

**Н. А. Шкаликова**

**О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов**

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:**  
Шкаликова Н. А. О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. – М.: Наука, 1989. – С. 177–197. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1989-177>

## О РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ ИЗ КЛЕТОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Н. А. ШКАЛИКОВА*

(МОСКВА)

### Введение

В данной работе рассматриваются схемы из функциональных элементов специального вида. Определение схемы из функциональных элементов, определение сложности схемы и определение функции Шеннона можно найти в [4]. Кратко можно сказать, что сложность схемы — это неотрицательное действительное число, являющееся характеристикой схемы, а функция Шеннона — это минимальная сложность, достаточная для реализации любой булевой функции от  $n$  переменных. Асимптотическое поведение функции Шеннона для схем из функциональных элементов было установлено О. Б. Лупановым достаточно давно [5]. Позднее стали рассматриваться схемы с ограничениями, наложенными на некоторые их характеристики. Так, например, получены оценки сложности схем, имеющих ограниченную ширину [7], ограниченное число чередований типов элементов в цепях («глубину») [6], ограниченное число выходов у каждого внутреннего элемента [4].

Растущие возможности реализации сложных вычислительных структур вызвали большой интерес к изучению схем из функциональных элементов, в оценке сложности которых учитываются размеры и расположение элементов, узлов и каналов связи. Первыми существенными результатами в изучении схем из функциональных элементов, имеющих пространственные характеристики, являются работы А. Д. Коршунова [2] и С. С. Кравцова [3].

В работе А. Д. Коршунова рассматривается задача синтеза схем из функциональных элементов при некоторых ограничениях на длину проводников, соединяющих функциональные элементы.

В работе С. С. Кравцова [3] вводятся схемы из так называемых клеточных функциональных элементов. Элементы (три функциональных и три коммутационных) имеют форму единичного квадрата. Функциональные элементы реализуют булевы функции, а коммутационные осуществляют соединения функциональных. Сложностью схемы называется число входящих в нее элементов. С. С. Кравцов показал, что для любой булевой функции можно построить реализующую ее плоскую схему и установил, что соответствующая функция Шеннона имеет порядок  $2^n$ .

Изучением схем из клеточных элементов занимался также А. Альбрехт. В работе [9] им исследуется вопрос о соотношении числа функциональных и коммутационных элементов в клеточных схемах.

В данной работе кроме клеточных схем будут рассматриваться объемные схемы (кубические). Определение объемных схем аналогично

определению клеточных. В первой и третьей главах работы приводятся точные по порядку оценки сложности реализации некоторых конкретных функций, а также систем функций схемами из клеточных элементов. Вторая глава носит вспомогательный характер. В ней вводятся некоторые вспомогательные понятия и доказываются две важные леммы о передаче информации в обычных схемах из функциональных элементов. В четвертой главе устанавливается соотношение сложностей клеточных и кубических схем, реализующих один и тот же набор функций.

Г Л А В А I  
О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ  
БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПЛОСКИМИ СХЕМАМИ

В этой главе рассматриваются схемы из так называемых клеточных функциональных элементов (см. [3]).

Допустимые типы элементов изображены на рис. 1 (в верхнем ряду — функциональные, в нижнем ряду — коммутационные).

Каждый элемент имеет форму единичного квадрата. Каждому функциональному элементу ставятся в соответствие «обычные» функцио-

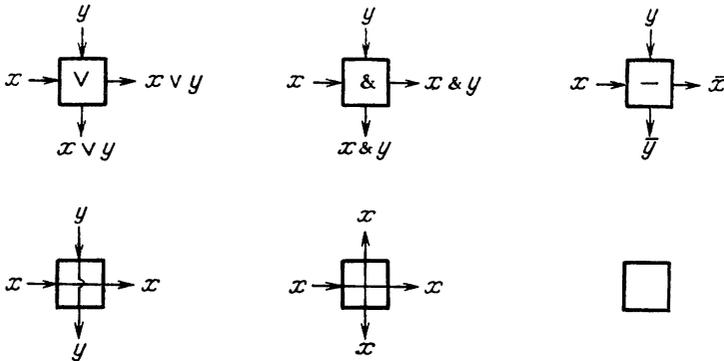


Рис. 1

нальные элементы, рассматриваемые, например, в работе [4]. Это соответствие приведено на рис. 2.

Первые два коммутационных элемента (см. рис. 1) используются для соединения функциональных элементов и физически являются проводниками электрического тока. На третий коммутационный элемент

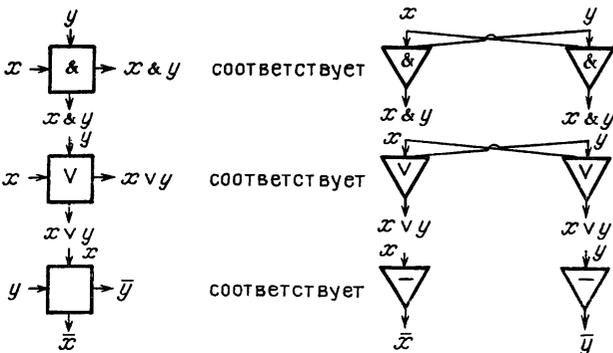


Рис. 2

могут подаваться как входы любого другого элемента, так и выходы. Физически этот элемент служит изолятором электрического тока. Прямоугольник, составленный из таких элементов (каждый элемент может быть повернут на плоскости) будем называть схемой, если при замене функциональных элементов (рис. 1) на элементы в соответствии с рис. 2 и при соединении

их, определяемом коммутационными элементами, получим некоторую структуру из обычных функциональных элементов, удовлетворяющую определению схемы из функциональных элементов, данному в работе [4].

Входы и выходы схемы расположены на периметре прямоугольника. Длину и ширину схемы будем называть ее параметрами. На рисунках длину схемы будем изображать горизонтально, а ширину вертикально. Сложностью схемы будем называть ее площадь (число входящих в нее элементов). Будем также называть такие схемы *плоскими* или *схемами размерности 2*.

В работе С. С. Кравцова [3] показано, что для любой булевой функции можно построить реализующую ее плоскую схему и установлено, что порядок соответствующей функции Шеннона равен  $2^n$ .

В данной главе приводятся точные по порядку оценки сложности схем для некоторых конкретных систем функций.

## § 1. Дешифратор и система всех функций от $n$ переменных

Обозначим через  $K(n)$  минимальное число элементов, достаточное для построения схемы, реализующей систему  $K_n$  всех конъюнкций  $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$ . Обычно такую схему называют дешифратором. С. С. Кравцовым в [3] построена схема, реализующая систему  $K_n$ , имеющая сложность по порядку не более  $n2^n$ .

Геометрически эта схема имеет вид, изображенный на рис. 3. Все входы расположены на левой стороне схемы, а все выходы на нижней стороне.

Докажем, что эта схема по порядку минимальна, т. е. имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.**  $K(n) \asymp n2^n$ .

**Доказательство.** Верхняя оценка получена Кравцовым С. С. [3]. Нижняя оценка. Рассмотрим произвольную схему  $R$ , реализующую  $K_n$ . Очевидно, в схеме  $R$  имеется некоторая сторона  $h$ , на которой расположено по крайней мере  $n/4$  входов. Аналогично, в  $R$  имеется некоторая сторона  $r$ , на которой расположено по крайней мере  $2^n/n$  выходов.

Если стороны  $h$  и  $r$  перпендикулярны, то утверждение очевидно.

Пусть стороны  $h$  и  $r$  параллельны или совпадают. В этом случае расsection схему отрезком прямой  $d$ , перпендикулярным стороне  $h$ , на две подсхемы I и II так, чтобы по обе стороны отрезка было не менее  $n/8 - 1$  входов. Покажем, что ширина схемы (т. е. количество элементов по отрезку  $d$ ) имеет порядок  $n$ ; тем самым утверждение будет доказано.

Действительно, пусть для определенности в подсхеме II имеется не менее выходов, чем в подсхеме I.

Так как в подсхеме I имеется не менее  $n/8 - 1$  входов, то в подсхеме II их не более  $(7/8)n + 1$ .

Очевидно, что, подавая на входы схемы  $2^n$  различных наборов длины  $n$ , на выходах будем получать  $2^n$  различных наборов длины  $2^n$ , каждый из которых состоит из единицы в одном из разрядов и  $2^n - 1$  нулей.

Выделим произвольные  $2^{n-1}$  выходов схемы, расположенных в подсхеме II. Очевидно, что среди  $2^n$  различных выходных наборов  $2^{n-1}$  наборов имеют единицу в разряде, соответствующем одному из выделенных выходов схемы.

Рассмотрим подсхему II. Из сказанного выше следует, что среди всех выходных наборов подсхемы II найдется не менее  $2^{n-1}$  различных (содержащих единицу в одном из разрядов, соответствующих выделен-

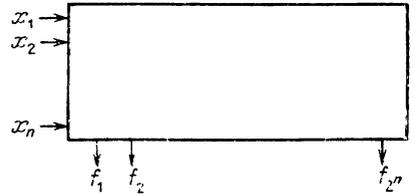


Рис. 3

ным выходам). Поэтому и среди входных наборов подсхемы II должно быть также не менее  $2^{n-1}$  различных наборов, так как различные выходные наборы могут быть получены только при различных входных. Из сказанного следует, что входные наборы подсхемы II должны состоять не менее, чем из  $n - 1$  разрядов, а это значит, что количество входов подсхемы II не меньше чем  $n - 1$ . Далее, из того, что подсхема II содержит не более  $(7/8)n + 1$  входов всей схемы, следует, что по крайней мере  $n/8 - 2$  входов подсхемы II расположены на отрезке  $d$ , т. е. отрезок  $d$  имеет длину не менее, чем  $n/8 - 2$ . Тем самым теорема доказана.

Обозначим через  $U(n)$  минимальное количество элементов, достаточное для построения схемы, реализующей одновременно все функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Теорема 2.**  $U(n) \asymp n2^{2^n}$ .

**Доказательство.** Верхняя оценка. Как известно, все наборы из нулей и единиц фиксированной длины можно упорядочить таким образом, чтобы соседние наборы отличались ровно в одном разряде (код

Грея [1, стр. 129]). Занумеруем конъюнкции  $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$  каким-нибудь образом. Представим все функции от  $n$  переменных в совершенной дизъюнктивной нормальной форме. В соответствии с кодом Грея упорядочим функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  так, чтобы любые две соседние функции отличались друг от друга только одной конъюнкцией.

Предлагаемая схема будет состоять из  $2^{2^n}$  подсхем. В каждой подсхеме реализуется некоторая конъюнкция и «прибавление» или «вычитание» ее из функции, полученной на предыдущем шаге (см. рис. 4). Очевидно, что сложность схемы по порядку не больше, чем  $n2^{2^n}$ .

**Нижняя оценка.** Доказательство аналогично доказательству

нижней оценки в теореме 1. Рассмотрим произвольную схему  $R$ , реализующую систему всех функций от  $n$  переменных. Очевидно, в  $R$  имеется некоторая сторона  $h$ , на которой расположено по крайней мере  $2^{2^n}/4$  выходов. Аналогично в  $R$  имеется некоторая сторона  $r$ , на которой расположено по крайней мере  $n/4$  входов. Если стороны  $h$  и  $r$  перпендикулярны, то утверждение очевидно.

Пусть стороны  $h$  и  $r$  параллельны или совпадают. В этом случае рассечем схему отрезком прямой  $d$ , перпендикулярным стороне  $h$ , на подсхемы I и II так, чтобы по обе стороны от отрезка было не менее  $n/8 - 1$  входов. Пусть для определенности в подсхеме II имеется не менее выходов, чем в подсхеме I, т. е. на выходах подсхемы II, реализуется не менее чем  $2^{2^n-1}$  различных функций. Легко показать, что для того, чтобы схема реализовала  $2^{2^n-1}$  различных функций необходимо, чтобы количество входов у схемы было не меньше, чем  $t = \log_2(2^n - 1)$  ( $t$  находится из уравнения  $2^{2^n-1} = 2^{2^t}$ ). То есть, так же как и в доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что подсхема II имеет не менее, чем  $n - 1$  входов, откуда следует, что отрезок  $d$  содержит не менее  $n/8 - 2$  входов для подсхемы II. Таким образом теорема доказана.

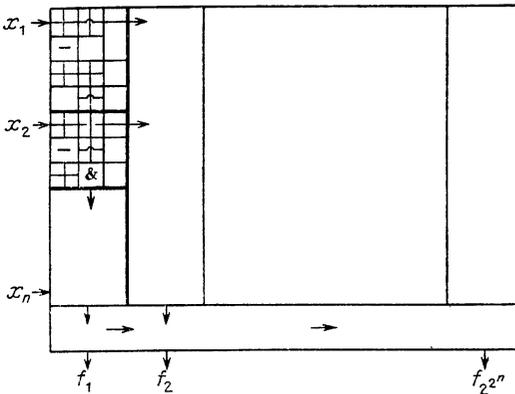


Рис. 4

§ 2. Схема умножения двух  $n$ -разрядных чисел

Описанным выше методом рассечения схемы можно легко показать, что сложность схемы, реализующей умножение двух  $n$ -разрядных чисел, при некоторых «естественных» расположениях входов и выходов не может быть по порядку меньше  $n^2$ .

Верхняя оценка легко доказывается построением конкретной схемы, с использованием «школьного» алгоритма умножения. На рис. 5 показан принцип построения такой схемы. (Набор, соответствующий первому числу, «проходит» через схему сверху вниз, а набор, соответствующий второму числу, «проходит» через схему слева направо. На пересечениях осуществляется умножение, и полученные результаты складываются со сдвигом.)

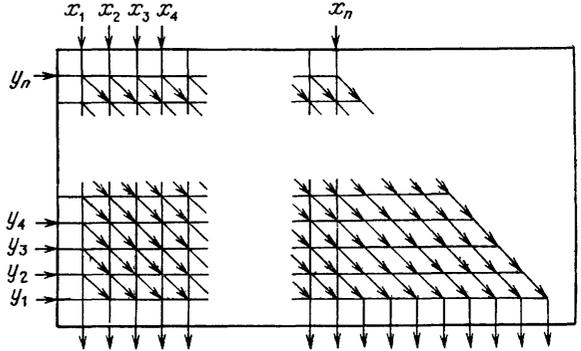


Рис. 5

В этом параграфе будет доказано, что нижняя оценка

(по порядку  $n^2$ ) справедлива для любого расположения входов и выходов.

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Пару натуральных чисел ( $\theta$  также считаем натуральным числом)  $(p, q)$ , где  $q = p + d, d \geq 0$ , будем называть  $d$ -связью.

Пусть  $A$  и  $B$  — два множества натуральных чисел.

Обозначим через  $S(d, A, B)$  число  $d$ -связей таких, что  $p \in A, q \in B$ .

Лемма 1. Пусть \*)  $A \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n-1\}; B \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 2n-2\}; |A| = a; |B| = n-1$ . Тогда найдется такое  $d$  ( $0 \leq d \leq n-1$ ), что

$$S(d, A, B) \geq (a-1)^2/8n.$$

Доказательство. Пусть  $0 \leq q \leq 2n-2$ . Обозначим через  $v(q)$  число  $d$ -связей  $(p, q)$  таких, что  $p \in A, 0 \leq d \leq n-1$ . Из определения

$v(q)$  следует, что  $\sum_{d=0}^{n-1} S(d, A, B) =$

$$= \sum_{q \in B} v(q).$$

Очевидно, что для доказательства леммы достаточно показать, что  $\sum_{q \in B} v(q) \geq (a-1)^2/8$ .

Обозначим через  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_a$  элементы множества  $A$  в порядке возрастания.

Разобьем множество  $\{0, 1, 2, \dots, n-2, n, \dots, 2n-2\}$  на подмножества  $\mathfrak{M}^1(i), \mathfrak{M}^2(i)$  ( $0 \leq i \leq a$ ) следующим образом (см. рис. 6):

$$q \in \mathfrak{M}^1(i), \text{ если } v(q) = i \text{ и } q \in [0, n-2],$$

$$q \in \mathfrak{M}^2(i), \text{ если } v(q) = i \text{ и } q \in [n, 2n-2].$$

Заметим, что  $v(n-1) = a$ . Далее, поскольку  $t_i \in \mathfrak{M}^1(i)$  и  $t_{(a-i+1)} + n - 1 \in \mathfrak{M}^2(i)$ , то для любого  $i \in [1, a-1]$  множества  $\mathfrak{M}^1(i)$  и  $\mathfrak{M}^2(i)$  непусты.

На рис. 6 на отрезке  $[0, 2n-2]$  выделено дугами  $a$  участков. Левый конец каждой дуги — элемент множества  $A$ , длина каждого отрезка, покрываемого дугой, равна  $n-1$ . Легко убедиться в том, что для любой

\*) Символ  $|A|$  обозначает число элементов множества  $A$ .

целочисленной точки, принадлежащей  $[0, 2n - 2]$ ,  $\nu(q)$  равно числу дуг, покрывающих эту точку.

Согласно определению  $\mathfrak{M}^1(i)$  и  $\mathfrak{M}^2(i)$  получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^1(0) &= \{t: 0 \leq t < t_1\}, \\ \mathfrak{M}^1(a) &= \{t: t_a \leq t < n - 1\}, \\ \mathfrak{M}^2(0) &= \{t: t_a + n - 1 < t \leq 2n - 2\}, \\ \mathfrak{M}^2(a) &= \{t: n - 1 < t \leq t_1 + n - 1\}, \\ \mathfrak{M}^1(j) &= \{t: t_j \leq t < t_{j+1}\}, \\ \mathfrak{M}^1(a - j) &= \{t: t_{a-j} \leq t < t_{a-j+1}\}, \\ \mathfrak{M}^2(j) &= \{t: t_{a-j} + n - 1 < t \leq t_{a-j+1} + n - 1\}, \\ \mathfrak{M}^2(a - j) &= \{t: t_{a-(a-j)} + n - 1 < t \leq t_{(a-(a-j)+1)} + n - 1\}.\end{aligned}$$

В случае  $t_1 = 0$  будем считать, что  $\mathfrak{M}^1(0) = \mathfrak{M}^2(a) = \emptyset$ , в случае  $t_a = n - 1$  будем считать, что  $\mathfrak{M}^1(a) = \mathfrak{M}^2(0) = \emptyset$ . Поэтому

$$\begin{aligned}|\mathfrak{M}^1(0)| &= t_1, \\ |\mathfrak{M}^1(a)| &= n - t_a - 1; \\ |\mathfrak{M}^2(0)| &= n - t_a - 1; \\ |\mathfrak{M}^2(a)| &= t_1; \\ |\mathfrak{M}^1(j)| &= t_{j+1} - t_j; \\ |\mathfrak{M}^1(a - j)| &= t_{a-j+1} - t_{a-j}; \\ |\mathfrak{M}^2(j)| &= t_{a-j+1} - t_{a-j}; \\ |\mathfrak{M}^2(a - j)| &= t_{j+1} - t_j,\end{aligned}$$

откуда непосредственно следует соотношение

$$|\mathfrak{M}^1(j)| + |\mathfrak{M}^2(j)| = |\mathfrak{M}^1(a - j)| + |\mathfrak{M}^2(a - j)|, \quad 0 \leq j \leq a. \quad (1)$$

Определим теперь множество  $\mathfrak{N}$  следующим образом. Если  $a$  четное, то

$$\mathfrak{N} = \sum_{j=0}^{a/2} (\mathfrak{M}^1(j) + \mathfrak{M}^2(j)).$$

Если  $a$  нечетное, то обозначим через  $\mathfrak{M}$  множество, состоящее из произвольным образом выбранных элементов множеств  $\mathfrak{M}^1\left(\frac{a+1}{2}\right)$  и  $\mathfrak{M}^2\left(\frac{a+1}{2}\right)$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$|\mathfrak{N}| = (n - 1) - \left| \sum_{j=0}^{\frac{a-1}{2}} (\mathfrak{M}^1(j) + \mathfrak{M}^2(j)) \right|,$$

и положим

$$\mathfrak{N} = \sum_{j=0}^{\frac{a-1}{2}} (\mathfrak{M}^1(j) + \mathfrak{M}^2(j)) + \mathfrak{M}.$$

Очевидно, что в обоих случаях  $|\mathfrak{N}| = n - 1$ . Из определения множества  $\mathfrak{N}$  (с учетом (1)) следует, что на нем достигается минимум суммы  $\sum_{q \in B} \nu(q)$ , т. е. для любого множества  $B$ ,  $B \subset \{0, 1, 2, \dots, 2n - 2\}$  та-

кого, что  $|B| = n - 1$ ,

$$\sum_{q \in \mathfrak{X}} v(q) \leq \sum_{q \in B} v(q). \quad (2)$$

Далее, так как на множестве  $\mathfrak{X}$   $v(q)$  принимает все значения от 1 до  $\lfloor a/2 \rfloor$ , то

$$\sum_{q \in \mathfrak{X}} v(q) \geq \frac{\lfloor a/2 \rfloor^2}{2} \geq \frac{(a-1)^2}{8}. \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) непосредственно следует

$$\sum_{q \in B} v(q) \geq \frac{(a-1)^2}{8},$$

что и доказывает лемму.

Обозначим через  $T(n)$  минимальное количество элементов, достаточное для построения схемы умножения двух  $n$ -разрядных чисел.

**Теорема 3.**  $T(n) \asymp n^2$ .

**Доказательство.** В силу сказанного в начале параграфа достаточно получить нижнюю оценку.

Рассмотрим произвольную схему умножения двух  $n$ -разрядных чисел. Пусть первый сомножитель равен  $2^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ). Тогда результатом умножения будет второе число, сдвинутое на  $k$  разрядов влево. Будем рассматривать только  $n$  входов второго числа и  $(2n-1)$  выходов (все, кроме выхода, соответствующего старшему разряду). Очевидно, что в схеме имеется сторона  $r$ , содержащая не менее  $n/4$  входов.

Рассечем схему отрезком  $\tau$ , перпендикулярным стороне  $r$  так, чтобы обе получившиеся подсхемы I и II имели не менее  $n/8 - 1$  входов. Одна из этих подсхем имеет не менее  $n-1$  выходов; пусть, для определенности, это подсхема II. Для доказательства теоремы достаточно показать, что порядок длины отрезка  $\tau$  не меньше  $n$ .

Обозначим через  $A$  множество номеров произвольным образом выделенных  $n/8 - 1$  входов подсхемы I, а через  $B$  — множество номеров произвольным образом выделенных  $n-1$  выходов подсхемы II. Тогда согласно лемме 1 существует натуральное число  $d$  ( $0 \leq d \leq n-1$ ) такое, что

$$S(d, A, B) \geq (n/8 - 2)^2 / (8n).$$

Это значит, что если первое число равно  $2^d$ , то среди выходов с номерами из множества  $B$  найдется  $(n/8 - 2)^2 / (8n)$  выходов, на которые при сдвиге передается поднабор, поданный на  $(n/8 - 2)^2 / (8n)$  входов с номерами из множества  $A$ .

Рассмотрим  $2^{n/8-1}$  различных входных наборов схемы, отличающихся только в разрядах соответствующих входов с номерами из множества  $A$ . Во всех остальных разрядах, соответствующих входов второго числа, стоит значение нуль, первый сомножитель равен  $2^d$ . Выходные наборы схемы, соответствующие этим входным, очевидно, тоже будут различны. Более того, будут различны выходные поднаборы, соответствующие выходам подсхемы II. А так как различные выходные наборы могут быть только при различных входных, то на входы подсхемы II может быть подано  $2^{n/8-1}$  различных входных наборов, отличающихся только в разрядах, соответствующих входов, расположенным на границе между схемами I и II, т. е. на отрезке  $\tau$  (так как рассматриваемые входные наборы схемы отличаются только в разрядах соответствующих входов части I). Таким образом, получаем, что отрезок  $\tau$  содержит по крайней мере  $\log_2 2^{n/8-1}$  входов для подсхемы II, и поэтому длина отрезка не менее чем  $n/8 - 1$ , что и доказывает теорему.

Г Л А В А II  
О РАССЕЧЕННЫХ СХЕМАХ

Автор предполагает, что читателю известно определение схемы из функциональных элементов, приведенное в работе [4].

Рассмотрим произвольную схему из функциональных элементов. Упорядоченную пару  $t = (b_i, b_j)$ , где  $b_i$  — входной полюс или элемент схемы, а  $b_j$  — элемент схемы, будем называть *каналом схемы*, если при образовании схемы  $b_i$  отождествлен (т. е. соединен) с некоторым входом элемента  $b_j$ .

*Состоянием канала*  $t = (b_i, b_j)$  при некотором входном наборе  $\tilde{\sigma}$  будем считать состояние объекта  $b_i$  при этом входном наборе.

Схему, в которой множество входных полюсов и элементов схемы разбито на два подмножества  $M_1$  и  $M_2$  так, что  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  и каждое из подмножеств содержит по крайней мере один полюс, будем называть *рассеченной*. Канал  $(b_i, b_j)$  рассеченной схемы будем называть *рассеченным*, если  $b_i$  и  $b_j$  принадлежат разным множествам  $M_1$  и  $M_2$ . Множество всех рассеченных каналов будем называть *сечением схемы*. Сечение естественным образом разбивается на два подмножества  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned} (b_i, b_j) \in A_1, & \text{ если } b_i \in M_1, b_j \in M_2, \\ (b_i, b_j) \in A_2, & \text{ если } b_i \in M_2, b_j \in M_1. \end{aligned}$$

Нам будет удобно входной набор рассеченной схемы представлять в виде пары наборов  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ , где  $\tilde{\alpha}$  — набор состояний входов, принадлежащих  $M_1$  и  $\tilde{\beta}$  — набор состояний входов, принадлежащих  $M_2$ .

*Состоянием сечения* (на некотором входном наборе  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ ) будем называть совокупность состояний всех рассеченных каналов (обозначение  $S(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ ). Состояние рассеченного канала  $t$  при входном наборе  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  будем обозначать  $S_t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ .

Совокупности состояний рассеченных каналов, принадлежащих множествам  $A_1$  и  $A_2$ , при входном наборе  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  будем обозначать соответственно  $S^1(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  и  $S^2(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ .

**Лемма 2.** *Во всякой рассеченной схеме такой, что для некоторых входных ее наборов  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$  и  $(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$  имеет место равенство*

$$S(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2), \quad (1)$$

*выполняются соотношения*

$$S(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2) = S(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

**Доказательство.** Будем говорить, что канал  $(b_q, b_k)$  *непосредственно следует* за каналом  $(b_i, b_j)$ , если  $j = q$ .

Будем говорить, что канал  $t_i$  *следует* за каналом  $t_j$ , если в схеме найдется цепочка каналов  $t^1, t^2, t^3, \dots, t^n$  такая, что  $t^1 = t_i, t^n = t_j$  и для  $2 \leq q \leq n$  канал  $t^q$  является непосредственно следующим за каналом  $t^{q-1}$ .

Соотношение «канал  $t_i$  следует за каналом  $t_j$ » будем обозначать  $t_j \rightarrow t_i$ .

Определим по индукции понятие уровня канала.

Канал  $t_i$  ( $t_i \in A_1$ ) будем называть *каналом уровня 1*, если этот канал не следует ни за каким каналом из множества  $A_2$  (т. е. это первый рассеченный канал в любой содержащей его цепочке из непосредственно следующих каналов, «начинающейся» в множестве  $M_1$ ).

Для канала  $t_j$  ( $t_j \in A_2$ ) определение аналогично.

Пусть определены каналы уровня меньшего  $i$ , принадлежащие множествам  $A_1$  и  $A_2$ .

Канал  $t_q$  ( $t_q \in A_1$ ) будем называть *каналом уровня  $i$*  (и обозначать  $d(t_q) = i$ ), если из того, что  $t_m \rightarrow t_q$  ( $t_m \in A_2$ ) следует, что  $d(t_m) \leq i - 1$  и найдется канал  $t_v$  ( $t_v \in A_2$ ) такой, что  $t_v \rightarrow t_q$  и  $d(t_v) = i - 1$ .

Для каналов, принадлежащих множеству  $A_2$ , определение аналогично.

Для доказательства леммы достаточно установить, что для любого канала  $t$  имеют место следующие соотношения

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2), \quad (2)$$

$$S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2). \quad (3)$$

Докажем соотношения (2), (3) индукцией по уровню канала  $t$ .

Рассмотрим произвольный канал  $t$  такой, что  $t \in A_1$  и  $d(t) = 1$ . Очевидно, что для любого входного набора  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  значение  $S_t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  полностью определяется набором  $\tilde{\alpha}$ . Поэтому

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2),$$

$$S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2).$$

Из (1) следует, что

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Для канала  $t$  такого, что  $t \in A_2$  и  $d(t) = 1$ , доказательство аналогично.

Таким образом, установлены соотношения (2), (3) для канала  $t$  уровня 1.

Пусть для каналов уровня меньше  $j$ , принадлежащих множествам  $A_1$  и  $A_2$ , соотношения (2), (3) доказаны. Докажем их для каналов уровня  $j$ .

Рассмотрим произвольный канал  $t$ , такой что  $t \in A_1$ ,  $d(t) = j$ . Очевидно, что для любого входного набора  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  значение  $S_t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  полностью определяется набором  $\tilde{\alpha}$  и совокупностью состояний рассеченных каналов  $t'$  уровня меньше, чем  $j$  на наборе  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ . Обозначим множество этих каналов через  $B$ . В силу индуктивного предположения для любого канала  $t'$  из  $B$

$$S_{t'}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S_{t'}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_{t'}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_{t'}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Поэтому

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2),$$

$$S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2).$$

Из (1) следует, что

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Тем самым установлены соотношения (2), (3) для каналов уровня  $j$  из  $A_1$ . Аналогично устанавливаются соотношения (2), (3) для каналов уровня  $j$  из  $A_2$ .

Лемма полностью доказана.

Обозначим через  $F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  набор состояний выходов схемы при входном наборе  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ , а через  $|S|$  количество элементов в сечении  $S$  рассеченной схемы.

Обозначим через  $F_1(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  и  $F_2(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  совокупности состояний выходов схемы, соответствующих выходам элементов, принадлежащих соответственно множествам  $M_1$  и  $M_2$  при входном наборе  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ .

Следствие. Если  $S(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$ , то

$$F_1(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = F_1(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2),$$

$$F_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = F_2(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Рассмотрим произвольную рассеченную схему из функциональных элементов.

Пусть  $P = \{(\tilde{\alpha}_1^1, \tilde{\alpha}_2^1); (\tilde{\alpha}_1^2, \tilde{\alpha}_2^2); (\tilde{\alpha}_1^3, \tilde{\alpha}_2^3); \dots; (\tilde{\alpha}_1^n, \tilde{\alpha}_2^n)\}$  некоторое множество входных наборов, где  $\tilde{\alpha}_1^i$  и  $\tilde{\alpha}_2^i$  — наборы, подаваемые на входы, принадлежащие соответственно множествам  $M_1$  и  $M_2$ . Обозначим через  $P^*$  множество всех наборов  $(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j)$  при  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Лемма 3. Для всякой рассеченной схемы с сечением  $S$ , для которой найдется множество входных наборов  $P$  таких, что

1.  $|P| = n$ ;

2. для всех наборов  $\tilde{\alpha}^i = (\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i)$  из  $P$  выходные наборы  $F(\tilde{\alpha}^i)$  схемы совпадают (и равны, скажем, набору  $(\tilde{\gamma})$ );

3. для любого набора  $(\tilde{\beta})$  из  $P^*$   $F(\tilde{\beta}) \neq (\tilde{\gamma})$ .

Тогда

$$|S| \geq \log_2 n.$$

Доказательство. Обозначим через  $k$  количество каналов, принадлежащих сечению. Рассмотрим множество

$$\{S(\tilde{\alpha}_1^1, \tilde{\alpha}_2^1); S(\tilde{\alpha}_1^2, \tilde{\alpha}_2^2); S(\tilde{\alpha}_1^3, \tilde{\alpha}_2^3); \dots; S(\tilde{\alpha}_1^n, \tilde{\alpha}_2^n)\}.$$

Докажем, что при  $i \neq j$  выполняется соотношение

$$S(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i) \neq S(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j).$$

Пусть это не верно. Тогда, применяя лемму 2 для входных наборов  $(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i)$  и  $(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j)$ , получаем

$$S(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j) = S(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i).$$

Далее, в силу следствия из леммы 2 получаем

$$F_1(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j) = F_1(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i), \quad (4)$$

$$F_2(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j) = F_2(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j). \quad (5)$$

Но по условию 2 доказываемой леммы

$$F(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i) = F(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j), \quad (6)$$

поэтому из (4), (5), (6) следует

$$F(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j) = F(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i) = \tilde{\gamma},$$

что противоречит условию 3 доказываемой леммы.

Таким образом, доказано, что при  $n$  входных наборах совокупности состояний рассеченных каналов различны.

Поэтому  $k \geq \log_2 n$ , что и требовалось доказать.

### ГЛАВА III

#### СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Напомним определение симметрических функций. Булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется симметрической, если для любого набора  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  и любой подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \text{ имеет место } f(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_n}) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Легко видеть, что если

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$$

и  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  содержит ровно  $i$  единиц, то для любого набора  $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$ , содержащего также ровно  $i$  единиц,

$$f(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = 1.$$

В таком случае симметрическая функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  характеризуется списком своих рабочих чисел  $i_1, i_2, \dots, i_r$  ( $0 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ ), обозначающих число единиц в наборах  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , для которых

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1.$$

Симметрическая функция, список рабочих чисел которой состоит из одного числа, называется элементарной симметрической функцией. Очевидно, что каждая симметрическая функция может быть представлена как дизъюнкция элементарных симметрических функций.

В этой главе будут получены точные по порядку оценки сложности реализации любой симметрической функции и системы всех элементарных симметрических функций.

Установим сначала одно вспомогательное утверждение.

Схему будем называть *правильной относительно входов*  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и *выходов*  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , если эти входы и выходы находятся на противоположных сторонах так, что вход  $\alpha_i$  расположен строго напротив выхода  $\beta_i$ .

**Лемма 4.** *Можно построить  $n$ -разрядный сумматор\*), удовлетворяющий условиям:*

- 1) сложность схемы имеет порядок  $n$ ;
- 2) схема сумматора правильна относительно входов первого числа и выходов.

Принцип построения схемы отражен на рис. 7 ( $\alpha_i$  и  $\gamma_i$  входы соответственно первого и второго чисел,  $\beta_i$  — выходы).

Обозначим через  $B(n)$  минимальное количество элементов, достаточное для реализации всех элементарных симметрических функций одновременно.

**Лемма 5.**  $B(n) \leq n \log_2 n$ .

**Доказательство.** Соответствующая схема будет состоять из двух частей. В первой части будет производиться подсчет числа единиц в подаваемом наборе. Введем обозначение  $l = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ . Подсчет будут производить  $n$  последовательно присоединенных друг к другу  $l$ -разрядных сумматоров, описанных в предыдущей лемме.

На входы первого сумматора будут поданы наборы  $\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_l$  и  $\underbrace{\alpha, 0, 0, 0, \dots, 0}_l$ , где  $\alpha$  — число, стоящее в первом разряде подаваемого числа (младшие разряды расположены слева). На входы  $i$ -го сумматора ( $i > 1$ ) будут поданы  $l$  младших разрядов выходов  $(i-1)$ -го сумматора и набор  $\underbrace{\alpha, 0, 0, \dots, 0}_l$ , где  $\alpha$  — число, стоящее в  $i$ -м разряде поданного набора. На выходах последнего сумматора будет образована

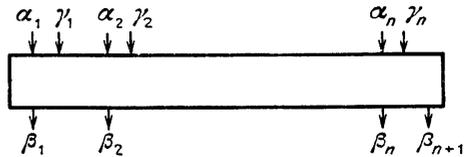


Рис. 7

\*) То есть схему, вычисляющую по разрядам двух  $n$ -разрядных двоичных чисел разряды их суммы.

двоичная запись числа единиц в поданном наборе. Сложность этой схемы имеет порядок  $n \log_2 n$ .

Вторая часть схемы — это схема, реализующая все конъюнкции от  $l$  переменных (точнее, ее часть, реализующая первые  $(n+1)$  конъюнкции) [6, с. 288]. Эта часть присоединяется к первой с надлежащим пространственным согласованием; при этом сложность второй части увеличится лишь в конечное число раз и будет равна по порядку  $n \log_2 n$ . Лемма доказана.

Обозначим через  $B_1(n)$  минимальное количество элементов, достаточное для реализации любой симметрической функции.

**Лемма 6.**  $B_1(n) \geq n \log_2 n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим элементарную симметрическую функцию  $f$ , принимающую значение 1 на наборах, имеющих  $[n/2]$  единиц и 0 на остальных. Покажем, что эта функция требует для своей реализации количество элементов по порядку не меньше, чем  $n \log_2 n$ .

Пусть схема  $R$  реализует функцию  $f$ . Очевидно, что в схеме найдется сторона, содержащая не менее  $n/4$  входов. Обозначим эту сторону через  $h$ . Возможны два случая.

1) Одна из сторон, перпендикулярных стороне  $h$ , содержит не менее  $n/3$  входов схемы. В этом случае сложность схемы по порядку равна  $n^2$ , и лемма доказана.

2) Каждая из сторон, перпендикулярных стороне  $h$ , содержит менее  $n/3$  входов схемы.

Тогда рассечем схему отрезком  $d$ , перпендикулярным стороне  $h$ , на две подсхемы I и II так, чтобы в каждой полученной подсхеме было не менее  $[(n-1)/2]$  входов.

Пусть для определенности подсхема I не имеет выхода. Воспользуемся леммой 3. Обозначим через  $M_1$  и  $M_2$  множества функциональных элементов и входов схемы, принадлежащих соответственно подсхемам I и II. Тогда каждому рассеченному каналу можно поставить в соответствие путь, составленный из коммутационных элементов, осуществляющий связь между подсхемами и поэтому пересекающий отрезок  $d$ .

Пусть  $P = \{(\tilde{\alpha}_1^1, \tilde{\alpha}_2^1); (\tilde{\alpha}_1^2, \tilde{\alpha}_2^2); \dots; (\tilde{\alpha}_1^{[n/2]}, \tilde{\alpha}_2^{[n/2]})\}$  — множество входных наборов схемы, где  $\tilde{\alpha}_1^i$  и  $\tilde{\alpha}_2^i$  — поднаборы, подаваемые на входы соответственно подсхемы I и подсхемы II, причем набор  $\tilde{\alpha}_1^i$  состоит из  $i$  единиц и остальных нулей, а набор  $\tilde{\alpha}_2^i$  состоит из  $[(n/2) - i]$  единиц и остальных нулей. Очевидно, что в наборе  $(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i)$  содержится ровно  $[n/2]$  единиц, а в наборе  $(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j)$ , где  $i \neq j$ , число единиц не равно  $[n/2]$ . Поэтому при входном наборе  $(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i)$  на выходе схемы реализуется 1, а при входном наборе  $(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j)$ , где  $i \neq j$ , на выходе схемы реализуется 0.

Таким образом, все условия леммы 2 главы II выполнены. Значит сечение схемы состоит не менее чем из  $\log_2 [n/2]$  рассеченных каналов, т. е. длина отрезка  $d$  по порядку не меньше, чем  $\log_2 n$ . Тем самым лемма доказана.

**Лемма 7.**  $B(n) \geq n \log_2 n$ .

**Доказательство.** Это неравенство следует из леммы 6

**Лемма 8.**  $B_1(n) \leq n \log_2 n$ .

**Доказательство.** Это неравенство легко следует из леммы 5, если учесть, что всякая симметрическая функция есть дизъюнкция элементарных симметрических функций.

Для построения соответствующей схемы достаточно присоединить к схеме, полученной в лемме 5, блок, осуществляющий объединение (при помощи операции дизъюнкции) нужных выходов. Очевидно, что присоединенный блок не меняет порядка сложности схемы.

Из лемм 5 и 7 непосредственно следует

**Теорема 4.**  $B(n) \asymp n \log_2 n$ .

Из лемм 6 и 8 непосредственно следует

**Теорема 5.**  $B_1(n) \asymp n \log_2 n$ .

#### ГЛАВА IV

### О СООТНОШЕНИИ СЛОЖНОСТЕЙ ПЛОСКИХ И ОБЪЕМНЫХ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В этой главе наряду с клеточными (плоскими) схемами будут рассматриваться объемные схемы.

Допустимые типы элементов изображены на рис. 8 (в верхнем ряду — функциональные, в нижнем — коммутационные). Рассматриваются схемы, составленные из указанных элементов (элементы могут быть повернуты в пространстве), имеющие форму прямоугольного параллелепипеда. Входы и выходы схем расположены на гранях. Длину, ширину и

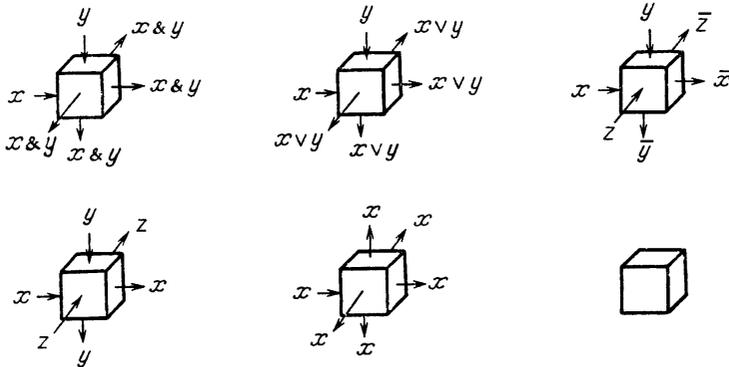


Рис. 8

высоту схемы будем называть ее *параметрами*. На рисунках длину будем изображать горизонтально, высоту — вертикально, ширину — в перспективе. Сложностью схемы будем называть ее объем (число входящих в нее элементов). Заметим, что если в каждом объемном элементе «отбросить» входы и выходы, направленные вдоль вертикальной оси, то объемные элементы будут функционировать так же, как и соответствующие плоские. Поэтому для каждой плоской схемы можно построить объемную схему единичной высоты, такую, что множество функций, реализуемых объемной схемой, будет включать в себя множество функций, реализуемых плоской схемой. Отсюда следует, что для любой системы функций, существует объемная схема, ее реализующая. Будем также называть такие схемы *кубическими* или *схемами размерности 3*.

Введем следующие обозначения.

$F$  — некоторая система булевых функций;

$L_2(P)$  — (соответственно  $L_3(P)$ ) — сложность плоской (соответственно объемной) схемы  $P$ ;

$L_2(F) = \min L_2(P)$ , где минимум берется по всем плоским схемам  $P$ , реализующим систему функций  $F$ ;

$L_3(F) = \min L_3(P)$ , где минимум берется по всем объемным схемам  $P$ , реализующим систему функций  $F$ ;

$\mathfrak{M}_3(V)$  — множество систем функций  $F$ , для которых  $L_3(F) \leq V$ ;

$\mathfrak{M}'_3(V)$  — множество функций  $f$ , для которых  $L_3(f) \leq V$ ;

$A_{23}(V) = \max_{F \in \mathfrak{M}_3(V)} L_2(F)$ ;

$A'_{23}(V) = \max_{f \in \mathfrak{M}'_3(V)} L_2(f)$ .

Очевидно, что  $A'_{23}(V) \leq A_{23}(V)$ .

Основной результат этой главы состоит в установлении следующих фактов.

Теорема 5.  $A_{23}(V) \times V^{3/2}$ .

Теорема 6.  $A'_{23}(V) \times V^{3/2}$ .

Для доказательства теорем введем следующее определение.

Две схемы будем называть *эквивалентными*, если они реализуют один и тот же набор функций.

### § 1. Верхние оценки

В этом разделе будет описан метод построения для любой объемной схемы эквивалентной ей плоской схемы.

Основная идея метода заключается в следующем. Объемная схема разрезается на слои единичной высоты. Слои выкладываются на плоскости, как показано на рис. 9. Затем каждый слой заменяется эквивалентной плоской подсхемой. Каждая подсхема устроена следующим образом.

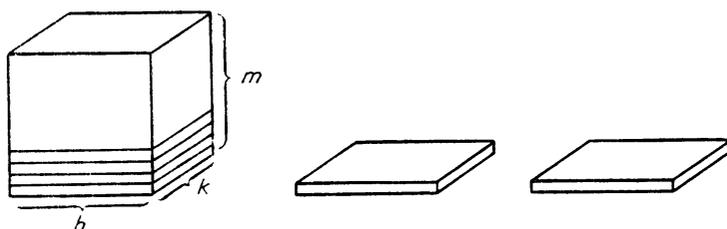


Рис. 9

Каждый объемный элемент заменяется эквивалентным плоским блоком так, что

1) входы и выходы, «лежавшие» в плоскости, параллельной плоскости слоя, стыкуются так же, как и в объемной схеме;

2) входы и выходы с верхней грани и нижней грани слоя выводятся в плоской подсхеме соответственно на правую и левую границы плоской подсхемы;

3) входы и выходы с боковых граней «периметра» слоя выводятся на верхнюю и нижнюю границу подсхемы.

Входы и выходы схемы будем называть ее полюсами.

Будем говорить, что *полюс плоской схемы расположен на расстоянии  $h$  от некоторого конца стороны*, на которой он лежит, если между этим концом стороны и элементом, содержащим данный полюс, расположено  $h$  плоских элементов, прилежащих к этой стороне.

Будем считать, что первый коммутационный элемент (см. рис. 8) реализует набор функций  $f'_1(x, y, z) = x$ ,  $f'_2(x, y, z) = y$ ,  $f'_3(x, y, z) = z$ , второй коммутационный элемент реализует набор функций  $f''_i(x, y, z) = x$ , где  $1 \leq i \leq 5$ , а третий — пустое множество функций.

Рассмотрим произвольную плоскую схему с параметрами  $d, d$ , где  $d \geq 7$ , имеющую шесть занумерованных полюсов:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6$ . Расположение полюсов будем называть *стандартным*, если полюсы  $a_1, a_2$  и  $a_4$  расположены на верхней стороне, на расстоянии соответственно  $[d/2] - 2$ ,  $[d/2]$ , и  $[d/2] + 2$  от левого конца, полюс  $a_3$  — на правой стороне на расстоянии  $[d/2]$  от верхнего конца, полюс  $a_5$  — на нижней стороне, на расстоянии  $[d/2]$  от левого конца, полюс  $a_6$  — на левой стороне на расстоянии  $[d/2]$  от верхнего (см. рис. 10).

**Лемма 9.** *Существует натуральное число  $d$  такое, что для любого объемного элемента (см. рис. 11) с любой нумерацией полюсов можно*

построить эквивалентную плоскую схему с параметрами  $d$ ,  $d$  и имеющую стандартное расположение полюсов.

Доказательство. Для каждого объемного элемента (с учетом нумерации полюсов) построим эквивалентную плоскую схему. Пусть  $k$  — наибольший из параметров построенных схем. Дополним каждую схему посредством коммутационных элементов до эквивалентной схемы

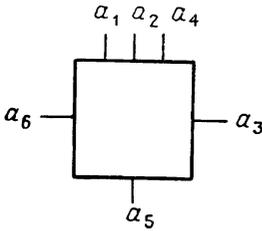


Рис. 10

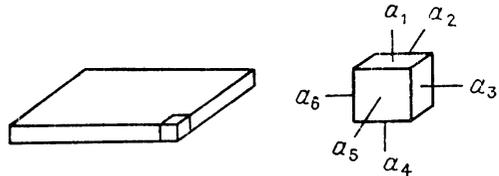


Рис. 11

с параметрами  $k$ ,  $k$ . Затем, «опоясав» каждую вновь построенную схему достаточно широкой полосой из коммутационных элементов, «выведем» внешние полюсы на указанные позиции. Можно показать, что достаточно взять ширину полосы равную 18. Описанные схемы будем в дальнейшем называть *стандартными плоскими блоками*.

На рис. 12 показан принцип построения некоторых стандартных плоских блоков.

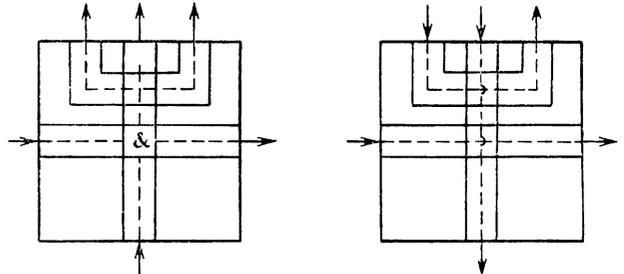


Рис. 12

Рассмотрим произвольную объемную схему с параметрами  $k$ ,  $h$ , 1. Внешние полюсы, лежащие на гранях, перпендикулярных ребру, соответствующему третьему параметру, будем называть *p-полюсами*.

Рассмотрим эквивалентную плоскую схему. Полюсы, соответствующие *p-полюсам*, будем называть *p̂-полюсами*.

Будем говорить, что *плоская схема R' правильно моделирует объемную схему R с параметрами k, h, 1*, если выполняются следующие условия.

1.  $R'$  эквивалентна  $R$ ;  
 2.  $\widehat{p}$ -полюсы в схеме  $R'$  расположены на боковых сторонах;  
 3.  $\widehat{p}$ -полюсы, соответствующие  $p$ -полюсам, лежащим на одной грани, лежат в  $R'$  на одной стороне;  
 4. два  $\widehat{p}$ -полюса, соответствующие  $\widehat{p}$ -полюсам, принадлежащим одному объемному элементу, расположены на одинаковом расстоянии от верхних концов соответствующих боковых сторон.

Лемма 10. Для любой объемной схемы с параметрами  $k$ ,  $h$ , 1 можно построить правильно моделирующую ее плоскую схему с параметрами  $c_1kh$ ,  $c_2h$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — константы.

Доказательство. Рассмотрим произвольную объемную схему с параметрами  $k$ ,  $h$ , 1. Обозначим полюсы каждого объемного элемента буквами  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  (как показано на рис. 11). Выделим в рассматриваемой схеме  $k$  полос, состоящих из  $h$  элементов (как показано на рис. 13). Каждую полосу «заменяем» плоской подсхемой, состоящей из двух частей  $A$  и  $B$  (см. рис. 14). Часть  $A$  с параметрами  $dh$ ,  $d$  составлена из стандартных плоских блоков, соответствующих объемным

...

...

элементам данной полосы, описанных в лемме 1, а часть  $B$  с параметрами  $dh$ ,  $3h$  составлена из  $h$  полос, состоящих из коммутационных блоков, изображенных на рис. 15 так, чтобы полюсы  $a_1$  и  $a_4$   $i$ -го слева стандартного плоского блока «выводились» на  $i$ -ю снизу полосу, затем полюс



Рис. 13

$a_1$  выводился на левую границу, а полюс  $a_4$  — на правую границу подсхемы. На рис. 16 изображен принцип работы такой подсхемы. Ширина каждого коммутационного блока равна 3, длина равна  $d$  (см. лемму 1). Полюсы, расположенные на верхней и нижней сторонах, отстоят от левого конца на расстоянии  $[d/2] - 2$ ;  $[d/2]$ ;  $[d/2] + 2$  (в соответствии с положением полюсов  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_4$ ).

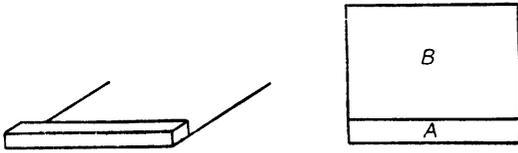


Рис. 14

Подсхема, построенная по такому принципу, имеет параметры  $dh$ ,  $k(d + 3h)$ .

Очевидно, что схема, составленная из таких подсхем, будет реализовывать тот же набор функций, что и данная объемная, иметь сложность, по порядку равную  $kh^2$ , и требуемое расположение внешних полюсов.

**Лемма 11.** Для любой объемной схемы с параметрами  $k$ ,  $h$ ,  $t$  можно построить плоскую схему, реализующую тот же набор функций и имеющую сложность, по порядку равную  $kh(k + h)t$ .

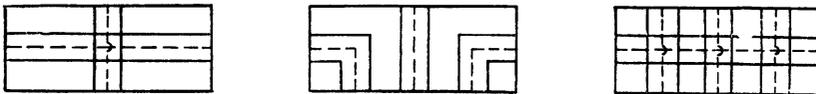


Рис. 15

**Доказательство.** Разделим схему на слои единичной толщины (высоты) и расположим их на плоскости, как показано на рис. 9. «Заменяем» каждый слой эквивалентным плоским блоком, составленным из трех подсхем  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (см. рис. 17).

Подсхема  $A$  есть схема, правильно моделирующая данный слой, описанная в доказательстве леммы 10. Подсхемы  $B$  и  $C$  состоят из коммутационных блоков  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $b_5$ ,  $b_6$ , принцип построения которых изображен на рис. 18, и выводят полюсы схемы  $A$ , расположенные на боковых сторонах и не являющиеся  $\hat{p}$ -полюсами, на верхнюю границу блока.

Опишем принцип работы подсхемы  $C$ . Эта подсхема состоит из  $k(h + 1)$  горизонтальных полос, составленных из конструкций  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $b_5$  (см. рис. 18 и 19). Перенумеруем эти полосы снизу вверх числами от 1 до  $k(h + 1)$ . Полоса с номером  $(h + 1)(j - 1) + r$ , где  $1 \leq j \leq k$ ,  $1 \leq r \leq h + 1$ , устроена следующим образом.

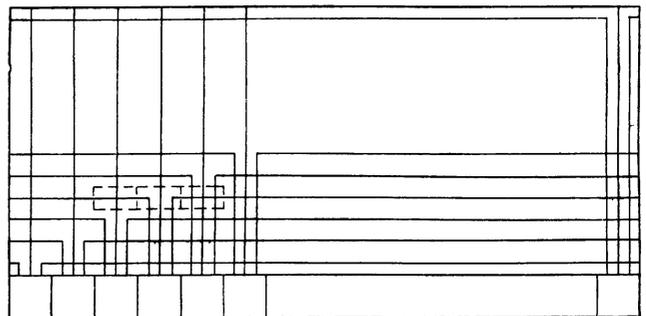


Рис. 16

Если  $r = 1$ , то на  $i$ -м месте слева расположена конструкция

$b_3$ , если  $i < j$ ;

$b_1$ , если  $i = j$ ;

$b_4$ , если  $i > j$ .

Если  $r \neq 1$ , то на  $i$ -м месте слева расположена конструкция

$b_2$ , если  $i \leq j$ ;

$b_5$ , если  $i > j$ .

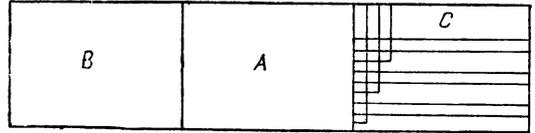


Рис. 17

Подсхема  $B$  устроена аналогично (используются конструкции  $b_6, b_2, b_3, b_4, b_5$ ).

Легко видеть, что блок, составленный из описанных трех подсхем, имеет параметры  $c_3(h+k)$ ,  $c_4kh$ , где  $c_3$  и  $c_4$  — некоторые константы.

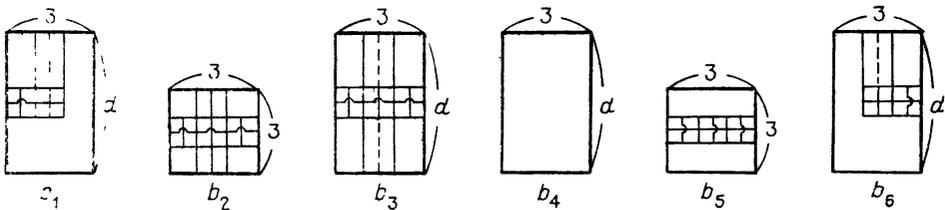


Рис. 18

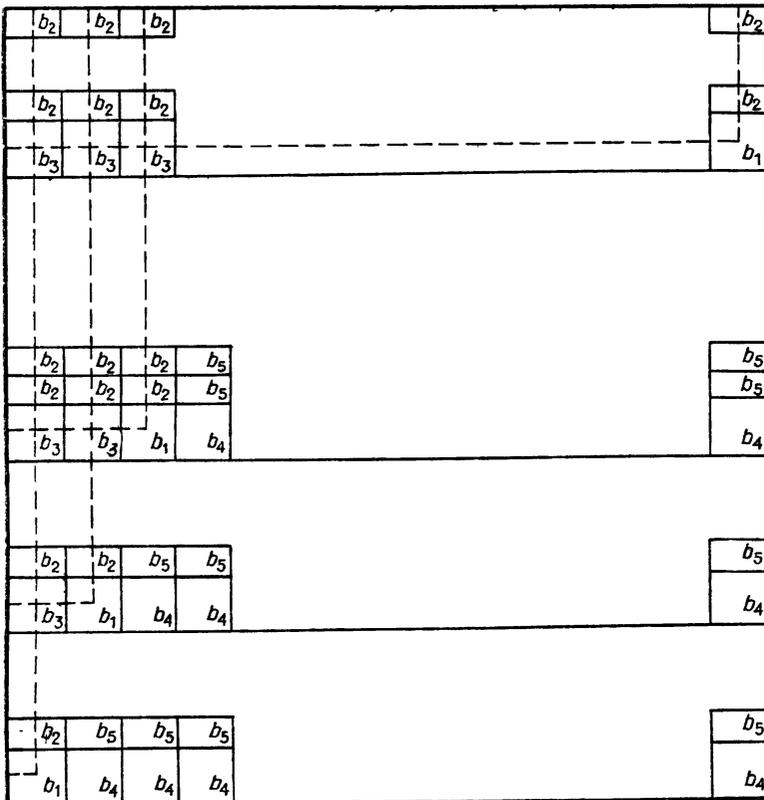


Рис. 19

Очевидно, что схема, составленная из плоских блоков, будет реализовывать тот же набор функций, что и первоначальная объемная схема. Сложность построенной схемы имеет порядок  $kh(k+h)t$ , что и требовалось доказать.

## § 2. Нижние оценки

Обозначим через  $N$  множество  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , а через  $N^2$  — множество всевозможных пар  $(\alpha, \beta)$  таких, что  $\alpha \in N, \beta \in N$ .

Левую и правую компоненту пары  $\psi = (\alpha, \beta)$  будем называть также *проекциями* и обозначать через  $l(\psi)$  и  $r(\psi)$  соответственно.

Пусть  $T \subset N^2$ , тогда через  $l(T)$  будем обозначать множество элементов из  $N$  таких, что для любого  $\alpha, \alpha \in l(T)$ , найдется элемент  $\psi, \psi \in T$ , такой, что  $l(\psi) = \alpha$ , и для любого  $\psi$  из  $T$  найдется  $\alpha, \alpha \in l(T)$ , такой, что  $l(\psi) = \alpha$ .

Аналогично определяется множество  $r(T)$ .

**Лемма 12.** Для всех  $K, M, T, K \subset N, M \subset N, T \subset N^2$  таких, что  $|K| + |M| = n, T = [n^2/2] - 1$  при всех  $n \geq 3$  выполняется по крайней мере одно из двух соотношений

$$1) |l(T) \cap K| \geq n/20,$$

$$2) |r(T) \cap M| \geq n/20.$$

**Доказательство.** Пусть  $|K| = k$ , тогда  $|M| = n - k$ . Положим  $D = \{\psi \in N^2: l(\psi) \in (N \setminus K) \cup (l(T) \cap K), r(\psi) \in (N \setminus M) \cup (r(T) \cap M)\}$ ,

$$q_1 = |l(T) \cap K|,$$

$$q_2 = |r(T) \cap M|.$$

Тогда

$$|D| = (q_1 + n - k)(q_2 + k).$$

Очевидно, что  $T \subset D$ . Поэтому

$$|T| = [n^2/2] - 1 \leq (q_1 + n - k)(q_2 + k).$$

Воспользуемся неравенством

$$ab \leq (a + b)^2/4.$$

Получаем

$$[n^2/2] - 1 \leq (q_1 + n - k)(q_2 + k) \leq (q_1 + q_2 + n)^2/4,$$

$$4([n^2/2] - 1) \leq (q_1 + q_2 + n)^2,$$

$$2\sqrt{[n^2/2] - 1} \leq (q_1 + q_2 + n).$$

При  $n \geq 3$

$$q_1 + q_2 \geq 2\sqrt{[n^2/2] - 1} - n \geq 2\sqrt{n^2/3} - n \geq 0,10n.$$

Поэтому  $\max(q_1, q_2) \geq 1/2 \cdot 0,10n \geq 0,05n$ , откуда следует утверждение леммы.

Рассмотрим набор функций  $Q = \{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{nn}\}$ , где  $f_{ij} = t_{ij} \vee (x_{ij} \oplus y_i \oplus z_j)$ ;  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Лемма 13.**  $L_3(Q) \leq n^2$ .

**Доказательство.** Общий вид схемы изображен на рис. 20. Схема составлена из  $n^2$  одинаковых блоков, каждый из которых реализует одну функцию  $f_{ij}$ . Общий вид блока изображен на рис. 21. Схема составлена из блоков таким образом, что информация, поданная на входы для переменных  $x_{ij}, t_{ij}, z_j, y_i$ , «проходит» через схему по трем взаимно перпендикулярным направлениям. На «пересечениях» в блоках вычисляются значения функций. Выходы расположены на нижней грани. Верхняя грань имеет площадь по порядку равную  $n^2$ , а высота схемы конечна.

Отсюда следует утверждение леммы.

Рассмотрим функцию

$$f = f_{11} \& f_{12} \& \dots \& f_{nn}.$$

**Лемма 14.**  $L_3(f) \leq n^2$ .

**Доказательство.** Рассмотрим схему, описанную в доказательстве леммы 13. Для получения требуемой схемы достаточно к рассмат-

риваемой схеме добавить снизу слой толщины (высоты) 2, в котором будут реализовываться конъюнкции функций  $f_{ij}$ . Очевидно, что сложность полученной схемы равна по порядку  $n^2$ .

**Лемма 15.**  $L_2(f) \geq n^3$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную плоскую схему, реализующую данную функцию. Очевидно, что в схеме найдется сторона, содержащая не менее  $n^2/4$  входов для переменных  $x_{ij}$ .

Обозначим эту сторону через  $d$ . Возможны два случая.

1. Одна из сторон, перпендикулярных стороне  $d$ , содержит не менее  $n^2/3$  входов для переменных  $x_{ij}$ . В этом случае сложность схемы по порядку равна  $n^4$ , и лемма доказана.

2. Каждая из сторон, перпендикулярных стороне  $d$ , содержит менее  $n^2/3$  входов для переменных  $x_{ij}$ .

Тогда разделим схему отрезком прямой, перпендикулярным стороне  $d$  так, чтобы по обе стороны отрезка, т. е. в каждой получившейся части

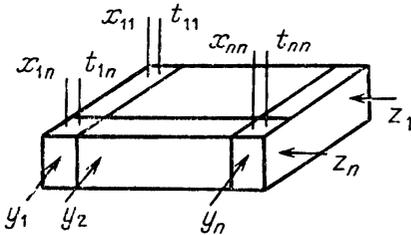


Рис. 20

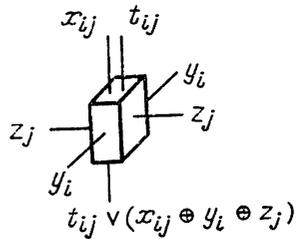


Рис. 21

схемы, было не менее  $\lfloor n^2/2 \rfloor - 1$  входов для переменных  $x_{ij}$ . Назовем полученные в результате деления две части схемы соответственно правой и левой.

Очевидно, что по крайней мере одна из этих двух частей содержит не менее  $n$  входов для переменных  $y_i$  и  $z_j$  вместе. Пусть это будет левая часть. Применим лемму 4 к номерам входов, где в качестве множества  $T$  возьмем множество индексов  $\lfloor n^2/2 \rfloor - 1$  переменных  $x_{ij}$ , входы которых расположены в правой части схемы, а в качестве множеств  $K$  и  $M$  возьмем множества индексов для переменных соответственно  $y_k$  и  $z_l$ , входы которых расположены в левой части.

Тогда согласно лемме 4 верно одно из следующих двух утверждений:

1) в правой части найдется  $n/20$  входов для переменных  $x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, x_{i_3 j_3}, \dots, x_{i_{n/20} j_{n/20}}$ , а в левой  $n/20$  входов для переменных  $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_{n/20}}$ , удовлетворяющих соотношениям  $k_v = i_v$ , где  $1 \leq v \leq n/20$ ;

2) в правой части найдется  $n/20$  входов для переменных  $x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, x_{i_3 j_3}, \dots, x_{i_{n/20} j_{n/20}}$ , а в левой части  $n/20$  входов для переменных  $z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_{n/20}}$ , удовлетворяющих соотношениям  $t_v = j_v$ , где  $1 \leq v \leq n/20$ .

Для определенности будем считать, что выполняется условие 1).

Заметим, что переменные  $x_{ij}$  и  $y_j$  являются существенными переменными для функции  $f_{ij}$ . Определение существенной переменной можно найти в [8, с. 8].

Обозначим для удобства наборы

$$\begin{aligned} &x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, x_{i_3 j_3}, \dots, x_{i_{n/20} j_{n/20}}, \\ &t_{i_1 j_1}, t_{i_2 j_2}, t_{i_3 j_3}, \dots, t_{i_{n/20} j_{n/20}}, \\ &y_{k_1}, y_{k_2}, y_{k_3}, \dots, y_{k_{n/20}}, \end{aligned}$$

где  $i_v = k_v$ , соответственно через  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{t}$  и  $\tilde{y}$ .

Рассмотрим  $2^{n/20}$  различных входных наборов  $\tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(1), \tilde{\alpha}(2), \dots, \tilde{\alpha}(2^{n/20} - 1)$ , где  $\tilde{\alpha}(i)$  есть входной набор, у которого значения всех переменных  $z_j$  равны 1, значения переменных  $t_{ij}$ , входящих в набор  $\tilde{i}$ , равны 0, значения остальных переменных  $t_{ij}$  равны 1, значения переменных  $x_{ij}$ , не входящих в набор  $\tilde{x}$ , равны 1, значения переменных  $y_k$ , не входящих в набор  $\tilde{y}$ , равны 1, наборы значений переменных, соответствующих входам  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ , представляют собой двоичную запись числа  $i$  с нулями в «неиспользованных» старших разрядах (см. таблицу).

Т а б л и ц а

$\tilde{x}$		$\tilde{i}$		$\tilde{y}$		
11 ... 1	0 ... 01	11 ... 1	00 ... 0	11 ... 1	0 ... 01	11 ... 1
11 ... 1	1 ... 11	11 ... 1	00 ... 0	11 ... 1	1 ... 11	11 ... 1
$x_{ij}$		$t_{ij}$		$y_i$		$z_j$

Обозначим через  $l(\tilde{\alpha}(i))$  и  $r(\tilde{\alpha}(i))$  входные поднаборы набора  $\tilde{\alpha}(i)$ , подаваемые соответственно на левую и правую части схемы.

Заметим, что на всех входных наборах  $\tilde{\alpha}(i)$  функция  $f$  принимает значение 1, а на любом входном наборе  $(l(\tilde{\alpha}(i)), r(\tilde{\alpha}(j)))$ , где  $i \neq j$ , функция  $f$  принимает значение 0.

Обозначим через  $M_1$  и  $M_2$  входы схемы и функциональные элементы, расположенные соответственно в левой и правой частях схемы, а в качестве рассеченных каналов будем рассматривать проводники, составленные из коммутационных элементов, осуществляющие связь между левой и правой частями схемы.

Очевидно, что рассматриваемая схема удовлетворяет определению рассеченной схемы.

Рассмотрим отрезок, разделяющий схему на две части. Очевидно, что длина этого отрезка, т. е. ширина схемы, не меньше, чем число рассеченных каналов.

Вспользуемся леммой 2 гл. II. В качестве множества  $P$  возьмем  $2^{n/20}$  входных наборов  $\tilde{\alpha}(i)$ , а в качестве множества  $P^*$  возьмем множество входных наборов вида  $(l(\tilde{\alpha}(i)), r(\tilde{\alpha}(j)))$ , где  $i \neq j$ . Легко убедиться, что условие леммы 2 второй главы для рассматриваемых функций, схемы и входных наборов  $P$  и  $P^*$  выполнены.

Таким образом, получаем, что ширина схемы должна быть не меньше, чем  $n/20$ , а сложность всей схемы — не меньше, чем  $cn^3$ , где  $c$  константа. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 16.  $L_2(Q) \geq n^3$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 15.

### § 3. Доказательства теорем

Из леммы 11 следует, что для любой объемной схемы с параметрами  $k, h, t$ , где  $k \leq h \leq t$ , можно построить эквивалентную плоскую схему со сложностью  $skh^2t$ , т. е. для любой объемной схемы со сложностью  $V$  можно построить эквивалентную плоскую схему со сложностью по порядку равной  $V^{3/2}$ .

Из лемм 13 и 16 следует, что существует система функций, которая объемной схемой реализуется со сложностью по порядку не меньшей, чем  $n^3$ .

Таким образом теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 1 (используются леммы 3, 6 и 7).

В заключение автор благодарит профессора О. Б. Лупанова за постановку задач и постоянное внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карцев М. А. Арифметика цифровых машин.— М.: Наука, 1969.
2. Коршунов А. Д. Об оценках сложности схем из объемных функциональных элементов и объемных схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 19.— М.: Наука, 1967.— С. 273—285.
3. Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 19.— М.: Наука, 1967.— С. 285—293.
4. Лупанов О. Б. Об одном классе схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 7.— М.: Физматгиз, 1962.— С. 6—115.
5. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия ВУЗ. Радиофизика.— 1958.— 1, № 1.— С. 120—140.
6. Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе  $\&$ ,  $\vee$ ,  $-$  // Проблемы кибернетики. Вып. 6.— М.: Физматгиз, 1962.— С. 5—14.
7. Мадатян Х. А. Синтез контактных схем ограниченной ширины // Проблемы кибернетики. Вып. 14.— М.: Наука.— С. 301—307.
8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука. 1979.
9. Albrecht A. Zur Kompliziertheit der Realisierung Boolescher Funktionen durch  $F$ - $V$ -Schemata // EIK.— 1979.— Bd 15, № 3.— S. 159—171.