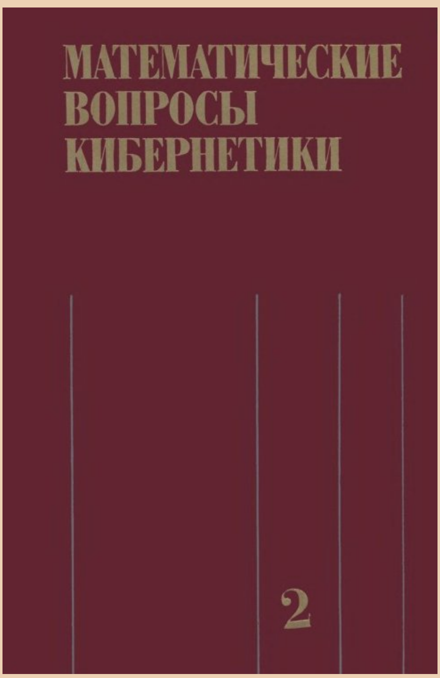

Н. П. Редькин

О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов

О ПОЛНЫХ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТАХ ДЛЯ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. П. РЕДЬКИН

(МОСКВА)

Введение

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов над произвольным полным конечным базисом. Относительно функциональных элементов будем предполагать, что в процессе эксплуатации схемы они могут приходить в неисправные состояния — как это и бывает обычно в реальных устройствах. Такое предположение естественным образом приводит к задаче контроля исправности схем. В [3] были предложены и на примере контактных схем продемонстрированы логические способы контроля схем. Центральным понятием для таких способов контроля исправности схем является понятие проверяющего теста как множества входных наборов, которые достаточно последовательно подать на входы контролируемой схемы, чтобы, наблюдая выдаваемые схемой на этих наборах значения, сделать вывод об исправности схемы (при этом, естественно, предполагается, что за время «прогонки» теста через схему состояние всех элементов — как исправных, так и неисправных — не изменяется).

Наиболее важной характеристикой теста, фактически определяющей возможность применимости логического способа контроля исправности схемы, является число наборов, составляющих тест, или, как говорят, длина теста. Длина самого короткого теста для какой-либо схемы зависит как от характера возникающих неисправностей, так и от вида этой схемы — одну и ту же булеву функцию, вообще говоря, можно реализовать различными схемами, допускающими тесты разной длины. Отсюда следует необходимость построения методов синтеза схем, допускающих достаточно простые (короткие) тесты, и оценки длины получающихся тестов. Эти задачи и рассматриваются в данной работе. Описывается метод синтеза, позволяющий булеву функцию от n переменных реализовать схемой, допускающей полный проверяющий тест, длина которого по порядку не превосходит $\sqrt{2^n}$. Перечень возможных неисправностей элементов ограничивается ниже так называемыми константными неисправностями на выходах элементов, т. е. предполагается, что на выходе каждого неисправного элемента реализуется тождественная константа (0 или 1); именно таким образом довольно часто можно интерпретировать неисправности, встречающиеся в реальных устройствах (см., например, [2, § 3.2]).

§ 1. Основные определения и формулировка результата

Понятие схемы из функциональных элементов будем предполагать известным (см., например, [1] или [4]). Пусть S — некоторая схема из функциональных элементов над произвольным полным конечным базисом $\mathscr{B}$, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что в схеме S возникают неисправности, в результате которых какие-то элементы схемы переходят в неисправные состояния. Если элемент E из $\mathscr{B}$ в исправном состоянии реализует некоторую предписанную ему булеву функцию φ_E от подаваемых на его входы переменных, то в неисправном состоянии этот элемент реализует тождественную константу (0 или 1), отличную от φ_E хотя бы на одном входном (для E) наборе значений переменных. При возникновении неисправностей схема S перейдет в схему S', реализующую некоторую функцию $g(\tilde{x})$, быть может отличную от $f(\tilde{x})$; функцию $g(\tilde{x})$ будем называть *функцией неисправности*. Функцию неисправности $g(\tilde{x})$ будем считать *различимой*, если она отличается от $f(\tilde{x})$ хотя бы на одном наборе значений переменных, и *неразличимой*, если $g(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x})$.

Будем предполагать, что контроль исправности схемы ведется путем экспериментов без вмешательства в схему, т. е. можно лишь последовательно подавать на входы схемы любые значения входных переменных (входные наборы) и наблюдать выдаваемые схемой на этих входных наборах значения. Задача об обнаружении неисправности схемы S сводится при этом к задаче об отличимости различимых функций неисправности от функции f, реализуемой исправной схемой S. При таком подходе, конечно, могут быть обнаружены только те неисправности схемы, которым соответствуют различимые функции неисправности.

Всякое множество T входных наборов схемы S называется *полным проверяющим тестом* этой схемы, если для любой различимой функции неисправности $g(\tilde{x})$ в данном множестве найдется хотя бы один набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $g(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{\sigma})$. *Длиной теста* называется число наборов, входящих в тест.

Теорема. *Всякую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой из функциональных элементов над произвольным полным конечным базисом, допускающей полный проверяющий тест, длина которого не превосходит* $2\,(2^{[n/2]} + 2^{]n/2[} + n)$*).

Конструктивное доказательство теоремы дается в последующих параграфах.

§ 2. Вспомогательные понятия и леммы

Всякое упорядоченное подмножество элементов $\{E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_l}\}$ схемы S будем называть *цепью*, если для любого $i = 2, \ldots, l$ хотя бы один вход E_{k_i} соединен с выходом $E_{k_{i-1}}$; элемент E_{k_i} считается i-м (сверху) элементом этой цепи. Будем называть также первый элемент цепи $\{E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_l}\}$ *верхним*, последний — *нижним*, элементы $E_{k_2}, \ldots$ $\ldots, E_{k_{l-1}}$ (при $l \geqslant 3$) — *промежуточными*, а число l — *длиной цепи*. Всякая цепь проходит через все свои элементы. *Выходом цепи* будем считать выход нижнего ее элемента.

Пусть V, W — некоторые вершины схемы S; *цепью от V до W* будем считать всякую цепь схемы S, в которой хотя бы один вход верхнего элемента соединен с V, а выход нижнего элемента (т. е. выход цепи) совпадает с W. Вершина V является одним из входов (быть может, единственным) цепи от V до W.

Под *отрезком цепи* $\{E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_l}\}$ будем понимать всякое подмножество элементов $\{E_{k_i}, E_{k_{i+1}}, \ldots, E_{k_j}\}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant l$. Пусть Z — цепь

*) Здесь и ниже используются следующие обозначения: $[a]$ $(]a[)$ — наибольшее (наименьшее) целое число, не большее (не меньшее) a; $\oplus$, $\sum$ — сложение по модулю два; $x^\sigma = \begin{cases} \bar{x} & \text{при } \sigma = 0, \\ x & \text{при } \sigma = 1. \end{cases}$

от V до W длины l, $W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_r}$ — выходы t_1-го, t_2-го, ..., t_r-го элементов этой цепи, $1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_r = l$ (W_{t_r} совпадает с W), а Z_1, Z_2, ..., Z_r — отрезки цепи Z соответственно от V до W_{t_1}, от W_{t_1} до W_{t_2}, ..., от $W_{t_{r-1}}$ до W; указанное множество отрезков $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r\}$ будем называть *разбиением цепи* Z (при $r=1$ разбиение содержит лишь один отрезок — саму цепь Z).

Пусть V, W — вершины, Z — цепь от V до W, а $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$ — произвольная пара входных наборов схемы S. Будем говорить, что цепь Z *функционирует на наборах* $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$, если при переходе от $\tilde{\sigma}$ к $\tilde{\sigma}'$ изменяются значения на входе V и на выходах всех элементов цепи Z. Если цепь Z от V до W функционирует на наборах $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$ и при переходе от $\tilde{\sigma}$ к $\tilde{\sigma}'$ значение на входе V изменяется с α на $\bar{\alpha}$, а на выходе W — с β на $\bar{\beta}$, то этой цепи на данных наборах ставим в соответствие *инверсионное число* $I_Z(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')$, равное $\alpha \oplus \beta$.

Лемма 1. *Если цепь Z от V до W функционирует на наборах $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$, а $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r\}$ — произвольное разбиение Z, то* $I_Z(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = \sum_{i=1}^{r} I_{Z_i}(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')$.

Доказательство леммы очевидно, если учесть, что $I_Z(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')$ обратится в единицу только в том случае, когда нечетному числу отрезков из разбиения будет соответствовать инверсионное число, равное единице.

Обозначим через $\mathscr{F}_0$ множество булевых функций $\{x^\alpha, x^\alpha \& y^\beta, x^\alpha \vee y^\beta\}$, $\alpha, \beta = 0,1$; через $\mathscr{E}_0$ обозначим множество функциональных элементов, реализующих функции из $\mathscr{F}_0$ (каждый элемент из $\mathscr{E}_0$ имеет не более двух входов).

Пусть E — функциональный элемент из $\mathscr{E}_0$ и на вход V этого элемента подается переменная x, а на другой вход (если он есть) — y. Вход V назовем *положительным* (*отрицательным*), если в указанном случае на выходе элемента E реализуется одна из функций x, $x \vee y^\alpha$, xy^α (соответственно, $\bar{x}$, $\bar{x} \vee y^\alpha$, $\bar{x}y^\alpha$), $\alpha \in \{0, 1\}$. Для таких элементов, очевидно, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть цепь Z длины один от V до W содержит элемент E из $\mathscr{E}_0$ и функционирует на наборах $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$, причем с V соединен один вход элемента E.*

Тогда $I_Z(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = 0$, если с V соединен положительный вход E, и $I_Z(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = 1$, если с V соединен отрицательный вход E.

Лемма 3. *Пусть S — произвольная схема, содержащая, быть может, неисправные элементы и реализующая на выходе W некоторую функцию f, а $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$ — входные наборы такие, что $f(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{\sigma}')$.*

Тогда в S найдется некоторый вход V и некоторая цепь от V до W, которая функционирует на наборах $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$.

Доказательство леммы проведем индукцией по числу элементов в схеме. Для любой схемы из одного элемента утверждение леммы очевидно. Предположим, что это утверждение справедливо для всех схем из одного, двух, ..., $k-1$ элементов; докажем его для произвольной схемы S из k элементов ($k \geqslant 2$).

Выделим в S выходной элемент E, выход которого совпадает с W. Поскольку при переходе от $\tilde{\sigma}$ к $\tilde{\sigma}'$ значение на выходе E изменяется, то этот элемент должен быть исправным и при указанном переходе должно изменяться значение хотя бы на одном каком-нибудь входе V' этого элемента. Если вход V' соединен с некоторым входом схемы S, то утверждение леммы справедливо применительно ко входу V' и цепи из одного элемента E.

Предположим, что вход V' элемента E соединен с выходом некоторого элемента E'. Рассмотрим схему S', содержащую E' в качестве своего выходного элемента. По индуктивному предположению в S' найдется вход V и цепь Z' от V до V', функционирующая на наборах $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$. Но тогда в S функционирует на этих наборах цепь Z от V до W, получающаяся из Z' добавлением элемента E.

Лемма доказана.

§ 3. Специальное представление булевых функций

Пусть задана произвольная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$; докажем для нее утверждение теоремы. Будем предполагать в дальнейшем (здесь и в последующих параграфах), что $n \geqslant 2$; для $n = 0,1$ утверждение теоремы очевидно. Не умаляя общности, будем предполагать также, что f существенно зависит от всех своих переменных (ведь если некоторая функция f' может быть получена из f изъятием фиктивных переменных и для f' утверждение теоремы справедливо, то это утверждение, очевидно, справедливо и для f).

Разобьем переменные $x_1, \ldots, x_n$ на две группы; к первой группе отнесем $x_1, \ldots, x_m$, ко второй группе — $x_{m+1}, \ldots, x_n$, $m = [n/2]$. Заданную функцию представим в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A} x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} \,\&\, f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad (1)$$

где A — множество m-разрядных двоичных наборов $\tilde{\alpha}$, удовлетворяющих условию $f(\tilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \neq 0$. Множество A разобьем на два непересекающихся подмножества A_1 и A_2; набор $\tilde{\alpha}$ относим к A_1 в том и только в том случае, когда $f(\tilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv 1$. В соответствии с этим разбиением и каждую конъюнкцию $x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$ из (1) отнесем либо к множеству B_1, если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A_1$, либо к B_2, если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A_2$; отметим, что конъюнкции из $B_1 \cup B_2$ взаимно ортогональны.

Всякую конъюнкцию $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_i^{\alpha_i}$ первых i переменных ($i \in \{1, \ldots, m\}$) будем считать *правильной* конъюнкцией *i-го ранга*; будем говорить, что *конъюнкция покрывает набор* $\tilde{\alpha}$, если она обращается в единицу на этом наборе. Две правильные конъюнкции $x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i}$ и $x_1^{\alpha'_1} \ldots x_i^{\alpha'_i}$ (одинакового ранга) будем считать *склеивающимися*, если $\alpha_1 = \alpha'_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \alpha'_{i-1}$, а $\alpha_i \neq \alpha'_i$, и под операцией склеивания этой пары конъюнкций будем понимать замену их одной правильной конъюнкцией $x_1^{\alpha_1} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}$ ($(i-1)$-го ранга). Если в B_1 имеются пары склеивающихся конъюнкций, то будем склеивать их (в произвольном порядке) до тех пор, пока не придем к множеству конъюнкций B'_1, в котором нет ни одной пары склеивающихся конъюнкций. Поскольку конъюнкции из B'_1 покрывают непересекающиеся подмножества наборов, то они останутся (как и конъюнкции из B_1) взаимно ортогональными (а также ортогональными к конъюнкциям из B_2). Конъюнкции из B'_1 занумеруем числами $1, \ldots, r$, а из B_2 — числами $1, \ldots, s$ ($r + s \leqslant 2^m$; $s \geqslant 1$ — поскольку f зависит существенно от x_n, то множество B_2 не может быть пустым). Функцию f представим теперь в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\bigvee_{i=1}^{r} K'_i(x_1, \ldots, x_{h_i})\right) \vee$$
$$\vee \left(\bigvee_{j=1}^{s} K_j(x_1, \ldots, x_m) \,\&\, f_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)\right), \quad (2)$$

где K'_i — i-я конъюнкция из B'_1, а K_j и f_j — j-я конъюнкция из B_2 и соответствующая этой конъюнкции функция $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ из (1).

Составим множество $\mathscr{D}$ элементарных конъюнкций, входящих в совершенные д. н. ф. функций $f_1, \ldots, f_s$. Опять же условимся считать конъюнкцию вида $x_{m+1}^{\alpha_1}x_{m+2}^{\alpha_2} \ldots x_{m+i}^{\alpha_i}$ $(i \in \{1, \ldots, n-m\})$ правильной конъюнкцией i-го ранга. Под *операцией сокращения* множества $\mathscr{D}$ будем понимать либо удаление из $\mathscr{D}$ какой-нибудь конъюнкции $x_{m+1}^{\alpha_1}x_{m+2}^{\alpha_2} \ldots x_{m+i}^{\alpha_i}$, либо замену ее конъюнкцией $x_{m+1}^{\alpha_1}x_{m+2}^{\alpha_2} \ldots x_{m+i-1}^{\alpha_{i-1}}$ (меньшего ранга). Операцию сокращения будем считать *допустимой*, если в результате ее применения получается такое множество, что каждую функцию $f_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, s$, можно представить в виде д. н. ф., слагаемыми которой являются конъюнкции из этого множества. Будем последовательно применять к исходному множеству $\mathscr{D}$ допустимые операции сокращения до тех пор, пока не придем к некоторому множеству $\mathscr{D}'$, для которого уже не существует допустимой операции сокращения. Занумеруем конъюнкции из $\mathscr{D}'$ числами $1, \ldots, t$; очевидно, $t \leqslant 2^{n-m}$.

Лемма 4. *Если $x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i}$ — конъюнкция из B'_1, то для нее найдется набор $(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что f обращается в единицу на всех наборах, у которых первые $i-1$ разрядов образуют набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$. При этом 2^{m-i} наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, 0, 0, \ldots, 0), \ldots, (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, 1, 1, \ldots, 1)$ должны покрываться конъюнкциями из B'_1, ранг каждой из которых больше чем i (в силу взаимной ортогональности конъюнкций из B'_1 и отсутствия в B'_1 конъюнкции, склеивающейся с $x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i}$); пусть $K = x_1^{\alpha_1} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\bar{\alpha}_i} x_{i+1}^{\alpha'_{i+1}} \ldots x_j^{\alpha'_j}$ $(j > i)$ — одна из этих конъюнкций, имеющая наибольший ранг. Но тогда 2^{m-j} наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha'_{i+1}, \ldots, \alpha'_{j-1}, \bar{\alpha}'_j, 0, 0, \ldots, 0), \ldots, (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha'_{i+1}, \ldots, \alpha'_{j-1}, \bar{\alpha}'_j, 1, 1, \ldots, 1)$ должны покрываться конъюнкциями большего чем j ранга (опять же в силу взаимной ортогональности конъюнкций из B'_1 и невозможности склеивания K с другой конъюнкцией из B'_1). Полученное противоречие исключает исходное предположение.

Лемма доказана.

Каждой функции f_j, $j = 1, \ldots, s$, поставим в соответствие какую-нибудь представляющую эту функцию приведенную д. н. ф. F_j, удовлетворяющую условиям:

1) в F_j входят лишь конъюнкции из $\mathscr{D}'$;
2) ни одну конъюнкцию из F_j удалить нельзя.

Лемма 5. *Для каждой конъюнкции $x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}$ из $\mathscr{D}'$ найдутся конъюнкция K_j из B_2 и соответствующая ей функция f_j из (2), а также наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $(\alpha_{m+i+1}, \ldots, \alpha_n)$ такие, что*

$$\left(x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}\right) \in F_j, \quad K_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 1,$$
$$f_j(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+i-1}, \alpha_{m+i}, \alpha_{m+i+1}, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+i-1}, \alpha_{m+i}, \alpha_{m+i+1}, \ldots, \alpha_n) = 1,$$

$$f_j(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+i-1}, \overline{\alpha}_{m+i}, \alpha_{m+i+1}, \ldots, \alpha_n) = \\ = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+i-1}, \overline{\alpha}_{m+i}, \alpha_{m+i+1}, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим те функции из $\{f_1, \ldots, f_s\}$, в приведенные д. н. ф. которых входит $x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}$. Поскольку для $\mathscr{D}'$ не существует допустимой операции сокращения, то среди указанных функций найдется хотя бы одна функция f_j, которая при некоторых $\alpha_{m+i+1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$ обращается в нуль на наборе $(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+i-1}, \overline{\alpha}_{m+i}, \alpha_{m+i+1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_n)$. Пусть j-я конъюнкция из B_2 (на которую умножается f_j в представлении (2)) равна $x_1^{\alpha_1} \& \ldots \& x_m^{\alpha_m}$. Найденные наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $(\alpha_{m+i+1}, \ldots, \alpha_n)$ удовлетворяют требованиям леммы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Конъюнкции, входящие в приведенную д. н. ф. F_j ($j \in \{1, \ldots, s\}$), взаимно ортогональны.*

Доказательство. Рассмотрим любые две конъюнкции $x_{m+1}^{\alpha_1} \ldots$ $\ldots x_{m+i}^{\alpha_i}$ и $x_{m+1}^{\alpha'_1} \ldots x_{m+h}^{\alpha'_h}$ из F_j; положим для определенности $i \geqslant h$. Наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ и $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_h)$ должны различаться, поскольку в противном случае первую конъюнкцию можно было бы удалить из F_j; но если эти наборы различаются, то рассматриваемые конъюнкции взаимно ортогональны. Лемма доказана.

Условимся в дальнейшем базис $\mathscr{B}$ задавать указанием множества булевых функций, соответствующих элементам базиса.

§ 4. Схемы над базисом $\{\overline{x}, x \& y^\sigma\}$

Опишем способ построения схемы S, реализующей $f(x_1, \ldots, x_n)$, и полного проверяющего теста T для этой схемы, удовлетворяющего требованию теоремы. У двухвходового функционального элемента, реализующего $x \& y^\sigma$ (или $x \vee y^\sigma$), условимся различать левый вход и правый вход; будем считать, что при подаче x на левый вход элемента, а y — на правый его вход на выходе этого элемента реализуется $x \& y^\sigma$ (соответственно $x \vee y^\sigma$). Схема S будет составлена из шести подсхем $S_1, \ldots$ $\ldots, S_6$ (рис. 1).

Подсхема S_1 имеет n входов $V_1, \ldots, V_n$, $2n$ выходов $W_1, \ldots, W_{2n}$ и составляется из n цепей $Z_1^1, \ldots, Z_n^1$. На входы $V_1, \ldots, V_n$ (которые будут и входами всей схемы S) подаются соответственно переменные $x_1, \ldots, x_n$. Цепи $Z_i^1\,(i \in \{1, \ldots, n\})$ поставим в соответствие пару отличающихся лишь в i-м разряде наборов $\tilde{\alpha}^{1,i,0}$, $\tilde{\alpha}^{1,i,1}$ длины n, на которых функция f принимает разные значения (такие наборы найдутся в силу существенной зависимости f от x_i); будем предполагать, что в i-м разряде набора $\tilde{\alpha}^{1,i,0}$ стоит нуль. Если $f(\tilde{\alpha}^{1,i,0}) = 0$, то цепь Z'_1 составим из двух инверторов и вход верхнего инвертора соединим с V_i; выходы верхнего и нижнего инверторов объявим соответственно выходами W_{2i-1} и W_{2i} подсхемы S_1. Если же $f(\tilde{\alpha}^{1,i,0}) = 1$, то в качестве Z_i^1 возьмем один инвертор, вход которого соединим с V_i, а выход объявим выходом W_{2i-1} подсхемы S_1; вход V_i в этом случае будет также и выходом W_{2i}. Таким образом, на выходах подсхемы S_1 с четными номерами реализуются $x_1, \ldots, x_n$, а на выходах с нечетными номерами — $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. Очевидно, для всякой функционирующей цепи от входа подсхемы S_1 до ее выхода с четным номером инверсионное число равно нулю, а для всякой функционирующей цепи от входа подсхемы S_1 до ее выхода с нечетным номером инверсионное число равно единице. Наборы $\tilde{\alpha}^{1,1,0}$, $\tilde{\alpha}^{1,1,1}$, $\ldots$ $\ldots, \tilde{\alpha}^{1,n,0}$, $\tilde{\alpha}^{1,n,1}$ ($2n$ штук) включим в T.

Остальные подсхемы будут составляться из устроенных одинаковым образом цепей, каждая из которых реализует отрицание конъюнкции переменных, подаваемых на ее входы. В зависимости от значения параметра σ будем использовать либо 1-цепи, либо 0-цепи (рис. 2).

Под 1-цепью с i входами условимся понимать цепь Z из i элементов. Первые $i-1$ элементов цепи Z — конъюнкторы, а нижний элемент — инвертор; при $i=1$ вся цепь Z состоит из одного инвертора. Правый вход

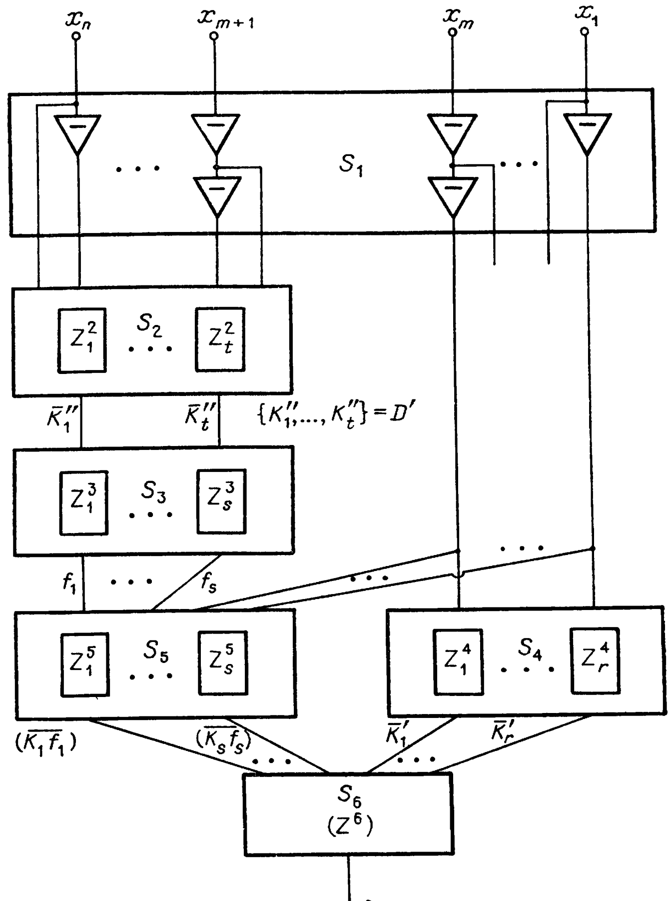

Рис. 1

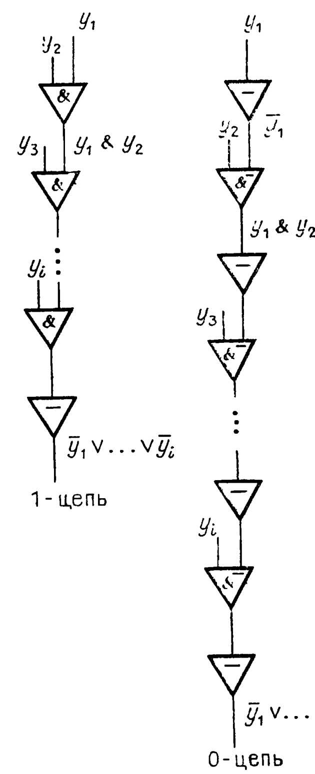

Рис. 2

h-го конъюнктора соединяется с выходом $(h-1)$-го конъюнктора, $h = 2, \ldots, i-1$. Правый вход первого конъюнктора (или вход инвертора при $i=1$) является первым входом цепи Z; левый вход h-го конъюнктора является $(h+1)$-м входом этой цепи, $h=1, \ldots, i-1$. При подаче на входы Z переменных $y_1, \ldots, y_i$ на выходе Z реализуется $\bar{y}_1 \vee \ldots \vee \bar{y}_i$.

Под 0-цепью с i входами условимся понимать цепь Z', содержащую i инверторов и $i-1$ двухвходовых элементов, каждый из которых реализует $x \& \bar{y}$ (при подаче переменных x и y соответственно на левый и правый входы); при $i=1$ вся цепь Z' состоит из одного инвертора. Эта цепь разбивается на i отрезков. Каждый из первых $i-1$ отрезков содержит по два элемента, первый из которых (верхний) — инвертор, а второй (нижний) — двухвходовой элемент; в каждом из этих отрезков выход инвертора соединяется с правым входом двухвходового элемента. Последний, i-й, отрезок состоит из одного элемента — инвертора, вход которого соединен с выходом двухвходового элемента из предпоследнего ($(i-1)$-го) отрезка цепи, а выход является выходом всей цепи Z'. Выход двухвходового элемента из h-го отрезка соединяется со входом инвертора из $(h+1)$-го отрезка, $h=1, \ldots, i-1$. Вход (верхнего в цепи

Z') инвертора из первого отрезка является первым входом всей цепи Z'. Левый вход двухвходового элемента из h-го отрезка является $(h+1)$-м входом цепи Z', $h=1, \ldots, i-1$. При подаче на входы Z' переменных $y_1, \ldots, y_i$ на выходе Z' реализуется $\bar{y}_1 \vee \ldots \vee \bar{y}_i$.

Подсхема S_2 имеет t выходов и реализует отрицания конъюнкций из $\mathscr{D}'$; входами S_2 являются последние $2(n-m)$ выходов (быть может, не все) S_1. В S_2 входят t штук σ-цепей $Z_1^2, \ldots, Z_t^2$; на выходе j-й цепи Z_j^2 из S_2 реализуется отрицание j-й конъюнкции из $\mathscr{D}'$. Если j-я конъюнкция из $\mathscr{D}'$ есть $x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}$, то σ-цепь Z_j^2 берется с i входами и 1-й, …, i-й входы Z_j^2 соединяются с теми выходами S_1, на которых реализуются соответственно $x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}, \ldots, x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$ ($x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}$ подается на первый вход Z_j^2). Этой цепи Z_j^2 поставим в соответствие пару отличающихся лишь в $(m+i)$-м разряде наборов $\tilde{\alpha}^{2,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{2,j,1}$ длины n, на которых обращается в единицу некоторая конъюнкция K_{l_j} из B_2, функции f, f_{l_j}, $x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}$ обращаются в нуль на наборе $\tilde{\alpha}^{2,j,0}$ и в единицу на наборе $\tilde{\alpha}^{2,j,1}$, а $\left(x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}\right) \in F_{l_j}$, существование указанных наборов установлено леммой 5. Наборы $\tilde{\alpha}^{2,1,0}$, $\tilde{\alpha}^{2,1,1}$, …, $\tilde{\alpha}^{2,t,0}$, $\tilde{\alpha}^{2,t,1}$ ($2t$ штук) включим в T.

Подсхема S_3 имеет s выходов и реализует функции $f_1, \ldots, f_s$ из (2); входами S_3 являются выходы подсхемы S_2. В S_3 входят s штук σ-цепей $Z_1^3, \ldots, Z_s^3$; на выходе j-й цепи из S_3 реализуется функция $f_j(x_{m+1}, \ldots$ $\ldots, x_n)$, причем эта реализация осуществляется в соответствии с представлением f_j в виде приведенной д. н. ф. F_j. Если в F_j входят конъюнкции $K_{a_1}, K_{a_2}, \ldots, K_{a_l}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_l$, то σ-цепь Z_j^3 берется с l входами и 1-й, …, l-й входы Z_j^3 соединяются с теми выходами S_2, на которых реализуются соответственно $\overline{K}_{a_1}, \ldots, \overline{K}_{a_l}$. Этой цепи Z_j^3 поставим в соответствие пару наборов $\tilde{\alpha}^{3,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{3,j,1}$, у которых первые m разрядов совпадают и образуют набор, покрываемый j-й конъюнкцией из B_2, а остальные $n-m$ разрядов выбираются так, что $f_j\left(\alpha_{m+1}^{3,j,0}, \ldots\right.$ $\left.\ldots, \alpha_n^{3,j,0}\right)=0$, $K_{a_1}\left(\alpha_{m+1}^{3,j,1}, \ldots, \alpha_n^{3,j,1}\right)=1$ (отметим, что $\overline{K}_{a_1}$ подается на вход верхнего в Z_j^3 элемента). Из (2) с учетом взаимной ортогональности конъюнкций из $B_1' \cup B_2$ получаем $f(\tilde{\alpha}^{3,j,0})=0$, $f(\tilde{\alpha}^{3,j,1})=1$. Наборы $\tilde{\alpha}^{3,1,0}$, $\tilde{\alpha}^{3,1,1}$, …, $\tilde{\alpha}^{3,s,0}$, $\tilde{\alpha}^{3,s,1}$ ($2s$ штук) включим в T.

Подсхема S_4 имеет r выходов и реализует отрицания конъюнкций из B_1' (первых r слагаемых из (2)); входами S_4 являются первые $2m$ выходов подсхемы S_1. В S_4 входят r штук σ-цепей $Z_1^4, \ldots, Z_r^4$; на выходе j-й цепи Z_j^4 из S_4 реализуется $\overline{K}_j'$ (отрицание j-й конъюнкции из B_1'). Если $K_j' = x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i}$, то σ-цепь Z_j^4 берется с i входами и 1-й, … …, i-й входы Z_j^4 соединяются с теми выходами S_1, на которых реализуются соответственно $x_i^{\alpha_i}, \ldots, x_1^{\alpha_1}$ ($x_i^{\alpha_i}$ подается на первый вход Z_j^4). Этой цепи Z_j^4 поставим в соответствие пару отличающихся лишь в i-м разряде наборов $\tilde{\alpha}^{4,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{4,j,1}$, на одном из которых конъюнкция K_j' и функция f обращаются в единицу, а на втором — в нуль; существование таких наборов установлено леммой 4. Наборы $\tilde{\alpha}^{4,1,0}$, $\tilde{\alpha}^{4,1,1}$, …, $\tilde{\alpha}^{4,r,0}$, $\tilde{\alpha}^{4,r,1}$ ($2r$ штук) включим в T.

Подсхема S_5 имеет s выходов и реализует отрицания последних s слагаемых из (2); входами S_5 являются первые $2m$ выходов подсхемы S_1 и выходы подсхемы S_3. В S_5 входят s штук σ-цепей $Z_1^5, \ldots, Z_s^5$, каждая из которых имеет $m+1$ входов; на выходе j-й цепи Z_j^5 из S_5 реализуется $(\overline{K_j f_j})$, где K_j — j-я конъюнкция из B_2. Если $K_j = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$, то первый вход Z_j^5 соединяется с тем выходом S_3, на котором реализуется f_j, а 2-й, ..., $(m+1)$-й входы Z_j^5 соединяются с теми выходами S_1, на которых реализуются соответственно $x_m^{\alpha_m}, \ldots, x_1^{\alpha_1}$.

Подсхема S_6 состоит из одной σ-цепи Z^6 с $r+s$ входами, реализующей дизъюнкции слагаемых из (2), т. е. заданную функцию f; входами Z^6 являются выходы подсхем S_4, S_5, причем 1-й, ..., s-й и $(s+1)$-й, ..., $(s+r)$-й входы Z^6 соединяются с выходами S_5 и S_4, на которых реализуются соответственно $(\overline{K_1 f_1}), \ldots, (\overline{K_s f_s})$ и $\overline{K}_1', \ldots, \overline{K}_r$. Выход S_6 обозначим через W.

Из способа построения σ-цепей ($\sigma \in \{0, 1\}$) и лемм 1, 2 вытекает следующая лемма.

Лемма 7. *Для всякой функционирующей цепи от входа подсхемы S_i, $i \in \{2, \ldots, 6\}$, до ее выхода инверсионное число равно единице.*

Покажем, что составленное при построении S множество наборов T является полным проверяющим тестом для S.

Предположим, что на всех наборах из T схема S выдает значения, совпадающие со значениями функции f на этих наборах (в противном случае будет установлено, что схема реализует различимую функцию неисправности). Покажем, что в этом случае все элементы схемы S должны быть в исправном состоянии.

Вначале рассмотрим подсхему S_1 и установим, что элементы любой цепи Z_i^1 ($i \in \{1, \ldots, n\}$) этой подсхемы исправны. Поскольку наборы $\tilde{\alpha}^{1,i,0}$ и $\tilde{\alpha}^{1,i,1}$ отличаются лишь в i-м разряде, а функция f принимает на этих наборах различные значения, то согласно лемме 3 в S найдется хотя бы одна цепь Z от V_i до W, функционирующая на наборах $\tilde{\alpha}^{1,i,0}$, $\tilde{\alpha}^{1,i,1}$. Эта цепь Z содержит хотя бы один элемент из S_1.

Действительно, предположим противное, т. е. что Z не содержит ни одного элемента из S_1. Это возможно только в том случае, когда V_i совпадает с W_{2i}, т. е. при $f(\tilde{\alpha}^{1,i,0})=1$. При этом всю цепь Z можно разбить на отрезки, лежащие либо в S_2, S_3, S_5, S_6, либо в S_5, S_6, либо в S_4, S_6; имея в виду такое разбиение и используя леммы 1 и 7, получаем $I_Z(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1})=0$. Но по определению $I_Z(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1})=0+f(\tilde{\alpha}^{1,i,0})= =0+1=1$. Получаем противоречие, исключающее наше предположение.

При $f(\tilde{\alpha}^{1,i,0})=1$ цепь Z_i^1 содержит один инвертор и этот инвертор должен входить в Z (в противном случае цепь Z оказалась бы цепью от W_{2i} до W и не содержала бы ни одного элемента из S_1); отсюда следует, что составляющий цепь Z_i^1 инвертор должен быть исправным (поскольку в функционирующей цепи все элементы исправны). Рассмотрим далее случай $f(\tilde{\alpha}^{1,i,0})=0$. Разобьем цепь Z на два отрезка Z' и Z'' такие, что Z' лежит в S_1, а Z'' — вне S_1. Цепь Z'' можно в свою очередь разбить на отрезки, лежащие либо в S_2, S_3, S_5, S_6, либо в S_5, S_6, либо в S_4, S_6; имея в виду такое разбиение и используя леммы 1 и 7, получаем $I_{Z''}(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1})=0$. По определению $I_Z(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1}) = 0 + f(\tilde{\alpha}^{1,i,0}) = =0+0=0$, а из леммы 1 следует $I_Z(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1}) = I_{Z'}(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1}) + I_{Z''}(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1})$. Отсюда, учитывая, что $I_{Z''}(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1})=0$, получаем $I_{Z'}(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1})=0$. Цепь Z_i^1 содержит (по построению S) два инвертора; цепь от V_i до W_{2i-1} содержит один (верхний в Z_i^1) инвертор, цепь от V_i до W_{2i} совпадает с Z_i^1 и других цепей от входа V_i до выхода подсхемы S_1 нет. Поскольку $I_{Z'}(\tilde{\alpha}^{1,i,0}, \tilde{\alpha}^{1,i,1})=0$, то отрезком

Z' в данном случае может быть только цепь от V_i до W_{2i}, а из этого следует, что оба инвертора из Z_i^1 исправны.

Таким образом, исправность всех элементов из S_1 установлена. Перейдем к следующей подсхеме — S_2; покажем, что предположение о наличии неисправных элементов в S_2 приводит к противоречию.

Всякий отрезок цепи, содержащий ее нижний элемент, будем считать выходным. Предположим, что среди цепей подсхемы S_2 с неисправными элементами цепь Z_j^2 содержит выходной отрезок наибольшей длины с неисправным верхним элементом. Этой цепи Z_j^2 соответствует (по построению) j-я конъюнкция $x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}$ из $\mathscr{D}'$ и пара отличающихся в $(m+i)$-м разряде наборов $\widetilde{\alpha}^{2,j,0}$, $\widetilde{\alpha}^{2,j,1}$ из T, на которых обращается в единицу некоторая конъюнкция K_{l_j} из B_2. По лемме 3 в схеме S должна быть хотя бы одна функционирующая на наборах $\widetilde{\alpha}^{2,j,0}$, $\widetilde{\alpha}^{2,j,1}$ цепь Z от $(m+i)$-го входа S (поскольку наборы $\widetilde{\alpha}^{2,j,0}$, $\widetilde{\alpha}^{2,j,1}$ отличаются лишь в $(m+i)$-м разряде) до выхода S. Такая цепь Z должна проходить через подсхему S_2, поскольку выходы подсхемы S_1, на которых реализуются последние $n-m$ переменных, а также отрицания этих переменных, соединяются в S только со входами S_2. Всякая же цепь от входа S_2 до выхода S по построению проходит и через подсхемы S_3, S_5, S_6. Так как Z функционирует, то все элементы этой цепи должны быть исправными. Значения на выходах всех исправных (т. е. содержащих лишь исправные элементы) цепей из S_5, отличных от $Z_{l_j}^5$, на наборах $\widetilde{\alpha}^{2,j,0}$, $\widetilde{\alpha}^{2,j,1}$ не изменяются, так как на этих наборах в единицу обращается K_{l_j}, а все конъюнкции из $B_1' \cup B_2$ взаимно ортогональны. Отсюда следует, что цепь $Z_{l_j}^5$ находит в качестве отрезка в Z. Единственной цепью из S_3, выход которой соединен со входом $Z_{l_j}^5$, является цепь $Z_{l_j}^3$; значит и цепь $Z_{l_j}^3$ или некоторый выходной отрезок ее входит в качестве отрезка в Z.

Рассмотрим теперь те цепи из S_2, выходы которых соединены со входами $Z_{l_j}^3$. На выходах этих цепей реализуются отрицания тех конъюнкций из $\mathscr{D}'$, которые входят в F_{l_j} (в том числе и конъюнкции $x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots x_{m+i}^{\alpha_{m+i}}$), и выходной отрезок Z' одной из этих цепей должен быть непустым ее пересечением с Z. Из леммы 6 и выбора наборов $\widetilde{\alpha}^{2,j,0}$, $\widetilde{\alpha}^{2,j,1}$ следует, что значения на выходах всех исправных цепей из числа рассматриваемых остаются неизменными на наборах $\widetilde{\alpha}^{2,j,0}$, $\widetilde{\alpha}^{2,j,1}$ (напомним, что исправность всех элементов из S_1 установлена и на входы S_2 подаются «правильные» значения переменных). Поэтому Z' не может принадлежать исправной цепи из подсхемы S_2. Неисправные же цепи из S_2, к которым относится и Z_j^2, содержат некоторые выходные отрезки с неисправными верхними элементами и наибольший (по длине) из этих отрезков по предположению содержится в Z_j^2. Но по построению S всякая цепь от $(m+i)$-го входа S_1 до любого выхода S_2, а значит и цепь Z содержит выходной отрезок какой-нибудь цепи из S_2, длина которого не меньше длины всей цепи Z_j^2 (входы более коротких выходных отрезков соединялись с выходами S_1, соответствующими переменным $x_{m+1}, \ldots$ $\ldots, x_{m+i-1}$). Следовательно, Z' не может принадлежать и неисправной цепи из подсхемы S_2.

Получаем противоречие, исключающее исходное предположение о наличии неисправных элементов в S_2.

Далее установим исправность всех элементов в подсхемах S_3, S_5, S_6. Множество этих элементов разобьем на пересекающиеся цепи $Z_1, \ldots, Z_s$;

цепь Z_j состоит из Z_j^3, Z_j^5 и выходного отрезка цепи Z^6, у которого вход верхнего элемента соединен с выходом Z_j^5 ($j \in \{1, \ldots, s\}$, Z_1 содержит Z^6 целиком).

Возьмем произвольную цепь Z_j и покажем, что все ее элементы исправны. На наборах $\tilde{\alpha}^{3,j,0}$ и $\tilde{\alpha}^{3,j,1}$ функция f принимает различные значения, и по лемме 3 в S найдется какая-нибудь цепь Z от входа схемы S до ее выхода, функционирующая на данных наборах. Поскольку значения первых m переменных на наборах $\tilde{\alpha}^{3,j,0}$ и $\tilde{\alpha}^{3,j,1}$ не изменяются, то Z проходит через S_2 (и далее через S_3, S_5). Все конъюнкции из B_2, кроме j-й, на наборах $\tilde{\alpha}^{3,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{3,j,1}$ обращаются в нуль. Следовательно, Z содержит в качестве отрезка j-ю цепь из S_5 — любая другая цепь из S_5 либо содержит неисправный элемент, либо, будучи исправной, выдает на наборах $\tilde{\alpha}^{3,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{3,j,1}$ одно и то же значение.

Единственный выход подсхемы S_3, с которым соединен вход Z_j^5, это выход цепи Z_j^3; отсюда следует, что Z_j^3 пересекается с Z. Входы цепи Z_j^3 по построению S соединены с теми выходами S_2, на которых реализуются отрицания составляющих F_j конъюнкций $K_{a_1}, K_{a_2}, \ldots, K_{a_l}$, причем вход верхнего в Z_j^3 элемента соединен с тем выходом S_2, на котором реализуется $\overline{K}_{a_1}$. Значения всех этих конъюнкций, кроме K_{a_1}, на наборах $\tilde{\alpha}^{3,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{3,j,1}$ не изменяются. Все элементы в S_1, S_2 исправны. Отсюда следует, что вся цепь $Z^3{}_j$ входит в Z. В итоге рассматриваемая цепь Z_j оказывается отрезком Z и все элементы цепи Z_j должны быть исправными.

Таким образом исправность всех элементов в подсхемах S_3, S_5, S_6 установлена.

Рассмотрим подсхему S_4. Предположим, что в S_4 имеются неисправные элементы и среди цепей подсхемы S_4 с неисправными элементами цепь Z_j^4 ($j \in \{1, \ldots, r\}$) содержит выходной отрезок наибольшей длины с неисправным верхним элементом. Цепи Z_j^4 соответствует конъюнкция $K_j' = x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i}$ и наборы $\tilde{\alpha}^{4,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{4,j,1}$. Из выбора $\tilde{\alpha}^{4,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{4,j,1}$ и леммы 3 следует, что в схеме S должна быть некоторая цепь Z от i-го входа этой схемы до ее выхода, функционирующая на наборах $\tilde{\alpha}^{4,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{4,j,1}$. На одном из этих наборов функция f, а значит и все слагаемые из (2), обращаются в нуль. На другом наборе в единицу обращается K_j', а все остальные слагаемые из (2) в силу взаимной ортогональности конъюнкций из $B_1' \cup B_2$ опять же обращаются в нуль. Отсюда, учитывая исправность всех элементов в S_1, S_2, S_3, S_5, получаем, что значения на всех выходах подсхемы S_5 и на выходах исправных цепей из S_4 остаются неизменными на наборах $\tilde{\alpha}^{4,j,0}$, $\tilde{\alpha}^{4,j,1}$. Значит, в Z входит выходной отрезок Z' какой-нибудь цепи из S_4, содержащей неисправный элемент.

По построению S всякая цепь от i-го входа S_1 до любого выхода S_4 содержит выходной отрезок какой-нибудь цепи из S_4, длина которого не меньше длины всей цепи $Z^4{}_i$ (входы более коротких выходных отрезков соединялись с выходами S_1, соответствующими переменным $x_1, \ldots, x_{i-1}$); следовательно, длина Z' не меньше длины Z_j^4. Но из всех цепей подсхемы S_4, содержащих неисправные элементы, цепь Z_j^4 по предположению имеет наибольший по длине выходной отрезок с неисправным верхним элементом. Значит и Z' содержит неисправный элемент. Но в функционирующей цепи Z не должно быть неисправных элементов. Получаем противоречие, исключающее исходное предположение о наличии неисправных элементов в S_4.

Таким образом, T является полным проверяющим тестом для S; утверждение теоремы для схем над базисом $\{\bar{x}, x \mathbin{\&} y^\sigma\}$ доказано.

§ 5. Схемы над базисом $\{\bar{x}, x \vee y^\sigma\}$

Элемент E^*, реализующий функцию $\varphi^*(y_1, \ldots, y_i)$, будем считать двойственным к элементу E, реализующему $\varphi(y_1, \ldots, y_i)$, если функция φ^* является двойственной к φ.

Схему S^* будем считать двойственной к схеме S, если S^* получается из S путем замены каждого элемента в S двойственным к нему элементом.

Если $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то через $\tilde{\tilde{\alpha}}$ условимся обозначать набор $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$.

Лемма 8. *Если множество наборов $T = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_l\}$ является полным проверяющим тестом для схемы S, то множество наборов $T^* = \{\tilde{\tilde{\alpha}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{\alpha}}_l\}$ является полным проверяющим тестом для схемы S^*, двойственной к S.*

Доказательство. Из принципа двойственности [4, с. 19] следует, что схема S^* реализует функцию $\psi^*(\tilde{x})$, двойственную к функции $\psi(\tilde{x})$, реализуемой схемой S. Предположим, что в результате возникновения неисправностей схема S^* переходит в схему $S^{*\prime}$, реализующую некоторую различимую функцию неисправности $g^*(\tilde{x})$. Возьмем двойственную к $S^{*\prime}$ схему S', получающуюся из схемы S при возникновении в ней соответствующих неисправностей («двойственных» к неисправностям в схеме S^*; заметим, что функция 0 двойственна 1 и наоборот). Пусть S' реализует функцию $g(\tilde{x})$; из принципа двойственности опять же следует, что функция g^* является двойственной к функции g. Поскольку $\psi^*(\tilde{x}) = \bar{\psi}(\tilde{\tilde{x}})$, $g^*(\tilde{x}) = \bar{g}(\tilde{\tilde{x}})$ и g^* является различимой функцией неисправности, то и g будет различимой функцией неисправности. Следовательно, найдется набор $\tilde{\alpha}_i$ из T такой, что $\psi(\tilde{\alpha}_i) \neq g(\tilde{\alpha}_i)$. Но тогда $\psi^*(\tilde{\tilde{\alpha}}_i) \neq g^*(\tilde{\tilde{\alpha}}_i)$. Значит, T^* является полным проверяющим тестом для S^*. Лемма доказана.

Построим теперь схему S над базисом $\{\bar{x}, x \mathbin{\&} y^\sigma\}$ (рассмотренным в предыдущем параграфе), реализующую функцию $\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ и допускающую полный проверяющий тест $T = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_l\}$, длина которого удовлетворяет требованию теоремы. От схемы S перейдем к двойственной схеме S^* над базисом $\{\bar{x}, x \vee y^\sigma\}$, реализующей заданную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ (заметим, что функция $\bar{x}$ самодвойственна, а функция $x \mathbin{\&} y^\sigma$ двойственна $x \vee y^\sigma$). Согласно лемме 8 $T^* = \{\tilde{\tilde{\alpha}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{\alpha}}_l\}$ является полным проверяющим тестом для S^*.

Утверждение теоремы для схем над базисом $\{\bar{x}, x \vee y^\sigma\}$ доказано.

§ 6. Схемы над базисом $\{\overline{x \mathbin{\&} y}\}$ (или $\{\overline{x \vee y}\}$)

Пусть E — функциональный элемент с h входами, реализующий булеву функцию $\varphi_E(y_1, \ldots, y_h)$, а S^E — схема над произвольным базисом, также имеющая h входов и реализующая $\varphi_E(y_1, \ldots, y_h)$; схему S^E будем считать эквивалентной элементу E, если любая различимая функция неисправности, соответствующая схеме S^E, является константой (0 или 1). При этом входу элемента E, на который подается переменная y_i, ставим во взаимно однозначное соответствие вход S^E, на который подается та же самая переменная y_i ($i = 1, \ldots, h$).

Лемма 9. *Пусть $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ — произвольные конечные базисы, S_1 — схема над базисом $\mathscr{B}_1$, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, T — полный проверяющий тест для S_1 и для каждого элемента из S_1 существует эквивалентная ему схема над $\mathscr{B}_2$.*

Тогда существует и схема S_2 над базисом $\mathscr{B}_2$, которая реализует $f(x_1, \ldots, x_n)$ и для которой T является полным проверяющим тестом.

Доказательство. Все элементы схемы S_1 заменим эквивалентными им схемами над $\mathscr{B}_2$. При замене элемента E схемой S^E каждый вход этой схемы соединяется с той вершиной исходной схемы S_1, с которой был соединен соответствующий вход элемента E; точно так же и выход S^E соединяется с той вершиной S_1, с которой был соединен выход E. В результате получим некоторую схему S_2 над базисом $\mathscr{B}_2$, которая реализует ту же функцию, что и S_1.

Далее, для каждой различимой функции неисправности $g(x_1, \ldots, x_n)$, соответствующей схеме S_2, можно указать такие неисправности элементов исходной схемы S_1, при которых эта схема также реализует $g(x_1, \ldots, x_n)$. Это очевидно, если принять во внимание, что для любой различимой функции неисправности (константы) произвольной схемы S^E, эквивалентной элементу E, возможна неисправность этого элемента, при которой он реализует такую же функцию. Но если все различимые функции неисправности схемы S_2 принадлежат множеству различимых функций неисправности схемы S_1, то T будет полным проверяющим тестом схемы S_2. Лемма доказана.

Возьмем теперь схему S над $\{\bar{x}, x \vee y\}$, реализующую $f(x_1, \ldots, x_n)$ и удовлетворяющую требованию теоремы; способ построения такой схемы указан в предыдущем параграфе. Пусть E_1, E_2 — элементы, реализующие соответственно $\bar{x}$, $x \vee y$. Элементу E_1 эквивалентна схема Z_1 над $\{\bar{x} \mathbin{\&} \bar{y}\}$ из одного элемента, оба входа которого соединены с единственным входом этой схемы. Элементу E_2 эквивалентна схема (цепь) Z_2 над $\{\bar{x} \mathbin{\&} \bar{y}\}$ из двух элементов, в которой входы первого элемента являются входами Z_2, выход второго элемента является выходом Z_2 и с выходом первого элемента соединены оба входа второго. Отсюда и из леммы 9 получаем утверждение теоремы для схем над $\{\bar{x} \mathbin{\&} \bar{y}\}$.

Аналогично доказывается теорема и для схем над $\{\bar{x} \vee \bar{y}\}$. В этом случае в качестве исходной схемы S берется схема над $\{\bar{x}, x \mathbin{\&} y\}$, а для элементов E_1, E_2, реализующих $\bar{x}$, $x \mathbin{\&} y$, эквивалентными будут точно такие же схемы Z_1, Z_2, как и в предыдущем случае, но только из элементов $\{\bar{x} \vee \bar{y}\}$.

§ 7. Схемы над базисом, содержащим $x \mathbin{\&} y$ (или $x \vee y$)

Пусть $\mathscr{B}$ — произвольный полный конечный базис; расширением $\mathscr{B}$ будем считать всякий базис $\mathscr{B}'$, любая функция которого либо совпадает с какой-нибудь функцией из $\mathscr{B}$, либо может быть получена путем отождествления переменных какой-нибудь функции из $\mathscr{B}$. Если $\mathscr{B}'$ — расширение базиса $\mathscr{B}$, то, очевидно, каждому элементу из $\mathscr{B}'$, отсутствующему в $\mathscr{B}$, можно поставить в соответствие эквивалентную ему схему над $\mathscr{B}$ (получающуюся из соответствующего элемента базиса $\mathscr{B}$ «склеиванием» некоторых его входов). Отсюда и из леммы 9 следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать ее для произвольного расширения базиса $\mathscr{B}$.

Пусть $\mathscr{B}'$ — максимальное (по числу содержащихся в нем попарно различных функций) расширение исходного базиса $\mathscr{B}$; ясно, что всякое другое расширение базиса $\mathscr{B}$ содержится в $\mathscr{B}'$. Разберем случай, когда $\mathscr{B}'$ содержит $x \mathbin{\&} y$. Если $\mathscr{B}'$ содержит еще и $\bar{x}$, то строим схему над базисом $\{\bar{x}, x \mathbin{\&} y\}$ (см. § 4).

Будем считать, что функция $\bar{x}$ (инверсия) отсутствует в $\mathscr{B}'$. Из этого условия с учетом полноты базиса $\mathscr{B}$ следует, что $\mathscr{B}'$ содержит константы 0 и 1, поскольку при отождествлении всех переменных у функций, не сохраняющих константу 0, и у функций, не сохраняющих константу 1, получается либо инверсия, либо константа (соответственно 1 и 0).

Выделим случай, когда $f = x_1 \& \ldots \& x_n$. В этом случае функцию f реализуем цепью из $n-1$ конъюнкторов; на входы цепи подадим $x_1, \ldots, x_n$, причем на один из входов верхнего в цепи элемента подадим x_1. В качестве теста, удовлетворяющего требованию теоремы, возьмем наборы $(0, 1, 1, \ldots, 1)$ и $(1, 1, 1, \ldots, 1)$.

Далее (в этом параграфе) будем считать, что функция f отлична от $x_1 \& \ldots \& x_n$.

Лемма 10. *Если схема над* $\{0, 1, x \& y\}$ (*или над* $\{0, 1, x \vee y\}$) *реализует некоторую функцию* φ, *существенно зависящую от переменных* $x_1, \ldots, x_n$, *то* $\varphi = x_1 \& \ldots \& x_n$ (*соответственно* $\varphi = x_1 \vee \ldots \vee x_n$).

Доказательство проведем индукцией по числу элементов в схеме. Для пустых (не содержащих элементов) схем утверждение леммы очевидно. Предположим, что оно справедливо для всех схем, содержащих не более чем по l элементов; докажем его для произвольной схемы S, содержащей $l+1$ элементов.

Выделим в S выходной элемент E; поскольку схема S реализует не константу, то элемент E должен быть конъюнктором. Пусть на входы E подаются функции φ_1, φ_2, реализуемые подсхемами (схемы S) S_1, S_2 (последние, возможно, пересекаются). Поскольку $\varphi \not\equiv 0$, то и $\varphi_1, \varphi_2 \not\equiv 0$. Если одна из функций φ_1, φ_2 тождественно равна единице, то вторая должна зависеть от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$ и по индуктивному предположению будет равна $x_1 \& \ldots \& x_n$. Предположим, что φ_i существенно зависит от переменных из множества X_i, $i = 1, 2$. Поскольку φ существенно зависит от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$, то $X_1 \cup X_2 = \{x_1, \ldots, x_n\}$. С другой стороны по индуктивному предположению φ_i является конъюнкцией всех переменных из X_i, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $\varphi = x_1 \& \ldots \& x_n$.

Аналогичным образом проводится доказательство и для схем над $\{0, 1, x \vee y\}$. Лемма доказана.

Возьмем схему S над базисом $\{\bar{x},\ x \& y\}$, реализующую заданную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и тест T для этой схемы, указанные в § 4. Напомним, что тест T составлен не менее чем из двух пар наборов и на наборах каждой пары f принимает различные значения; при оценке же длины теста предполагалось, что во всех парах все наборы могут быть различными. Поэтому можно считать, что в T входит отличный от $(1, 1, \ldots, 1)$ набор $\tilde{\alpha}$, на котором f обращается в единицу (при необходимости недостающий набор можно просто добавить, не изменяя оценки для длины теста).

Поскольку базис $\mathscr{B}'$ полный, то в нем найдется немонотонная функция φ. Подстановкой констант 0 и 1 из этой функции можно получить функцию $\bar{x}$ [4, с. 30]. Один из входов немонотонного элемента E_φ, реализующего φ, выделим, а все остальные разобьем на нулевые и единичные так, что при подаче на выделенный вход переменной x, а на нулевые и единичные — соответственно констант 0 и 1, на выходе E_φ получим $\bar{x}$. При подаче переменной x на выделенный вход элемента E_φ и тождественной единицы — на все остальные его входы возможны два исхода:

I. E_φ реализует $\bar{x}$;

II. E_φ реализует одну из функций 0, 1, x.

Рассмотрим отдельно соответствующие этим исходам два случая.

I. Все элементы схемы S произвольным образом перенумеруем. Добавим к схеме S два элемента E_1 и E_2, реализующие соответственно тождественную единицу и конъюнкцию. Вход E_1 соединим с одним из входов схемы S; один вход E_2 соединим с выходом E_1, второй — с выходом S. Сохраняя нумерацию элементов неизменной, заменим все инверторы в схеме S элементами из $\mathscr{B}'$, реализующими φ. При замене инвертора E элементом E' выделенный вход и выход E' соединяем с теми вершинами схемы S, с которыми были соединены соответственно вход и выход E, а все остальные (единичные) входы E' соединяем с выходом E_1. В результате получим некоторую схему S_1, на выходе которой (совпадающем с выходом элемента E_2) реализуется $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Покажем, что T является полным проверяющим тестом для S_1. Действительно, при неисправности хотя бы одного из элементов E_1, E_2 на выходе E_2 будет реализована константа (заметим, что элемент E_1 в неисправном состоянии выдает тождественный нуль), а в T входят наборы, на которых f принимает различные значения. Предположим, что элементы E_1, E_2 исправны. В схеме S_1 выделим подсхему S' (аналог схемы S), содержащую все элементы схемы S_1 за исключением E_1 и E_2. На выходе исправной подсхемы S' реализуется функция f, а при одинаковом характере неисправностей схем S и S', когда элементы с одним и тем же номером в обеих схемах либо исправны, либо реализуют одну и ту же константу, на выходах этих схем реализуется одна и та же функция неисправности. Отсюда окончательно следует, что T является полным проверяющим тестом для S_1.

II. В этом случае, в отличие от предыдущего, схема S_1 содержит еще и третий дополнительный элемент E_3, реализующий тождественный нуль; вход E_3 соединяется с каким-нибудь входом S, а с выходом E_3 соединяются все нулевые входы элементов, заменяющих в схеме S инверторы. Подсхема S' в данном случае содержит все элементы S_1 за исключением E_1, E_2, E_3.

Покажем, что T остается полным проверяющим тестом для S_1. При неисправности хотя бы одного из элементов E_1, E_2 на выходе E_2 опять же будет реализована константа (отличная от f на некоторых наборах из T). Предположим, что элементы E_1, E_2 исправны. На выходах подсхемы S' и всей схемы S_1 при этом реализуется одна и та же функция g; будем считать, что значения g совпадают со значениями f на наборах из T (в противном случае будет установлено, что схема S_1 реализует различимую функцию неисправности). Поскольку при любом $i = 1, \ldots, n$ функция f на наборах $\tilde{\alpha}^{1,i,0}$ и $\tilde{\alpha}^{1,i,1}$ из T, отличающихся лишь в i-м разряде, принимает различные значения, то g существенно зависит от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Допустим, что элемент E_3 неисправен, т. е. реализует тождественную единицу; тогда подсхема S' реализует ту же функцию, что и некоторая соответствующая ей схема над $\{0, 1. x \& y\}$, т. е. согласно лемме 10 функцию $x_1 \& \ldots \& x_n$. Но функции g и $x_1 \& \ldots \& x_n$ на наборе $\tilde{\alpha}$ принимают разные значения. Полученное противоречие исключает неисправность элемента E_3. Если же все три элемента E_1, E_2, E_3 исправны, то (как и в предыдущем случае I) на выходе S' при наличии неисправностей могут быть реализованы только те функции, которые являются функциями неисправности схемы S.

Таким образом, T является полным проверяющим тестом для S_1.

Схемы над базисом, содержащим $x \vee y$, рассматриваются аналогично (здесь нужно только: выделить случай $f = x_1 \vee \ldots \vee x_n$; в тесте выделить набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $\tilde{\alpha} \neq (0, 0, \ldots, 0)$, $f(\tilde{\alpha}) = 0$; в качестве элемента E_2 взять дизъюнктор, а в качестве элементов E_1, E_3 брать элементы, реализующие соответственно константы 0 и 1; случаи I и II рассматривать в зависимости от того, можно или нет ограничиться подачей x и тождественного нуля на входы E_φ при реализации $\bar{x}$).

§ 8. Схемы над базисом, содержащим $x \& \bar{y}$ (или $x \vee \bar{y}$)

Если в расширении $\mathscr{B}'$ базиса $\mathscr{B}$ имеется $\bar{x}$, то строится схема над $\{\bar{x},\ x \& \bar{y}\}$ (см. § 4). Предположим, что $\bar{x}$ отсутствует в $\mathscr{B}'$. В этом случае $\mathscr{B}'$ содержит константу 1 — поскольку $\mathscr{B}$ содержит функцию, не сохраняющую константу 0, а при отождествлении переменных такой функции может получиться либо $\bar{x}$, либо константа 1. Возьмем схему S над базисом $\{\bar{x},\ x \& \bar{y}\}$, реализующую $\bar{f}(x_1, \ldots, x_n)$ и тест T для нее, удовлетворяющий требованию теоремы (см. § 4). К этой схеме добавим элемент E_1, реализующий тождественную единицу, и элемент E_2, реализующий $x \& \bar{y}$. Положительный вход E_2 соединим с выходом E_1, а отрицательный вход E_2 — с выходом S. В схеме S каждый инвертор заменим элементом, реализующим $x \& \bar{y}$; при этом отрицательный вход и выход элемента соединяются с теми вершинами схемы S, с которыми были соединены соответственно вход и выход инвертора, а положительный вход элемента соединяется с выходом E_1. В результате получим некоторую схему S_1, на выходе которой (совпадающем с выходом E_2) реализуется $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Покажем, что T является полным проверяющим тестом и для S_1. При неисправности хотя бы одного из элементов E_1, E_2 на выходе E_2 будет релизована константа, а в T входят как нулевые, так и единичные наборы (на которых функция f обращается соответственно в нуль и в единицу). Предположим, что элементы E_1, E_2 исправны. В этом случае T является полным проверяющим тестом для схемы S', содержащей все элементы S_1, кроме E_1, E_2, и реализующей $\bar{f}$. Значит, T является полным проверяющим тестом и для всей схемы S_1.

Схемы над базисом, содержащим $x \vee \bar{y}$, рассматриваются аналогично; здесь только вместо константы 1 при необходимости используется константа 0.

§ 9. Схемы над базисом, содержащим $xy \oplus xz \oplus yz \oplus \gamma_1 x \oplus \gamma_2 y \oplus \gamma_3 z \oplus \gamma_4$

Рассмотрим максимальное расширение $\mathscr{B}'$ заданного базиса $\mathscr{B}$. Предположим, что в $\mathscr{B}'$ отсутствуют константы. В этом случае из условия полноты $\mathscr{B}'$ следует, что в $\mathscr{B}'$ имеется несамодвойственная функция $\psi(x_1, \ldots, x_i)$ от двух или более переменных. Для этой функции найдется набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_i)$ такой, что $\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_i) = \psi(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_i)$. Переменные функции ψ разобьем на две группы; к первой группе отнесем те переменные, которым соответствуют нули в наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_i)$, а ко второй — те переменные, которым соответствуют единицы в этом наборе. Внутри каждой группы переменные отождествим. Получим несамодвойственную функцию от двух переменных. Значит, $\mathscr{B}'$ содержит некоторую несамодвойственную функцию $\psi_1(x, y)$. Поскольку при отождествлении переменных каждой из функций $x \oplus y \oplus \sigma$, $x^\sigma y^{\bar{\sigma}}$, $x^\sigma \vee y^{\bar{\sigma}}$ получается константа (отсутствующая по предположению в $\mathscr{B}'$), то $\psi_1(x, y)$ будет одной из функций $x^\sigma y^\sigma$, $x^\sigma \vee y^\sigma (\sigma \in \{0, 1\})$; базисы, содержащие такие функции, уже рассматривались в § 6, 7.

Будем считать далее, что $\mathscr{B}'$ содержит по крайней мере одну константу.

Пусть $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_4)$, а $\varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz \oplus \gamma_1 x \oplus \gamma_2 y \oplus \oplus \gamma_3 z \oplus \gamma_4$; через $E_{\tilde{\gamma}}$ будем обозначать элемент с тремя занумерованными входами, который реализует $\varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y, z)$ при подаче x, y, z соответственно на 1-й, 2-й, 3-й входы. Из всех возможных наборов $\tilde{\gamma}$ достаточно рассмотреть наборы $(1, 1, 1, \gamma_4)$, $(0, 1, 1, \gamma_4)$, $(0, 0, 1, \gamma_4)$, $(0, 0, 0, \gamma_4)$, где

$\gamma_4 = 0{,}1$ (остальные сводятся к указанным переименованием переменных функции $\varphi_{\tilde{\gamma}}$).

Схему с тремя входами будем называть $\tilde{\gamma}$-*схемой*, если она состоит из элементов $E_{\tilde{\gamma}}$ и реализует функцию $xyz^\sigma \vee (x \vee y)\bar{z}^\sigma$ (σ — константа 0 или 1) при подаче x, y, z соответственно на 1-й, 2-й, 3-й входы, а при подаче на третий вход любой константы (0 или 1) получается схема, различными функциями неисправности которой являются константы.

Отметим, что для каждого из рассматриваемых наборов $\tilde{\gamma}$ можно построить $\tilde{\gamma}$-схему из одного или из двух элементов, поскольку имеем:

$\varphi_{\tilde{\gamma}}(\varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y, z), \varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y, z), z) = xyz \vee (x \vee y)\bar{z}$ для $\tilde{\gamma} = (1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$;

$\varphi_{\tilde{\gamma}}(z, \varphi_{\tilde{\gamma}}(z, x, y), \varphi_{\tilde{\gamma}}(z, x, y)) = xyz \vee (x \vee y)\bar{z}$ для $\tilde{\gamma} = (0, 1, 1, 1)$;

$\varphi_{\tilde{\gamma}}(z, x, y) = xyz \vee (x \vee y)\bar{z}$ для $\tilde{\gamma} = (0, 1, 1, 0)$;

$\varphi_{\tilde{\gamma}}(\varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y, z), \varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y, z), z) = xy\bar{z} \vee (x \vee y) z$ для $\tilde{\gamma} = (0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$;

$\varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y, z) = xy\bar{z} \vee (x \vee y) z$ для $\tilde{\gamma} = (0, 0, 0, 0)$.

За каждым из рассматриваемых наборов $\tilde{\gamma}$ закрепим какую-нибудь одну $\tilde{\gamma}$-схему, первые два входа которой будем называть функциональными, а третий — управляющим. Ниже под $\tilde{\gamma}$-схемой будем подразумевать схему, закрепленную за набором $\tilde{\gamma}$.

Предположим, что $f = x_1 \& \ldots \& x_n$. Функцию f реализуем вначале цепью Z из $n-1$ конъюнкторов; на входы цепи Z подадим $x_1, \ldots, x_n$, причем на один из входов верхнего в цепи конъюнктора подадим x_1. Наборы $\tilde{\alpha}_1 = (0, 1, \ldots, 1)$ и $\tilde{\alpha}_2 = (1, 1, \ldots, 1)$ будут тестом для Z. От цепи Z перейдем к схеме S над $\mathscr{B}'$. Пусть σ — та константа, которую нужно подать на управляющий вход $\tilde{\gamma}$-схемы, чтобы получить на выходе этой схемы xy. Построим схему S_1 над $\mathscr{B}'$, реализующую константу σ. Если $\mathscr{B}'$ содержит элемент E^σ, реализующий константу σ, то этот элемент и возьмем в качестве S_1. Если же такой элемент в $\mathscr{B}'$ отсутствует, то $\mathscr{B}'$ содержит элемент $E^{\bar{\sigma}}$, реализующий $\bar{\sigma}$; в этом случае к выходу $E^{\bar{\sigma}}$ присоединим все входы элемента, не сохраняющего константу $\bar{\sigma}$, и таким образом получим требуемую схему S_1. Отметим, что единственной различимой функцией неисправности схемы S_1 является константа $\bar{\sigma}$. Вместо цепи Z возьмем схему S_2, получающуюся заменой каждого конъюнктора из Z соответствующей ему $\tilde{\gamma}$-схемой; при этом функциональные входы и выход i-й $\tilde{\gamma}$-схемы соединяются с теми вершинами цепи Z, с которыми соединялись соответственно входы и выход i-го конъюнктора ($i = 1, \ldots, n-1$). Управляющие входы всех $\tilde{\gamma}$-схем (составляющих S_2) соединим с выходом S_1. В итоге получим схему S, реализующую $x_1 \& \ldots \& x_n$. Если S_1 реализует константу σ, то множество различимых функций неисправности схемы S_2 то же, что и для исходной цепи Z. Если же неисправная схема S_1 реализует константу $\bar{\sigma}$, то на выходе S_2 будет одно и то же значение на наборах $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ (либо константа, выдаваемая неисправной нижней $\tilde{\gamma}$-схемой, либо единица, когда элементы нижней $\tilde{\gamma}$-схемы исправны). Таким образом, наборы $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ составляют тест для S и этот тест удовлетворяет требованию теоремы.

Аналогичным образом доказывается теорема и при $f = x_1 \vee \ldots \vee x_n$; здесь только в качестве исходной цепи Z берется цепь из $n-1$ дизъюнкторов, тест составляется из наборов $\tilde{\alpha}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$ и $\tilde{\alpha}_2 = (1, 0, \ldots, 0)$, на выходе S_1 реализуется та константа $\bar{\sigma}$, которую нужно подать на управляющий вход $\tilde{\gamma}$-схемы, чтобы получить на ее выходе $x \vee y$ и т. д.

Будем считать далее, что $f \notin \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$. В зависимости от вида заданной функции f рассмотрим два случая: I. f — несамодвойственная функция; II. f — самодвойственная функция.

I. Два набора, отличающиеся ровно в одном разряде, будем называть соседними. Для функции f найдутся два соседних набора $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}'$ такие, что $f(\tilde{\beta}) = f(\bar{\tilde{\beta}})$, $f(\tilde{\beta}) = \bar{f}(\tilde{\beta}')$.

Действительно, поскольку f — несамодвойственная функция, то найдется набор $\tilde{\beta}^1$ такой, что $f(\tilde{\beta}^1) = f(\bar{\tilde{\beta}}^1)$. С другой стороны, f не является тождественной константой и потому найдется набор $\tilde{\beta}''$ такой, что $f(\tilde{\beta}^1) = \bar{f}(\tilde{\beta}'')$. Возьмем последовательность наборов $\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}^2, \ldots, \tilde{\beta}^i$, в которой любые два рядом стоящих набора являются соседними, а $\tilde{\beta}^i = \tilde{\beta}''$. Поскольку $f(\tilde{\beta}^1) = f(\bar{\tilde{\beta}}^1)$ и $f(\tilde{\beta}^1) = \bar{f}(\tilde{\beta}^i)$, то при некотором j $(1 \leqslant j \leqslant i-1)$ получим $f(\tilde{\beta}^j) = f(\bar{\tilde{\beta}}^j)$ и либо $f(\tilde{\beta}^j) = \bar{f}(\tilde{\beta}^{j+1})$, либо $f(\tilde{\beta}^j) = \bar{f}(\bar{\tilde{\beta}}^{j+1})$, т. е. либо наборы $\tilde{\beta}^j$, $\tilde{\beta}^{j+1}$, либо наборы $\bar{\tilde{\beta}}^j$, $\bar{\tilde{\beta}}^{j+1}$ можно взять в качестве наборов $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$.

Без ограничения общности можно считать, что наборы $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$ отличаются в последнем n-м разряде (во всяком случае этого можно добиться переименованием переменных функции f). Представим заданную функцию f в виде (2). При нумерации конъюнкций из D' (из которых составляются д. н. ф. для функций f_j из (2)) конъюнкциям $x_{m+1}^{\beta_{m+1}} \ldots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} x_n^{\beta_n}$, $x_{m+1}^{\bar{\beta}_{m+1}} \ldots x_{n-1}^{\bar{\beta}_{n-1}} x_n^{\bar{\beta}_n}$ (если они входят в D') припишем номера 1, 2. Способом, указанным в § 4, построим схему S над базисом $\{\bar{x},\ x \& y\}$, реализующую заданную функцию f, и тест T для этой схемы. При построении первой подсхемы цепи Z_n^1 поставим в соответствие пару наборов $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$ и включим эти наборы в T. Поскольку $f \notin \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$, а T содержит не менее двух пар наборов и на наборах каждой пары f принимает различные значения, то не изменяя оценки для длины теста T, можно считать, что T содержит наборы $\tilde{\beta}^0$, $\tilde{\beta}^1$, на которых f обращается соответственно в нуль и в единицу, причем $\tilde{\beta}^0 \neq (0, 0, \ldots, 0)$, а $\tilde{\beta}^1 \neq \neq (1, 1, \ldots, 1)$.

Добавим к S два элемента E_0, E_1 из $\mathscr{B}'$. Элемент E_0 реализует какую-нибудь константу. С выходом E_0 соединим все входы второго элемента E_1, который реализует функцию, не сохраняющую полученную (на выходе E_0) константу. Условимся считать, что на выходе E_0 реализуется константа 0, а на выходе E_1 — константа 1 (в противном случае поменяем номера у этих элементов). Все конъюнкторы в схеме S заменим $\tilde{\gamma}$-схемами. Функциональные входы и выход $\tilde{\gamma}$-схемы, заменяющей конъюнктор, соединяем с теми вершинами схемы S, с которыми соединялись соответственно входы и выход этого конъюнктора. Управляющие входы всех $\tilde{\gamma}$-схем соединяем с выходом элемента E_σ. Все инверторы в схеме S заменим одинаковыми немонотонными элементами из $\mathscr{B}'$. Выделенный вход и выход немонотонного элемента, заменяющего инвертор, соединяем с теми вершинами схемы S, с которыми соединялись соответственно вход и выход этого инвертора. Нулевые и единичные входы всех немонотонных элементов, заменяющих инверторы, соединяем соответственно с выходами элементов E_0, E_1. Подсхему, включающую все элементы, кроме реализующих константы элементов E_0, E_1, обозначим через S' (S' — аналог исходной схемы S).

К полученной схеме добавим цепь из двух $\tilde{\gamma}$-схем G_1, G_2. Функциональные входы G_1 соединим с выходами E_0, E_1, а управляющий вход этой схемы соединим с выходом S'. Функциональные входы G_2 также соединим с выходами E_0, E_1, а управляющий вход — с выходом G_1. Если на функциональные входы $\tilde{\gamma}$-схем G_1, G_2 подаются различные константы, то на выходе G_2 будет реализована, очевидно, та же функция, которая подается на управляющий вход G_1. Выход G_2 объявим выходом всей полученной схемы S''. По построению S'' реализует заданную функцию f. Покажем, что T является полным проверяющим тестом для S''.

Предположим, что на всех наборах из T схема S'' выдает значения, совпадающие со значениями функции f на этих наборах. Из этого следует, что элементы E_0, E_1 реализуют различные константы, а $\tilde{\gamma}$-схемы G_1, G_2 исправны, поскольку при подаче одной и той же константы на оба функциональных входа $\tilde{\gamma}$-схемы на выходе этой схемы будет реализована константа, в то время как значения на выходе G_2 изменяются. Если E_0 выдает нуль, а E_1 — единицу, то каждый исправный немонотонный элемент в S' реализует инверсию переменной, подаваемой на выделенный вход, а каждая исправная $\tilde{\gamma}$-схема реализует конъюнкцию переменных, подаваемых на ее функциональные входы. В этом случае различимые функции неисправности у схем S, S' будут общими и T будет тестом для S'; с учетом сделанных предположений отсюда следует, что и на входных наборах, не вошедших в T, схема S'' будет выдавать «правильные» значения (совпадающие со значениями функции f на этих наборах).

Предположим теперь, что E_0 выдает единицу, а E_1 — нуль. В этом случае на управляющие входы всех $\tilde{\gamma}$-схем из S' будет подана константа $\bar{\sigma}$ и на выходе каждой исправной $\tilde{\gamma}$-схемы из S' будет реализована дизъюнкция переменных, подаваемых на функциональные входы. Если при этом все исправные немонотонные элементы реализуют одну из функций $0, 1, x$, то на выходе S' получим функцию g, реализуемую схемой над $\{0, 1, x \vee y\}$. Поскольку эта функция на наборах $\tilde{\alpha}^{1,i,0}$, $\tilde{\alpha}^{1,i,1}$ принимает разные значения, то она существенно зависит от x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Из леммы 10 получаем $g = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Но тогда $g(\tilde{\beta}^0) = 1$, а ранее предполагалось, что на входном наборе $\tilde{\beta}^0$ из T схема выдает нуль. Таким образом, последнее предположение относительно реализуемых немонотонными элементами функций приводит к противоречию.

Будем считать теперь, что все исправные немонотонные элементы из S' реализуют инверсии переменных, подаваемых на выделенные их входы, и в том случае, когда E_0 выдает единицу, а E_1 — нуль. Обозначим через S^* схему, двойственную к схеме S; разбиение схемы S^* на подсхемы и цепи определяется соответствующим разбиением схемы S. При сделанных предположениях исправные схемы S^* и S' реализуют одну и ту же двойственную к $f(\tilde{x})$ функцию — $\bar{f}(\tilde{\bar{x}})$, а множество различимых функций неисправности для обеих этих схем будет одним и тем же (поскольку при одинаковом характере неисправностей инверторов и дизъюнкторов из S^* и соответствующих им немонотонных элементов и $\tilde{\gamma}$-схем из S' на выходах схем S^*, S' будут реализованы одинаковые функции). Пусть неисправностям (если они есть) исходной схемы S' соответствуют аналогичные неисправности схемы S^*, так что на выходах этих схем реализуется одна и та же функция (быть может, отличная от $\bar{f}(\tilde{\bar{x}})$). Точно так же, как и в § 4, вначале устанавливаем, что в подсхеме S_1^* все элементы должны быть исправными.

На наборах $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$ из T подсхема S' (а значит и S^*) выдает различные значения; отсюда и из леммы 3 следует, что на этих наборах в схеме S^* функционирует некоторая цепь Z^* от n-го входа, соответствующего переменной x_n, до выхода схемы. Из построения S и S^* следует, что эта цепь Z^* проходит через подсхемы S_1^*, S_2^*, S_3^*, S_5^*, S_6^* (отрезок цепи Z^* из S_i^* будем обозначать через Z_i^*). Пусть δ — значение n-го разряда того из наборов $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta}'$, на котором S^* выдает единицу ($f(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \delta)=1$). Если Z^* функционирует на наборах $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta}'$, то на входы отрезков Z_5^* и Z_2^* этой цепи, соответствующие переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$, на указанных наборах должны подаваться нули; последнее возможно только в том случае, когда на эти входы подаются $x_1^{\overline{\beta}_1}, \ldots, x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}}$. Поскольку при переходе от $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \overline{\delta})$ к $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \delta)$ значение на выходе Z^* изменяется с нуля на единицу, то отсюда следует, что на вход отрезка Z_2^*, соответствующий переменной x_n, подается x_n^{δ}.

Цепи Z^* из S^* соответствует цепь Z в схеме S; на входы отрезков Z_5 и Z_2 этой цепи Z, соответствующие переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, подаются $x_1^{\overline{\beta}_1}, \ldots, x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}}$, x_n^{δ}. Из наличия такой цепи Z в S следует, что $f(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{n-1}, \delta)=1$. Отсюда и из условий $f(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \delta)=1$, $f(\widetilde{\beta})=\overline{f}(\widetilde{\beta}')$, $f(\widetilde{\beta})=f(\overline{\widetilde{\beta}})$ следует $\beta_n=\delta$ и $f(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{n-1}, \overline{\delta})=1$. Пусть j — номер конъюнкции $x_1^{\beta_1} \ldots x_m^{\beta_m}$ из B_2 в представлении (2); из наличия цепи Z в S следует, что приведенная д. н. ф. F_j содержит конъюнкцию $x_{m+1}^{\overline{\beta}_{m+1}} \ldots x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}} x_n^{\delta}$. Отсюда и из леммы 6 с учетом условия $f(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{n-1}, \overline{\delta})=1$ следует, что приведенная д. н. ф. F_j (а значит и множество D') содержит конъюнкцию $x_{m+1}^{\overline{\beta}_{m+1}} \ldots x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}} x_n^{\overline{\delta}}$. Но если множество D' содержит конъюнкцию $x_{m+1}^{\overline{\beta}_{m+1}} \ldots x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}} x_n^{\overline{\delta}}$, то подсхема S_2 (схемы S) содержит 1-цепь Z', реализующую отрицание конъюнкции $x_{m+1}^{\overline{\beta}_{m+1}} \ldots x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}} x_n^{\overline{\delta}'}$, а тест T содержит пару наборов $\widetilde{\alpha}^1=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \overline{\beta}_{m+1}, \ldots, \overline{\beta}_{n-1}, \overline{\delta})$ и $\widetilde{\alpha}^2=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \overline{\beta}_{m+1}, \ldots, \overline{\beta}_{n-1}, \delta)$ таких, что $f(\widetilde{\alpha}^1)=1$, $f(\widetilde{\alpha}^2)=0$. Из леммы 3 следует, что на наборах $\widetilde{\alpha}^1$, $\widetilde{\alpha}^2$ в схеме S^* функционирует некоторая цепь Z^{*1} от n-го входа схемы до ее выхода; по построению Z^{*1} проходит через подсхемы S_1^*, S_2^*, S_3^*, S_5^*, S_6^*. Поскольку значение на выходе Z^{*1} изменяется с нуля на единицу при переходе от $\widetilde{\alpha}^2$ к $\widetilde{\alpha}^1$, то из этого (с учетом леммы 1) следует, что на входы отрезков Z^{*1} и Z_2^{*1} этой цепи, соответствующие переменным $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$, подаются $x_1^{\overline{\alpha}_1}, \ldots, x_m^{\overline{\alpha}_m}$, $x_{m+1}^{\beta_{m+1}}, \ldots, x_{n-1}^{\beta_{n-1}}$, $x_n^{\overline{\delta}}$.

Цепи Z^{*1} из S^* соответствует цепь Z^1 в схеме S; на входы отрезка Z_2^1 этой цепи Z^1, соответствующие переменным $x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$, подаются $x_{m+1}^{\beta_{m+1}}, \ldots, x_{n-1}^{\beta_{n-1}}$, x_n^{δ}. Отсюда следует, что D' содержит конъюнкцию $x_{m+1}^{\beta_{m+1}} \ldots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} x_n^{\overline{\delta}}$, а тест T содержит пару наборов $\widetilde{\alpha}^3=(\alpha_1', \ldots, \alpha_m', \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{n-1}, \overline{\delta})$, $\widetilde{\alpha}^4=(\alpha_1', \ldots, \alpha_m', \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{n-1}, \delta)$ таких, что $f(\widetilde{\alpha}^3)=1$, $f(\widetilde{\alpha}^4)=0$. Из леммы 3 следует, что на наборах $\widetilde{\alpha}^3$, $\widetilde{\alpha}^4$ в схеме S^* функционирует некоторая цепь Z^{*2} от n-го входа схемы до ее выхода; далее получаем, что на входы отрезка Z_2^{*2} (из S_2^*) этой цепи, соответствующие переменным $x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$, подаются $x_{m+1}^{\overline{\beta}_{m+1}}, \ldots, x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}}$, $x_n^{\overline{\delta}}$. Поскольку приведенная д. н. ф. F_j содержит конъюнкции $x_{m+1}^{\overline{\beta}_{m+1}} \& \ldots \& x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}} x_n^{\delta}$ и $x_{m+1}^{\overline{\beta}_{m+1}} \ldots x_{n-1}^{\overline{\beta}_{n-1}} x_n^{\overline{\delta}}$, а по построению этим конъюнкциям приписаны наименьшие номера, то в итоге получаем, что входы верхнего элемента (дизъюнктора) E из отрезка Z_3^* соединены с выходами отрезков Z_2^* и Z_2^{*2}, причем все элементы из этих отрезков исправны, а Z_3^* функционирует на наборах $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$. Но на каждом из наборов $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$ либо Z_2^*, либо Z_2^{*2} будет выдавать единицу и поэтому значение на выходе дизъюнктора E не может изменяться при переходе от $\tilde{\beta}$ к $\tilde{\beta}'$. Получаем противоречие.

Таким образом, если E_0 выдает единицу, а E_1 — нуль, то схема хотя бы на одном наборе из T выдает значение, отличное от значения заданной функции f на этом наборе. Значит, в рассматриваемом случае T является полным проверяющим тестом для S''.

II. Будем считать здесь $n > 3$; для $n \leqslant 3$ утверждение теоремы, очевидно, справедливо. С учетом самодвойственности функции f представим ее в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 f_1(x_2, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_1 \bar{f}_1(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n), \tag{3}$$

где $f_1(x_2, \ldots, x_n) = f(1, x_2, \ldots x_n)$; будем считать, что функция f_1 не является дизъюнкцией переменных (если $f(1, x_2, \ldots, x_n) = x_2 \vee \ldots \vee x_n$, то $f(x_1, \ldots, x_n)$ разложим по x_2). Способом, указанным в § 4, построим схему S над базисом $\{\bar{x}, x \& y\}$, реализующую функцию $f_1(x_2, \ldots, x_n)$, и тест T для этой схемы, содержащий не более чем $2(2^{[(n-1)/2]} + 2^{](n-1)/2[} + n - 1)$ наборов; не изменяя оценки для длины теста T, можно считать (как это уже делалось ранее), что T содержит набор $\tilde{\beta}^0$ такой, что $f_1(\tilde{\beta}^0) = 0$, $\tilde{\beta}^0 \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Введем вспомогательную схему над $\{\bar{x}, x \& y, x \vee y\}$ — сумматор (одноразрядный). Сумматор имеет два входа — левый и правый и содержит четыре элемента. Первый и второй элементы сумматора — соответственно дизъюнктор и конъюнктор; входы этих элементов соединены со входами сумматора. Третий элемент — инвертор; вход его соединен с выходом второго элемента (конъюнктора). Четвертый элемент — конъюнктор; входы его соединены с выходами первого и третьего элементов. Выход четвертого элемента является выходом сумматора. При подаче на входы сумматора переменных x, y на выходе его реализуется $(x \vee y) \& \overline{(x \& y)} = x\bar{y} \vee \bar{x}y$. Отметим, что при подаче на левый вход сумматора константы в нем может функционировать единственная цепь от правого входа до выхода, содержащая либо первый и четвертый элементы, если на левый вход подается нуль, либо второй, третий и четвертый элементы, если на левый вход подается единица.

Двойственную к сумматору схему (получающуюся из сумматора заменой дизъюнктора конъюнктором, а конъюнкторов дизъюнкторами) будем называть двойственным сумматором. Двойственный сумматор реализует функцию $xy \vee \bar{x}\bar{y}$; при подаче на левый его вход константы 0 (или 1) в нем может функционировать единственная цепь от правого входа до выхода, содержащая 2-й, 3-й и 4-й (соответственно 1-й и 4-й) элементы.

К схеме S добавим n двойственных сумматоров $R_1, \ldots, R_n$ (рис. 3), левые входы которых объединим и объявим 1-м входом полученной схемы, соответствующим переменной x_1. Правый вход первого двойственного сумматора R_1 соединим с выходом S, а правые входы $R_2, \ldots, R_n$ соединим со 2-м, ..., n-м входами схемы, соответствующими переменным $x_2, \ldots, x_n$. Вход схемы S, соответствующий переменной x_i, соединим с выходом R_i $(i = 2, \ldots, n)$. Полученная схема $\mathscr{H}$ в соответствии с представлением (3) реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Далее эту схему «достраиваем» и заменяем в ней элементы аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае I.

К $\mathscr{H}$ добавим два элемента E_0, E_1, из $\mathscr{B}'$, реализующие соответственно константы 0 и 1. Все двухвходовые элементы в $\mathscr{H}$ заменим $\tilde{\gamma}$-схемами. Функциональные входы и выход $\tilde{\gamma}$-схемы, заменяющей элемент, соединяем с теми вершинами схемы $\mathscr{H}$, с которыми соединялись соответственно входы и выход этого элемента. Управляющие входы $\tilde{\gamma}$-схем, заменяющих конъюнкторы (дизъюнкторы), соединяем с выходом элемента E_σ (соответственно $E_{\bar{\sigma}}$). Как и в предыдущем случае все инверторы в схеме $\mathscr{H}$ заменим одинаковыми немонотонными элементами и к полученной схеме добавим цепь из двух $\tilde{\gamma}$-схем G_1, G_2; управляющий вход верхней $\tilde{\gamma}$-схемы G_1 соединим с выходом подсхемы $\mathscr{H}_1$ — аналога схемы $\mathscr{H}$ ($\mathscr{H}_1$ содержит все элементы построенной схемы, кроме E_0, E_1 и элементов из G_1, G_2). Выход G_2 будет выходом всей полученной схемы $\mathscr{H}_2$, реализующей по построению f.

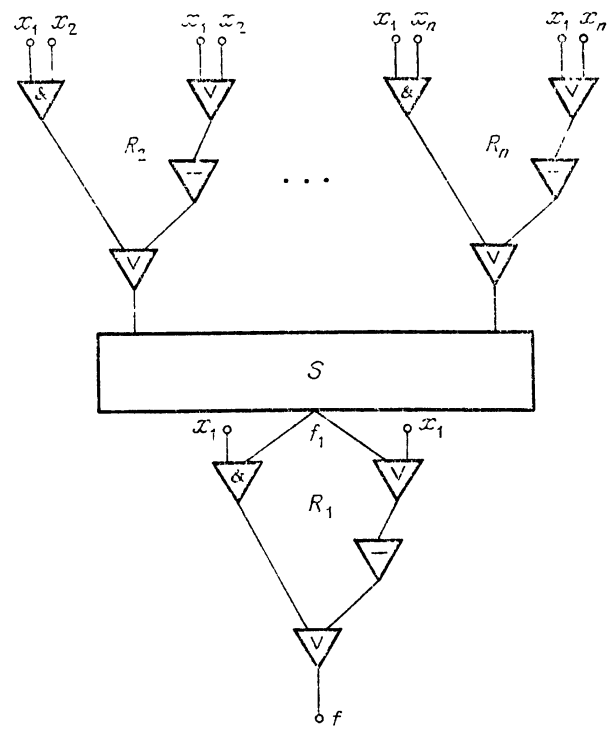

Рис. 3

Построим теперь тест для $\mathscr{H}_2$. К каждому набору из T добавим слева единичный разряд (соответствующий переменной x_1); полученное множество наборов обозначим через T_1. В T выделим $n-1$ пар наборов, соответствующих первой подсхеме схемы S; i-ю пару ($i = 1, \ldots, n-1$) составляют наборы $\tilde{\alpha}^{1,i,0}$, $\tilde{\alpha}^{1,i,1}$, отличающиеся друг от друга в одном лишь i-м разряде, а функция $f_1(x_2, \ldots, x_n)$ на этих наборах принимает разные значения. К каждому выделенному набору добавим слева нулевой разряд; $2(n-1)$ полученных таким путем n-разрядных наборов добавим к T_1. Полученное множество наборов обозначим через T_2. Общее число наборов в T_2, как нетрудно убедиться, не превосходит $2(2^{[n/2]} + 2^{]n/2[} + n)$. Покажем, что T_2 является полным проверяющим тестом для $\mathscr{H}_2$.

Предположим, что на всех наборах из T_2 схема $\mathscr{H}_2$ выдает значения, совпадающие со значениями функции f на этих наборах. Из этого следует (как и в случае I), что элементы E_0, E_1 реализуют различные константы, а $\tilde{\gamma}$-схемы G_1, G_2 исправны.

Если E_0 выдает нуль, а E_1 — единицу, то каждый исправный немонотонный элемент в $\mathscr{H}_1$ реализует инверсию переменной, подаваемой на выделенный вход, а каждая исправная $\tilde{\gamma}$-схема реализует конъюнкцию или дизъюнкцию переменных, подаваемых на ее функциональные входы. При этом различимые функции неисправности у схем $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ будут общими. Если схема $\mathscr{H}$ на наборах $(0, \tilde{\alpha}^{1,i,0})$, $(0, \tilde{\alpha}^{1,i,1})$ (и на наборах $(1, \tilde{\alpha}^{1,i,0})$ $(1, \tilde{\alpha}^{1,i,1})$) выдает разные значения, то из леммы 3 и способа построения $\mathscr{H}$ следует, что в 1-м и в $(i+1)$-м двойственных сумматорах функционируют одинаковые цепи, каждая из которых содержит 2-й, 3-й и 4-й (соответственно 1-й и 4-й) элементы сумматора ($i = 1, \ldots, n-1$).

Но если все двойственные сумматоры исправны, то при подаче на входы схемы $\mathscr{H}$ наборов из T_1 на входы подсхемы S будут подаваться наборы из T, а значения на выходах S и $\mathscr{H}$ будут совпадать. Поскольку же T является полным проверяющим тестом для S, то T_2 будет полным проверяющим тестом для $\mathscr{H}$. Значит, схема $\mathscr{H}_1$ (а с нею и $\mathscr{H}_2$) при сделанных предположениях и на входных наборах, не вошедших в T_2, будет выдавать правильные значения.

Предположим теперь, что E_0 выдает единицу, а E_1 — нуль. На выходах всех исправных $\widetilde{\gamma}$-схем, заменяющих конъюнкторы из S, $R_1, \ldots, R_n$ (дизъюнкторы из $R_1, \ldots, R_n$), при этом будут реализованы дизъюнкции (соответственно конъюнкции) переменных, подаваемых на функциональные входы. Поскольку любая функционирующая на наборах $(1, \widetilde{\alpha}^{1, i, 0})$, $(1, \widetilde{\alpha}^{1, i, 1})$, $i = 1, \ldots, n-1$, цепь от входа до выхода схемы проходит через немонотонные элементы из R_1, R_{i+1}, то эти элементы исправны и реализуют либо x, либо $\bar{x}$. Допустим, что немонотонные элементы реализуют функцию x. В этом случае при $x_1 = 1$ (т. е. на наборах из T_1) на входы S' — аналога схемы S подаются переменные $x_2, \ldots, x_n$ и эта схема S' в соответствии с леммой 10 должна реализовать $x_2 \vee \ldots \vee x_n$, т. е. выдавать на наборе $\widetilde{\beta}^0$ единицу. Но тогда (при сделанных предположениях) и схема $\mathscr{H}_2$ должна выдавать на наборе $(1, \widetilde{\beta}^0)$ единицу, в то время как она выдает на этом наборе нуль. Получаем противоречие. Остается допустить только, что немонотонные элементы реализуют функцию $\bar{x}$.

Обозначим через $\mathscr{H}^*$ схему, двойственную к $\mathscr{H}$; $\mathscr{H}^*$ содержит двойственную к S подсхему S^* и сумматоры $R_1^*, \ldots, R_n^*$ (двойственные к $R_1, \ldots, R_n$). При отсутствии неисправностей на выходах $\widetilde{\gamma}$-схем и немонотонных элементов из $\mathscr{H}_1$ реализуются те же функции, что и на выходах соответствующих им элементов из $\mathscr{H}^*$; в силу самодвойственности функции f при сделанных предположениях эта функция и будет реализована на выходах $\mathscr{H}^*$, $\mathscr{H}_1$, а значит и $\mathscr{H}_2$. Различимые функции неисправности у схем $\mathscr{H}^*$ и $\mathscr{H}_1$ в данном случае также будут общими. Предположим, что $\mathscr{H}^*$ на входных наборах из T_2 выдает правильные значения. Поскольку эти значения различны на наборах $(0, \widetilde{\alpha}^{1, i, 0})$, $(0, \widetilde{\alpha}^{1, i, 1})$ (и на наборах $(1, \widetilde{\alpha}^{1, i, 0})$, $(1, \widetilde{\alpha}^{1, i, 1})$), то из леммы 3 и способа построения $\mathscr{H}^*$ следует, что в 1-м, $(i+1)$-м сумматорах функционируют цепи, каждая из которых содержит 1-й и 4-й (соответственно 2-й, 3-й и 4-й) элементы ($i = 1, \ldots, n-1$). Но если все сумматоры исправны, то при подаче на входы схемы $\mathscr{H}^*$ наборов из T_1 на входы подсхемы S^* подаются наборы из $T^* = \{\widetilde{\widetilde{\alpha}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{\alpha}}_l\}$, где $\{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_l\} = T$, и на любом входном наборе $(1, \widetilde{\alpha})$ из T_1 на выходах S^* и $\mathscr{H}^*$ выдаются соответственно значения $\bar{f}(1, \widetilde{\alpha})$ и $f(1, \widetilde{\alpha})$.

По лемме 8 T^* является полным проверяющим тестом для S^*, следовательно, если на наборах из T^* схема S^* выдает правильные значения, то и на всех остальных своих входных наборах эта схема (а вместе с ней и схема $\mathscr{H}^*$) будет выдавать правильные значения. Отсюда следует, что в данном случае и схема $\mathscr{H}_1$ будет выдавать правильные значения на всех входных наборах.

В итоге получаем, что T_2 является полным проверяющим тестом для $\mathscr{H}_2$. Утверждение теоремы для рассматриваемого в данном параграфе базиса доказано.

§ 10. Схемы над произвольным базисом

Булеву функцию $xy \oplus xz \oplus yz \oplus \gamma_1 x \oplus \gamma_2 y \oplus \gamma_3 z \oplus \gamma_4$, где $\gamma_1, \ldots, \gamma_4 \in \{0, 1\}$, будем называть *особенной*.

Лемма 11. *Из всякой нелинейной и неособенной функции от трех или более переменных отождествлением переменных можно получить либо нелинейную функцию от двух переменных, либо особенную функцию.*

Доказательство. Покажем, что у всякой нелинейной и неособенной функции φ от трех или более переменных можно отождествить по крайней мере две переменные и получить нелинейную функцию (если это так, то последовательно отождествляя переменные, очевидно, получим требуемую функцию).

Представим φ полиномом Жегалкина; в силу нелинейности φ в полиноме найдется член, содержащий не менее двух множителей, скажем, x и y. Тогда φ можно представить в виде $\varphi = xy\varphi_1 \oplus x\varphi_2 \oplus y\varphi_3 \oplus \varphi_4$, где полиномы $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ не зависят от x, y, а $\varphi \not\equiv 0$ — в силу единственности полинома, представляющего φ. Заметим также, что верно и обратное утверждение: всякое выражение вида $xy\psi_1 \oplus x\psi_2 \oplus y\psi_3 \oplus \psi_4$, где $\psi_1, \ldots, \psi_4$ не зависят от x, y и $\psi_1 \not\equiv 0$, задает нелинейную функцию (чтобы убедиться в этом, достаточно вместо всех переменных, кроме x и y, подставить те их значения, при которых ψ_1 обращается в единицу). Нелинейную функцию, очевидно, задает также выражение вида $x\psi_1 \oplus \psi_2$, где функции ψ_1, ψ_2 не зависят от x и ψ_1 не является константой. Условимся считать переменные x, y главными, а остальные переменные функции φ — дополнительными.

Предположим $\varphi_1 \equiv 1$. Если дополнительных переменных не менее двух, то при отождествлении их получим нелинейную функцию. Допустим φ зависит от трех переменных. Поскольку φ — неособенная функция, то обе функции φ_2, φ_3 не могут одновременно зависеть от дополнительной переменной z. Значит, одна из этих функций, скажем, φ_2, является константой. Отождествляя в этом случае переменные y, z, получим нелинейную функцию от двух переменных.

Будем считать далее $\varphi_1 \not\equiv 1$; отсюда и из начального условия ($\varphi_1 \not\equiv 0$) следует, что φ_1 не является константой. Обозначим через k число переменных функции φ и рассмотрим следующие три случая: I. $k = 3$; II. $k > 4$; III. $k = 4$.

I. Функции φ_1, φ_2, φ_3 представим в виде полиномов: $\varphi_1 = z \oplus \beta_1$, $\varphi_2 = \beta_2 z \oplus \beta_3$, $\varphi_3 = \beta_4 z \oplus \beta_5$, где $\beta_1, \ldots, \beta_5 \in \{0, 1\}$. Чтобы получить вместо φ нелинейную функцию от двух переменных, достаточно производить отождествление следующим образом. При $\beta_1 = 0$ отождествлять: x и y при $\beta_2 = \beta_4$; y и z при $\beta_2 = 0$, $\beta_4 = 1$; x и z при $\beta_2 = 1$, $\beta_4 = 0$. При $\beta_1 = 1$ отождествлять: x и y при $\beta_2 = \beta_4$; x и z при $\beta_2 = 0$, $\beta_4 = 1$; y и z при $\beta_2 = 1$, $\beta_4 = 0$.

II. Поскольку $\varphi_1 \not\equiv 0$, то в этом случае найдется такой набор значений дополнительных переменных, на котором функция φ_1 обращается в единицу, а какие-нибудь две дополнительные переменные принимают одно и то же значение; отождествляя две эти переменные, получим нелинейную функцию.

III. Обозначим через φ_0 функцию, получающуюся из φ_1 отождествлением дополнительных переменных. Если $\varphi_0 \not\equiv 0$, то отождествим эти переменные и получим нелинейную функцию.

Считаем далее $\varphi_0 \equiv 0$. Из этого условия следует, что среди слагаемых полинома φ_1 отсутствует единица, а число слагаемых — четное. Значит, в φ_1 могут входить только слагаемые вида z, u, zu и $\varphi_1 \in P$, где z, u — дополнительные переменные, а $P = \{z \oplus u,\ zu \oplus z,\ zu \oplus u\}$.

Допустим, что хотя бы один из полиномов φ_2, φ_3 не зависит хотя бы от одной из дополнительных переменных; не умаляя общности, положим, что φ_2 не зависит от z (другие возможные варианты сводятся к рассматриваемому переименованием переменных). Если $\varphi_1 \in \{z \oplus u,\ zu \oplus z\}$, то отождествим переменные y, z и получим нелинейную функцию $xy(u \oplus 1) \oplus x\varphi_2 \oplus y\varphi_3' \oplus \varphi_4'$ (φ_2, φ_3', φ_4' не зависят от x, y). Пусть теперь $\varphi_1 = zu \oplus u$. Если φ_2 — константа, то отождествим переменные y, u и получим нелинейную функцию $xy(z \oplus 1) \oplus x\varphi_2 \oplus y\varphi_3'' \oplus \varphi_4''$ (φ_2, φ_3'', φ_4'' не зависят от x, y). Если же φ_2 существенно зависит от u, то отождествим переменные y, z и получим нелинейную функцию $x\varphi_2 \oplus y\varphi_3' \oplus \varphi_4'$.

Считаем далее, что каждый из полиномов φ_2, φ_3 существенно зависит от обеих дополнительных переменных. Полиномы φ_2, φ_3 представим в виде $\varphi_2 = \psi_1 \oplus \beta_1$, $\varphi_3 = \psi_2 \oplus \beta_2$, где β_1, β_2 — константы, а ψ_1, ψ_2 — полиномы, все слагаемые которых содержат дополнительные переменные. Если хотя бы один из полиномов, скажем ψ_1, содержит нечетное число слагаемых, то отождествим дополнительные переменные и получим $\varphi = x\psi_1' \oplus \varphi_4'$, где функции ψ_1', φ_4' не зависят от x и ψ_1' не является константой.

Предположим теперь, что каждый полином ψ_1, ψ_2 содержит четное число слагаемых, т. е. $\psi_1, \psi_2 \in P$. Если среди полиномов φ_1, ψ_1, ψ_2 имеются хотя бы два одинаковых, то при отождествлении переменных x, y получим $\varphi = x\varphi_1' \oplus \varphi_4'$, где φ_1', φ_4' не зависят от x и φ_1' не является константой. Предположим, что полиномы φ_1, ψ_1, ψ_2 попарно различны. Рассмотрим два возможных выбора этих полиномов из множества P: $\varphi_1 = z \oplus u$, $\psi_1 = zu \oplus z$, $\psi_2 = zu \oplus u$ и $\varphi_1 = zu \oplus z$, $\psi_1 = z \oplus u$, $\psi_2 = zu \oplus u$ (другие выборы сводятся к одному из указанных переименованием переменных). При первом выборе полиномов $\varphi = xy(z \oplus u) \oplus x(zu \oplus z \oplus \beta_1) \oplus y(zu \oplus u \oplus \beta_2) \oplus \varphi_4$, а при втором $\varphi = xy(zu \oplus z) \oplus x(z \oplus u \oplus \beta_1) \oplus y(zu \oplus u \oplus \beta_2) \oplus \varphi_4$; в обоих случаях после отождествления переменных x, z получим $\varphi = xy \oplus x(u \oplus \beta_1') \oplus y(u \oplus \beta_2) \oplus \varphi_4'$, где φ_4' от x, y не зависит. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольный полный конечный базис. Согласно лемме 11 максимальное расширение этого базиса содержит либо нелинейную функцию от двух переменных, либо особенную функцию. Следовательно, схему для заданной функции f и полный проверяющий тест для нее, удовлетворяющий требованию теоремы, можно построить описанным в предыдущих параграфах способом. Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. Об одном классе схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 7.— М.: Физматгиз, 1962.— С. 61—114.
2. Основы технической диагностики/Под ред. П. П. Пархоменко.— М.: Энергия, 1976.
3. Чегис И. Я., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИ АН СССР, 1958.— Т. 51.— С. 270—360.
4. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1979.