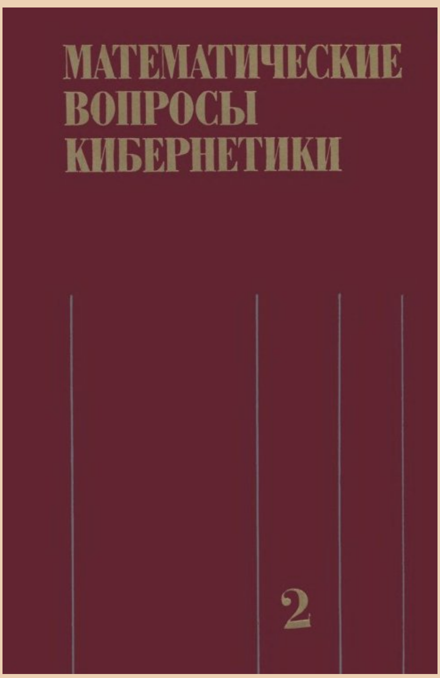

Н. А. Карпова

О вычислениях с ограниченной памятью

О ВЫЧИСЛЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПАМЯТЬЮ

Н. А. КАРПОВА

(МОСКВА)

Схемы из функциональных элементов — один из основных классов управляющих систем — возникли естественным образом как математическая модель реальных объектов, связанных с переработкой информации, в которых допускается многократное использование промежуточных результатов. К числу подобных объектов относятся, например, электронноламповые схемы, сети нейронов, некоторые виды вычислительных алгоритмов.

Этот класс изучается довольно давно с точки зрения сложности реализации такими схемами функций алгебры логики. В первую очередь здесь следует назвать работы [2—4]. Если рассматривать схемы из функциональных элементов как схемы вычисления функций с запоминанием промежуточных результатов, то упомянутые работы можно охарактеризовать так. В [2] получена асимптотическая оценка сложности реализации произвольной функции алгебры логики n переменных в произвольном базисе схемами без ограничения на число запоминаемых результатов, в [3] — схемами, в которых каждый результат может быть использован только один раз (т. е. формулами), и в [4] — схемами, в которых выход каждого элемента может быть соединен с небольшим числом входов других элементов, т. е. схемами, в которых каждый промежуточный результат используется небольшое число раз из-за ограничения на ветвление выходов элементов. В настоящей работе рассматривается класс схем, в котором накладываются ограничения на число «одновременно запоминаемых» промежуточных результатов или «число регистров» в схеме без ограничения на ветвление выходов элементов.

Определим понятие вычисления над некоторым множеством функций. В дальнейшем будем рассматривать функции алгебры логики, хотя понятие вычисления определяется для произвольных функций.

Пусть F — множество функций, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — алфавит переменных. *Вычислением над F и X* назовем последовательность $(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_L)$ такую, что для любого i $(1 \leqslant i \leqslant L)$ элемент g_i есть результат подстановки в одну из функций множества F вместо каждой ее переменной либо 1) переменной x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, либо 2) g_l $(l < i)$. Если хотя бы для одной переменной имеет место 2), назовем элемент g_l *существенным для элемента g_i*. Назовем g_i *активным для g_j $(i \leqslant j)$ в данном вычислении*, если g_i существен хотя бы для одного g_{j+s} $(s \geqslant 0)$. Содержательный смысл этого понятия состоит в том, что результат i-го шага (g_i) необходимо помнить для выполнения $j+s$-го шага вычисления. Таким образом, всякое вычисление B представляет собой «линеаризованную» схему вычисления функции (или системы функций *)) посредством функций из F, т. е. некоторых «элементарных

*) Строгие определения для реализации вычислением системы функций принципиально не отличаются, но ввиду их громоздкости не приведены.

вычислений», и в этом смысле можно говорить о реализации функций вычислениями. При этом элементы B, соответствующие реализуемым вычислением B функциям, будем называть *отмеченными*. Вычисление B называется *правильным*, если при $L>0$ элемент g_L является отмеченным и при $L=0$ существует отмеченный элемент. В дальнейшем будем рассматривать только правильные вычисления. Под *сложностью вычисления* B (обозначение $L(B)$) будем понимать величину L. Если $L=0$, то $L(B)=0$, и будем считать, что в этом случае вычислением B реализуется одноместная функция x_j (или система одноместных функций); в этом случае элемент x_j считается отмеченным (или считается отмеченным множество элементов, соответствующих этим одноместным функциям).

Толщиной j-го уровня вычисления B назовем величину $t_B(j)$, равную числу элементов вычисления B, активных для элемента g_j. *Толщиной вычисления* B назовем величину

$$T(B) = \max_{1<j<L} t_B(j).$$

При $L=0$ полагаем $T(B)=1$. Толщину вычисления можно интерпретировать как число регистров, необходимых для запоминания промежуточных результатов в данном вычислении *).

Специальный интерес представляет класс так называемых линейных суперпозиций, или формул вида [1]

$$f_{i_1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}, f_{i_2}(x_{l_1}, \ldots, f_{i_3}(x_{s_1}, \ldots, f_{i_4}(\ldots), \ldots, x_{s_t}), \ldots, x_{l_u}), x_{j_{k+1}}, \ldots);$$

в такой формуле для всякого w ($w=1, 2, \ldots$) в функцию f_{i_w} ($f_{i_w}\in F$) может быть осуществлена подстановка только одной функции из F и вместо только одной из переменных функции f_{i_w}. Соответствующая схема из функциональных элементов представляет собой цепочку элементов, каждый из которых (кроме одного — последнего) присоединен выходом к входам только одного элемента, и к входам каждого элемента присоединен выход не более чем одного элемента. Очевидно, что всякая функция, которая может быть представлена линейной суперпозицией над F, реализуема при помощи вычисления над F толщины 1, т. е. при вычислении такой функции на каждом шаге необходимо помнить только результат предыдущего шага.

В общем случае для схем из функциональных элементов на число одновременно запоминаемых результатов никаких ограничений не накладывается, т. е. их можно рассматривать как вычисления бесконечной толщины. Представляет интерес рассмотрение моделей, на которые такое ограничение наложено, а именно, схем, соответствующих вычислениям заданной толщины или схем с заданным числом регистров.

Очевидно, что если рассмотреть базис из всех двухвходовых элементов, то всякая конъюнкция (дизъюнкция) длины n может быть в нем реализована схемой, соответствующей вычислению толщины 1. В таком базисе всякая функция n переменных может быть реализована схемой, соответствующей вычислению толщины 2. В самом деле, всякая функция представима в дизъюнктивной нормальной форме, а д. н. ф. может быть реализована схемой вида, представленного на рис. 1.

*) Таким образом, вычислением толщины t может быть реализована система s функций, $s\leqslant t$, только при дополнительном ограничении на выбор отмеченных элементов. Можно при этом также рассматривать «внутреннюю» и «внешнюю» толщину вычисления, понимая первую как число «промежуточных» регистров, а вторую — как число «терминальных» регистров, при этом толщина вычисления может быть определена разными способами с сохранением условия $T(B)\leqslant T_{\text{внут}}(B)+T_{\text{внеш}}(B)$. Такие возможные определения здесь рассмотрены не будут.

Соответствующее вычисление B над множеством всех двуместных функций имеет вид

$$(x_1, \ldots, x_n, K_1, \ldots, K_{s_1}, \ldots, K_{s_1+s_2}, D_{s_1+s_2+1}, K_{s_1+s_2+2}, \ldots$$
$$\ldots, K_{s_1+\ldots+s_{k-1}+k-2}, \ldots, K_{s_1+\ldots+s_k+k-2}, D_{s_1+\ldots+s_k+k-1}),$$

где K_i и D_j имеют соответственно смысл g_i и g_j. Так, например, здесь элемент K_{s_1} для K_{s_1+1} существенным не является, но он активен для

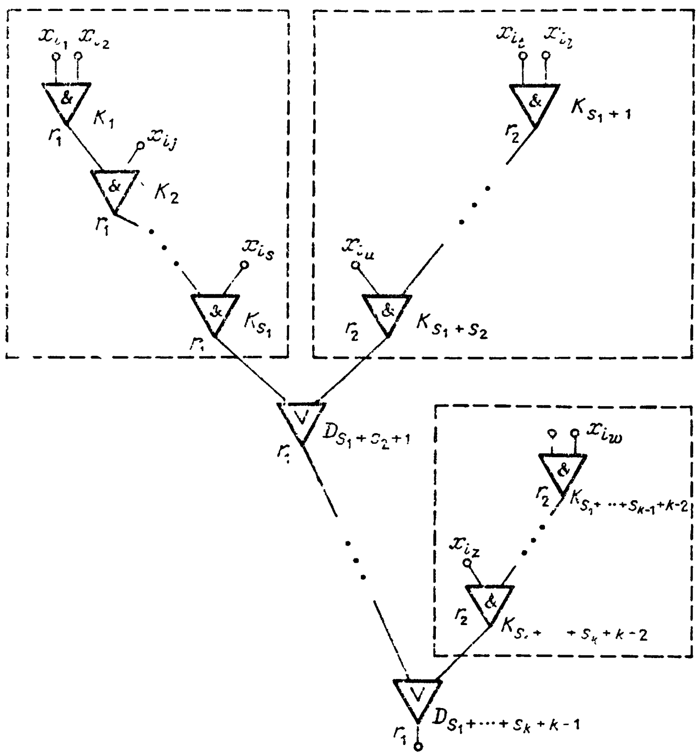

Рис. 1

K_{s_1+1}, потому что он существен для элемента $D_{s_1+s_2+1}$, но уже ни для $K_{s_1+s_2+2}$, ни для какого-либо элемента с бо́льшим номером K_{s_1} ни активным, ни существенным не является. Очевидно, что

$$t_B(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant s_1, \\ 2 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и $T(B) = 2$, т. е. вычисление B имеет толщину 2 *).

Шириной функции f назовем число переменных, от которых функция зависит, или иначе говоря, местность функции, и обозначим ее через $W(f)$. *Шириной вычисления* B назовем величину

$$W(B) = \max_{f_i \in B} W(f_i).$$

Так, ширина вычисления в рассмотренном примере равна 2 (K_i, D_j — двуместные функции).

*) Если, как на рис. 1, приписать выходам элементов имена регистров, то легко видеть, что всякая функция может быть реализована схемой не более чем с двумя регистрами.

Аналоги толщины и ширины могут быть определены для схем из функциональных элементов *).

Определим понятие *схемы толщины* t (из функциональных элементов). В классе всех схем из функциональных элементов (в некотором базисе $Б$) выделим подкласс $\mathcal{S}_t^Б$ таких, что всякая схема S из $\mathcal{S}_t^Б$ удовлетворяет дополнительным требованиям.

Все элементы S занумерованы и выходам всех элементов приписаны символы из некоторого множества $R = \{r_1, \ldots, r_t\}$, каждый из которых можно интерпретировать как имя регистра, в который «записывается» результат работы соответствующего элемента схемы (см. пример — рис. 1).

Процесс построения схемы S в рассматриваемом классе схем (толщины t) от построения в классе всех схем из функциональных элементов имеет два существенные отличия.

Первое состоит в ограничении на способ присоединения нового элемента к уже построенному фрагменту схемы (с занумерованными элементами и приписанными их входам именами регистров) присоединение возможно лишь к тем элементам, результаты работы которых сейчас «записаны» в регистрах, другими словами, для каждого регистра, т. е. для каждого r_i из R, может использоваться для присоединения к нему других элементов лишь элемент, помеченный символом r_i и имеющий среди таких наибольший в данном фрагменте номер.

Второе отличие — в приписывании имени регистра новому элементу. Это имя может либо отличаться от всех присутствующих в построенном фрагменте (и при этом возможности для присоединения следующего фрагмента увеличиваются), либо совпадать с уже приписанным одному из элементов, к которому присоединен новый элемент (и при этом к прежнему элементу с таким именем уже нельзя будет присоединять никакой новый элемент).

Таким образом, оба отличия представляют собой ограничения на структуру схемы.

Опишем теперь процесс построения схемы S более строго.

Фрагмент, построенный на j-м шаге ($j \leqslant L$), будем обозначать через S^j, элемент, присоединяемый к нему,— e_{j+1} (в результате присоединения последнего элемента — e_L — получим фрагмент S^L, изоморфный **) схеме S с точностью до обозначения выходов).

Обозначим множество входов элемента e_j через i_j, выход — через o_j. Множество входов схемы S^j (схемы S) обозначим через I^j (через I), множество выходов (т. е. аналогов активных элементов для $j+1$-го — в терминах вычислений) — через O^j (через O), множество элементов схемы S^j (схемы S) — через E^j (через E), множество символов $\{r_1, \ldots, r_{i_j}\}$ ($i_j \leqslant t$) имен регистров, приписанных выходам элементов схемы S^j (схемы S),— через R^j (через R). При этом через $e_i^{r_k}$ и $o_i^{r_k}$ будем соответственно обозначать i-й элемент схемы и его выход после приписывания ему символа r_k.

*) Напомним, что под схемой из функциональных элементов понимается ориентированный граф без циклов с помеченными ребрами и вершинами, множество вершин которого разбито на два подмножества. Вершины одного из них называются входами схемы. Вершинам другого подмножества приписаны буквы из алфавита функциональных символов. Некоторые вершины графа выделены и объявлены выходами схемы. Вершина с входящими в нее (занумерованными) ребрами, которой приписан функциональный символ (местность его равна числу входящих ребер), называется функциональным элементом. Другие концы входящих в вершину ребер называются входами функционального элемента. Иногда для удобства изображения элементы, т. е. внутренние вершины графа, заменяют плоскими фигурами с написанными внутри них функциональными символами.

**) Изоморфизм схем понимается традиционно, т. е. как изоморфизм сетей, соответствующие элементы которых имеют одинаковые имена.

Далее из описания построения схемы S^{j+1} будет видно, что R^{j+1} ($R^{j+1} \subseteq R$) — множество символов, приписанных выходам элементов этой схемы (т. е. всем элементам из E^{j+1}), совпадает с множеством символов, приписанных выходам ее, т. е. выходам, образующим O^{j+1}, и $|R^{j+1}| = |O^{j+1}|$. Исключение может составлять лишь последний, L-й, шаг процесса, или (именно это будет описано дальше) можно добавить еще один шаг — переход от S^L к S,— состоящий в провозглашении одного из выходов схемы S^L (или нескольких — если схема S реализует систему функций, но этот случай не рассматривается) выходом схемы S, т. е. $O = \{o_L\}$.

Тогда S^0 — такая схема, что

$$I^0 = I, \quad E^0 = \varnothing, \quad O^0 = \varnothing, \quad R^0 = \varnothing,$$

т. е. это схема, имеющая только входы и не имеющая выходов.

Если схема S реализует на выходе функцию x_i, то S^1 такова:

$$I^1 = I, \quad E^1 = \varnothing = E, \quad O^1 = \{x_i\} = O, \quad R^1 = \{r_1\} \subseteq R,$$

т. е. входу, соответствующему переменной x_i, приписывается символ r_1, и этот выход объявляется выходом схемы *).

Если схема S никакую функцию x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ на выходе не реализует, то S^1 может быть охарактеризована так:

$$I^1 = I,\ E^1 = \{e_1\} = \left\{e_1^{r_1}\right\}, \quad O^1 = \{o_1\} = \left\{o_1^{r_1}\right\}, \quad R^1 = \{r_1\} \subseteq R,$$

т. е. схема состоит из одного элемента e_1, присоединенного к некоторым входам из I^0, n входов и одного выхода, которому приписан символ r_1.

Пусть построена схема S^j:

$$I^j = I, \quad E^j = \{e_1, \ldots, e_j\}, \quad R^j \subseteq R,$$

$$O^j = \left\{o_v^{r_s} \,\middle|\, r_s \in R^j,\ v = \max_{e_k^{r_s} \in E^j} k\right\}, \ |O^j| = |R^j| \leqslant t.$$

Тогда S^{j+1} такова, что $I^{j+1} = I$, и получается путем присоединения к S^j элемента e_{j+1}, т. е. $E^{j+1} = E^j \cup \{e_{j+1}\}$ следующим образом. Часть входов элемента e_{j+1} может быть присоединена **) к выходам схемы S^j — некоторому их подмножеству O_1^j $(O_1^j \subseteq O^j)$, остальные — к вершинам из I. При этом o_{j+1} (т. е. выходу элемента e_{j+1}) может быть приписан либо 1) символ r_s из множества R^j (точнее, из его подмножества — символов, уже приписанных O_1^j), либо 2) символ r_l из множества $R \setminus R^j$. Тогда в случае 2)

$$R^{j+1} = R^j \cup \{r_l\}, \quad O^{j+1} = O^j \cup \left\{o_{j+1}^{r_l}\right\}, \quad |O^{j+1}| \leqslant t,$$

в случае 1)

$$R^{j+1} = R^j, \quad O^{j+1} = \left(O^j \diagdown \left\{o_{j'}^{r_s}\right\}\right) \cup \left\{o_{j+1}^{r_s}\right\}, \quad j' \leqslant j, \quad o_{j'} \in O_1^j, \quad |O^{j+1}| \leqslant t,$$

т. е. в этом случае выход $o_{j'}^{r_s}$ элемента $o_{j'}$, помеченный (тем же символом, что теперь приписан o_{j+1}), перестает быть выходом построенного фрагмента S^{j+1} и заменяется выходом $o_{j+1}^{r_s}$.

*) При реализации системы функций этот шаг не является единственным при построении схемы, хотя его без ограничения общности всегда можно считать первым.

**) Всякая минимальная схема S из $\mathcal{S}_t$, реализующая произвольную функцию f, связна и имеет одну выходную вершину, где реализуется функция f. В силу связности и ввиду того, что число выходов никакого фрагмента не превосходит t, почти все элементы по крайней мере одним входом присоединены к выходам (не более чем t) других элементов.

И, наконец, схема S — это такая схема, что

$$I=I^L,\quad O=\{o_L\},\quad R=R_L{}^{*}),\quad E=\{e_1,\ \ldots,\ e_L\}.$$

Будем называть построенные так схемы *схемами с t регистрами* или *схемами толщины t*, и будем обозначать толщину схемы S (по аналогии с вычислениями) $T(S)$.

Шириной элемента e будем называть число его входов (и обозначать $W(e)$). *Шириной схемы S* назовем величину $W(S)=\max\limits_{e\in S} W(e)$ Для класса схем толщины 1, $\mathscr{S}_1^Б$, т. е. для линейных суперпозиций над $Б$, введем величину **) $W(f)$ — минимум $W(S)$ по всем схемам S, реализующим функцию f, и, наконец, $W(n)=\max\limits_{f\in P_2^n} W(f)$ — функция Шеннона для ширины в классе линейных суперпозиций.

Пусть $\mathscr{S}_{p,t}^Б$ — подкласс $\mathscr{S}_t^Б$, содержащий только схемы, ширина которых не более p. Под сложностью схемы будем понимать число элементов, ее образующих. Функцию Шеннона (в смысле сложности) для $\mathscr{S}_{p,t}^Б$ определяем стандартным способом, и будем обозначать ее $L_{p,t}^Б(n)$.

Дальнейшее изложение будет посвящено изучению класса $\mathscr{S}_{p,t}^Б$ для $Б$, состоящего из всех p-местных функций. Будет показано следующее.

Теорема 1. $W(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$.

Отсюда следует, что лишь при $p\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ найдется такой базис $Б'$, что в $\mathscr{S}_{p,1}^{Б'}$ может быть реализована любая функция из P_2^n.

Теорема 2. *Для всех* $p\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$

$$L_{p,1}^Б(n)\asymp 2^{n-p}.$$

Теорема 3. *Для всех* $p\geqslant\log_2 n$

$$L_{p,2}^Б(n)\asymp 2^{n-p}.$$

Теорема 4. *Для всех фиксированных* $t\geqslant 3$ *и* $p\geqslant 2$

$$L_{p,t}^Б(n)\sim\frac{2^n}{(p-1)\log_2 n}.$$

Кроме того, в [1] рассматривались классы Φ_i структурно изоморфных суперпозиций. Всякая суперпозиция из класса Φ_i имеет одни и те же переменные (расположенные на одинаковых местах), но функциональные символы, входящие в эту суперпозицию, могут быть любыми из множества F. На языке схем из функциональных элементов это означает, что рассматриваются схемы, соответствующие которым графы являются деревьями специального вида, и что в один класс относятся схемы, имеющие одну и ту же сеть, и у которых соответствующим входам приписаны в точности одни и те же переменные, но в качестве функциональных символов выбираются любые из множества F с учетом соответствия местности. Таким образом, класс Φ_i задается определенной структурой и расположением переменных. Класс Φ_i называется *универсальным представлением над F для $G=\{g_j\}$*, если для всякой g_j из G найдется такое множество функций $F'\subseteq F$, что в результате подстановки

---

*) На самом деле всякую схему толщины $t'<t$, можно рассматривать как схему толщины t, и поэтому всегда $R_L\subseteq R$.

**) Если $t\geqslant 2$, то, например, во всяком базисе $Б$, включающем все двуместные функции, для всякой f из P_2^n всегда выполнено $W(f)=2$, поэтому интересно рассмотрение этой характеристики лишь для $t=1$.

его элементов в Φ_i получается формула (схема из функциональных элементов), реализующая g_j. Под *глубиной линейной суперпозиции* понимается число функциональных символов (или число функциональных элементов — для схем) в ней. В [1] был рассмотрен в качестве E класс P_2^{n-1}, и было установлено, что 1) для P_2^4 не существует универсальных линейных представлений глубины 4 над P_2^3, 2) всякая функция из P_2 представима линейной суперпозицией над P_2^3 глубины 4, 3) при всех $n \geqslant 4$ для P_2^n существуют универсальные линейные представления глубины 5 над P_2^{n-1}.

Таким образом, в [1] был рассмотрен вопрос о возможности реализации P_2^n линейными суперпозициями ширины $n-1$ и о сложности такой реализации.

Полностью ответ на вопрос о возможности реализации P_2^n линейными суперпозициями ширины p дают теорема 1 и теорема 2.

Работа выполнена под руководством О. Б. Лупанова.

Перейдем к доказательству сформулированных утверждений.

Пусть $X=(x_1, \ldots, x_s)$, $Y=(x_{s+1}, \ldots, x_n)$.

Замечание 1. Для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место представление

$$f(X, Y) = \Big(\Big(\ldots\Big(\big(f(\tilde\sigma_1, Y) + f(\tilde\sigma_2, Y)\big)\overline{K}_{\tilde\sigma_2}(X) + f(\tilde\sigma_2, Y) + \\ + f(\tilde\sigma_3, Y)\Big)\overline{K}_{\tilde\sigma_3}(X) + \ldots + f\big(\tilde\sigma_{2^s-1}, Y\big)\Big)\overline{K}_{\tilde\sigma_{2^s-1}}(X) + f\big(\tilde\sigma_{2^s-1}, Y\big) + \\ + f\big(\tilde\sigma_{2^s}, Y\big)\Big)\overline{K}_{\tilde\sigma_{2^s}}(X) + f\big(\tilde\sigma_{2^s}, Y\big), \quad (1)$$

где $\tilde\sigma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^s)$ — различные наборы длины s из нулей и единиц, $K_{\tilde\sigma_i}(X)$ — конъюнкция, обращающаяся в единицу на наборе $\tilde\sigma_i$, $+$ — сложение по модулю 2.

Следствие. Если в представлении (1) положить

$$f(\tilde\sigma_i, Y) + f(\tilde\sigma_{i+1}, Y) = \varphi_i(Y), \quad i < 2^s, \quad f(\tilde\sigma_{2^s}, Y) = \varphi_{2^s}(Y),$$

получим

$$f(X, Y) = \Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\varphi_1(Y)\overline{K}_{\tilde\sigma_2}(X) + \varphi_2(Y)\Big)\overline{K}_{\tilde\sigma_3}(X) + \ldots \\ \ldots + \varphi_{2^s-2}(Y)\Big)\overline{K}_{\tilde\sigma_{2^s-1}}(X) + \varphi_{2^s-1}(Y)\Big)\overline{K}_{\tilde\sigma_{2^s}}(X) + \varphi_{2^s}(Y). \quad (2)$$

Замечание 2. Наряду с (1) и (2) полезным оказывается представление

$$f(X, Y) = \Big(\Big(\Big(\ldots\Big(f_1(Y) \vee K_{\tilde\sigma_2}(X) + f_2(Y)\Big) \vee K_{\tilde\sigma_3}(X) + \ldots\Big) \vee K_{\tilde\sigma_{2^s-2}}(X) + \\ + f_{2^s-2}(Y)\Big) \vee K_{\tilde\sigma_{2^s-1}}(X) + f_{2^s-1}(Y)\Big) \vee K_{\tilde\sigma_{2^s}}(X) + f_{2^s}(Y). \quad (3)$$

В его справедливости легко убедиться, если, например, рассмотреть представление

$$f(X, Y) = \bigvee_{i=1}^{2^s} K_{\tilde\sigma_i}(X)\, g_i(Y)$$

и положить

$$f_{2^s}(Y) = g_{2^s}(Y) + 1, \quad f_i(Y) = g_i(Y) + g_{i+1}(Y), \quad 1 < i < 2^s,$$
$$f_1(Y) = g_1(Y) + g_2(Y) + 1.$$

Лемма 1. $W(n) \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$.

Доказательство. Рассмотрим представление (2). Очевидно, оно является линейной суперпозицией (т. е. схемой толщины 1) ширины $w = \max\limits_{0<s\leqslant n}(s+1, n-s+1)$ и, следовательно, произвольная функция n переменных всегда реализуема линейной суперпозицией ширины не более $w_0 = \min w$, т. е. $W(n) \leqslant w_0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $n = 2m$ минимум величины w достигается при $s = m$ и равен $m+1$. При $n = 2m-1$ минимум w также равен $m+1$, и достигается он при $s = m-1$ и при $s = m$. Таким образом, $w_0 = \min w = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, и лемма доказана.

Рассмотрим далее класс функций, для которых представление полиномом Жегалкина *) имеет вид

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}} x_{i_1} \ldots x_{i_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}} + g(x_1, \ldots, g_n), \tag{4}$$

т. е. в нем содержатся все конъюнкции переменных $x_1, \ldots, x_n$ длины $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ и, возможно, некоторые конъюнкции меньшей длины — в (4) их сумма обозначена $g(x_1, \ldots, x_n)$. Всякая функция $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ вида (4) обладает следующим свойством.

При любой подстановке констант вместо любых $\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ переменных функции f_0 сохраняется существенная зависимость полученной функции от $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ оставшихся переменных. (*)

В самом деле, при любой подстановке констант вместо любых $\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ переменных по крайней мере одна конъюнкция длины $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ не обратится ни в константу, ни в конъюнкцию меньшей длины (это конъюнкция, состоящая из оставшихся переменных,— пусть это переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}$). Кроме того, может быть, в сумме, полученной в результате подстановки, будут присутствовать конъюнкции меньшей длины. Пусть полученная функция (обозначим ее f_0') не зависит существенно от некоторой переменной x_{i_j}. Представим ее в виде $f_0' = x_{i_j}A + B$, где A и B — функции, не зависящие от x_{i_j}, и A — функция того же типа (в смысле структуры ее полинома Жегалкина), что и f_0', т. е. сумма, состоящая из одной конъюнкции всех оставшихся $\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ переменных и, быть может, конъюнкций меньшей длины. Последовательно применяя то же разложение, получим: $A = x_{i_l}(\ldots x_{i_s}(x_{i_t} + B^*) + \ldots) + B'$, где B^* — константа. В силу предположения, т. е. в силу отсутствия существенной зависимости f_0' от переменной x_{i_j} на всякой паре наборов значений переменных $\tilde{\sigma}_1 = \left(\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_j}, \ldots, \sigma_{i_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}\right)$ и $\tilde{\sigma}_2 = \left(\sigma_{i_1}, \ldots, \bar{\sigma}_{i_j}, \ldots, \sigma_{i_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}\right)$ выполнено $f_0'(\tilde{\sigma}_1) = f_0'(\tilde{\sigma}_2)$, а это возможно лишь при $A \equiv$

*) Представление любой функции полиномом Жегалкина единственно, и всякий полином Жегалкина существенно зависит от всех своих переменных.

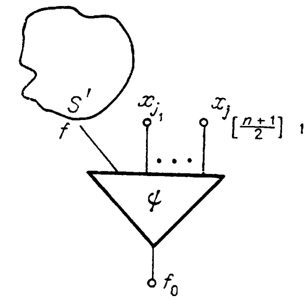

Рис. 2

$\equiv 0$, т. е. если A не зависит существенно ни от каких своих переменных. Тогда, применяя к A и далее те же рассуждения, что и к f_0', получим $x_{i_t} + B^* \equiv 0$, но это невозможно ни при какой константе B^*. Следовательно, предположение о том, что f_0' не зависит существенно хотя бы от одной из своих переменных, неверно, и свойством $(*)$ обладает всякая функция вида (4).

Замечание 3. Всякая схема S, реализующая функцию $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ вида (4), такая, что ее выходной элемент ψ имеет $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ входов и $\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ из них являются входами схемы (т. е. всякая схема вида, изображенного на рис. 2), обладает следующим свойством.

Подсхема S', присоединенная к единственному входу элемента ψ, не являющемуся входом схемы S, реализует функцию вида (4). $(**)$

В самом деле, очевидно, без ограничения общности можно считать, что вход элемента ψ, соединенный с подсхемой S', является первым, как показано на рис. 2. Если f_0 реализована схемой рис. 2, то

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = \psi\left(f(x_1, \ldots, x_n), x_{j_1}, \ldots, x_{j_{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}}\right).$$

Чтобы установить свойство 2, разложим функцию ψ по первой переменной:

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)\, A\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}}\right) + B\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}}\right).$$

Легко убедиться, что $A \equiv 1$. Если бы это было не так, то нашелся бы такой набор $\tilde\sigma = \left(\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}}\right)$, что $A(\tilde\sigma) = 0$, и тогда $f_0(\tilde\sigma) = B(\tilde\sigma) = \mathrm{const}$, что невозможно в силу свойства $(*)$. Тогда

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}} x_{i_1} \ldots x_{i_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}} + g(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_n) + B\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}}\right),$$

и, следовательно, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция вида (4).

Лемма 2. $W(n) \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ вида (4). Из свойства $(**)$ очевидным образом следует, что f_0 не может быть реализована линейной суперпозицией ширины $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Следовательно,

$$W(f_0) \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1,$$

и поэтому

$$W(n) \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1.$$

Из лемм 1 и 2 следует

Теорема 1.

$$W(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1.$$

Замечание 4. Для всех $p\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ существуют универсальные линейные представления для P_2^n над P_2^p (схемы ширины p, толщины 1) глубины не большей $2\cdot 2^{n-p}-1$. Это очевидным образом следует из (2).

Лемма 3*). *Для всех* $p\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$

$$L_{p,1}(n)\lesssim 2^{n-p}.$$

Доказательство. Воспользуемся разложением (2) для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, получим

$$L_{p,1}(f)\leqslant 2\cdot 2^{n-p}-1.$$

Тогда, очевидно,

$$L_{p,1}(n)\lesssim 2^{n-p}.$$

Лемма 4. *Число неизоморфных схем из* $\mathcal{S}_{p,t}$ *сложности* L, *реализующих функции* n *переменных, не превосходит*

$$\left(c_1^p t(n+t)^{p-1}\,2^{2^p}\right)^L.$$

Доказательство. Из описания способа построения схемы рассматриваемого класса следует, что всякая минимальная схема для произвольной функции f связна, имеет одну выходную вершину (L вершин ее, не являющихся входами, занумерованы), и, как известно [2], всегда в такой схеме можно выделить дерево, содержащее все вершины схемы (среди которых L не являются концевыми, и в каждую из них входит не больше p ребер, и n концевых вершин, т. е. общее число вершин дерева не больше $L+n$, и, в свою очередь, не превосходит Lp), и все ребра ориентированы к выходной вершине (корню). Число таких неизоморфных деревьев, как известно [2], не превосходит $c_1^{L+n}\leqslant c_1^{Lp}$. В дереве присутствует не менее одного ребра, входящего в каждую внутреннюю вершину. Концам остальных не более чем $p-1$ ребер, входящих в каждую из L вершин, могут быть приписаны символы из алфавита переменных $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$, либо каждое из этих ребер может быть присоединено не более чем к t выходам элементов — не более $(n+t)^{(p-1)L}$ возможностей. Каждой из L вершин приписан один из символов $r_1, \ldots, r_t$. Возможностей для этого не более t^L. Способов приписывания 2^{2^p} функциональных символов L элементам схемы не более чем $\left(2^{2^p}\right)^L$. Таким образом, число так построенных схем сложности L не превосходит

$$c_1^{pL}t^L(n+t)^{(p-1)L}\left(2^{2^p}\right)^L.$$

Лемма 5. *При всех* $p\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$

$$L_{p,1}(n)\gtrsim 2^{n-p}.$$

*) Ввиду того, что далее рассматривается базис из всех функций, зависящих не более чем от p переменных, индекс $Б$ в обозначениях класса схем и функции Шеннона опускается.

Доказательство. Число различных схем, очевидно, не должно быть меньшим числа различных функций, которые они должны реализовать, т. е. числа всех функций n переменных, поэтому (см. лемму 4) имеем

$$\left(c_1^p(n+1)^{p-1}2^{2^p}\right)^L \geqslant 2^{2^n}.$$

Отсюда следует, что

$$L(c_2p+(p-1)\log_2(n+1)+2^p)\geqslant 2^n,$$

т. е.

$$L2^p\left(1+\frac{(p-1)\log_2(n+1)+c_2p}{2^p}\right)\geqslant 2^n,$$

и, в условиях леммы получаем

$$L \succsim 2^{n-p}.$$

Из лемм 3 и 5 следует

Теорема 2. *Для всех* $p\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$

$$L_{p,1}(n)\asymp 2^{n-p}.$$

Лемма 6. *При всех* $p\geqslant\log_2 n$

$$L_{p,2}(n)\lesssim 2^{n-p}.$$

Доказательство. Всякая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде (2). Если функции $\varphi_i(Y)$ реализуются линейными суперпозициями $\left(\text{а } K_{\tilde{\sigma}_i}(X)\right)$ также представлены линейными суперпозициями, то разложению (2) соответствует схема S толщины 2 (т. е. схема с двумя регистрами r_1 и r_2; см. рис. 3). В силу леммы 3 для всех i $(i=1, \ldots, 2^s)$ при условии $p\geqslant\left[\frac{n-s+1}{2}\right]+1$ выполняется неравенство

$$L_{p,1}(\varphi_i)\leqslant 2^{n-s-p}.$$

Тогда для всякой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$

$$L_{p,2}(f)\leqslant L(S) = \sum_{i=1}^{2^s}\left(L(\varphi_i)+L\left(\overline{K}_{\tilde{\sigma}_i}\right)+c_3\right)\lesssim$$

$$\lesssim 2^s\left(2^{n-s-p}+c_4\frac{s}{p}\right)=2^{n-p}+c_4 2^s\frac{s}{p}.$$

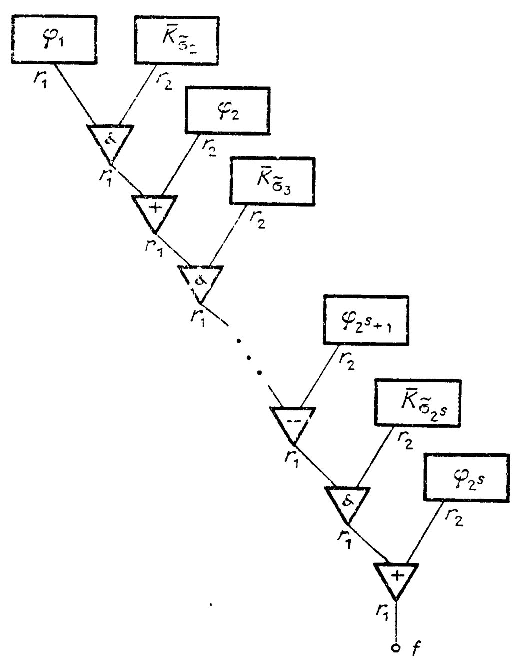

Рис. 3

Положим $s=n-2p+3$, получим

$$L_{p,2}(f)\lesssim 2^{n-p}+c_5 2^{n-2p}\frac{n-2p+3}{p}=2^{n-p}\left(1+c_5\frac{n-2p+3}{2^p p}\right),$$

и при p, удовлетворяющем условию леммы, имеем

$$L_{p,2}(f)\lesssim 2^{n-p}.$$

Следовательно,

$$L_{p,2}(n)\lesssim 2^{n-p}.$$

Лемма 7. *При всех* $p \geqslant \log_2 n$

$$L_{p,2}(n) \succsim 2^{n-p}.$$

Доказательство. Из леммы 4 и условия необходимости реализации всех функций n переменных схемами сложности L получаем

$$L(c_1 p + c_6 + (p-1)\log_2(n+2) + 2^p) \geqslant 2^n,$$

следовательно,

$$L 2^p \left(1 + \frac{(p-1)\log_2(n+2) + c_1 p + c_6}{2^p}\right) \geqslant 2^n,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Из лемм 6 и 7 следует

Теорема 3. *При всех* $p \geqslant \log_2 n$

$$L_{p,2}(n) \asymp 2^{n-p}.$$

Лемма 8. *Для любых фиксированных* $p \geqslant 2$ *и* $t \geqslant 3$

$$L_{p,t}(n) \succsim \frac{2^n}{(p-1)\log_2 n}.$$

Доказательство. В силу леммы 4 для возможности реализации всех функций n переменных схемами сложности L должно выполняться неравенство

$$\left(c_1^p t (n+t)^{p-1} 2^{2^p}\right)^L \geqslant 2^{2^n}.$$

Отсюда следует, что для некоторой константы $c_7(p, t)$ выполняется неравенство

$$L(c_7(p, t) + (p-1)\log_2(n+t)) \geqslant 2^n,$$

и в условиях леммы выполняется

$$L \succsim \frac{2^n}{(p-1)\log_2 n}.$$

Лемма 9. *Для любых фиксированных* $p \geqslant 2$ *и* $t \geqslant 3$

$$L_{p,t}(n) \lesssim \frac{2^n}{(p-1)\log_2 n}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$L_{p,t}(n) \leqslant L_{p,3}(n) \tag{5}$$

для всех t, бо́льших 3.

Верхняя оценка для $L_{p,3}(n)$ может быть получена на основе представления произвольной функции [3] в виде *)

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \bigvee_{i\tilde{\sigma}k} \bigvee_{\tilde{\tau}} K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\, \varphi_i(\tilde{u})\, f^{(2)}_{k,\tilde{\tau}}(\tilde{z}) \left(\mathop{\&}_{\tilde{\rho}} \left(D_{\tilde{\rho}'}(\tilde{y}) \vee f^{(3)}_{i\tilde{\sigma}\tilde{\rho}k\tilde{\tau}}(\tilde{u}) \right) \right),$$

здесь

$\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, $\tilde{t}$ — наборы переменных $(x_1, \ldots, x_a)$, $(x_{a+1}, \ldots, x_{a+b})$, $(x_{a+b+1}, \ldots, x_{a+b+c})$, $(x_{a+b+c+1}, \ldots, x_{a+b+c+d})$, $a+b+c+d=n$, $d=2^D$;

$K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})$ — конъюнкция $x_1^{\sigma_1} \ldots x_a^{\sigma_a}$;

$D_{\tilde{\rho}'}(\tilde{y})$ — отрицание $K_{\tilde{\rho}}(\tilde{y})$, т. е. $x_{a+1}^{\bar{\rho}_{a+1}} \vee \ldots \vee x_{a+b}^{\bar{\rho}_{a+b}}$;

*) Здесь полностью сохранены обозначения из [3].

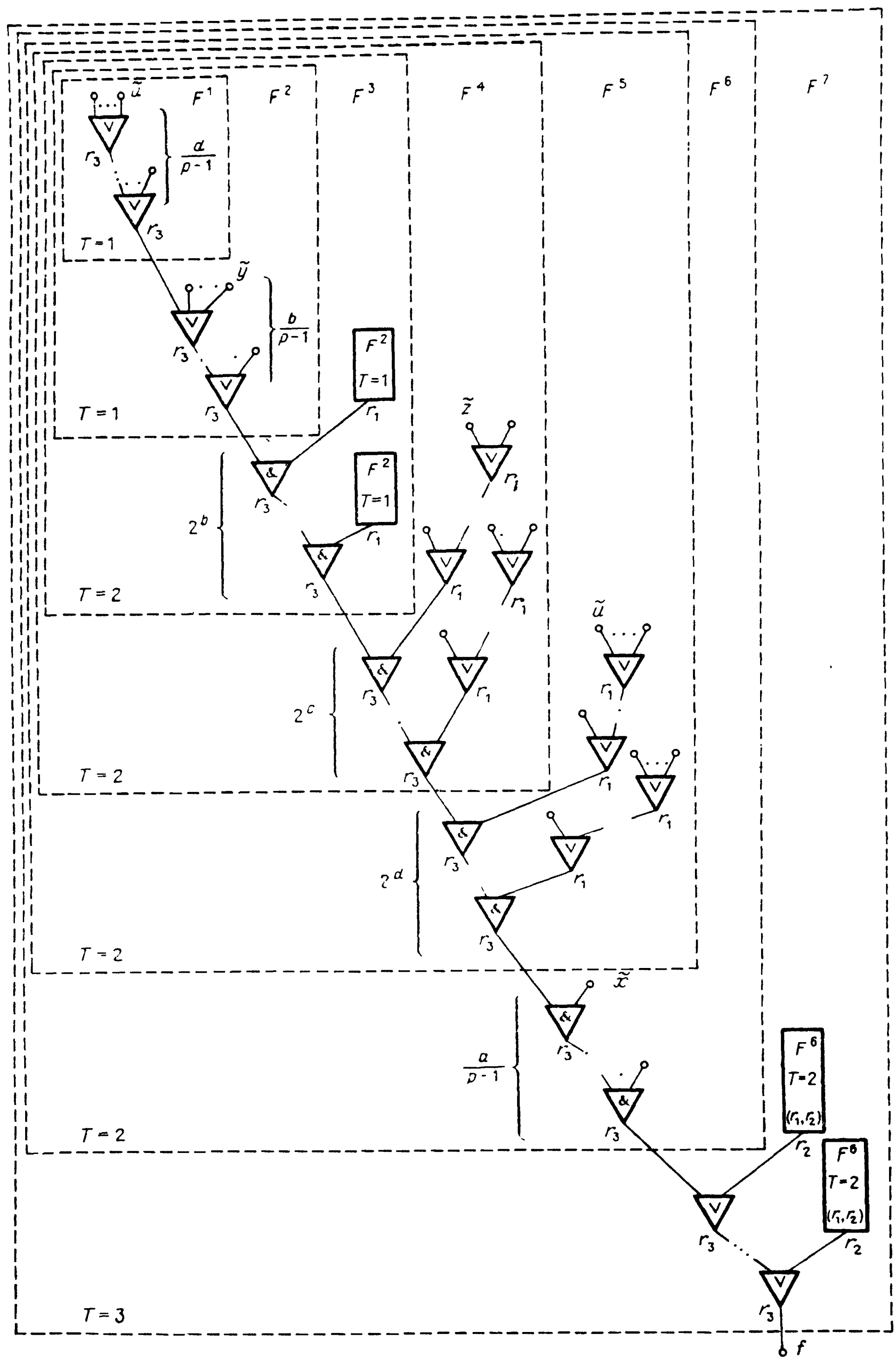

Рис. 4

$\varphi_i(\tilde u)$ — характеристическая функция i-й сферы при разбиении множества всех наборов длины d на попарно не пересекающиеся сферы;

$f^{(2)}_{k\tilde\tau}(\tilde z)$ и $f^{(3)}_{i\tilde\sigma\tilde\rho k}(\tilde u)$ — характеристические функции k-й полосы и столбца τ (длины s) в ней для разбиения таблицы функции, являющейся «проекцией» функции $f(\tilde\sigma, \tilde\rho, \tilde z, \tilde u)$ по i-й сфере, на полосы ширины s.

Изображенная на рис. 4 схема (ширины p) состоит из следующих подсхем:

F^1: $f^{(3)}_{i\tilde{\sigma}\tilde{\rho}k\tilde{\tau}}(\tilde{u})$ реализуется схемой толщины 1; это дизъюнкция переменных $\tilde{u}$; сумма сложностей таких схем $(L_1^{\tilde{\tau}})$ при фиксированных i, $\tilde{\sigma}$, ρ, k не превосходит $d/(p-1)$;

F^2: $D_{\tilde{\rho}'}(\tilde{y}) \vee [F^1]$ имеет толщину 1 и получается из F' добавлением цепочки дизъюнкций длины $b/(p-1)$, т. е. $L_2 = b/(p-1) + L_1^{\tilde{\tau}}$;

F^3: $\underset{\tilde{\rho}}{\&}[F^2]$ имеет толщину 2 и получается конъюнктивным соединением схем F^2, $L_3 = \sum\limits_{\tilde{\rho}} (L_2+1) - 1 \leqslant \frac{b}{p-1} 2^b + \sum\limits_{\tilde{\rho}} L_1^{\tilde{\tau}}$;

F^4: $f^{(2)}_{k\tilde{\tau}}(\tilde{z}) \,\&\, [F^3]$ имеет толщину 2 и получается последовательным умножением F^3 на дизъюнктивные члены конъюнктивной нормальной формы функции $f^{(2)}_{k\tilde{\tau}}(\tilde{z})$, $L_4 \leqslant L_3 + \frac{c}{p-1} 2^c$;

F^5: $\varphi_i(\tilde{u}) \,\&\, [F^4]$ имеет толщину 2 и получается последовательным умножением F^4 на дизъюнктивные члены конъюнктивной нормальной формы характеристической функции $\varphi_i(\tilde{u})$, $L_5 = L_4 + \frac{d}{p-1} 2^d$;

F^6: $K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) \,\&\, [F^5]$ имеет толщину 2 и получается последовательным умножением F^5 на члены конъюнкции $K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})$, $L_6 = L_5 + \frac{a}{p-1}$;

F^7: дизъюнкция всех F^6 — имеет толщину 3 и получается последовательным сложением (дизъюнкцией) всех F^6 толщины 2 (по $\tilde{\sigma}$, i, k, $\tilde{\tau}$),

$$L_7 = 2^a \frac{2^d}{d}\left(\frac{2^c}{s}+1\right)\left(\frac{2^s}{p-1}(a + d2^d + c2^c + b2^b) + \sum_{\tilde{\tau}}\sum_{\tilde{\rho}} L_1^{\tilde{\tau}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2^a \frac{2^d}{d}\left(\frac{2^c}{s}+1\right)\left(\frac{2^s}{p-1}(a + d2^d + c2^c + b2^b) + \frac{2^b d}{p-1}\right) =$$
$$= \frac{2^n}{(p-1)s}\left(1+\frac{s}{2^c}\right)\left(1 + \frac{a2^s}{d2^b} + \frac{2^{d+s}}{2^b} + \frac{c2^{c+s}}{d2^b} + \frac{2^s b}{d}\right).$$

Величина L_7 представляет собой сложность всей схемы для произвольной функции f, т. е. $L_{p,3}(f) \leqslant L_7$, и $L_{p,3}(n) \leqslant L_{p,3}(f)$. Выбрав, как и в [3], $d = 2^{[\log_2 n]-1}$, $c = [2\log_2\log_2 n]$, $b = [2\log_2 n]$, $s = [\log_2 n - 2\log_2\log_2 n]$, убеждаемся, что при этом

$$\frac{a2^s}{d2^b} \to 0, \quad \frac{2^{d+s}}{2^b} \to 0, \quad \frac{c2^{c+s}}{d2^b} \to 0, \quad \frac{2^s b}{d} \to 0, \frac{s}{2^c} \to 0,$$

и тогда получаем

$$L_{p,3}(n) \leqslant \frac{2^n}{(p-1)\log_2 n}.$$

Отсюда и из (5) получаем утверждение леммы.

Из лемм 7 и 8 следует

Теорема 4. *Для всех фиксированных* $p \geqslant 2$ *и* $t \geqslant 3$.

$$L_{p,t}(n) \sim \frac{2^n}{(p-1)\log_2 n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпова Н. А. О сложности представлений функций алгебры логики линейными суперпозициями // Дискретный анализ. Вып. 43.— Новосибирск, 1986.
2. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Изв. вузов. Радиофизика.— 1958.— Т. 1, № 1.
3. Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе &, $\vee$, $^-$ // Проблемы кибернетики. Вып. 6.— М.: Физматгиз, 1961.
4. Лупанов О. Б. Об одном классе схем из функциональных элементов (формулы с частичной памятью) // Проблемы кибернетики. Вып. 7.— М.: Физматгиз, 1962.