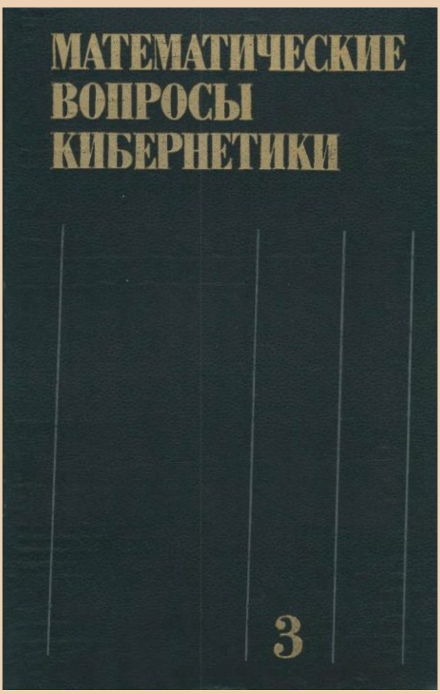

С. С. Марченков

Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Марченков С. С. Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3. — М.: Физматлит, 1991. — С. 115–139. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1991-115

БАЗИСЫ ПО СУПЕРПОЗИЦИИ В КЛАССАХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

В теории алгоритмов одним из основных способов определения классов рекурсивных функций является индуктивный способ: задаются исходные функции определяемого класса и порождающие операции, с помощью которых из исходных функций строятся остальные функции класса. Как правило, среди порождающих операций имеется операция суперпозиции. Во многих отношениях она может считаться более простой, чем другие эффективные операции, рассматриваемые в теории алгоритмов. Нередко операция суперпозиции входит в состав более сложных операций. Если рассматривать термы, которые отвечают применению порождающих операций к исходным функциям определяемого класса, то наиболее привычный вид они имеют именно для операции суперпозиции.

В силу этих соображений представляется естественным, по крайней мере для некоторых классов рекурсивных функций, найти такие базисные системы функций, которые порождают относительно операции суперпозиции рассматриваемые классы. Так как операция суперпозиции является довольно слабой операцией, то можно предполагать, что функции из подобных базисных систем в значительной степени будут отражать специфику класса, его арифметическую и алгоритмическую природу и, возможно, сложность в каком-либо из аспектов. Хорошо определенный базис класса (особенно конечный базис) может служить основой для канонических представлений, дающих возможность сравнивать и оценивать различные параметры функций класса. Задание класса функций с помощью его базиса — это одно из неизбыточных (а в случае конечного базиса — в известном смысле и эффективное) определений класса. Наконец, базис класса позволяет определить некоторые структурные характеристики соответствующей итеративной или предытеративной алгебры, например «ширину» частично упорядоченного множества подалгебр, мощность и строение множества максимальных подалгебр и т. п.

Впервые вопрос о существовании конечных базисов по суперпозиции в классах $\mathscr{E}^n$ иерархии Гжегорчика был сформулирован в работе [23]. Как показали дальнейшие исследования, классы $\mathscr{E}^n$ и порождающие операции этих классов были найдены весьма удачно. Не говоря о той значительной роли, которую играет иерархия Гжегорчика в теории рекурсивных функций, отметим, что наиболее общие результаты по конечным базисам (относительно суперпозиции) в классах рекурсивных функций удалось получить как раз для классов, обобщающих классы $\mathscr{E}^n$ Гжегорчика.

В настоящем обзоре представлены основные методы построения базисов по суперпозиции (конечных и бесконечных) в классах всюду определенных функций. Выбор множества всюду определенных функций объясняется следующими обстоятельствами.

Довольно очевидно, что класс всех частично рекурсивных функций и некоторые близкие к нему классы имеют конечные базисы по суперпозиции. Достаточно, например, чтобы подобный класс содержал (частичную) функцию, универсальную для множества всех одноместных функций класса, а также некоторый простой «технический минимум»: функции 0, $x+1$ и нумерационные функции. Нетрудно видеть, что это условие часто оказывается и необходимым. Так, примитивно рекурсивно замкнутый класс Φ частично рекурсивных функций имеет конечный базис по суперпозиции в том и только том случае, когда Φ содержит (двуместную) функцию, универсальную для множества всех одноместных функций из Φ (см. [22]). Некоторый аналог этого утверждения можно получить и для более узких, $\mathscr{E}^2$-замкнутых классов частично рекурсивных функций (см. в этой связи [2, 8, 21] и теорему 4 ниже). С точки зрения широкой математической практики существенно больший интерес представляют классы всюду определенных функций. Им и посвящены основные исследования по базисам относительно суперпозиции. В данном обзоре мы старались не ограничиваться классами рекурсивных функций, а по возможности перенести основные конструкции и результаты на более широкие классы всюду определенных функций.

1. Основные определения

Пусть $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$. Далее рассматриваются только всюду определенные функции, отображающие декартовы степени множества N в множество N. Множество всех таких функций обозначим через P_N. Положим

$$x \dot{-} y = \max(0, x-y),$$

$$c(x, y) = \frac{(x+y)^2+3x+y}{2},$$

$$l(x) = x \dot{-} \frac{1}{2}\left[\frac{[\sqrt{8x+1}]+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{[\sqrt{8x+1}]\dot{-}1}{2}\right],$$

$$r(x) = \left[\frac{[\sqrt{8x+1}]+1}{2}\right] \dot{-} (l(x)+1).$$

Как известно [4], тройка нумерационных функций c, l, r устанавливает взаимно однозначное соответствие между N^2 и N. В частности, имеют место тождества

$$c(l(x), r(x)) = x, \quad l(c(x, y)) = x, \quad r(c(x, y)) = y. \tag{1}$$

Полагая

$$c^2(x_1, x_2) = c(x_1, x_2)$$

и при $n \geqslant 2$

$$c^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = c(c^n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}),$$

получаем, что при любом $n \geqslant 2$ функция c^n отображает взаимно однозначно N^n на N. Нетрудно написать аналоги тождеств (1), содержащие функцию c^n. Пусть $l^{(m)}$ обозначает m-кратную суперпозицию функции l и

$$c^n(x_1, \ldots, x_n) = z.$$

Тогда

$$x_1 = l^{(n)}(z), \; x_2 = r(l^{(n-1)}(z)), \; \ldots, \; x_{n-1} = r(l(z)), \; x_n = r(z).$$

Рассмотрим следующие операции над функциями из P_N (см. [5, 6]).

1. Одноместная операция ζ циклической перестановки аргументов. Результат выполнения операции ζ над n-местной функцией f есть n-местная функция ζf, определяемая при $n \geqslant 2$ тождеством

$$(\zeta f)(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1).$$

Если функция f одноместна, то по определению полагаем $\zeta f = f$.

2. Одноместная операция τ транспозиции (первых двух) аргументов, определяемая тождеством

$$(\tau f)(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$$

при $n \geqslant 2$ и тождеством $\tau f = f$ для одноместной функции f.

3. Одноместная операция Δ отождествления (первых двух) аргументов, определяемая тождеством

$$(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

при $n \geqslant 2$ и тождеством $\Delta f = f$ для одноместной функции f.

4. Двуместная операция $*$ подстановки, определяемая тождеством

$$(f * g)(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Операции 1 — 4 будем в дальнейшем называть *операциями суперпозиции* или даже просто *операцией суперпозиции*.

Если Φ — некоторое множество функций, то через $[\Phi]$ обозначаем *замыкание* относительно суперпозиции множества Φ, то есть совокупность всех тех функций, которые можно получить из функций множества Φ с помощью операций 1 — 4. Если $\Phi = [\Phi]$, то множество Φ называем *замкнутым* относительно суперпозиции. Отметим, что замкнутые относительно суперпозиции множества функций из P_N в точности соответствуют подалгебрам предытеративной алгебры $\langle P_N;\ \zeta,\ \tau,\ \Delta,\ *\rangle$ (см. [5, 6]).

Пусть Φ — замкнутый относительно суперпозиции класс функций, $\Omega \subseteq \Phi$. Говорим, что множество Ω является *полным* (относительно суперпозиции) в классе Φ, если $[\Omega] = \Phi$. Если $[\Omega] = \Phi$ и $[\Omega_1] \neq \Phi$ для любого собственного подмножества Ω_1 из Ω, то Ω называется *базисом* по суперпозиции в классе Φ.

Говорят, что функция f получается из функций g, h с помощью операции *примитивной рекурсии*, если выполняются соотношения

$$\begin{gathered} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)). \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть Φ — некоторое множество функций. Через $R[\Phi]$ обозначим *примитивно рекурсивное замыкание* множества Φ, т. е. множество всех тех функций, которые можно получить из функций 0, $x+1$, $e(x, y) = x$ и функций множества Φ с помощью операций суперпозиции и примитивной рекурсии. Если $f \in R[\Phi]$, то функция f называется *примитивно рекурсивной* относительно Φ, при $\Phi = \varnothing$ — просто примитивно рекурсивной.

Если функция f удовлетворяет соотношению (2) и неравенству

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant j(x_1, \ldots, x_n),$$

то говорят, что f получается из функций g, h, j с помощью операции *ограниченной* (*примитивной*) *рекурсии* (см. [23]). Посредством $\mathscr{E}^2$ обозначается множество всех функций, которые можно получить из функций 0, $x+1$, $e(x, y)$, xy с помощью операций суперпозиции и ограниченной рекурсии. По аналогии с $R[\Phi]$ вводим обозначение $\mathscr{E}^2[\Phi]$. Класс

$\mathscr{E}^2[\{x^y\}]$ называется классом функций, *элементарных по Кальмару* [25]. В иерархии Гжегорчика [23] он имеет обозначение $\mathscr{E}^3$. Мы его будем обозначать также через K. Класс K имеет большое число различных определений (см. [23, 25, 27]). Например, K есть наименьший класс функций, содержащий функции $x+1$, $x \dot{-} y$ и замкнутый относительно операций суперпозиции, ограниченного суммирования $\sum\limits_{i \leqslant y} f(\bar{x}, i)$ и ограниченного произведения $\prod\limits_{i \leqslant y} f(\bar{x}, i)$.

Если Φ — класс функций, то через Φ^1 обозначается множество всех одноместных функций из Φ. Суперпозиция $f(g(x))$ одноместных функций f, g часто будет обозначаться посредством $f \circ g(x)$.

2. Общие теоремы о базисах

На протяжении всего обзора будут рассматриваться только такие классы Φ (многоместных функций), которые замкнуты относительно суперпозиции и содержат нумерационные функции c, l, r. Тем самым обеспечивается «однородность» класса Φ относительно перехода к функциям с другим числом переменных: если, например, классу Φ принадлежит функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, где $n \geqslant 2$, то ему принадлежит и такая одноместная функция $f_1(x)$, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(c^n(x_1, \ldots, x_n)).$$

В вопросах построения базисов по суперпозиции это обстоятельство играет немаловажную роль. Кроме того, функции c, l, r сами по себе довольно просты и принадлежат многим важным классам функций, рассматриваемым в теории алгоритмов.

Теорема 1. *Пусть класс Φ замкнут относительно суперпозиции и содержит функции c, l, r. Тогда Φ имеет конечный базис в том и только том случае, когда конечный базис имеет класс Φ^1.*

Доказательство. В одну сторону доказательство теоремы почти очевидно. Если Ω — базис класса Φ^1, то система $\Omega \cup \{c\}$ полна в классе Φ. Остается выбрать из нее базис.

Пусть Ω — конечный базис по суперпозиции в классе Φ. Обозначим через Ω_1 конечное множество функций из Φ^1, которое для любой функции $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ из Ω содержит функцию

$$\omega_1(x) = c(\omega(r \circ l^{(n)}(x), r \circ l^{(n-1)}(x), \ldots, r \circ l(x)), x),$$

а также включает функции

$$l(x),\ c(x, x),\ c(x, r(x)),\ c(l \circ l(x), r(x)),\ c(r \circ l(x), r(x)),$$
$$c^3(l \circ l(x), l \circ r \circ l(x), r(x)),\ c^3(l \circ l(x), r \circ r \circ l(x), r(x)).$$

Докажем, что $[\Omega_1] = \Phi^1$. Отсюда будет, разумеется, вытекать, что класс Φ^1 имеет конечный базис по суперпозиции.

Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — произвольные функции, полученные суперпозициями функций l, r. Установим сначала, что классу $[\Omega_1]$ принадлежит функция $c^{n+1}(f_1(x), \ldots, f_n(x), x)$. В самом деле, если применить к функции $c(x, x)$ функции $c(l \circ l(x), r(x))$, $c(r \circ l(x), r(x))$ в той последовательности, в которой функция $f_1(x)$ порождается из функций l и r, то получим функцию $g_1(x) = c(f_1(x), x)$. Применение функции $c(x, r(x))$ к функции $g_1(x)$ дает функцию $g_1'(x) = c^3(f_1(x), x, x)$. Далее образуем функцию $g_2(x) = c^3(f_1(x), f_2(x), x)$, действуя на функцию $g_1'(x)$ функциями

$$c^3(l \circ l(x), l \circ r \circ l(x), r(x)),\ c^3(l \circ l(x), r \circ r \circ l(x), r(x))$$

в той последовательности, в которой функция $f_2(x)$ получается из функций l и r. Вновь применяем к функции $q_2(x)$ функцию $c(x, r(x))$ и получаем функцию $g_2'(x) = c^4(f_1(x), f_2(x), x, x)$ и т. д.

Из доказанного утверждения вытекает следующий факт. *Пусть* $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — *такие же функции, как и выше,* $h(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$, *и классу* $[\Omega_1]$ *принадлежит функция*

$$h_1(x) = c(h(r \circ l^{(n)}(x), \ldots, r \circ l(x)), x).$$

Тогда классу $[\Omega_1]$ *будет принадлежать и функция*

$$h_2(x) = c(h(f_1(x), \ldots, f_n(x)), x).$$

Действительно, если применить к функции $h_1(x)$ сначала функцию $c(x, r(x))$, а затем функцию $c^3(l \circ l(x), r \circ r \circ l(x), r(x))$, то получится функция

$$h_1'(x) = c^3\left(h\left(r \circ l^{(n)}(x), \ldots, r \circ l(x)\right), r(x), x\right).$$

По доказанному, функция

$$d(x) = c^{n+2}(l(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), x)$$

принадлежит классу $[\Omega_1]$. Положив $h_2'(x) = h_1' \circ d(x)$, будем иметь

$$h_2'(x) = c^3(h(f_1(x), \ldots, f_n(x)), x, d(x)).$$

Остается теперь заметить, что $h_2(x) = l \circ h_2'(x)$.

Индукцией по применению операций 1 — 4 к функциям базиса Ω (т. е. индукцией по построению функций в классе Φ) докажем, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из Φ в классе $[\Omega_1]$ найдется такая функция $f_1(x)$, что

$$f_1(x) = c(f(r \circ l^{(n)}(x), \ldots, r \circ l(x)), x). \tag{3}$$

Базис индукции справедлив, поскольку множеству Ω_1 принадлежат функции $\omega_1(x)$ указанного вида (3).

Если функция g получается из функции f с помощью одной из операций 1 — 3 и функция f_1 вида (3) принадлежит классу $[\Omega_1]$, то в силу установленного выше факта классу $[\Omega_1]$ будет принадлежать и функция $g_1(x)$, построенная для функции g по формуле (3).

Пусть теперь

$$h(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$$

и функции $f_1(x)$, $g_1(x)$ вида (3), построенные для функций f и g, принадлежат классу $[\Omega_1]$. По доказанному, классу $[\Omega_1]$ будут принадлежать функции

$$f_2(x) = c(f(l^{(n)}(x), r \circ l^{(n-1)}(x), \ldots, r \circ l(x)), x),$$
$$g_2(x) = c(g(r \circ l^{(m+n-1)}(x), \ldots, r \circ l^{(n)}(x)), x).$$

Применяя к функции $f_2(x)$ последовательно функции $c(x, r(x))$ и $c^3(l \circ l(x), r \circ r \circ l(x), r(x))$, получим функцию

$$f_3(x) = c^3(f(l^{(n)}(x), r \circ l^{(n-1)}(x), \ldots, r \circ l(x)), r(x), x). \tag{4}$$

Как и в начале доказательства теоремы, из функции $g_2(x)$ с помощью функций $c(x, r(x))$, $c^3(l \circ l(x), l \circ r \circ l(x), r(x))$, $c^3(l \circ l(x), r \circ r \circ l(x), r(x))$ получаем функцию

$$g_3(x) = c^{n+1}(g(r \circ l^{(m+n-1)}(x), \ldots$$
$$\ldots, r \circ l^{(n)}(x)), r \circ l^{(n-1)}(x), \ldots, r \circ l(x), x). \tag{5}$$

Если определить $h'(x)=f_3\circ g_3(x)$, то, опираясь на представления (4) и (5), будем иметь

$$h'(x)=c^3(f(g(r\circ l^{(m+n-1)}(x),\ldots$$
$$\ldots, r\circ l^{(n)}(x)), r\circ l^{(n-1)}(x), \ldots, r\circ l(x)), x, g_3(x)).$$

Следовательно, в качестве функции $h_1(x)$ вида (3) для функции h можно взять функцию $l\circ h'(x)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, возьмем произвольную функцию $f(x)$ из класса $\Phi=[\Omega]$. Как установлено выше, в классе $[\Omega_1]$ имеется такая функция $f_1(x)$, что $f_1(x)=c(f\circ r\circ l(x), x)$. Тогда $l\circ f_1(x)= =f\circ r\circ l(x)$. Остается теперь заметить, что функция $f(x)$ получается применением функции $f\circ r\circ l(x)$ к функции $c^3(x, x, x)$, которая в свою очередь есть суперпозиция функций $c(x, x)$ и $c(x, r(x))$ из множества Ω_1. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть замкнутый класс Φ содержит функции c, l, r и имеет бесконечный базис. Тогда бесконечный базис имеет и класс Φ^1.*

Доказательство. Пусть Ω — бесконечный базис по суперпозиции в классе Φ, Ω_1 — такое конечное множество функций из Ω, что $\{c, l, r\}\subset[\Omega_1]$. Согласно доказанной теореме, множество всех одноместных функций из $[\Omega_1]$ имеет конечный базис по суперпозиции. Обозначим его через Δ_1'.

Как и в теореме 1, для любой функции $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ из Ω через $\omega_1(x)$ обозначим функцию

$$c(\omega(r\circ l^{(n)}(x), \ldots, r\circ l(x)), x).$$

Положим

$$\Delta_2=\{\omega_1(x):\omega\in\Omega\setminus\Omega_1\}.$$

Те же соображения, что и в теореме 1, показывают, что $[\Delta_1'\cup\Delta_2]=\Phi^1$. Удалив, если необходимо, некоторые функции из множества Δ_1', будем предполагать, что любая функция δ из оставшегося множества $\Delta_1\subseteq\Delta_1'$ не содержится в замыкании $[(\Delta_1\setminus\{\delta\})\cup\Delta_2]$. Докажем, что множество $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ образует базис в классе Φ^1. Равенство $[\Delta]=\Phi^1$ вытекает из определения множества Δ.

Если $\omega_1\in\Delta_1$, то, по построению множества Δ_1, функция ω_1 не входит в замыкание $[\Delta\setminus\{\omega_1\}]$. Пусть $\omega_1\in\Delta_2$ и $\omega_1\in[\Delta\setminus\{\omega_1\}]$. Тогда и подавно будем иметь $\omega_1\in[\Delta_1'\cup(\Delta_2\setminus\{\omega_1\})]$, $\omega_1\in[\Omega_1\cup(\Delta_2\setminus\{\omega_1\})]$. При наличии в множестве $[\Omega_1]$ функций c, l, r одноместную функцию ω_1 и слагаемое $\Delta_2\setminus\{\omega_1\}$ можно заменить соответственно функцией ω (из базиса Ω) и множеством $\Omega\setminus(\Omega_1\cup\{\omega\})$. Таким образом, получаем $\omega\in \in[\Omega_1\cup(\Omega\setminus(\Omega_1\cup\{\omega\}))]$, т. е. $\omega\in[\Omega\setminus\{\omega\}]$, что противоречит независимости базиса Ω. Итак, множество Δ независимо и потому образует базис в классе Φ^1. Следствие доказано.

Неизвестно, можно ли получить аналог теоремы 1 для классов с бесконечными базисами.

Если класс Φ^1 имеет конечный базис по суперпозиции, то этот базис не может состоять только из одной функции. В самом деле, пусть, напротив, $\Phi^1=[\{\omega\}]$. Тогда для некоторого m, $m\geqslant 1$, должно быть $l(x)=\omega^{(m)}(x)$. Так как функция $l(x)$ неинъективна (неразнозначна), то при любом $n\geqslant m$ неинъективной будет и функция $\omega^{(n)}(x)$. Следовательно, инъективными функциями в классе Φ^1 могут быть лишь функции $\omega(x), \ldots, \omega^{(m-1)}(x)$. Однако $c(x, x)\in\Phi^1$, функция $c(x, x)$ строго монотонна и отлична от функции x. Поэтому суперпозиции функции $c(x, x)$ образуют бесконечное множество инъективных функций. Отсюда следует, что $\Phi^1\neq[\{\omega\}]$.

Теорема 2. *Пусть замкнутый класс* Φ *содержит функции* c, l, r *и имеет конечный базис. Тогда класс* Φ^1 *имеет базис, состоящий из двух функций. Если дополнительно класс* Φ *содержит функции* $x+1$, $x \dot{-} y$, *то* Φ *имеет базис, состоящий из одной двуместной функции.*

Доказательство. Согласно теореме 1, класс Φ^1 имеет конечный базис $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$. Положим $\delta_1(x)=r(x)$, $\delta_2(x)=c^{n+1}(\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), l(x))$. Ясно, что $\{\delta_1, \delta_2\} \subset \Phi^1$, $\delta_1 \circ \delta_2(x)=l(x)$. С помощью функций $l(x)$, $r(x)$ получаем из функции $\delta_2(x)$ функции $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$. Таким образом, $[\{\delta_1, \delta_2\}]=\Phi^1$. Система $\{\delta_1, \delta_2\}$ независима, так как выше показано, что класс Φ^1 не может иметь одноэлементного базиса.

Предполагая, что $\{x+1, x \dot{-} y\} \subset \Phi$, положим

$$\delta(x, y) = \begin{cases} x+1, & \text{если } y = x, \\ \delta_1(x), & \text{если } y = x+1, \\ \delta_2(y), & \text{если } x = y+1, \\ c(x, y) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Несложно показать, что $\{x+y, xy\} \subset [\{c(x, y), x \dot{-} y\}]$. Отсюда выводим, что $\delta \in \Phi$. Далее имеем

$$\delta(x, x)=x+1, \quad \delta(x, x+1)=\delta_1(x), \quad \delta(x+1, x)=\delta_2(x).$$

Из функций δ_1, δ_2 суперпозициями получаем функции $c(x, x)$, $c(x, x)+2$, $f(x)=c(l \circ l(x), l(r(x) \dot{-} 2))$. Так как функция $c(x, x)=2x(x+1)$ принимает лишь значения, кратные 4, то при любых x, y будет $|c(x, x)-c(y, y)-2| \geqslant 2$. Следовательно,

$$\delta(c(x, x), c(y, y)+2)=c(c(x, x), c(y, y)+2).$$

Применяя к последней функции функцию f, получаем функцию $c(x, y)$. Система $\{\delta_1, \delta_2, c\}$ полна в классе Φ. Теорема доказана.

В предыдущих рассуждениях несколько раз использовался тот факт, что из конечной полной системы можно выделить базис. В случае бесконечных полных систем это не всегда верно.

Теорема 3. *Пусть счетный замкнутый класс* Φ *содержит функции* c, l, r *и не имеет конечного базиса. Тогда в каждом из классов* Φ, Φ^1 *имеется полная система, из которой невозможно выделить базис.*

Доказательство. Пусть $\Phi^1=\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$. Положим для любого $n \geqslant 1$

$$g_n(x)=c^{n+1}(f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)).$$

Очевидно, что система $G=\{l(x), r(x), g_1(x), g_2(x), \ldots\}$ полна в классе Φ^1. Допустим, что класс Φ^1 имеет базис Ω, $\Omega \subseteq G$. Так как в классе Φ не существует конечного базиса, то множество Ω бесконечно. Пусть Ω_1 — такое конечное подмножество из Ω, что $l \in [\Omega_1]$, а $g_i(x)$, $g_j(x)$ — две различные функции из $\Omega \setminus \Omega_1$. Если, например, $j>i$, то $g_i(x)=l^{(j-i)} \circ g_j(x)$ и $g_i \in [\Omega_1 \cup \{g_j\}]$, что противоречит независимости базиса Ω.

При рассмотрении класса Φ следует взять систему $G \cup \{c\}$. Теорема доказана.

3. Конечные базисы по суперпозиции

Впервые метод построения конечных базисов по суперпозиции в классах $\mathscr{E}^n$, $n \geqslant 3$ иерархии Гжегорчика был предложен Д. Рёддингом [28]. Несколько позднее более прозрачное и технически более совершенное развитие идей Д. Рёддинга было дано Ч. Парсонсом [26], которому удалось явно выписать систему из 19 функций, полную в классе K. Независимым образом в работах [2, 7, 8] получила развитие «машинная» идея построения конечных базисов по суперпозиции, которая по области применения оказалась сильнее идеи Рёддинга — Парсонса. В работе [21] вопрос о существовании конечных базисов по суперпозиции был сведен к вопросу о существовании так называемых максимально универсальных функций.

Анализ работ, посвященных построению базисов по суперпозиции в классах (всюду определенных) рекурсивных функций, показывает, что пока не найден класс функций с конечным базисом, который был бы достаточно обширен и вместе с тем строго содержался в классе $\mathscr{E}^2$ иерархии Гжегорчика. Это оправдывает использование $\mathscr{E}^2$-замкнутых классов в формулировке теоремы 4.

Следующие определения взяты из [21]. Пусть Φ — некоторый класс функций, $\Psi \subseteq \Phi$. Функция $U(n, x, y)$ называется *квазиуниверсальной* для класса Φ^1 относительно множества Ψ, если для любой функции $f(x)$ из Φ^1 найдется такое число n и такая функция $g(x)$ из $[\Psi]$, что

$$f(x) = U(n, x, g(x)). \tag{6}$$

Если, кроме того,

$$f(x) = U(n, x, h(x))$$

для любой функции $h(x) \geqslant g(x)$, то функция $U(n, x, y)$ называется *максимально универсальной* для класса Φ^1 относительно множества Ψ.

Достаточность условия теоремы 4 по существу была установлена в работах [2, 7, 8]. В явном виде она содержится в работе [21].

Теорема 4. *Для того чтобы $\mathscr{E}^2$-замкнутый класс Φ имел конечный базис по суперпозиции, необходимо и достаточно, чтобы Φ содержал такие функцию $U(n, x, y)$ и конечное множество функций Ψ, что U является максимально универсальной функцией для класса Φ^1 относительно множества Ψ.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}^2$-замкнутый класс Φ имеет конечный базис по суперпозиции. Тогда в силу теоремы 1 конечный базис имеет и класс Φ^1. Обозначим последний базис через $\{\omega_1(x), \ldots, \omega_s(x)\}$. Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, ограниченной рекурсией определим в классе Φ функцию $g_i(x)$:

$$\begin{cases} g_i(0) = 0, \\ g_i(x+1) = \begin{cases} g_i(x), & \text{если} \quad \omega_i(g_i(x)) > \omega_i(x+1), \\ x+1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ g_i(x) \leqslant x. \end{cases}$$

Как нетрудно вывести из определения функции g_i, функция $\psi_i(x) = \omega_i(g_i(x))$ монотонно не убывает по x и $\omega_i(x) \leqslant \psi_i(x)$. Положим $\psi(x) = \psi_1(x) + \ldots + \psi_s(x)$. Тогда функция $\psi(x)$ монотонно не убывает по x, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, выполняется неравенство $\psi_i(x) \leqslant \psi(x)$ и, следовательно, любая функция из $[\{\omega_1(x), \ldots, \omega_s(x)\}]$ (т. е. из класса Φ^1) мажорируется подходящей суперпозицией функции $\psi(x)$.

Положим $\Psi = \{\psi(x)\}$. Так как $l(x) \leqslant x$, то следующие соотношения определяют функцию $L(x, y)$ в классе Φ:

$$\begin{cases} L(x, 0) = x, \\ L(x, y+1) = l(L(x, y)). \end{cases}$$

Положим

$$\begin{cases} U_1(n, x, y, 0) = x, \\ U_1(n, x, y, z+1) = \begin{cases} \omega_i(U_1(n, x, y, z)), & \text{если } i = \\ \quad = r(L(n, z)) \text{ и } \omega_i(U_1(n, x, y, z)) \leqslant y, \\ U_1(n, x, y, z) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{cases}$$

Ясно, что $U_1(n, x, y, z) \leqslant \max(x, y)$. Поэтому функция U_1 определена ограниченной рекурсией в классе Ф. Заметим теперь следующее. Если $n = c^{m+1}(0, i_m, \ldots, i_1)$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant s$, то

$U_1(n, x, y, 0) = x,$

$U_1(n, x, y, 1) = \omega_{i_1}(x),$ если $\omega_{i_1}(x) \leqslant y,$

$U_1(n, x, y, 2) = \omega_{i_2} \circ \omega_{i_1}(x),$ если $\omega_{i_1}(x) \leqslant y$ и $\omega_{i_2} \circ \omega_{i_1}(x) \leqslant y,$

. . . .

$U_1(n, x, y, m) = \omega_{i_m} \circ \ldots \circ \omega_{i_1}(x),$ если $\omega_{i_1}(x) \leqslant y, \ldots$

$\ldots, \omega_{i_m} \circ \ldots \circ \omega_{i_1}(x) \leqslant y.$

Если же $\omega_{i_1}(x) \leqslant y, \ldots, \omega_{i_m} \circ \ldots \circ \omega_{i_1}(x) \leqslant y$ и $t \geqslant m$, то

$$U_1(n, x, y, t) = \omega_{i_m} \circ \ldots \circ \omega_{i_1}(x).$$

Так как, очевидно, $n \geqslant m$, то, в частности,

$$U_1(n, x, y, n) = \omega_{i_m} \circ \ldots \circ \omega_{i_1}(x).$$

Значит, если определить $U(n, x, y) = U_1(n, x, y, n)$ и выбрать такую функцию $h(x)$ из $[\Psi]$, чтобы она мажорировала любую из функций $\omega_{i_1}(x), \ldots, \omega_{i_m} \circ \ldots \circ \omega_{i_1}(x)$, то будем иметь

$$U(n, x, h(x)) = \omega_{i_m} \circ \ldots \circ \omega_{i_1}(x).$$

Тем самым установлено, что функция U является максимально универсальной для класса Φ^1 относительно множества Ψ.

Пусть теперь $U(n, x, y)$ — максимально универсальная функция для класса Φ^1 относительно конечного множества $\Psi \subset \Phi$ и $U \in \Phi$. Тогда конечное множество $\Psi \cup \{0, x+1, c(x, y), U(n, x, y)\}$ образует полную в классе Ф систему. В самом деле, для произвольной функции $f(x)$ из Φ^1 существуют число n и функция $g(x)$ из $[\Psi]$ такие, что выполняется равенство (6). Ясно, что константа n получается суперпозицией функций 0, $x+1$. Так как классу $\mathscr{E}^2$, $\mathscr{E}^2 \subseteq \Phi$, принадлежат функции c, l, r, то $[\Phi^1 \cup \{c\}] = \Phi$. Теорема доказана.

Пусть $\omega(x)$ — произвольная одноместная функция из P_N, $\Phi = \mathscr{E}^2[\{\omega\}]$. В качестве примера рассмотрим основные этапы построения конечного базиса по суперпозиции в классе Ф, основанного на «машинном» представлении функций из Ф (см. [8]). Отметим, что классы вида $\mathscr{E}^2[\{\omega\}]$ — это предел действия теоремы 4.

Так же, как и в теореме 4, по функции $\omega(x)$ строим в классе Ф монотонно неубывающую по x функцию $g(x)$. Определяем $\psi_1(x) = \omega \circ g(x)$ и $\psi(x) = (x+1)^2 + \psi_1(x)$. Тогда функция $\psi(x)$ монотонно неубывает по x и, как нетрудно показать, всякая функция из Φ^1 мажорируется подходящей суперпозицией функции ψ. Полагаем $\Psi = \{\psi\}$.

Следующий этап рассуждений — выбор подходящего класса машин, которые позволяют вычислять функции из Ф и которые можно арифметизировать средствами класса Ф. В техническом плане удобно рассматривать многоленточные машины. Как и в [8], используем машины Минского [4, 20] — вариант нестирающих многоленточных машин Тьюринга. Коротко напомним, что машина Минского M имеет конечное число односторонних лент, содержимое которых не меняется в течение всего процесса вычисления. Концевые клетки лент содержат символ 1, все остальные — символ 0. На каждой из лент машины M находится одна читающая головка. В процессе работы машины M на каждом шаге вычисления любая из головок может независимым образом сдвигаться влево (вправо) на одну клетку или оставаться в исходной клетке. Программа машины M организована таким образом, что головки машины M не могут сходить с лент.

Машина M вычисляет функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если в начальный момент вычисления первые n головок находятся в клетках с номерами $x_1, \ldots, x_n$ соответственно (концевые клетки имеют номер 0), а в заключительный момент вычисления (если значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ определено) первая головка находится в клетке с номером $f(x_1, \ldots, x_n)$. Известно (см. [4, 20]), что любую частично рекурсивную функцию можно вычислить на подходящей машине Минского. Чтобы иметь возможность вычислять функции из класса $\Phi = \mathscr{E}^2[\{\omega\}]$, проведем некоторую модификацию машин Минского. Именно, к обычным (внутренним) состояниям машины Минского добавим одно состояние q_ω. По определению полагаем, что, попадая в состояние q_ω, машина Минского совершает следующие действия. Если в рассматриваемый момент времени головка на первой ленте находится в клетке с номером x, то в непосредственно следующий момент первая головка будет находиться в клетке с номером $\omega(x)$. Остальные головки не меняют своих положений. Кроме того, в соответствии с программой машина переходит в следующее внутреннее состояние. Такую модифицированную машину Минского будем называть машиной Минского с ω-оракулом и обозначать посредством M^ω.

Пусть F^ω — множество всех одноместных функций из P_N, которые вычислимы машинами Минского с ω-оракулом с зоной, ограниченной функциями из $[\Psi]$. Один из важных моментов построения конечного базиса в классе Φ — доказательство равенства $F^\omega = \Phi^1$. Доказательство традиционно для подобной проблематики и не содержит каких-либо сложных технических приемов. Включение $\Phi^1 \subseteq F^\omega$ устанавливается индукцией по построению функций в классе $\Phi = \mathscr{E}^2[\{\omega\}]$. При этом полезно воспользоваться тем обстоятельством, что любую (многоместную) функцию из Φ можно вычислить на подходящей машине Минского M^ω с временем (и, конечно, зоной), ограниченным некоторой суперпозицией функций из множества $\{(x+1)(y+1), \psi_1(x)\}$. Обратное включение $F^\omega \subseteq \Phi^1$ доказывается арифметизацией машин Минского с ω-оракулом средствами класса Φ. Здесь следует выделить следующие моменты. Пусть машина Минского M^ω имеет k лент и n состояний, которые будем обозначать числами $0, \ldots, n-1$. Несложно построить в классе Φ функцию $V(x)$ такую, что если $x = c^{k+1}(m, x_1, \ldots, x_k)$ и машина M^ω в некоторый момент t находится в незаключительном состоянии m, ее головки находятся в клетках с номерами $x_1, \ldots, x_k$ соответственно, а в момент $t+1$ аналогичные параметры машины M^ω будут $m', x_1', \ldots, x_k'$, то

$$V(x) = c^{k+1}(m', x_1', \ldots, x_k').$$

Далее проводим ограниченную итерацию функции V в классе Φ:

$$\begin{cases} V_1(x, 0, z) = x, \\ V_1(x, y+1, z) = \begin{cases} V(V_1(x, y, z)), & \text{если } V(V_1(x, y, z)) \leqslant z, \\ V_1(x, y, z) & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

Используя функцию V_1, легко уже доказать, что если машина M^ω вычисляет функцию $f(x)$ с зоной, ограниченной подходящей функцией из $[\Psi]$, то $f \in \Phi^1$. При этом следует учесть, что если зона вычисления функции $f(x)$ ограничена функцией $g(x)$, то коды $c^{k+1}(m, x_1, \ldots, x_k)$ возникающих при этом конфигураций и время вычисления ограничены функцией $c^{k+1}(n, g(x), \ldots, g(x))$, которая, очевидно, также мажорируется подходящей функцией из $[\Psi]$. Для класса $\mathscr{E}^2$ в терминах вычислений на одноленточных машинах Тьюринга все это тщательно проделано в работе [27].

Остается определить в классе Ф функцию U, максимально универсальную для класса Φ^1 (равного классу F^ω) относительно множества Ψ. Это — технически самый сложный момент доказательства. Прежде всего, необходима такая нумерация множества машин Минского с ω-оракулом (вид функции ω в этой нумерации не играет роли), чтобы оперирование с ней (вычисление по номеру машины кодов выполняемых машиной действий) было возможно в классе $\mathscr{E}^2$. Варианты подобных нумераций предлагались в работах [2, 7, 8]. Чтобы упростить дальнейшее изложение, отметим, что согласно работе [27] классу $\mathscr{E}^2$ принадлежит любая функция из P_N, вычислимая при двоичном кодировании чисел одноленточной машиной Тьюринга, работающей с линейной зоной. Построим далее равномерные (по всем машинам Минского с ω-оракулом) аналоги функций V и V_1. Именно, если n — номер машины Минского с ω-оракулом, x — код ее незаключительной конфигурации в момент t, x' — код конфигурации в момент $t+1$, то

$$T(n, x) = \begin{cases} x', & \text{если } x' \leqslant z, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1(n, x, 0, z) = x, \\ T_1(n, x, y+1, z) = T(n, T_1(n, x, y, z)). \end{cases}$$

Чтобы получить функцию U из функции T_1, необходимо еще определить в классе $\mathscr{E}^2$ функцию $h_1(n, x, z)$, которая по числу x и номеру n машины Минского дает номер начальной конфигурации машины Минского, если этот номер не превосходит z, и функцию $h_2(x)$, которая по номеру x заключительной конфигурации дает число, представленное на первой ленте машины Минского. Тогда, как нетрудно видеть, получим

$$U(n, x, y) = h_2(T_1(n, h_1(n, x, y), y, y)).$$

При подходящем выборе функции ω в качестве класса Ф можно получить любой класс $\mathscr{E}^n$, $n \geqslant 2$, иерархии Гжегорчика.

Вообще говоря, максимально универсальную функцию U для класса Φ^1 относительно подходящим образом выбранного конечного множества $\Psi \subset \Phi$ можно построить и для некоторых классов Ф, для которых не известно представления вида $\mathscr{E}^2[\{\omega\}]$. Примеры таких классов имеются в [21]. Приведем один из потенциально наиболее узких классов подобного типа. Именно, рассмотрим класс L всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_N таких, что существует многоленточная машина Тьюринга, которая вычисляет функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ при двоичном кодировании чисел с линейной зоной и временем, ограниченным некоторой функцией вида $x \cdot (\log_2 x)^k$, где $x = \max(1, x_1, \ldots, x_n)$, k — натуральное число. Отметим, что класс L замкнут относительно суперпозиции и содержит функции c, l, r.

Машинное представление классов функций оказывается полезным не только при построении конечных базисов по суперпозиции, но также и для доказательства отсутствия таких базисов. В работе [1] введены стековые регистровые машины, и с их помощью показано, что конечного базиса по суперпозиции не может быть в множестве одноместных функций из класса $\mathscr{E}^0$ Гжегорчика.

Наряду с несомненными достоинствами «машинный» метод построения конечных базисов по суперпозиции обладает одним существенным недостатком, который присущ многим универсальным методам. Базисы, построенные по этому методу, содержат некоторый вариант универсальной функции. Как следствие, по крайней мере одна функция базиса определяется технически довольно сложно. Пока не видно, как на этом пути добиться существенного упрощения в построении базисов и получать функции базиса в «явном» вида. В следующем параграфе показано, как можно преодолеть эти трудности в классах, более мощных, чем класс $\mathscr{E}^2$ Гжегорчика.

4. Конечные базисы в классе K

Класс K функций, элементарных по Кальмару (см. [25]) играет в теории рекурсивных функций заметную роль. Значение класса K определяется в первую очередь тем, что он содержит по существу все те функции из P_N, которые используются в повседневной математической практике. В этом смысле класс K может считаться самым арифметическим классом функций, из изучаемых в теории алгоритмов. Класс K имеет целый ряд различных определений [25, 23, 27]. Немаловажно и то, что класс K удается одним и тем же способом задать в терминах сложности вычислений на любом типе универсальных вычислительных устройств. Именно, класс K — это наименьший класс функций из P_N, которые можно вычислить с временем (или зоной — все равно), ограниченным функциями из $[\{(x+1)^y\}]$ (или из $[\{2^{x+y}\}]$).

Класс K содержит функции экспоненциального роста, и этот факт значительно упрощает саму процедуру построения базисов в классе K. Именно с класса K началось построение конечных базисов по суперпозиции в достаточно широких и содержательно интересных классах рекурсивных функций. Это было сделано Д. Рёддингом в 1964 году в работе [28], где был решен один из вопросов А. Гжегорчика [23], касающийся существования базисов по суперпозиции в классах иерархии $\{\mathscr{E}^n\}$. Несколько позднее Ч. Парсонс [26] значительно упростил идею Д. Рёддинга, сделав возможным выписать базис в классе K в явном виде. В этом параграфе мы несколько отступим от первоначального определения базиса, называя базисом любую конечную полную систему. Это связано с тем, что вопросы независимости для конечных систем функций, приводимых ниже, являются весьма сложными. Можно лишь показать, что эти конечные системы, полные в классе K, отличаются от базисов не более чем одной функцией.

Методы построения базисов, предложенные Д. Рёддингом и Ч. Парсонсом, по существу основаны на идее производящей функции, широко используемой в комбинаторике. Рамки класса K (вообще, рамки эффективности) заставляют применять такой вариант производящей функции, который удовлетворяет некоторым естественным требованиям. Именно, производящая функция F должна определяться по f эффективным образом и, обратно, переход от производящей функции к исходной функции должен быть также эффективным. Отсюда, в частности, вытекает, что каждое значение производящей функции может кодировать лишь конечное число значений исходной функции. Техническое воплощение этой идеи может быть различным. Мы укажем лишь две реализации. Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_N пусть

$$F_1(t) = \prod_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n < t} p_{c^n(i_1, \ldots, i_n)}^{f(i_1, \ldots, i_n)}, \tag{7}$$

$$F_2(t, z) = \sum_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n < t} f(i_1, \ldots, i_n) \cdot z^{i_1 \cdot t^{n-1} + i_2 \cdot t^{n-2} + \ldots + i_n}, \tag{8}$$

где через p_i обозначено $(i+1)$-е простое число. Отметим, что производящие функции вида (7) использовались в работе [26].

Основная особенность производящих функций, которая позволяет строить конечные базисы по суперпозиции в классе K, заключается в следующем. Пусть над функциями $f_1, \ldots, f_s$ выполняются достаточно сильные операции, требующие привлечения значений функций $f_1, \ldots, f_s$ в большом числе точек (например растущим вместе со значениями аргументов). Это могут быть ограниченная рекурсия, ограниченное суммирование и т. п. Тогда выполнение указанных операций над функциями $f_1, \ldots, f_s$ можно заменить выполнением подходящих операций, но над единственными значениями производящих функций, построенных для функций $f_1, \ldots, f_s$. Так, например, если

$$g(x) = \sum_{i<x} f(i) \quad \text{и} \quad \sigma(y) = \prod_{i<y} p_i^{\sum\limits_{j<i} (y)_j},$$

где $(z)_i = \max\{r\colon p_i^r \text{ делит } z\}$, то

$$g(x) = (\sigma(F_1(x)))_x.$$

Таким образом, следуя работе [26], конечный базис в классе K можно определить так: построить производящие функции вида (7) для исходных функций класса K, а также определить в классе K функции, которые позволяют по производящим функций $f_1, \ldots, f_s$ строить производящие функции, отвечающие результатам применения порождающих операций класса K к функциям $f_1, \ldots, f_s$. Наилучшие результаты (по «качеству» получаемых функций в базисе) дает на этом пути использование производящих функций вида (8).

Построение базиса в классе K по методу производящих функций даже в самом лучшем случае приводит к довольно-таки громоздким функциям. Это хорошо видно уже на приведенном выше примере построения функции σ. Ясна и причина сложности функций: необходимо сначала «извлечь» нужные значения функции f из производящей функции F_1, затем проделать над этими значениями операцию Σ и в конце «свернуть» полученные значения в одно число.

Новые перспективы в области построения базисов в классе K открыл результат Ю. В. Матиясевича [16] о диофантовом представлении рекурсивно перечислимых предикатов.На основе этого результата в работе [10] было показано, что базис по суперпозиции в классе K образует система $\{x+1, x^y, [x/y], \varphi(x, y)\}$, где $\varphi(x, y)$ равно наименьшему номеру нулевого разряда в представлении числа y в позиционной системе с основанием x. В этой же работе установлено, что суперпозициями функций из $\{x+1, x^y, x \dot{-} y, [x/y]\}$ можно заведомо реализовать все функции из K, принимающие конечное число значений. В статье [24] указано еще шесть простых систем, обладающих этим свойством:

$$\{x \dot{-} y, [x/y], [\sqrt{x}], 2^{x+y}\},$$
$$\{x \dot{-} y, [\sqrt{x/y}], x^2, 2^{x+y}\},$$
$$\{x + y, x \dot{-} y, [x/y], [\sqrt{x}], 2^x\},$$
$$\{x + y, x \dot{-} y, [x/y], \sigma(x), 2^x\},$$
$$\left\{x + y, x \dot{-} y, [x/y], \binom{2x}{x}, 2^x\right\},$$
$$\{x + y, x \dot{-} y, [x/y], x!, 2^x\},$$

где $\sigma(x)$ равно числу единиц в двоичном представлении x, а $\binom{2x}{x}$ — центральный биномиальный коэффициент.

Пусть $S = \{x \dot{-} 1, [x/y], 2^{x+y}, \sigma(x)\}$. Чтобы продемонстрировать принципиально новую технику, применяемую для получения сформулированных выше результатов, докажем полноту системы S в классе K (см.

[13]). При этом удобно пользоваться экспоненциально диофантовыми представлениями рекурсивно перечислимых предикатов [17, 18], в частности, предикатов из K.

Прежде всего, нетрудно установить, что классу $[S]$ принадлежат функции $x+1$, $x+y$, $x \dot{-} y$, xy. Так, например,

$$x+y=\sigma\left(2^{x+y} \dot{-} 1\right),$$
$$x \dot{-} y=\sigma\left(\left[2^x/2^y\right] \dot{-} 1\right).$$

Следующее утверждение играет важную роль в доказательстве равенства $[S]=K$. Оно представляет собой некоторый вариант леммы 3.1 из работы [19]. Его доказательство мы опускаем.

Лемма 1. *Пусть целые неотрицательные (не обязательно различные) числа* $v_0, v_1, \ldots, v_s$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v_0, v_1, \ldots, v_s < 2^l, \tag{9}$$

где l — целое неотрицательное число. Тогда, если последовательность $v_0, v_1, \ldots, v_s$ содержит ровно q нулей, h — натуральное число,

$$V=\sum_{i\leqslant s}\left(2^{h+l}-v_i\right)\cdot 2^{(h+l+1)\cdot i}$$

и

$$l(s+1-q)+q<h, \tag{10}$$

то

$$q=s+1-\left[\frac{\sigma(V)}{h}\right].$$

Пусть $P(x_1, \ldots, x_m)$, $Q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ — числовые предикаты. Говорим, что формула

$$(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)Q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \tag{11}$$

однократно представляет предикат $P(x_1, \ldots, x_m)$, если

$$P(x_1, \ldots, x_m)\equiv(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)Q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

причем для любого набора $(x_1, \ldots, x_m)$ в случае истинности (11) существует единственный набор $(y_1, \ldots, y_n)$. для которого истинно значение $Q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$.

Пусть предикат P однократно представим формулой (11) и в классе K существуют такие функции $C_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, C_n(x_1 \ldots, x_m)$, что

$$P(x_1, \ldots, x_m)\equiv(\exists y_1)_{y_1<C_1(x_1,\ldots,x_m)}\ldots$$
$$\ldots(\exists y_n)_{y_n<C_n(x_1,\ldots,x_m)}Q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n). \tag{12}$$

Тогда будем говорить, что однократное представление (11) предиката P ограничено в классе K. Формулу (12) в этом и только этом случае также будем называть однократным представлением предиката P. Если предикат P однократно представим формулой (11) и выполняется эквивалентность (12), то, очевидно, вместо фигурирующих в ней функций $C_1, \ldots, C_n$ можно взять любые бо́льшие функции (например из класса K).

Лемма 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_m)$ — функция из P_N и формула*

$$(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)\left(y_1=2^{y_2}\ \&\ D(x_1, \ldots, x_m, y_0, y_1, \ldots, y_n)=0\right), \tag{13}$$

где D — многочлен с целыми коэффициентами, задает однократное представление предиката $y_0<f(x_1, \ldots, x_m)$, ограниченное в классе K. Тогда $f\in[S]$.

Доказательство. Пусть $C_1(x_1, \ldots, x_m, y_0), \ldots, C_n(x_1, \ldots, x_m, y_0)$ — такие функции из класса K, что справедлива эквивалентность

$$(y_0 < f(x_1, \ldots, x_m)) \equiv (\exists y_1)_{y_1 \leqslant C_1(x_1,\ldots,x_m,y_0)} \cdots$$
$$\ldots (\exists y_n)_{y_n \leqslant C_n(x_1,\ldots,x_m,y_0)} \left(y_1 = 2^{y_2} \,\&\, D(x_1, \ldots, x_m, y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0\right). \quad (14)$$

Суперпозициями функции 2^{x+y} определим в классе $[S]$ такую функцию $C(x_1, \ldots, x_m)$, чтобы она мажорировала любую из функций

$$f(x_1, \ldots, x_m), \quad \max_{0 \leqslant y_0 \leqslant f(x_1,\ldots,x_m)} C_i(x_1, \ldots, x_m, y_0) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда из эквивалентности (14) и замечания перед леммой следует, что для любого набора $(a_1, \ldots, a_m)$ предикат

$$\left(y_1 = 2^{y_2}\right) \& (D(a_1, \ldots, a_m, y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0)$$

истинен ровно в $f(a_1, \ldots, a_m)$ точках куба

$$\{(y_0, y_1, \ldots, y_n) : 0 \leqslant y_0, y_1, \ldots, y_n \leqslant C(a_1, \ldots, a_m)\}. \quad (15)$$

Эти точки отвечают значениям y_0 из отрезка $(0, 1, \ldots, f(a_1, \ldots, a_m) - 1)$. Положим

$$E(x_1, \ldots, x_m, y_0, y_1, \ldots, y_n) = \left(y_1 - 2^{y_2}\right)^2 + (D(x_1, \ldots, x_m, y_0, y_1, \ldots, y_n))^2.$$

Функция E неотрицательна и для любого набора $(a_1, \ldots, a_m)$ принимает в кубе (15) ровно $f(a_1, \ldots, a_m)$ раз значение 0. Мы хотим далее рассмотреть в качестве последовательности $v_0, v_1, \ldots, v_s$ из леммы 1 последовательность значений, принимаемых функцией E в кубе (15). Определим для этого

$$F(x_1, \ldots, x_m, h, l, z) = \sum_{0 \leqslant y_0,\ldots,y_n \leqslant z} \left(2^{n+l} - E\right) \times$$
$$\times 2^{(h+l+1)\left(y_0(z+1)^n + \ldots + y_{n-1}(z+1) + y_n\right)}. \quad (16)$$

Имея в виду неравенства (9) и (10), суперпозициями функции 2^{x+y} определим в классе $[S]$ такие функции $l(x_1, \ldots, x_m)$, $h(x_1, \ldots, x_m)$, чтобы выполнялись неравенства

$$\max_{0 \leqslant y_0,\ldots,y_n \leqslant C(x_1,\ldots,x_m)} E(x_1, \ldots, x_m, y_0, \ldots, y_n) < 2^{l(x_1,\ldots,x_m)}, \quad (17)$$

$$(1 + l(x_1, \ldots, x_m))(1 + C(x_1, \ldots, x_m))^{n+1} < h(x_1, \ldots, x_m). \quad (18)$$

Тогда, если ввести обозначение

$$G(x_1, \ldots, x_m) = F(x_1, \ldots, x_m, h(x_1, \ldots, x_m), l(x_1, \ldots, x_m)),$$

то на основании неравенств (17), (18), леммы 1 и свойств функции E будем иметь

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (1 + C(x_1, \ldots, x_m))^{n+1} \dot{-} \left[\frac{\sigma(G(x_1, \ldots, x_m))}{h(x_1, \ldots, x_m)}\right].$$

Таким образом, для завершения доказательства леммы достаточно установить, что классу $[S]$ принадлежит функция G. Для этого рассмотрим сумму из правой части равенства (16). Ее можно представить в виде конечной линейной комбинации (с коэффициентами, являющимися многочленами от переменных $x_1, \ldots, x_m$) сумм вида

$$\sum_{y_0 \leqslant z} \ldots \sum_{y_n \leqslant z} y_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot y_n^{i_n} \cdot 2^{y_0 \cdot p_0(h,l,z) + \ldots + y_n \cdot p_n(h,l,z)}, \quad (19)$$

где $i_0, \ldots, i_n$ — целые неотрицательные числа, $p_0, \ldots, p_n$ — многочлены с натуральными коэффициентами. Сумму (19) можно далее переписать в виде

$$\prod_{k<n}\left(\sum_{y_k<z} y_k^{i_k}\cdot 2^{y_k\cdot p_k(h,l,z)}\right).$$

Для сумм вида

$$\sum_{t<z} t^i\cdot q^t$$

легко выводятся формулы типа

$$\sum_{t<z} t^i\cdot q^t=\frac{A_i(q,z)\cdot q^{z+1}+B_i(q,z)}{(q-1)^{i+1}}, \tag{20}$$

где A_i, B_i — многочлены с целыми коэффициентами.

Заметим теперь, что $G(x_1, \ldots, x_m)$ есть всегда целое неотрицательное число. Аналогично, суммы (19) также определяют целые неотрицательные числа. Поэтому в формуле для вычисления $G(x_1, \ldots, x_m)$ все вычитания и деления (в частности, при использовании формул типа (20)) можно проводить в области целых неотрицательных чисел, т. е. с помощью функций $x \dot{-} y$ и $[x/y]$. Лемма доказана.

Теорема 5. $[S]=K$.

Доказательство. Включение $[S]\subseteq K$ очевидно. Для доказательства обратного включения в силу леммы 2 достаточно установить, что всякий предикат из класса K имеет однократное представление вида (13), ограниченное в классе K.

В работе [18] доказано, что всякий рекурсивно перечислимый предикат $P(x_1, \ldots, x_m)$ имеет однократное экспоненциально диофантово представление, т. е. однократное представление формулой вида

$$(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)(A=B), \tag{21}$$

где выражения A, B получены из натуральных чисел и переменных $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ с помощью сложения, умножения и возведения в степень. Несложный анализ доказательства из [18] показывает, что в случае элементарного по Кальмару предиката P однократное представление (21) будет ограничено в классе K. Проведем дальнейшие преобразования представления [21]. Во-первых, за счет введения новых переменных вынесем из выражений A, B все выражения вида $E_1^{E_2}$, где E_2 отлично от константы. Этого можно достичь путем использования очевидной эквивалентности

$$\begin{aligned}A\left(\ldots E_1^{E_2}\ldots\right)=B\left(\ldots E_1^{E_2}\ldots\right)&\equiv\\ \equiv(\exists a)_{a<E_1}(\exists b)_{b<E_2}(\exists d)_{d<E_1^{E_2}}(a&=E_1\mathbin{\&} b=\\ =E_2\mathbin{\&} d=a^b\mathbin{\&} A(\ldots d\ldots)&=B(\ldots d\ldots)).\end{aligned} \tag{22}$$

Ясно, что предикат, стоящий в левой части эквивалентности (22), однократно представим формулой, стоящей в правой части эквивалентности. Последовательное применение указанного приема позволяет получить для элементарного по Кальмару предиката $P(x_1, \ldots, x_m)$ из представления (21) однократное представление вида

$$\begin{aligned}&(\exists y_1)_{y_1<C_1}\ldots(\exists y_n)_{y_n<C_n}(\exists a_1)_{a_1<F_1}(\exists b_1)_{b_1<F_2}(\exists d_1)_{d_1<F_3}\ldots\\ &\ldots(\exists a_s)_{a_s<F_{3s-2}}(\exists b_s)_{b_s<F_{3s-1}}(\exists d_s)_{d_s<F_{3s}}\Big(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant s}\left(d_i=a_i^{b_i}\right)\mathbin{\&}\\ &\mathbin{\&} D_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, a_1, b_1, d_1, \ldots, a_s, b_s, d_s)=0\Big),\end{aligned} \tag{23}$$

где $C_1, \ldots, C_n, F_1, \ldots, F_{3s}$ — функции из K, а D_1 — многочлен с целыми коэффициентами.

Воспользуемся теперь результатами п. 4.2 работы [17], согласно которым предикат

$$\mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant s} \left(d_i = a_i^{b_i}\right) \qquad (24)$$

однократно представим формулой вида

$$(\exists y_1) \ldots (\exists y_{4s})(\exists v)(\exists w)(w = 2^v \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} D_2(a_1, b_1, d_1, \ldots, a_s, b_s, d_s, y_1, \ldots, y_{4s}, v, w) = 0), \qquad (25)$$

где D_2 — многочлен с целыми коэффициентами. Как вытекает из доказательств, приведенных в [17], в случае истинности предиката (24) значения переменных $y_1, \ldots, y_{4s}, v, w$ в формуле (25) можно взять не превосходящими величины

$$2^{20 \cdot \sum_{i=1}^{s} (2a_i+1)\left(b_i^2+1\right)(d_i+1)}.$$

Учитывая это, для элементарного по Кальмару предиката P получаем из (23), (25) однократное представление (13), ограниченное в классе K. Теорема доказана.

Пусть $S_1 = \{x + 1, x^y, [x/y], \tau(x)\}$, где $\tau(x)$ равно показателю числа 2 в разложении x на простые множители, если $x > 1$, и $\tau(0) = \tau(1) = 0$. Используя теорему 5, можно показать, что $[S_1] = K$. Стоит лишь отметить, что в силу одного результата Э. Куммера имеет место равенство $\sigma(x) = \tau\left(\binom{2x}{x}\right)$.

Как показывают полученные результаты, некоторым естественным «пределом» для конечных базисов по суперпозиции в классе K может служить система $\{x + 1, x^y, x \dot{-} y, [x/y]\}$. Является ли она базисом в K — пока неизвестно.

Тот факт, что множество $[\{x + 1, x^y, x \dot{-} y, [x/y]\}]$ содержит все функции из K, принимающие конечное число значений, вместе с гарантированными высокими оценками сложности вычислений функций из K позволяет сделать некоторые выводы о взаимной сложности вычисления арифметических функций x^y, $x \dot{-} y$, $[x/y]$ — см. об этом статью [12].

5. Бесконечные базисы по суперпозиции

Впервые вопрос о существовании бесконечных базисов по суперпозиции в достаточно больших классах (рекурсивных) функций был сформулирован в работе [11]. Там было показано, что бесконечный базис по суперпозиции имеется в множестве одноместных функций любого счетного примитивно рекурсивно замкнутого класса всюду определенных функций. Позднее аналогичный результат был получен другим методом и для всего класса (многоместных) функций [15]. Мы приводим основные моменты доказательства теоремы из [15], поскольку далее этот метод распространяется на некоторые несчетные примитивно рекурсивно замкнутые классы функций [14].

Теорема 6. *Всякий счетный примитивно рекурсивно замкнутый класс функций из P_N имеет базис по суперпозиции.*

Доказательство. Пусть Φ — счетный примитивно рекурсивно замкнутый класс всюду определенных функций, $\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ — пересчет множества всех одноместных функций из Φ, $\{g_1(x), g_2(x), \ldots\}$ — пересчет множества всех одноместных функций из Φ, не превосходящих функции x.

Определим две вспомогательные последовательности $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots\}$, $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots\}$ строго монотонных функций из Φ. Положим $\varphi_0(x) = (x+1)^2$. При $i \geqslant 1$ функции φ_i будут обладать свойствами:

1. $$(\forall x)(\varphi_i(x) > \max(\varphi_{i-1}(x), f_1(x), \ldots, f_i(x))),$$

2. $$(\forall n)_{n>0}(\exists y)(\forall x)_{x>y}\left(\varphi_i(x) > \varphi_{i-1}^{(n)}(x)\right),$$

а при $i \geqslant 2$ — еще и свойством 3. Чтобы сформулировать это свойство, для любого $i \geqslant 1$ разобьем множество N на конечные интервалы двух типов. Интервалы первого и второго типов чередуются. Первый интервал первого типа состоит из одного числа 0. Если z — наибольшее число интервала первого типа, то непосредственно следующими будут интервалы $[z+1, \varphi_{i-1} \circ \varphi_i(x)]$ и $[\varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z)+1, \varphi_{i-1}(\varphi_i(z) + \varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z))]$. Пусть D_i — множество всех чисел, которые являются наибольшими в интервалах первого типа.

3. $$\{x + \varphi_i(x):\ x \geqslant 0\} \subset \{x + \varphi_{i-1}(x):\ x \in D_{i-1}\}.$$

Таким образом, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ — это любые строго монотонные функции из класса Φ, которые при $i \geqslant 1$ обладают свойствами 1, 2, а при $i \geqslant 2$ — также и свойством 3.

Полагаем $\psi_1 = \varphi_1$. При $i \geqslant 2$ функцию $\psi_i(x)$ на интервале первого типа определим равной функции $\varphi_i(x)$, а на интервале второго типа $[z+1, \varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z)]$ — равной линейной функции $x + \varphi_i(z) - z$.

Пусть

$$\omega_0(x, y) = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } y = x, \\ 3x+2, & \text{если } y = 3x+1, \\ 3x, & \text{если } y = 3x+2, \\ c(u, v), & \text{если } x = 3u+1,\ y = 3v, \\ l(u), & \text{если } x = 3u+1,\ y = 3u+2, \\ r(u), & \text{если } x = 3u+2,\ y = 3u+1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и для $i \geqslant 1$

$$\omega_i(x) = c(\psi_i(x), g_i(x)).$$

Докажем, что базис по суперпозиции в классе Φ образует множество $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Из определения функции ω_0 легко вывести, что функции c, l, r принадлежат замыканию $[\{\omega_0\}]$. При $i \geqslant 1$ имеем $l \circ \omega_i(x) = \psi_i(x)$, $r \circ \omega_i(x) = g_i(x)$. Покажем далее, что для любого $i \geqslant 1$

$$\psi_i \circ \varphi_{i-1} \circ \psi_i(x) \geqslant \varphi_i(x). \tag{26}$$

Так как $\psi_1 = \varphi_1$, $\varphi_0(x) = (x+1)^2$, то для случая $i = 1$ неравенство (26) очевидно. Пусть $i \geqslant 2$. Функции φ_{i-1}, ψ_i строго монотонны и функция ψ_i совпадает с функцией φ_i на интервалах первого типа. Поэтому неравенство (26) достаточно установить лишь для x из интервалов второго типа $[z+1, \varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z)]$. Функция ψ_i отображает этот интервал на интервал $[\varphi_i(z)+1, \varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z) + \varphi_i(z) - z]$, а функция $\varphi_{i-1} \circ \psi_i$ — соответственно в интервал

$$[\varphi_{i-1}(\varphi_i(z)+1),\ \varphi_{i-1}(\varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z) + \varphi_i(z) - z)].$$

Ввиду строгой монотонности функции φ_{i-1} имеем

$$\varphi_{i-1}(\varphi_i(z)+1) \geqslant \varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z) + 1,$$

$$\varphi_{i-1}(\varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z) + \varphi_i(z) - z) \leqslant \varphi_{i-1}(\varphi_{i-1} \circ \varphi_i(z) + \varphi_i(z)).$$

Значит, образ интервала $[z+1,\ \varphi_{i-1}\circ\varphi_i(z)]$ при отображении $\varphi_{i-1}\circ\psi_i$ принадлежит интервалу первого типа $[\varphi_{i-1}\circ\varphi_i(z)+1\ \varphi_{i-1}(\varphi_{i-1}\circ\varphi_i(z)+\varphi_i(z))]$, на котором функция ψ_i совпадает с функцией φ_i. Так как при $z+1\leqslant x\leqslant\varphi_{i-1}\circ\varphi_i(z)$ имеем, очевидно, $\varphi_{i-1}\circ\psi_i(x)\geqslant x$, то неравенство (26) доказано.

Из неравенства (26) в силу строгой монотонности функции ψ_i и соотношений $\psi_{1'}(x)=\varphi_{1'}(x)>\varphi_0(x)$ вытекает, что при любом i, $i\geqslant 1$,

$$\psi_i\circ\ldots\circ\psi_2\circ\psi_{1'}\circ\psi_1\circ\psi_{1'}\circ\psi_2\circ\ldots\circ\psi_i(x)\geqslant\varphi_i(x).$$

Имея в виду свойство 1, заключаем отсюда, что любая одноместная функция из Φ мажорируется подходящей суперпозицией функций из Ω.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из Φ, $\varphi(x)$ — функция из $[\Omega]$, которая мажорирует функцию $f(x)$. Легко видеть, что классу Φ принадлежат функции

$$f'(x,y)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\leqslant y,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$g(x)=f'(l(x),\ r(x)).$$

Так как $f'(x,y)\leqslant y$, то $g(x)\leqslant r(x)\leqslant x$ и потому функция $g(x)$ совпадает с некоторой функцией $g_k(x)$. Значит, функции $g(x)$ и $f'(x,y)=g(c(x,y))$ принадлежат множеству $[\Omega]$. Имеем теперь $f(x)=f'(x,\varphi(x))$. Случай многоместных функций сводится к случаю одноместных, поскольку $c\in[\Omega]$. Таким образом, $[\Omega]=\Phi$.

Чтобы установить независимость системы Ω, докажем две леммы.

Лемма 3. *Если $i\geqslant 1$, то всякая одноместная функция из $[\Omega\backslash\{\omega_i\}]$ мажорируется подходящей суперпозицией функций из $\{\varphi_{i-1},\ \psi_{i+1},\ \psi_{i+2},\ \ldots\}$.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ реализуется формулой $F(x)$ над множеством функций $\Omega\backslash\{\omega_i\}$. Заменим в формуле F функцию $\omega_0(y,z)$ функцией $p(y,z)=(y+z+1)^2$, функции $\omega_j(1\leqslant j\leqslant i-1)$ — функциями $\varphi_{i-1}\circ\varphi_{i-1}\circ\varphi_{i-1}$, а функции ω_k $(k\geqslant i+1)$ — функциями $\varphi_{i-1}\circ\varphi_{i-1}\circ\psi_k$. Полученную формулу обозначим через $F'(x)$, а реализуемую ею функцию — через $f'(x)$. Имеем

$$\omega_0(y,z)\leqslant(y+z+1)^2=p(y,z)$$

и при любом $j\geqslant 1$

$$\omega_j(x)=c(\psi_j(x),\ g_j(x))\leqslant c(\psi_j(x),\ x)\leqslant c(\psi_j(x),\ \psi_j(x))\leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot(\psi_j(x)+1)^2<\varphi_0\circ\varphi_0\circ\psi_j(x)\leqslant\varphi_{i-1}\circ\varphi_{i-1}\circ\psi_j(x).$$

Из определения функций ψ_j следует, что $\psi_j(x)\leqslant\varphi_j(x)$. Поэтому в силу монотонности функций φ_{i-1}, ψ_j, p и свойства 1 получаем $f'(x)\geqslant f(x)$.

Второй этап преобразования формулы F состоит в исключении из формулы F' символов p. Это достигается последовательным выполнением следующего приема. Пусть $H(x)$ — подформула формулы $F'(x)$, которая имеет вид $H(x)=p(H_1(x),\ H_2(x))$, где $H_1(x)$, $H_2(x)$ — либо переменная x, либо формулы над множеством функций $\{\varphi_{i-1},\ \psi_{i+1},\ \psi_{i+2},\ \ldots\}$. И пусть формула $H(x)$ реализует функцию $h(x)$, а формулы $H_1(x)$, $H_2(x)$ — соответственно функции $h_1(x)$, $h_2(x)$. Тогда строго монотонная функция $h'(x)$, реализуемая формулой

$$H'(x)=\varphi_{i-1}(\varphi_{i-1}(H_1(H_2(x))))$$

(в случае $H_1(x)=x$ или $H_2(x)=x$ выражение $H_1(H_2(x))$ очевидным образом упрощается), будет удовлетворять неравенству $h'(x)\geqslant h(x)$. В самом деле, в силу строгой монотонности функций φ_{i-1}, ψ_{i+1}, ψ_{i+2}, ... имеем

$$h_1(x)\leqslant h_1\circ h_2(x),\quad h_2(x)\leqslant h_1\circ h_2(x).$$

Поэтому

$$h(x)=p(h_1(x),\ h_2(x))\leqslant p(h_1\circ h_2(x),\ h_1\circ h_2(x)).$$

Кроме того,

$$p(y,\ y)=(2y+1)^2<\varphi_0\circ\varphi_0(y)\leqslant\varphi_{i-1}\circ\varphi_{i-1}(y).$$

Таким образом, если функция $f''(x)$ реализуется формулой $F''(x)$, которая получается из формулы $F'(x)$ заменой подформулы $H(x)$ подформулой $H'(x)$, то $f''(x)\geqslant f'(x)$. Лемма доказана.

Пусть z — наибольшее число некоторого интервала первого типа, построенного для числа $i\geqslant 1$. Через $I_i(z)$ обозначим подынтервал $[z+\varphi_i(z),\ \varphi_{i-1}\circ\varphi_i(z)]$ интервала второго типа $[z+1,\ \varphi_{i-1}\circ\varphi_i(z)]$.

Докажем, что при $x\in I_i(z)$ выполняется неравенство $\psi_i(x)<\varphi_0(x)$. В самом деле, на интервале $[z+1,\ \varphi_{i-1}\circ\varphi_i(z)]$ функция $\psi_i(x)$ совпадает с функцией $x+\varphi_i(z)-z$ и $\psi_i(z+\varphi_i(z))=2\varphi_i(z)$. Значит, при $x\in I_i(z)$ имеем $\psi_i(x)\leqslant 2x<\varphi_i(x)$.

Пусть z, v — наибольшие числа интервалов первого типа, построенных для чисел i и $i+1$, и

$$z+\varphi_i(z)=v+\varphi_{i+1}(v). \tag{27}$$

Докажем, что в этом случае $I_i(z)\subseteq I_{i+1}(v)$. Действительно, из (27), строгой монотонности функций φ_i, φ_{i+1} и свойства 1 следует, что $z>v$ и $\varphi_i(z)<\varphi_{i+1}(v)$. Откуда, согласно свойству 1, $\varphi_{i-1}\circ\varphi_i(z)<\varphi_i\circ\varphi_{i+1}(v)$. Это означает, что правый конец интервала $I_i(z)$ лежит внутри интервала $I_{i+1}(v)$.

Лемма 4. *Если $i\geqslant 1$ и функция $f(x)$ реализуется формулой над множеством функций $\{\varphi_{i-1},\ \psi_{i+1},\ \psi_{i+2},\ \ldots\}$, то найдется такое натуральное число n, что для бесконечного числа значений x выполняется неравенство*

$$f(x)\leqslant\varphi_{i-1}^{(n)}(x).$$

Доказательство. Пусть $f(x)=\tau_n\circ\tau_{n-1}\circ\ldots\circ\tau_1(x)$, где $\tau_1,\ \ldots,\ \tau_n\in\{\varphi_{i-1},\ \psi_{i+1},\ \psi_{i+2},\ \ldots\}$. Обозначим через k наибольший из индексов j, для которых $\psi_j\in\{\tau_1,\ \ldots,\ \tau_n\}$. Пусть z_k — наибольшее число некоторого интервала первого типа, построенного для числа k. Согласно свойству 3 функций $\varphi_{i+1},\ \ldots,\ \varphi_{k-1}$, найдутся такие однозначно определенные числа $z_{i+1},\ \ldots,\ z_{k-1}$, что

$$z_{i+1}+\varphi_{i+1}(z_{i+1})=\ldots=z_{k-1}+\varphi_{k-1}(z_{k-1})=z_k+\varphi_k(z_k) \tag{28}$$

и $z_{i+1},\ \ldots,\ z_{k-1}$ суть наибольшие числа интервалов первого типа, построенных для чисел $i+1,\ \ldots,\ k-1$. В силу свойства 2 и в соответствии с неравенствами

$$z_{i+1}+\varphi_{i+1}(z_{i+1})<2\varphi_{i+1}(z_{i+1})<\varphi_0\circ\varphi_{i+1}(z_{i+1})\leqslant\varphi_{i-1}\circ\varphi_{i+1}(z_{i+1})$$

будем считать, что число z_k (и, следовательно, вместе с ним число z_{i+1}) выбрано столь большим, что выполняется неравенство

$$\varphi_{i-1}^{(n)}(z_{i+1}+\varphi_{i+1}(z_{i+1}))\leqslant\varphi_i\circ\varphi_{i+1}(z_{i+1}). \tag{29}$$

Рассмотрим действие суперпозиции $\tau_n\circ\tau_{n-1}\circ\ldots\circ\tau_1$ на число $v=z_{i+1}+\varphi_{i+1}(z_{i+1})$. Из неравенства (29) и строгой монотонности функции φ_{i-1} вытекает, что все числа $v,\ \varphi_{i-1}(v),\ \ldots,\ \varphi_{i-1}^{(n)}(v)$ принадлежат интервалу $I_{i+1}(z_{i+1})$ и, следовательно, всем интервалам $I_{i+2}(z_{i+2}),\ \ldots,\ I_k(z_k)$, поскольку в силу (28) и в силу доказанного свойства интервалов будем иметь $I_{i+1}(z_{i+1})\subset I_{i+2}(z_{i+2})\subset\ldots\subset I_k(z_k)$. Далее, любая функция τ_j либо совпадает с функцией φ_{i-1}, либо с одной из функций $\psi_{i+1}, \ldots, \psi_k$, каждая из которых, как установлено выше, на интервале $I_{i+1}(z_{i+1})$ не превосходит функции φ_0. Так как φ_0 в свою очередь не превосходит функции φ_{i-1}, то получаем

$$f(v) = \tau_n \circ \tau_{n-1} \circ \ldots \circ \tau_1(v) \leqslant \varphi_{i-1}^{(n)}(v).$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Ясно, что $\omega_0 \notin [\Omega \setminus \{\omega_0\}]$. Пусть $i \geqslant 1$ и $\omega_i \in [\Omega \setminus \{\omega_i\}]$. Это означает, что система $\Omega \setminus \{\omega_i\}$ полна в множестве Ф. В частности, $\varphi_i \in [\Omega \setminus \{\omega_i\}]$. Применяя леммы 3, 4, получаем противоречие со свойством 2 функции φ_i. Теорема доказана.

После теоремы 6 естественно возникает вопрос: а существуют ли вообще примитивно рекурсивно замкнутые классы несчетной мощности, имеющие базисы по суперпозиции? Ясно, например, что класс P_N и ему подобные классы не могут иметь базисов по суперпозиции, поскольку всякая счетная последовательность одноместных функций из P_N имеет в P_N универсальную функцию. Далее мы покажем, что идея, использованная при доказательстве теоремы 6, позволяет устанавливать существование базисов по суперпозиции и в некоторых примитивно рекурсивно замкнутых классах континуальной мощности (см. [14]).

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из P_N, $F_1(t)$ — производящая функция вида (7), построенная для функции f. Как уже отмечалось выше, при наличии производящих функций некоторые операции над исходными функциями можно заменить более простыми операциями (например суперпозицией) над соответствующими производящими функциями и функциями, «выражающими» действие исключаемых функций на производящие функции.

Следующая лемма может быть доказана с использованием той же техники, что и в работе [26].

Лемма 5. *Пусть $\Phi \subseteq P_N$, $f \in P_N$ и f ограничена некоторой функцией из Ф. Тогда*

$$[R[\Phi] \cup \{F_1\}] = R[\Phi \cup \{f\}].$$

Лемма 6 представляет собой вариант типичных утверждений в теории степеней неразрешимости (в нашем случае степенью неразрешимости является примитивно рекурсивная степень). Близкие утверждения имеются для тьюринговых степеней (см. [29]). Однако непосредственно результаты из [29] использовать для нашего случая невозможно.

Лемма 6. *Для любого счетного множества функций Ф из P_N найдется такое континуальное семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ одноместных функций из P_N, принимающих лишь значения 0 и 1, что любая функция f_α этого семейства не является примитивно рекурсивной относительно любого конечного подмножества функций из* $\bigcup_{\beta \in I, \beta \neq \alpha} \{f_\beta\} \cup \Phi$.

Доказательство. Ясно, что все функции из Ф можно считать одноместными. Если теперь $\Phi = \{g_i'(x)\}$, то мы несколько усилим лемму, рассмотрев вместо множества $\{g_i'(x)\}$ одну функцию $h'(i, x) = g_i'(x)$ и далее — функцию $h(x) = h'(l(x), r(x))$.

Семейство функций $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ будет определяться по шагам. На шаге t нижеследующей конструкции определяется конечное бинарное дерево D_t начальных фрагментов (кортежей вида $\langle f_\alpha(0), \ldots, f_\alpha(m) \rangle$) функций из семейства $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$, которое содержит 2^t ветвей-фрагментов, вообще говоря, различной длины. При этом каждая функция семейства $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ имеет начальный фрагмент, совпадающий с одним из фрагментов дерева D_t. На шаге $t+1$ определяемые 2^{t+1} ветвей-фрагментов дерева D_{t+1} являются продолжениями ветвей дерева D_t, причем каждая ветвь дерева D_t есть собственное начало ровно двух ветвей дерева D_{t+1}. В пределе образуется бесконечное бинарное дерево D, ветви которого задают функции f_α.

Зафиксируем гёделевскую нумерацию ν всех примитивно рекурсивных термов (или примитивно рекурсивных описаний), содержащих символы одноместных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (подобная нумерация имеется, например, в работе [3]). Отметим, что символы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ служат обозначениями «свободных» одноместных функций, так что терм $\nu(n)$, содержащий хотя бы один из символов φ_i, вообще говоря, не определяет никакой конкретной функции.

Шаг 0 конструкции. Определим дерево D_0 в виде единственной ветви-фрагмента $\langle 0\rangle$.

Шаг $t+1$. Пусть $d_1^t, \ldots, d_{2^t}^t$ — все ветви-фрагменты дерева D_t, определенного на шаге t. Построим сначала такие конечные продолжения $e_1^{t+1}, \ldots, e_{2^t}^{t+1}$ фрагментов $d_1^t, \ldots, d_{2^t}^t$, чтобы для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^t$, и любого m, $m \leqslant t$, любая одноместная функция g, имеющая в качестве начального фрагмента e_i^{t+1}, не была примитивно рекурсивной с примитивно рекурсивным описанием $\nu(m)$ относительно функции h и произвольных одноместных функций $g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_{2^t}$, имеющих начальными фрагментами $e_1^{t+1}, \ldots, e_{i-1}^{t+1}, e_{i+1}^{t+1}, \ldots, e_{2^t}^{t+1}$ (предполагается, что в примитивно рекурсивном описании $\nu(m)$ входящие в него функциональные символы из числа $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ могут замещаться произвольным образом функциями из числа $h, g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_{2^t}$). Это построение можно выполнить в $2^t(t+1)$ этапов, отвечающих значениям (i, m), $1 \leqslant i \leqslant 2^t$, $m \leqslant t$. Считая, что пары (i, m) упорядочены и $(1, 0)$ — первая пара, покажем, например, как выполнить первый этап.

Пусть терм $\nu(0)$ содержит символы функций $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_s}$ и пусть $\pi_1, \ldots, \pi_r$ — все отображения множества $\{j_1, \ldots, j_s\}$ в множество $\{1, \ldots, 2^t\}$. Предположим, что l — длина фрагмента d_1^t. Используя только значение 0, строим такие продолжения $d_2', \ldots, d_{2^t}'$ фрагментов $d_2^t, \ldots$ $\ldots, d_{2^t}^t$, чтобы выполнялось следующее свойство. Для любого k, $1 \leqslant k \leqslant r$, с помощью фрагментов $d_2', \ldots, d_{2^t}'$ можно определить значение $g^k(l+k-1)$, где g^k есть значение терма $\nu(0)$, когда вместо функциональных символов $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_s}$ рассматриваются какие-либо функции $g_{\pi_k(j_1)}, \ldots, g_{\pi_k(j_s)}$, причем $g_1 = h$ и g_v имеет начальным фрагментом d_v', если $v \neq 1$. Полагаем тогда

$$d_1' = \langle d_1^t, \overline{\mathrm{sg}}\, g^1(l), \ldots, \overline{\mathrm{sg}}\, g^r(l+r-1)\rangle.$$

Переходим ко второму этапу, используя уже вместо фрагментов $d_1^t, \ldots$ $\ldots, d_{2^t}^t$ полученные фрагменты $d_1', \ldots, d_{2^t}'$ и т. д.

Пусть $z = 2^t(t+1)$ и $d_1^{(z)}, \ldots, d_{2^t}^{(z)}$ — фрагменты, полученные на этапе z шага $t+1$. Полагаем $e_1^{t+1} = d_1^{(z)}, \ldots, e_{2^t}^{t+1} = d_{2^t}^{(z)}$. Завершаем шаг $t+1$, образуя из каждой ветви-фрагмента e_i^{t+1} две ветви-фрагмента $d_i^{t+1} = \langle e_i^{t+1}, 0\rangle$, $d_{2i}^{t+1} = \langle e_i^{t+1}, 1\rangle$ дерева D_{t+1}.

Пусть дерево D есть предел деревьев D_t при $t \to \infty$ и пусть функция f_α определяется некоторой (бесконечной) ветвью дерева D. Предположим, что функция f_α примитивно рекурсивна относительно функций $h, f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_{s-1}}$, где функции $f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_{s-1}}$ отличны от функции f_α и определяются некоторыми ветвями дерева D. Пусть далее f_α есть значение терма $\nu(m)$, если вместо входящих в него функциональных символов $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ взять функции $h, f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_{s-1}}$. Выберем такое число n, чтобы начальные n-фрагменты всех функций $f_\alpha, f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_{s-1}}$ (и, значит, соответствующих им ветвей дерева D) были бы различны. Рассмотрим такой шаг t, $t \geqslant m$, построения дерева D, на котором в дереве D_t присутствуют ветви-фрагменты $d_1^t, d_2^t, \ldots, d_s^t$, началами которых служат соответственно n-фрагменты функций $f_\alpha, f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_{s-1}}$. Тогда в силу построения на шаге $t+1$ фрагменты $d_1^t, \ldots, d_s^t$ будут расширены до таких фрагментов $d_1^{t+1}, \ldots, d_s^{t+1}$, что функция f_α, имеющая своим начальным фрагментом d_1^{t+1}, не будет примитивно рекурсивной с примитивно рекурсивным описанием $\nu(m)$ относительно функции h и функций $f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_{s-1}}$, имеющих своими начальными фрагментами соответственно $d_1^{t+1}, \ldots, d_s^{t+1}$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Любое счетное множество функций из P_N содержится в континуальном примитивно рекурсивно замкнутом классе функций, имеющем базис по суперпозиции.*

Доказательство. Пусть Φ — счетное множество функций из P_N, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — континуальное семейство функций, построенное для множества Φ по лемме 6. Пусть далее $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots\}$ — базис по суперпозиции в классе $R[\Phi]$, существующий согласно теореме 6. Для любой функции f_α положим

$$F_\alpha(x) = \prod_{i\leqslant x} p_i^{f_\alpha(i)},$$

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} F_\alpha(y), & \text{если } x = \prod\limits_{i\leqslant y} p_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что

$$F_\alpha(x) = g_\alpha\Bigl(\prod_{i\leqslant x} p_i\Bigr) \quad \text{и} \quad g_\alpha(x) \leqslant x.$$

Положим

$$\Delta = \bigcup_{\alpha\in I} \{f_\alpha\} \cup \Omega$$

и докажем, что Δ образует базис в примитивно рекурсивно замкнутом континуальном классе $\Psi = R\Bigl[\bigcup\limits_{\alpha\in I}\{f_\alpha\}\cup\Phi\Bigr]$. В самом деле, полнота множества Δ в классе Ψ легко следует из полноты Ω в $R[\Phi]$, определения функций g_α и леммы 5. Далее, для любого α, $\alpha\in I$, в силу леммы 6 функцию g_α невозможно получить суперпозициями остальных функций из Δ, поскольку функции f_β и g_β примитивно рекурсивно эквивалентны (т. е. получаются друг из друга примитивно рекурсивным образом). Ясно, что двуместную функцию ω_0 нельзя получить суперпозициями одноместных функций из $\Delta\backslash\{\omega_0\}$. Доказательство независимости множества функций $\{\omega_i : i \geqslant 1\}$ проводится точно так же, как и в теореме 6. При этом следует учесть неравенства $g_\alpha(x) \leqslant x$ и соответствующим образом модифицировать лемму 3, заменив Ω на Δ. Теорема доказана.

В заключение обзора сформулируем ряд вопросов, решение которых, на наш взгляд, было бы полезным и интересным в рамках данной проблематики.

1. Еще раз воспроизведем вопрос из [23] о существовании конечных базисов по суперпозиции в классах $\mathscr{E}^0$ и $\mathscr{E}^1$ иерархии Гжегорчика.

2. Пусть M — наименьший класс функций, содержащий функции $x+1$, $x \dot{-} y$, xy и замкнутый относительно операций суперпозиции и ограниченного минимума (по поводу операции ограниченного минимума см. [23]). Класс S функций, элементарных по Сколему, определяется

так же, как и M, с заменой ограниченного минимума на ограниченное суммирование (см. [9, 30]). Легко доказать включение $M \subseteq S$, однако неизвестно, совпадают ли классы M, S.

Имеют ли конечные базисы по суперпозиции классы M, S?

3. Для любого $n \geqslant 0$ через Γ^n обозначим множество всех таких перестановок $f(x)$ из $\mathscr{E}^n$, что $f^{-1}(x)$ также принадлежит классу $\mathscr{E}^n$.

Являются ли группы Γ^n конечно порожденными?

4. Является ли система функций $\{x+1, x^y, x \dot{-} y, [x/y]\}$ полной в классе K (см. в этой связи работу [10])?

5. Построить «явный» пример базиса по суперпозиции в классе $\mathscr{E}^2$ (так, как это сделано, например, для класса K).

6. Существуют ли счетные $\mathscr{E}^2$-замкнутые классы функций, не имеющие базиса?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бельтюков А. П. Машинное описание и иерархия начальных классов Гжегорчика // Записки научн. семинаров Ленинград. отделения матем. ин-та АН СССР.— 1979.— 88.— С. 30—46.
2. Козмидиади В. А., Марченков С. С. О многоголовочных автоматах // Проблемы кибернетики. Вып. 21.— М.: Наука, 1969.— С. 127—158.
3. Мальцев А. И. Конструктивные алгебры I // Успехи мат. наук.— 1961.— 16, № 3.— С. 3—60.
4. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции // М.: Наука, 1986.
5. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика.— 1966.— 5, № 2.— С. 5—24.
6. Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста // Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
7. Марченков С. С. Устранение схем рекурсий в классе $\mathscr{E}^2$ Гжегорчика // Мат. заметки.— 1969.— 5, № 5.— С. 561—568.
8. Марченков С. С. Об ограниченных рекурсиях // Mathematica Balkanica, Beograd, 1972.— 2.— С. 124—142.
9. Марченков С. С. О функциях, элементарных по Сколему // Мат. заметки.— 1975.— 17, № 1.— С. 597—604.
10. Марченков С. С. Об одном базисе по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару // Мат. заметки.— 1980.— 27, № 3.— С. 321—332.
11. Марченков С. С. Существование базисов по суперпозиции в счетных примитивно рекурсивно замкнутых классах одноместных функций // Мат. заметки.— 1980.— 27, № 6.— С. 877—883.
12. Марченков С. С. О сложности вычисления экспоненты // Мат. заметки.— 1982.— 31, № 3.— С. 457—463.
13. Марченков С. С. Простые примеры базисов по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару // Всесоюзная конференция по прикладной логике.— Новосибирск, 1985.— С. 139—141.
14. Марченков С. С. О базисах по суперпозиции в примитивно рекурсивно замкнутых классах // VII Всесоюзная конференция «Проблемы теоретической кибернетики», часть I.— Иркутск, 1985.— С. 133—134.
15. Марченков С. С. Существование базисов по суперпозиции в счетных примитивно рекурсивно замкнутых классах // Мат. заметки.— 1986.— 39, № 2.— С. 268—276.
16. Матиясевич Ю. В. Диофантово представление перечислимых предикатов // Известия АН СССР. Сер. мат.— 1971.— 35, № 1.— С. 3—30.
17. Матиясевич В. Ю. Существование неэффективизируемых оценок в теории экспоненциально диофантовых уравнений // Записки научн. семинаров Ленинград. отделения Мат. ин-та АН СССР.— 1974.— 40.— С. 77—93.
18. Матиясевич Ю. В. Новое доказательство теоремы об экспоненциально диофантовом представлении перечислимых предикатов // Записки научн. семинаров Ленинград. отделения Мат. ин-та АН СССР.— 1976.— 60.— С. 75—92.
19. Матиясевич Ю. В. Один класс критериев простоты, формулируемых в терминах делимости биномиальных коэффициентов // Записки научных семинаров Ленинград. отделения Мат. ин-та АН СССР.— 1977.— 67.— С. 167—183.
20. Минский М. Вычисления и автоматы.— М.: Мир, 1971.
21. Мучник А. А. О двух подходах к классификации рекурсивных функций // Проблемы математической логики.— М.: Мир, 1970.— С. 123—138.
22. Цинман Л. Л. О базисах примитивно рекурсивно замкнутых классов функций // ДАН СССР.— 1966.— 170, № 1.— С. 45—48.
23. Grzegorczyk A. Some classes of recursive functions // Rozparwy Mat., IV, Warszawa, 1953. (Русск. пер.: Гжегорчик А. Некоторые классы рекурсивных функций // Проблемы матем. логики, М.: Мир, 1970.— С. 9—49.)

24. Jones J. P., Matijasevič Ju. V. A new representation for the symmetric binomial coefficient and its applications // Ann. Sc. math. Québec.— 1982.— V. 4, № 1.— P. 81—97.
25. Kalmár L. Ein einfaches Beispiel für ein unentscheibares arithmetisches Problem // Matematikai és fizikai lapok.— 1943.— V. 50.— S. 1—23.
26. Parsons Ch. Hierarchies of primitive recursive functions // Zeitschr. math. Logik u. Grundlag. Math.— 1968.— V. 14, № 4.— S. 357—376.
27. Ritchie R. W. Classes of predictably computable functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1963.— V. 106.— P. 139—173. (Русск. пер.: Ричи Р. В. Классы предсказуемо вычислимых функций // Проблемы матем. логики. М., Мир, 1970.— С. 50—93.)
28. Rödding D. Über die Eliminierbarkeit von Definitionsschemata in der Theorie der rekursiven Funktionen // Zeitschr. math. Logik u. Grundlag. Math.— 1964.— Bd 10, № 4.— P. 315—330.
29. Sachs G. E. On suborderings of degrees of recursive unsolvability // Zeitschr. math. Logik u. Grundlag. Math.— 1961.— V. 7, № 1.— P. 46—56.
30. Skolem Th. A theorem on recursively enumerable sets // Abstract of short comm. Int. Congress Math.— 1962, Stockholm.— P. 11.