{0 \ldots 0}_{s}) + F(\underbrace{0 \ldots 0}_{s}, \ldots, \underbrace{0 \ldots 0}_{s}).$$

Если

$$F_i(1\underbrace{0 \ldots 0}_{2l}) = \widetilde{F}_i(1\underbrace{0 \ldots 0}_{2l})$$

для некоторой л.-а. функции $\widetilde{F}_i$, $\deg \widetilde{F}_i \leqslant l$, то

$$(F_i + \widetilde{F}_i)(1\underbrace{0 \ldots 0}_{2l}) = \underbrace{0\,0 \ldots 0}_{2l+1}. \tag{53}$$

Так как $\deg(F_i + \widetilde{F}_i) \leqslant 2l$, то из (53) вытекает $F_i = \widetilde{F}_i$.

Таким образом, если л.-а. функции $\widetilde{F}(x_1, \ldots, x_n)$ и $F^*(x_1, \ldots, x_n)$ реализуются схемами, содержащими не более l задержек и для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из $\overset{2l+1}{\underset{2}{E}}$ выполнено $\widetilde{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то $\widetilde{F} = F^*$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 5.

§ 6. Базисы в L

Полная система, не содержащая собственных полных подсистем, называется *базисом*. Базисом является, например, множество $\{F_+^{(2)} \xi_1\}$. Из существования в L конечных полных подсистем следует конечность любого базиса. Длиной базиса называется число л.-а. функций, содержащихся в нем. Из $L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup V_{\text{н}}$ вытекает отсутствие базисов длины 1.

Пусть $F \in L$. Число существенных переменных F обозначим $b(F)$. Через $c(S)$ обозначим число задержек схемы S, а через $c(F)$ — $-\min\{c(S) \mid S$ реализует $F\}$. Если $\mathfrak{M} \subseteq L$, $|\mathfrak{M}| < \infty$, то положим

$$b(\mathfrak{M}) = \sum_{F \in \mathfrak{M}} b(F), \quad c(\mathfrak{M}) = \sum_{F \in \mathfrak{M}} c(F).$$

Для базиса $\mathfrak{M}$ имеют место

$$|\mathfrak{M}| \geqslant 2, \quad b(\mathfrak{M}) \geqslant 2, \quad c(\mathfrak{M}) \geqslant 1.$$

Базис $\mathfrak{M}$ называется *минимальным*, если

$$|\mathfrak{M}| = 2, \quad b(\mathfrak{M}) = 2, \quad c(\mathfrak{M}) = 1. \tag{54}$$

Теорема 7. *Пусть*

$$\mathfrak{M}_1 = \{F_+^{(2)}(x_1, (1+\xi)(x_2), 10^\infty), 0^\infty\}, \quad \mathfrak{M}_2 = \left\{F_+^{(2)}\left(x_1, \frac{1}{1+\xi}(x_2), 1^\infty\right), 0^\infty\right\}.$$

Множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — минимальные базисы. Любой минимальный базис может быть получен из $\mathfrak{M}_1$ или $\mathfrak{M}_2$ переименованием переменных.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \{F_1, F_2\}$ и $\mathfrak{M}$ — минимальный базис. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $F_1(x_1, x_2)$ — л.-а. функция с двумя непосредственными переменными. Тогда нетрудно показать справедливость равенства $c(F_1) = 1$. Таким образом, найдется схема S, построенная из схем л.-а. функции $F_+^{(2)}$ с использованием операции композиции и реализующая F_2. Нетрудно видеть, что $F_2 = 0^\infty$.

Найдутся л.-а. функции F' и F'' из L_1^0 такие, что имеет место равенство $F_1(x_1, x_2) = F_+^{(3)}(F'(x_1), F''(x_2), \gamma)$, где $\gamma = F_1(0^\infty, 0^\infty)$. Из доказательства теоремы 6 следуют неравенства $\deg F' \leqslant 1$, $\deg F'' \leqslant 1$. Отсюда $\{F', F''\} \subseteq \left\{1, 1 + \xi, \frac{1}{1+\xi}\right\}$. По теореме 3 множества $\{F_+^{(3)}(x_1, x_2, \gamma), 0^\infty\}$, $\{F_+^{(3)}((1 + \xi)(x_1), (1+\xi)(x_2), \gamma), 0^\infty\}$, $\left\{F_+^{(3)}\left(\frac{1}{1+\xi}(x_1), \frac{1}{1+\xi}(x_2), \gamma\right), 0^\infty\right\}$ — не полны.

Покажем, что л.-а. функция $\tilde{F}$,

$$\tilde{F} = F_+^{(3)}\left((1 + \xi)(x_1), \frac{1}{1+\xi}(x_2), \gamma\right),$$

не может быть реализована схемой с одной задержкой. Предположим противное. Тогда схемой с одной задержкой реализуется функция F_a, $F_a = F_+^{(2)}\left(\frac{\xi^2}{1+\xi}(x), \gamma\right)$, получаемая отождествлением переменных из $\tilde{F}$. Это противоречит свойству $\deg \mu \leqslant 1$ для $\mu \in U(F_a)$.

Таким образом, если $\mathfrak{M}$ — минимальный базис, то может иметь место один из следующих двух случаев.

Случай 1. $F_1 = F_+^{(3)}(x_1, (1 + \xi)(x_2), \gamma)$.

Случай 2. $F_1 = F_+^{(3)}\left(x_1, \frac{1}{1+\xi}(x_2), \gamma\right)$.

Через S обозначим схему с одной задержкой, реализующую F_1. Задержка схемы S имеет начальное состояние 1, так как в противном случае $F_1 \in L^0$ и $\mathfrak{M}$ не является базисом. В S заменим задержку $\xi_1(x)$ схемой функции $\xi\left(F_+^{(2)}(x, 10^\infty)\right)$. Получим схему для функции $F_+^{(3)}\left(F'(x_1), F''(x_2), \tilde{F}\left(10^\infty\right)\right)$, причем л.-а. функция $F_+^{(3)}(F'(x_1), F''(x_2), \tilde{F}(x_3))$ реализуется схемой с одной задержкой. Эта задержка имеет начальное состояние 0. Найдется a' из E_2 такое, что для любых α_1, α_2 из E_2^∞ имеет место

$$F_+^{(3)}\left(F'(0\alpha_1), F''(0\alpha_2), \tilde{F}\left(10^\infty\right)\right) = a'F_1(\alpha_1, \alpha_2).$$

Из равенства $\tilde{F}(10^\infty) = a''\gamma$ следует $\tilde{F}(10^\infty)(1) = 1$. Учитывая это и неравенство $\deg(F'' + \tilde{F}) \leqslant 1$ в случае 1 получим $\tilde{F} \in \{\xi, 1 + \xi\}$, а в случае 2 — $\tilde{F} \in \left\{\frac{1}{1+\xi}, \frac{\xi}{1+\xi}\right\}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{M}$ совпадает либо с $\mathfrak{M}_1$, либо с $\mathfrak{M}_2$ (с точностью до переименования переменных).

Функции $F_+^{(3)}\left(x_1, (1 + \xi)(x_2), 10^\infty\right)$, $F_+^{(3)}\left(x_1, \frac{1}{1+\xi}(x_2), 1^\infty\right)$ и 0^∞ реализуются схемами, изображенными соответственно на рис. 2, а, 2, б и 2, в и отвечающими наложенным требованиям.

По теореме 3 системы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ полны. Теорема доказана.

Как было показано в [7], класс всех о.-д. функций обладает базисами любой конечной длины k, $k \geqslant 1$. В L ситуация в общем аналогична. Отличие состоит лишь в том, что в классе линейноавтоматных функций отсутствуют базисы длины 1.

Теорема 8. *Для всякого k, $k \in N$, $k \geqslant 2$, в L существует счетное число базисов длины k.*

Доказательство. Через F_β обозначим л.-а. функцию $F_+^{(3)}(x_1, x_2, 1\beta)$, где $\beta \in P_2^\infty$.

Пусть $k \geqslant 3$. Рассмотрим систему различных неприводимых многочленов $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ из $1 + \xi E_2[\xi]$. Положим

$$F_i = p_1 p_2 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_{k-1}, \ i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

$$\mathfrak{M}(k, \beta) = \{\xi F_1, \xi F_2, \ldots, \xi F_{k-1}, F_\beta\}.$$

Множество $\{\xi, F_\beta\}$ обозначим через $\mathfrak{M}(2, \beta)$.

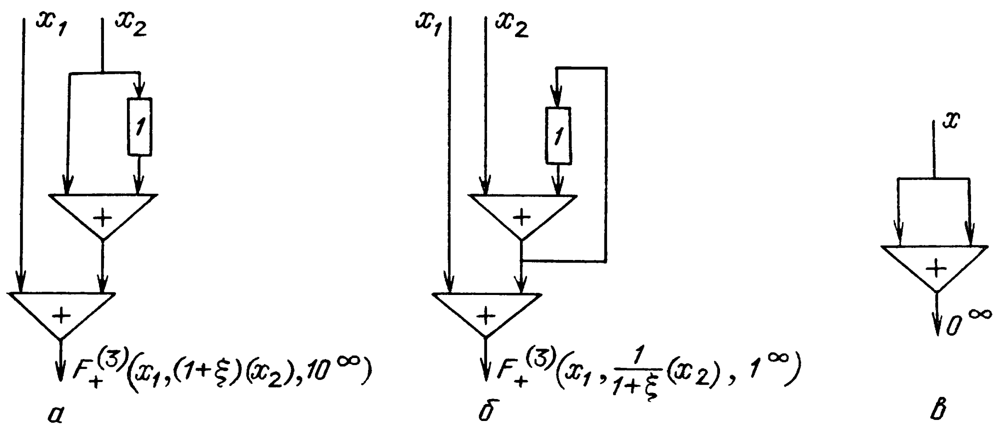

Рис. 2

Из теоремы 3 вытекает, что $\mathfrak{M}(k, \beta)$ — базис в L для любого k, $k \geqslant 2$, и любого β, $\beta \in P_2^\infty$. Множество P_2^∞ счетно. Поэтому для каждого k, $k \geqslant 2$, в L найдется счетное число базисов длины k. Теорема доказана.

§ 7. A-полнота

Пусть $F_i \in L$, $i = 1, 2$. Л.-а. функции рассматриваются с точностью до отношения равенства. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, считаем, что F_1 и F_2 зависят от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Функции F_1 и F_2 называются *τ-эквивалентными* (обозначение $F_1 \tau F_2$), если для любого набора $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из E_2^τ справедливо равенство $F_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ *τ-эквивалентны* (обозначение $\mathfrak{M}_1 \tau \mathfrak{M}_2$), если для любой F_1 из $\mathfrak{M}_1$ найдется F_2 из $\mathfrak{M}_2$, $F_2 \tau F_1$ и, для любой F_2 из $\mathfrak{M}_2$ найдется F_1 из $\mathfrak{M}_1$, $F_1 \tau F_2$. Л.-а. функция F *A-выразима* через множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, если для любого τ, $\tau \geqslant 1$, найдется $F^{(\tau)}$, $F^{(\tau)} \in K(\mathfrak{M})$, $F \tau F^{(\tau)}$. Через $A(\mathfrak{M})$ обозначим свокупность всех л.-а. функций, A-выразимых через $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *A-полным*, если $A(\mathfrak{M}) = L$. В случае $\mathfrak{M} = A(\mathfrak{M})$ назовем $\mathfrak{M}$ *A-замкнутым*. Пусть $L \neq A(\mathfrak{M})$ и для любой F, $F \in L \backslash \mathfrak{M}$, выполнено $A(\mathfrak{M} \cup \{F\}) = L$. Тогда $\mathfrak{M}$ называется *A-предполным* классом в L. Система $\widetilde{AJ}$ A-замкнутых множеств *A-критериальна*, если для любого $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, A-полнота $\mathfrak{M}$ равносильна невключению $\mathfrak{M}$ ни в один из классов θ, $\theta \in \widetilde{AJ}$, A-критериальная система, не содержащая собственных A-критериальных подсистем, называется *приведенной*.

Рассматриваемые здесь понятия введены для $P_{\text{о.д.}}$ в [3, 8], где показано, что в $P_{\text{о.д.}}$ задача определения A-полноты конечных систем алгоритмически неразрешима. В классе L ситуация другая.

Через AJ обозначим $\{T_0, T_1, V_1, V_н, M_1\}$.

Теорема 9. *Система AJ есть приведенная A-критериальная система и представляет собой множество всех A-предполных классов.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что любой класс θ из AJ является A-замкнутым и не является A-полным в L.

Докажем, что AJ — A-критериальная система.

Пусть множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, не содержится ни в одном из классов системы AJ.

Замыкание $K(\mathfrak{M})$ содержит л.-а. функции $\bar{F}$ с двумя непосредственными переменными, а также константы β и β', $\beta(0)=0$, $\beta'(0)=1$.

Выберем произвольное τ, $\tau \in N$, $\tau \geqslant 1$, и покажем справедливость соотношения $K(\mathfrak{M})\tau L$.

Пусть τ', $\tau' \in N$, таково, что $2^{\tau'} \geqslant \tau$. Через F_1, F_2 обозначим л.-а. функции $\bar{F}(x_1, \beta)$, $\bar{F}(\beta, x_2)$. Положим

$$F' = \widetilde{F}\left(F_1^{2^{\tau'}-1}(x_1), F_2^{2^{\tau'}-1}(x_2)\right).$$

Тогда для некоторой $\widetilde{\beta}$ из P_2^∞ справедливо

$$F'(x_1, x_2)\tau F_+^{(3)}(x_1, x_2, \widetilde{\beta}).$$

Пусть $\widehat{F} \in \mathfrak{M} \backslash M_1$. Из функций $\widehat{F}$, F', β путем операций суперпозиции нетрудно получить л.-а. функцию $F''(x)$, $F''(x) = F_+^{(2)}(\xi F^*(x), \beta^*)$, где $F^*(x)$ — взаимнооднозначная функция из L_1^0, $\beta^* \in P_2^\infty$. Как следует из доказательства леммы 9, в $K^1(\{1, \xi F^*(x)\})$ содержится функция F^{**}, τ-эквивалентная ξ. Аналогично можно показать, что замыкание $K(\{F'(x_1, x_2), F''(x)\})$ содержит л.-а. функцию $F_a(x)$, τ-эквивалентную $F_+^{(2)}(\xi(x), \beta_a)$, $\beta_a \in P_2^\infty$.

Через $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ обозначим множества

$$\{F', F_a, \beta, \beta'\} \text{ и } \{F_+^{(3)}(x_1, x_2, \widetilde{\beta}), F_+^{(2)}(\xi(x), \beta_a), \beta, \beta'\}.$$

Имеет место

$$\mathfrak{M}'\tau\mathfrak{M}'', \tag{55}$$

$$K(\mathfrak{M}'') = L. \tag{56}$$

Индукцией по построению л.-а. функций из элементов множества $\mathfrak{M}''$ с использованием (55), (56) доказывается

$$K(\mathfrak{M}')\tau L. \tag{57}$$

Соотношение (57) выполнено для каждого τ, $\tau \geqslant 1$, следовательно, $\mathfrak{M}'$ A-полно в L.

Таким образом, AJ — A-критериальная система. Нетрудно видеть, что AJ — приведенная A-критериальная система.

Множество AJ состоит из предполных классов, не являющихся A-полными. Поэтому все классы, содержащиеся в AJ — A-предполные. Нетрудно видеть, что AJ содержит все A-предполные классы. Теорема доказана.

Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq L$, называется *A-неприводимым*, если для любого $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{M}$, выполнено

$$A(\mathfrak{M}') \neq A(\mathfrak{M}).$$

Множество $\mathfrak{M}$ называется *A-базисом*, если $\mathfrak{M}$ A-полно и A-неприводимо. *Длиной* A-базиса $\mathfrak{M}$ называется число л.-а. функций, содержащихся в $\mathfrak{M}$.

Теорема 10. *A-неприводимые A-полные системы существуют. Длина l любого A-базиса $\mathfrak{M}$ удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant l \leqslant 4$.*

Множества $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$,

$$\mathfrak{M}_2 = \{\xi_1, F_+^{(2)}\}, \quad \mathfrak{M}_3 = \{\xi, \xi_1, F_+^{(3)}\},$$
$$\mathfrak{M}_4 = \{0^\infty, 1^\infty, F_+^{(3)}, F_+^{(2)}(\xi(x), x')\},$$

суть А-базисы длины 2, 3, 4 *соответственно.*

Доказательство. Используя теорему 9, нетрудно убедиться, что $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$ есть A-базисы. Из включения $L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup V_н$ вытекает, что всякий A-базис содержит не менее двух л.-а. функций. Из теоремы 9 для длины l всякого A-базиса $\mathfrak{M}$ получим $l \leqslant 5$. Предположим, что длина некоторого A-базиса $\mathfrak{M}_5$ равна 5, $\mathfrak{M}_5 = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$. Тогда F_i не содержится ровно в одном классе системы AJ, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Если $F_i \notin \theta$ и $F_j \notin \theta'$, то $\theta \neq \theta'$ при $i \neq j$. Отсюда $(V_1 \cap V_н \cap T_0) \setminus T_1 \neq \varnothing$, что неверно. Таким образом, длина всякого A-базиса не больше 4. Теорема доказана.

Теорема 11. *А-полнота любой конечной системы проверяется на словах длины* 2.

Доказательство. Л.-а. функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит T_a, $a \in \{0, 1\}$, в точности тогда, когда $F(a, \ldots, a) = a$. Переменная x_j л.-а. функции F является непосредственной переменной, если

$$F(0, \ldots, 0) \neq F(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, 0, \ldots, 0).$$

Поэтому при помощи слов длины 1 можно подсчитать число непосредственных переменных у F и проверить соотношения $F \in V_1$, $F \in V_н$. Л.-а. функция F не принадлежит M_1 в точности тогда, когда для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, для слов β, β',

$$\beta = F(00, 00, \ldots, 00), \quad \beta' = F(\underbrace{00, \ldots, 00}_{j-1}, 10, 00, \ldots, 00)$$

справедливо $\beta(1) \neq \beta'(1)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешин С. В. Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов // Проблемы кибернетики. Вып. 22.— М.: Наука, 1970.
2. Буевич В. А. Построение универсальной о.-д. функции, имеющей два внутренних состояния // Проблемы кибернетики. Вып. 22.— М.: Наука, 1970.
3. Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.-д. функций // Мат. заметки.— 1972.— Вып. 6.
4. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра.— М.: Наука, 1986.
5. Гилл А. Линейные последовательностные машины.— М.: Наука, 1974.
6. Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР.— 1964.— Т. 155, № 1.
7. Кудрявцев В. Б. О мощности множества предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики, Вып. 13.— М.: Наука, 1965.
8. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Элементы теории автоматов.— М.: Изд-во МГУ, 1978.