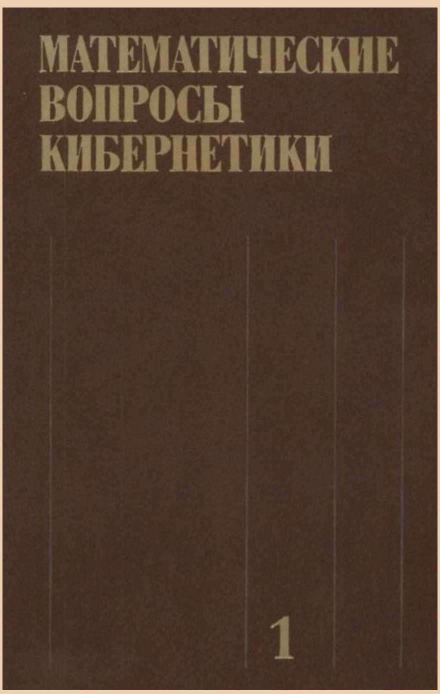


С. В. Яблонский

Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1988-5

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАДЕЖНОСТИ И КОНТРОЛЯ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

С. В. ЯБЛОНСКИЙ
(МОСКВА)

Данная работа является обзором, в который включены основные результаты теории надежности и контроля. Первый вариант этого обзора был доложен в 1983 г. на общем собрании Отделения математики. Промежуточные варианты использовались для докладов на Всесоюзном семинаре по дискретной математике в 1984 г. (МГУ) — имеется краткая публикация [49] — и на VII Конференции по теоретической кибернетике в 1985 г. (г. Иркутск). Окончательный вариант существенно расширен.

Надежность и контроль — одно из интенсивно развивающихся направлений теории управляющих систем, которая в свою очередь является важнейшим разделом математической кибернетики.

Теория управляющих систем имеет дело с определенными классами дискретных моделей, называемых управляющими системами (УС). В обзоре рассматриваются четыре класса УС. Дадим их краткое описание.

1. Контактные схемы. Дан алфавит переменных (внешняя память) $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$. Имеются два типа элементов — замыкающие и размыкающие контакты над X. Их обозначим соответственно $x_1, \ldots, x_n$ и $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$.

p-полюсной контактной схемой Σ называется граф Γ с p выделенными вершинами, каждому ребру которого приписан один из символов $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Выделенные вершины называются полюсами схемы Σ, они нумеруются числами $1, \ldots, p$.

Каждой p-полюсной контактной схеме Σ однозначным образом сопоставляется матрица

$$M=\|f_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\|, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant p,$$

из булевских функций так, что $f_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ описывает проводимость между полюсами i и j в зависимости от значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ (определяющих состояния контактов).

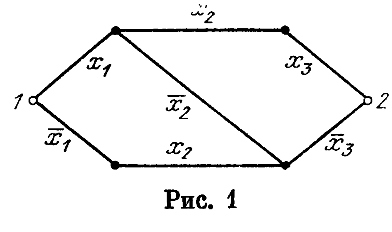


Рис. 1

Пример. На рис. 1 изображена контактная схема над $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, имеющая два полюса ($p=2$), с матрицей проводимости M, где

$$M=\begin{Vmatrix} 1 & f_{12}(x_1, x_2, x_3) \\ f_{21}(x_1, x_2, x_3) & 1 \end{Vmatrix}, \quad f_{12}=f_{21}=x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3.$$

В случае двухполюсных контактных схем проводимость фактически определяется одной булевской функцией.

2. Схемы из функциональных элементов. Имеются алфавиты X и Z (внешняя память) для пометки соответственно входов и выходов схемы. Задается базис $Б=\{F_i\}$ функциональных элементов F_i, каждый из которых является элементарным преобразователем с n_i входами и одним выходом (рис. 2). Преобразователь F_i реализует некоторую n_i-местную булевскую функцию f_i^0.

Из указанных элементов индуктивным образом по определенным правилам (правило объединения схем, правило подключения элемента

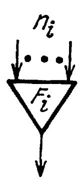


Рис. 2

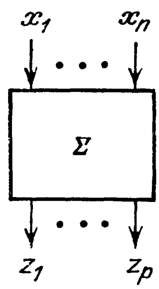


Рис. 3

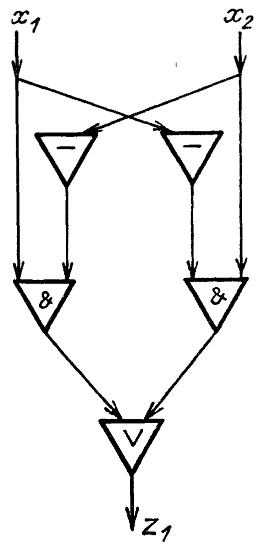


Рис. 4

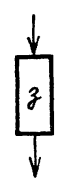


Рис. 5

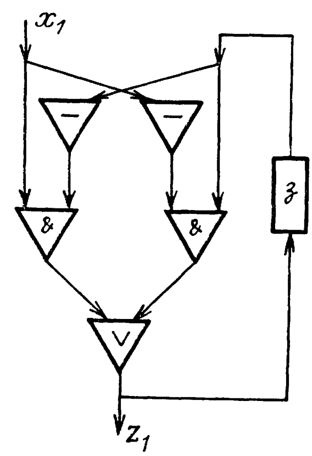
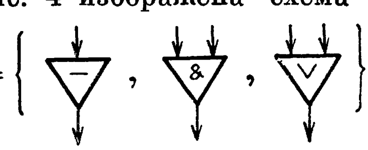


Рис. 6

к схеме и правило разветвления выходов схемы) строятся схемы, называемые схемами из функциональных элементов (ФЭ). Схема из ФЭ — некоторое соединение элементарных преобразователей. Пусть Σ — схема из ФЭ с n входами и p выходами, которые помечены соответственно символами $x_1, \ldots, x_n$ и $z_1, \ldots, z_p$ (рис. 3). Каждой схеме $\Sigma=\Sigma(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p)$ естественным образом сопоставляется система булевских уравнений, описывающая дискретное преобразование, осуществляемое Σ:

$$z_1=f_1(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$z_p=f_p(x_1, \ldots, x_n).$$

Пример. На рис. 4 изображена схема из ФЭ над $X_0=\{x_1, x_2\}$, $Z=\{z_1\}$, базисом $Б=$  с $f_1^0(x_1)=\bar{x}_1$, $f_2^0(x_1, x_2)=x_1 \mathbin{\&} x_2$ и $f_3^0(x_1, x_2)=x_1 \vee x_2$. Соответствующая этой схеме система уравнений сводится к одному равенству

$$z_1=(x_1 \mathbin{\&} \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \mathbin{\&} x_2) \quad \text{или} \quad z_1=x_1+x_2 \pmod 2.$$

3. Автоматы. Имеются алфавиты X и Z (внешняя память) и Y (внутренняя память).

Дан базис $Б=\{F_0, F_i\ (i=1, 2, \ldots)\}$, содержащий наряду с обычными функциональными элементами F_i $(i \geqslant 1)$ еще один специальный элемент F_0 (рис. 5), называемый элементом задержки.

При определении автоматных схем над Б к обычным правилам построения схем из ФЭ добавляется правило введения обратной связи, разрешающее соединять выход схемы, если он является выходом элемента задержки, с любым входом. В автоматной схеме Σ с n входами, p выходами и l элементами задержки входам приписываются символы $x_1, \ldots, x_n$, выходам — $z_1, \ldots, z_p$ и входам задержек — $y_1, \ldots, y_l$.

Функционирование Σ определяется более сложным образом с помощью канонических уравнений

$$Z(t)=F(X(t),\ Y(t-1)),$$
$$Y(t)=G(X(t),\ Y(t-1)),$$
$$Y(0)=0,$$

где:

$X(t)$ — булевский вектор, характеризующий состояние входов в момент t;

$Z(t)$ — булевский вектор, характеризующий состояние выходов в момент t;

$Y(t)$ — булевский вектор, характеризующий состояние входов задержек в момент t.

Значения вектора Y называются *состояниями автомата*.

Пример. На рис. 6 изображена автоматная схема. Ее функционирование описывается каноническими уравнениями

$$z_1(t)=x_1(t)+y_1(t-1)\pmod 2,$$
$$y_1(t)=x_1(t)+y_1(t-1)\pmod 2,$$
$$y_1(0)=0.$$

Автомат является дискретным преобразователем, работающим во времени и имеющим внутреннюю конечную память. Он фактически осуществляет преобразование входных последовательностей

$$\{x(1),\ x(2),\ \ldots,\ x(t),\ \ldots\}$$

в выходные последовательности

$$\{z(1),\ z(2),\ \ldots,\ z(t),\ \ldots\},$$

характеризуемое автоматной функцией $f(X)$.

4. Программы. Рассматриваются алфавит X (для введения исходных данных) и вспомогательный алфавит Y.

Фиксируется некоторый базис Б $=\{F,\ P\}$, состоящий из некоторого подмножества F общерекурсивных функций и некоторого подмножества P общерекурсивных предикатов.

Пусть Γ — ориентированный граф с выделенной (начальной) вершиной, у которого каждая вершина имеет порядок, т. е. число исходящих ребер, либо 0, либо 1, либо 2 (в последнем случае исходящие ребра помечаются одно числом 0, другое — 1).

Программой Σ *над базисом* Б называется граф Γ, у которого:

а) вершинам порядка 1 приписаны действия $f_i(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}) \Rightarrow z_j$, где $f_i \in F$, $z_j, z_{i_1}, \ldots, z_{i_k} \in X \cup Y$;

б) вершинам порядка 2 приписаны предикаты $p_s(z_{j_1}, \ldots, z_{j_l})$, где $p_s \in P$, $z_{j_1}, \ldots, z_{j_l} \in X \cup Y$, и выделено одно переменное $z_0 \in X \cup Y$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ — все символы из $X \cup Y$, встречающиеся в Σ, включая также z_0. Сопоставим программе Σ частично рекурсивную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Возьмем $x_1=\alpha_1, \ldots, x_n=\alpha_n$ и найдем $f(\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n)$. Для этого определим в моменты $t=0,\ 1, \ldots$ активную вершину графа и значения переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. При $t=0$ активной вершиной является начальная вершина, а $x_1=\alpha_1, \ldots, x_n=\alpha_n$,

$y_1 = \ldots = y_m = 0$. Если найдена активная вершина и значения переменных для момента t, то рассматривают эту вершину. Возможны три случая.

1. Вершине приписано действие $f_i(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}) \Rightarrow z^j$. Значения переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ в момент $t+1$ находятся по значениям их в момент t путем замены значения z_j на $f_i(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k})$. Исходящее из этой вершины ребро дает активную вершину для $t+1$.

2. Вершине приписан предикат $p_s(z_{j_1}, \ldots, z_{j_k})$. В этом случае значения переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ не меняются к моменту $t+1$, а активная вершина определяется ребром, исходящим из данной вершины, номер которого равен значению предиката p_s.

3. Вершина имеет порядок 0. Процесс вычислений заканчивается.

В случае, если данный процесс продолжается бесконечно, считаем, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ не определено, если заканчивается, то значение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ совпадает со значением z_0 для момента окончания вычислений.

Пример. На рис. 7 приведена программа Σ над $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1\}$, $z_0 = y_1$ и базисом $Б = \{\{0, S\}, \{=\}\}$, где $0z = 0$, $Sz = z+1$, а $=$ — предикат равенства. Начальная вершина помечена жирной точкой. Очевидно, что программа Σ вычисляет функцию $f(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$. Заметим, что в базисе $Б = \{\{0, S\}, \{=\}\}$ можно реализовать любую частично рекурсивную функцию.

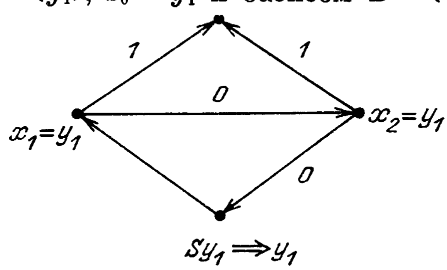


Рис. 7

Все эти примеры показывают, что мы имеем дело с объектами, которые обладают схемой Σ с функционированием f. Именно с этой точки зрения они выступают как управляющие системы (УС) U, где $U = \{\Sigma, f\}$, т. е. пары, состоящие из схемы УС и функции, реализуемой Σ.

Пусть $\mathfrak{U}$ — множество всех УС U из заданного класса, т. е. $\mathfrak{U} = \{U\}$ и $\mathfrak{S} = \{\Sigma\}$, $\mathfrak{F} = \{f\}$.

Так как одна и та же функция f может быть реализована многими схемами, то рассматривают функционал $L(\Sigma)$, определенный на $\mathfrak{S}$ и обозначающий меру сложности Σ. Чаще всего $L(\Sigma)$ — число элементов в Σ. В последнем случае существует $\min\limits_{\Sigma \in \mathfrak{S}, \Sigma \text{ реализует } f} L(\Sigma)$, и его обозначают через $L(f)$.

Если $\mathfrak{F} = \cup \mathfrak{F}_i$, где $|\mathfrak{F}_i|$ конечно при любом i, то можно ввести функцию $L(i)$, называемую функцией Шеннона,

$$L(i) = \max_{f \in \mathfrak{F}_i} L(f).$$

Проблематика надежности управляющих систем развивается в рамках логико-кибернетического подхода в трех направлениях*):

построение надежных схем из ненадежных элементов,

синтез самокорректирующихся схем,

разработка методов контроля работы управляющих систем.

Эти направления начали складываться в середине 50-х годов. Первые постановки задач связаны с работами известных американских математиков — Дж. фон Неймана, К. Э. Шеннона и Э. Ф. Мура. Затем центр теоретических исследований по этим вопросам переместился в СССР.

*) Мы не касаемся исследований по проблемам надежности, развиваемых в теории массового обслуживания.

Для постановки задач введем ряд понятий и обозначений. Рассмотрим некоторый класс $\mathfrak{U}$ УС. Пусть И — источник неисправностей (помех), который, последовательно воздействуя на УС из $\mathfrak{U}$, переводит ее в УС $U_1, \ldots, U_r$ из некоторого класса $\mathfrak{U}'$. Если допустить, что источник И может также сохранять УС неизменной, например, $U_1 = U$, то $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}'$. Обычно влияние источника И сводится к воздействию на схему, и это проявляется в

а) нарушении работы элементов,

б) изменении соединения элементов,

в) изменении состояния памяти и т. п.

Таким образом, в УС $U = (\Sigma, f)$ под влиянием источника И схема Σ переходит в «неисправные» состояния $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ (где $\Sigma_1 = \Sigma$). Пусть этим схемам соответствуют функции $f_1, \ldots, f_r$ ($f_1 = f$), называемые также *функциями неисправностей*. Следовательно, $U_1 = (\Sigma_1, f_1), \ldots, U_r = (\Sigma_r, f_r)$. Обычно источник неисправностей дополнительно характеризуют либо распределением вероятностей помех, либо ограничениями на возможное число одновременно возникающих элементарных неисправностей.

I. Построение надежных схем из ненадежных элементов

а) $\mathfrak{U}$ — класс схем из функциональных элементов в базисе Б, и Б = $=$ Б$_1 \cup$ Б$_2$. Часть Б$_1$ состоит из ненадежных элементов $F_1, \ldots, F_s$ таких, что каждый элемент F_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ источником И переводится в элемент F_i' с тем же числом входов и одним выходом, но любым (в терминах булевских функций) функционированием. Таким образом, элемент F_i' наряду с исправным режимом функционирования $f_i^0(x_1, \ldots, x_{n_i})$, обозначаемым через $f_i^1(x_1, \ldots, x_{n_i})$, имеет $2^{2^{n_i}} - 1$ неисправных режимов $f_i^{(2)}(x_1, \ldots x_{n_i}), \ldots, f_i^{\left(2^{2^{n_i}}\right)}(x_1, \ldots, x_{n_i})$. Обозначим вероятности их появления соответственно через $p_i^{(2)}, \ldots, p_i^{\left(2^{2^{n_i}}\right)}$. Тогда $\varepsilon_i = \sum\limits_{j=2}^{2^{2^{n_i}}} p_i^{(j)}$ — вероятность повреждения F_i и $\bar{\varepsilon}_i = \min\limits_{2 \leqslant j \leqslant 2^{2^{n_i}}} p_i^{(j)}$ — нижняя грань вероятности неисправного режима для F_i. Пусть $\varepsilon_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \varepsilon_i$ и $\bar{\varepsilon}_0 = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \bar{\varepsilon}_i$. Часть базиса Б$_2$ состоит из абсолютно надежных элементов. Обозначим через $\mathsf{P}(\Sigma)$ вероятность неправильного функционирования Σ при воздействии источника И.

Спрашивается, можно ли для любой булевской функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и любого $\varepsilon > 0$ построить схему Σ из ФЭ в базисе Б, которая реализует f, и $\mathsf{P}(\Sigma) < \varepsilon$ (или, как говорят, построить из ненадежных элементов сколь угодно надежную схему)? Ответ на этот вопрос, правда, в несколько других терминах, дал в 1956 г. Дж. фон Нейман [54]: если Б $=$ Б$_1$ (Б$_2 = \Lambda$), т. е. все элементы базиса ненадежные в указанном смысле, то при $\bar{\varepsilon}_0 > 0$ это сделать невозможно, ибо всегда $\mathsf{P}(\Sigma) \geqslant \bar{\varepsilon}_0$; с другой стороны, если Б$_1$ — полный базис, а Б$_2$ содержит элемент H (элемент голосования) с функцией $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, то возможно построение сколь угодно надежных схем при $\varepsilon_0 < 1/2$.

Далее появились работы, в которых исследовались базисы Б $=$ Б$_1 \cup$ Б$_2$, допускающие построение сколь угодно надежных схем для любых булевских функций. В работе [20] 1962 г. А. А. Мучник и С. Г. Гиндикин приводят условия на базис Б, при которых возможно построение сколь угодно надежных схем. Однако оказалось, что эти условия являются только достаточными. Необходимые и достаточные условия были получены в 1975 г. В. В. Тарасовым [39].

Метод Неймана построения сколь угодно надежных схем связан со значительным усложнением схем. Поэтому возникает вопрос об исследовании минимальных сколь угодно надежных схем.

Пусть $L_Б(\Sigma)$ — число элементов Σ. Обозначим через $\mathfrak{S}_Б$ множество всех схем из ФЭ в базисе Б и рассмотрим его подмножество $\mathfrak{S}_Б^\varepsilon$ ($\mathfrak{S}_Б^\varepsilon \subseteq \mathfrak{S}_Б$) таких схем Σ из $\mathfrak{S}_Б$, что $P(\Sigma) < \varepsilon$. Пусть $\mathfrak{F}_n$ — множество булевских функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Мы имеем две функции Шеннона: $L_Б(n)$ для класса $\mathfrak{S}_Б$ и $L_Б(n, \varepsilon)$ для класса $\mathfrak{S}_Б(n, \varepsilon)$. Очевидно, что $L_Б(n, \varepsilon) \geqslant L_Б(n)$. Поведение функции $L_Б(n, \varepsilon)$ рассмотрено мною в 1977 г. [48] для случая, когда $Б_1 = \left\{ \boxed{-}, \boxed{\&}, \boxed{\vee} \right\}$ и $Б_2 = \{H\}$, и установлено, что

$$L_Б(n, \varepsilon) \sim L_Б(n) \sim \frac{1}{2} \frac{2^n}{n}$$

и для почти всех булевских функций минимальная схема с вероятностью отказа, не превосходящей ε, асимптотически имеет ту же сложность, что и минимальная схема без требования надежности.

Мы рассматривали случаи, когда источник И вызывал у элементов любые функциональные повреждения. Если допустить, что при повреждении элементов появляются не все булевские функции от соответствующего числа переменных, то задача усложняется. В этом случае задача становится ближе к практическим случаям. Здесь упомянем результат В. В. Тарасова [40] (1976 г.). Он перечислил все случаи, когда базис Б, состоящий из одного элемента с двумя входами и одним выходом, позволяет для любых булевых функций строить сколь угодно надежные схемы.

Исследованием схем из ненадежных элементов занимались в ИППИ АН СССР. Наиболее интересный результат получен С. И. Ортюковым [26] в 1977 г. и связан с базисами $Б = Б_1$, т. е. не содержащими абсолютно надежных элементов. Им показано, что

$$L_Б(n, \varepsilon) \leqslant c(\varepsilon_0) \frac{2^n}{n}$$

и $c(\varepsilon_0) \to \rho$, когда $\varepsilon_0 \to 0$.

б) $\mathfrak{U}$ — класс контактных схем. Здесь рассматривается источник И, который воздействует на контакты и вызывает либо разрыв, либо короткое замыкание с определенными вероятностями.

Первое исследование для этого случая, которое появилось в 1956 г. сразу же после работы Дж. фон Неймана, было сделано в [52] К. Э. Шенноном и Э. Ф. Муром. В нем содержится математически безупречная постановка задачи и показывается при помощи интересного аппарата, что из ненадежных контактов можно строить сколь угодно надежное реле. Оценивается сложность схемы, реализующей функцию $f(x) = x^\sigma$ (реле) с ненадежностью, не превосходящей ε, если ошибка исходных контактов не превосходит η. Такая схема содержит по порядку $\log^2 \varepsilon / \log^2 \eta$ контактов x^σ. Дальнейшее продвижение получено в [28] Н. В. Петри и относится к построению надежных контактных схем для произвольных булевых функций.

II. Построение самокорректирующихся схем

Схема Σ называется *самокорректирующейся относительно источника помех* И, если для любого i ($i = 1, \ldots, r$)

$$f_i = f,$$

т. е. функционирование схемы не нарушается при воздействии источника И. Это определение и постановка вопроса о построении самокорректирующихся схем были даны автором в 1960 г. [30].

а) **$\mathfrak{U}$ — класс контактных схем.** Изучение самокорректирующихся схем началось с класса контактных схем [30]. Здесь источник неисправностей И в схеме может вызывать не более a разрывов и b коротких замыканий контактов ($И = И_{a,b}$). Очевидно, каждая контактная схема Σ может быть «преобразована» в самокорректирующуюся контактную схему Σ^c относительно $И_{a,b}$. Для этого нужно в Σ каждый контакт x^σ заменить на подсхему, изображенную на рис. 8. Для полученной (тривиальной)

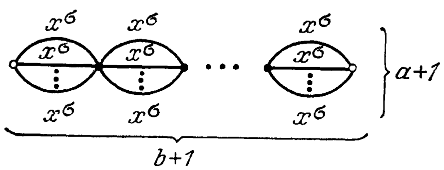


Рис. 8

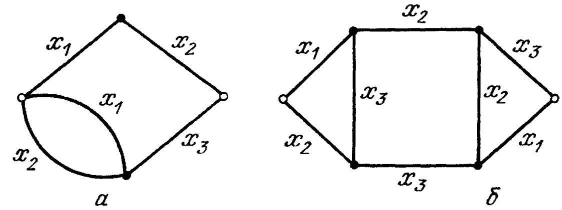


Рис. 9

самокорректирующейся схемы $L(\Sigma^c) = (a+1)(b+1)L(\Sigma)$. Оказывается, что существуют и нетривиальные самокорректирующиеся схемы. Например, функция $h(x_1, x_2, x_3)$ имеет минимальную схему (рис. 9, *а*) сложности 5 и самокорректирующуюся относительно $И_{0,1}$ (рис. 9, *б*) сложности 8 (А. Г. Быков [5]). В связи с этим представляет интерес изучение класса $\mathfrak{U}^{a,b}$ самокорректирующихся относительно $И_{a,b}$ контактных схем. В табл. 1 дана сводка результатов. В ней через $L_{a,b}(n)$ обозначена функция Шеннона для $\mathfrak{U}^{a,b}$ ($\mathfrak{F}_n$ — множество булевских функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$).

К о м м е н т а р и й. Показано, что для почти всех булевских функций минимальные самокорректирующиеся схемы относительно $И_{a,b}$ (при растущих a и b) имеют асимптотически ту же сложность, что и обычные минимальные схемы. Этот факт для простейшего источника $И_{0,1}$ был обнаружен в 1960 г. (Ю. Г. Потапов, С. В. Яблонский). Тогда же возникла гипотеза о верности сформулированного утверждения. Однако для его доказательства понадобилось почти 15 лет (Н. П. Редькин) и позже оно было значительно усилено А. Е. Андреевым. В то же время шел процесс усовершенствования методов построения самокорректирующихся схем, что, может быть, еще ценнее, чем прогресс оценок. Именно поэтому отмечены также результаты Э. И. Нечипорука и Д. Улига с оценками $\leqslant 2L(n)$, но оригинальными методами.

б) **$\mathfrak{U}$ — класс схем из функциональных элементов.** В этом случае источник $И = И_m$ вызывает произвольные повреждения (функционального характера с сохранением числа входов) не более чем в m элементах.

Построение самокорректирующихся относительно $И_m$ схем из ФЭ возможно (как и в случае синтеза из ненадежных элементов), когда $Б = Б_1 \cup Б_2$ и выполнены некоторые требования для $Б_1$ и $Б_2$. Например, если Б — полная система, а абсолютно надежная часть $Б_2$ содержит элемент H.

Обозначим через $\mathfrak{U}^m$ класс самокорректирующихся относительно $И_m$ схем из ФЭ и через $L_m(n)$ — соответствующую функцию Шеннона (здесь $\mathfrak{F}_n$ — множество всех булевских функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$). В табл. 2 дана сводка результатов по синтезу схем для $\mathfrak{U}^m$.

в) **$\mathfrak{U}$ — класс программ.** Здесь $И = И_{\lambda,m}$ вызывает повреждения функциональных и предикатных операторов (произвольного характера, но с сохранением числа переменных) и характеризуется параметрами λ и m, обозначающими, что в любом пути, содержащем λ различных вершин, имеется не более m повреждений. Пусть далее $L(\Sigma)$ — число вершин в Σ, помеченных символами из Б. В 1979 г. С. П. Юкна [44] показал, что в классе программ, базис которых содержит предикат равенства, при

Таблица 1

a	b	$L_{a,b}(n)$	
0	1	$L_{0,1}(n) \sim L(n)$	Ю. Г. Потапов, С. В. Яблонский, 1960 [30]
1	0	$L_{1,0}(n) \sim L(n)$	Х. А. Мадатян, 1964 [16]
$o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$	3	$L_{a,b}(n) \sim L(n)$	Э. И. Нечипорук, 1968 [21]
$o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$	0	$L_{a,b}(n) \underset{\text{п.в.}}{\sim} L(n)$	Э. И. Нечипорук, 1968 [22]
$o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$	$o\left(n^{\frac{1}{2}-\delta}\right),\ \delta > 0$	$L_{a,b}(n) \leqslant 2L(n)$	Э. И. Нечипорук, 1969 [23]
$\log a = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$	$\log b = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$	$L_{a,b}(n) \leqslant 2L(n)$	Д. Улиг, 1978 [42]
0	$o\left(\frac{n}{\log n}\right)$	$L_{a,b}(n) \sim L(n)$	Н. П. Редькин, 1978 [31]
$o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$	$o\left(\frac{n}{\log n}\right)$	$L_{a,b}(n) \sim L(n)$	Н. П. Редькин, 1979 [32]
$2^{o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)}$	$2^{(1-\varepsilon)n}$	$L_{a,b}(n) \sim L(n)$	А. Е. Андреев, 1984 [2]

Таблица 2

m	$L_m(n)$	
$m < +\infty$	$L_m(n) \sim L_{\text{Б}}(n)$	Г. И. Кириенко, 1964 [11]
$\log m = o(n)$	$L_m(n) \sim L_{\text{Б}}(n)$	Г. И. Кириенко, 1970 [12]
$\log m = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$	$L_m(n) \sim L_{\text{Б}}(n)$, число надежных элементов в Σ из $\mathfrak{U}^m$ зависит только от m и не зависит от $L_{\text{Б}}(\Sigma)$	Д. Улиг, 1978 [41]

$\lambda \geqslant 3m+1$ для каждой программы Σ можно построить самокорректирующуюся относительно $И_{\lambda,m}$ программу Σ^c, реализующую ту же функцию, что и Σ, и

$$L(\Sigma^c) \leqslant (m+1)^2 L(\Sigma),$$

причем эта оценка достигается.

Асимптотические оценки важны не только с точки зрения понимания сложности получаемых схем, но и как способ оценки качества алгоритмов синтеза. Однако при построении схем для конкретных функций асимптотически наилучшие методы синтеза часто не дают хороших результатов. В то же время идеи, заложенные в них (а также и в методы, не являющиеся асимптотически наилучшими), могут быть успешно использованы при построении схем для конкретных функций. Ввиду этого дадим краткий обзор важнейших принципов построения надежных схем.

Дублирование элементов (подсхем).

В чистом виде дает эффект для контактных схем (см. рис. 9). Ведет к резкому усложнению схемы, однако может быть успешно использовано, если число дублируемых объектов невелико по сравнению со сложностью схемы.

Использование элементов голосования (и их обобщений).

Для схем из ФЭ нельзя достичь повышения надежности лишь за счет одного дублирования подсхем. Поэтому приходится использовать абсолютно надежные элементы типа элемента голосования и с помощью их строить специальные схемы (Дж. фон Нейман [54]). На рис. 10 изображена схема, эквивалентная Σ, но работающая правильно, если ошибка затрагивает только одну из схем Σ. Для большего числа ошибок берут схему, в которой надежная часть будет деревом из элементов H.

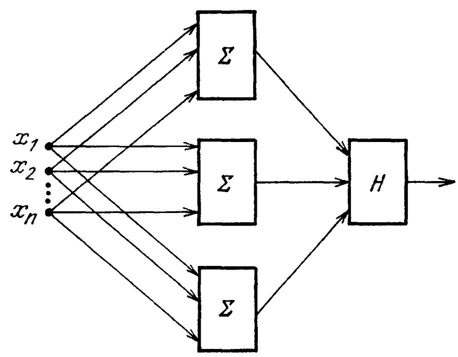


Рис. 10

Введение дополнительных элементов на группу элементов.

В случае контактных схем, если в них встречается подсхема типа звезды (рис. 11), то при воздействии источника $И_{0,1}$ ее следует заменить на подсхему рис. 12, *а* (Ю. Г. Потапов, С. В. Яблонский [30]), а при воздействии источника $И_{1,0}$ — на подсхему рис. 12, *б* (Х. А. Мадатян

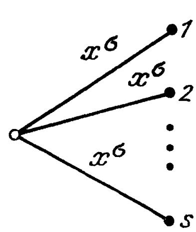


Рис. 11

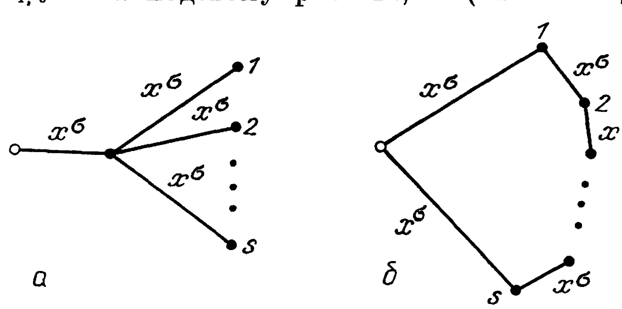


Рис. 12

[16]). Построенные подсхемы обладают свойством самокорректируемости для указанных источников. Данный прием позволяет схемы, построенные по методу О. Б. Лупанова [15], преобразовать в своей основной части (состоящей из звезд-метелок) в самокорректирующиеся без существенного усложнения схем.

Использование самокорректирующихся кодов.

В разложении

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee x_1^{\sigma_1} \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

компоненты $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = f_j(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, где $j = j(\sigma_1, \ldots$

..., σ_k), дополняются вспомогательными «проверочными» функциями

$$g_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_s(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

так, чтобы при любых $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ набор

$$\{f_1(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n), \ldots, f_{2^k}(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n), g_1(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n), \ldots \ldots, g_s(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)\}$$

образовывал самокорректирующийся код, исправляющий m ошибок. Построение самокорректирующейся схемы из ФЭ в базисе $Б = Б_1 \cup Б_2$ для источника $И_m$ осуществляется путем

а) асимптотически оптимальной реализации системы функций $f_1, \ldots, f_{2^k}, g_1, \ldots, g_s$ (без требования самокоррекции);

б) синтеза самокорректирующейся декодирующей схемы, реализующей функции $f_1, \ldots, f_{2^k}$;

в) сборки из построенных блоков самокорректирующейся схемы для f по разложению (*) (Г. И. Кириенко [11]).

Метод густых функций (Э. И. Нечипорук [23]).

Булевская функция раскладывается в произведение густых функций, т. е. функций, обращающихся в единицу на большой доле наборов,

$$f = \mathop{\&}_{i=1}^{k} f_i,$$

и каждая густая функция f_i разлагается далее в дизъюнкцию функций f_{ij}, т. е.

$$f_i = \bigvee_{j=1}^{l_i} f_{ij}.$$

Указанные разложения выбираются так, чтобы

а) для каждого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которого $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, существовало не менее $a+1$ слагаемых f_{ij}, обращающихся на этом наборе в единицу;

б) суммарная сложность реализации всех f_{ij} в классе контактных схем была асимптотически не больше $L(n)$.

Это построение происходит при $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$.

Построенные контактные схемы корректируют $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ размыканий независимо от способа реализации f_{ij}. В этом смысле правильнее назвать этот принцип самокоррекции функциональным. Другим важным следствием этого метода является возможность одновременной коррекции замыканий и размыканий: нужно реализовать функции f_{ij} схемами, самокорректирующими замыкания. Это было использовано Нечипоруком для двух вариантов.

1. Схемы для f_{ij} корректируют три замыкания, и суммарная сложность их реализации асимптотически не больше $L(n)$.

2. Схемы для f_{ij} корректируют $b = o(n^{1/2-\delta})$ замыканий, а суммарная сложность схемы асимптотически не больше $2L(n)$.

Метод, основанный на распараллеливании вычислений (Д. Улиг [42]).

Для любого s компоненты $f_1, \ldots, f_{2^k}$ в разложении (*) заменяются на систему функций $h_1, \ldots, h_t$, где $h_j = h_j(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, t)$, так, что:

а) $t \sim 2^k$;

б) для любого i $(1 \leqslant i \leqslant 2^k)$ существуют s попарно непересекающихся подмножеств $H_1^i, \ldots, H_s^i$ $(H_j^i \subseteq \{1, \ldots, t\})$ и $\sum_{j \in H_\nu^i} h_j \pmod 2 = f_i$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

Данное построение проходит при $\log s = o(k/\log k)$, $k \to \infty$. Слегка модифицируя метод Лупанова, строят разделительные контактные трехполюсники, реализующие h_j и $\bar{h}_j$ со сложностью, асимптотически не большей $2^{n-k}/(n-k)$. Затем, беря $s = \{\max(a+1,\ b+1)\}^2$, все эти трехполюсники, взятые по два экземпляра для каждого набора $(\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n)$, соединяют между собой и двумя выбранными полюсами тривиальными самокорректирующимися схемами, реализующими $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$. Эти соединения учитывают разложение (*) и моделируют схему (рис. 13) с использованием тождеств $f_i = \sum_{j \in H_\nu^i} h_j \pmod 2$.

Увеличение асимптотики в два раза связано с тем, что для каждого i взято по два трехполюсника.

Метод, основанный на разложении двудольных графов (Н. П. Редькин [31]).

Исходным пунктом является разложение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{2^r/r} \bigvee_{i=1}^{p} f_{ij},$$

где f_{ij} определяется пересечением i-й полосы и j-й сферы (в пространстве $x_{k+1}, \ldots, x_n$) (О. Б. Лупанов [15]). Компоненты f_{ij} разлагают в дизъюнкцию:

$$f_{ij} = f_{ij0} \vee f_{ij1} \vee \ldots \vee f_{ijm},$$

которая получается путем моделирования разложения некоторого стандартного двудольного графа в сумму корректирующих графов, удовлетворяющих ряду специальных свойств, основным из которых является отсутствие циклов длины, меньшей или равной $2b$, и графа, содержащего относительно малое число ребер. Для функций f_{ijt} предлагается специальная топологическая конструкция, которая позволяет получать для них асимптотически оптимальные самокорректирующиеся относительно b замыканий схемы. Это построение проходит при $b = o(n/\log n)$. Комбинируя этот результат с результатом Нечипорука, получаем асимптотически оптимальный метод построения самокорректирующихся контактных схем с $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ и $b = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$.

Метод построения асимптотически оптимальных функциональных сетей (А. Е. Андреев [2]).

Обычно каждый метод синтеза основан на выборе некоторого разложения булевской функции и последующей его реализации, зависящей от специфики рассматриваемого класса управляющих систем. Выбор разложения не однозначен, и каждый конкретный выбор разложения может приводить к определенным ограничениям (как, например, в методе густых функций или в методе, основанном на разложении двудольного графа), зависящим именно от этого разложения. Поэтому важно полнее использовать возможности выбора. А. Е. Андреевым [2, 3] описан широкий класс функциональных сетей, охватывающий все известные разложения, и предложен асимптотически оптимальный метод их синте-

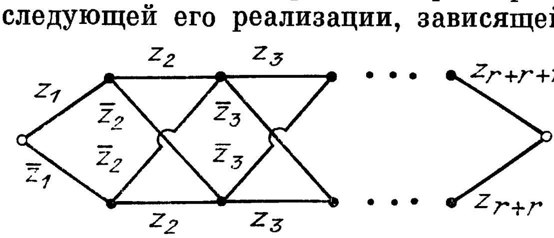


Рис. 13

за. Для асимптотически оптимальных сетей указан посредством несложных однотипных перестроек переход к асимптотически оптимальным схемам для многих классов управляющих систем. Указанная перестройка включает в себя оптимальную реализацию компонент сетей и последующую сборку из построенных блоков с учетом структуры сети. При этом оказывается, что если функциональная сеть будет самокорректирующейся относительно данного источника неисправностей, то перестройка приводит к самокорректирующейся схеме (даже если реализации компонент не будут самокорректирующимися).

Данный подход позволил:

а) значительно поднять ограничения на рост ошибок;

б) существенно расширить множество классов управляющих систем, для которых возможно построение асимптотически оптимальных схем;

в) сделать все рассуждения однотипными.

Заключение. В теории надежности сегодня важнейшими задачами являются распространение ее на более сложные классы управляющих систем — автоматы и программы; выявление классов функций, для которых возможно повышение надежности без существенного (по сравнению с минимальной) усложнения схемы; развитие принципов повышения надежности.

III. Контроль управляющих систем

Рассмотрим класс $\mathfrak{U}$ управляющих систем $U=(\Sigma, f)$ и источник неисправностей И. Как отмечалось, он приводит к функциям неисправностей

$$f_1, \ldots, f_r, \quad \text{где} \quad f_1=f,$$

которые в свою очередь определяют таблицу функций неисправностей (табл. 3, *а*). Поскольку разные неисправности могут приводить к равным функциям неисправностей $(f_i=f_j)$, то мы получаем таблицу (см.

Таблица 3

	f_1	f_2	$\ldots$	f_r
e_1				
$\vdots$				
e_N				
$\vdots$				

а

	g_1	g_2	$\ldots$	g_m
e_1				
$\vdots$				
e_N				
$\vdots$				

б

табл. 3, *б*), в которой представлены функционально различные классы неисправностей исходной таблицы, и $g_1=f$. Иногда на множествах $E=\{e_i\}$ и $G=\{g_i\}$ рассматривают частичный порядок $\preccurlyeq$, а иногда приписывают столбцам вероятности $p_1, \ldots, p_m$ $\left(\sum_{i=1}^{m} p_i=1\right)$.

Табл. 3, *б*, в принципе, позволяет решать многие вопросы, касающиеся контроля схемы Σ, например, отвечать на вопрос, исправна ли Σ, а если не исправна, то какому классу неисправностей она принадлежит. Во многих практических задачах таблица имеет большое число строк и столбцов, и поэтому непосредственный анализ таблицы становится весьма громоздким и даже эффективно не осуществимым.

Сформулируем ряд моментов данной теории.

1. Задается *цель контроля* (обычно путем указания в терминах функций g_i некоторого свойства, которое нужно опознать). Например, путем фиксации подмножества $\mathfrak{R}$ пар (i, j) $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$, определяющего некоторое подмножество пар функций (g_i, g_j):

а) $\mathfrak{R} = \{(1, j)\}$, $j = 2, \ldots, m$ (задача о проверке);

б) $\mathfrak{R} = \{(i, j)\}$, $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$ (задача о диагностике).

2. Указываются *средства контроля*. Их можно разделить на две группы:

а) контроль без вмешательства в схему: разрешается только наблюдать за входами и выходами схемы Σ;

б) контроль с вмешательством в схему. Например, допускается введение контрольных точек, перестановка блоков, замена некоторых блоков на эталонные и т. п.

3. Фиксируется *способ получения информации о контролируемом объекте* (в терминах допустимых экспериментов со схемой Σ). *Эксперимент* — система входных наборов (вопросов), согласованная с порядком $\preccurlyeq$, и необходимые для нее выходные значения (ответы), предъявляемые контролируемой схеме. Они делятся на безусловные и условные.

а) *Безусловные эксперименты*. Различают два типа безусловных экспериментов:

— простые безусловные эксперименты, т. е. последовательности вопросов (рис. 14, *а*)*), и

— кратные безусловные эксперименты, т. е. конечные множества последовательностей вопросов (рис. 14, *б*).

Множество вопросов $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}\}$ можно рассматривать как простой безусловный эксперимент с произвольным (при отсутствии $\preccurlyeq$) порядком или как кратный безусловный эксперимент (длина каждой последовательности равна единице).

б) *Условные эксперименты*. Они также делятся на простые условные эксперименты и кратные условные эксперименты:

— простой условный эксперимент — это ориентированное (от корня) дерево, вершинам которого приписаны вопросы, а ребрам — ответы, определяющие выбор следующего вопроса **);

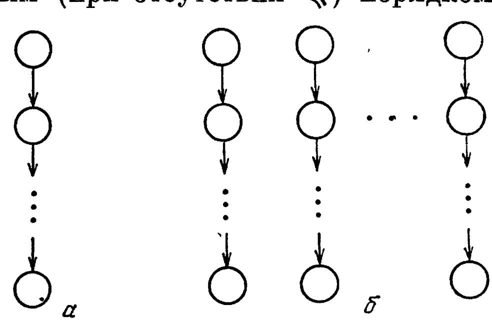


Рис. 14

— кратный условный эксперимент — конечное множество ориентированных (от корня) деревьев, вершинам которых приписаны вопросы, а ребрам — ответы, определяющие выбор следующего вопроса **).

Замечание. При наличии порядка $\preccurlyeq$ указанные последовательности вопросов и деревья вопросов согласуются с ним.

Выбор простых экспериментов связан с ситуацией, когда имеется один экземпляр контролируемого объекта, и мы не можем его переводить в стандартное начальное состояние.

*) На рис. 14 в кружочках вписаны вопросы (наборы e), стрелки указывают следующий вопрос.

**) Если выбор следующего вопроса не зависит от ответа, то ребру ничего не приписывается.

Кратные эксперименты используются там, где либо можно иметь несколько тождественных экземпляров контролируемых объектов (с одной и той же неисправностью), либо есть один экземпляр контролируемой системы, но его можно переводить в стандартное начальное состояние.

Очевидно, перечисленные типы экспериментов связаны друг с другом, как указано на диаграмме (рис. 15).

Исходом эксперимента называется:

а) в случае безусловного эксперимента — система ответов на вопросы эксперимента (эти ответы проставляются на ребрах, идущих от вопросов, для последних вопросов — на дополнительных ребрах);

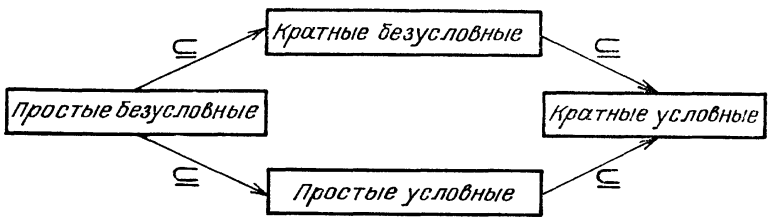


Рис. 15

б) для простого условного эксперимента — ветка дерева, к которой добавлено одно ребро с ответом на последний вопрос;

в) для кратного условного эксперимента — система веток, взятых из каждого дерева по одной и к которым добавлено по одному ребру с ответами на последние вопросы.

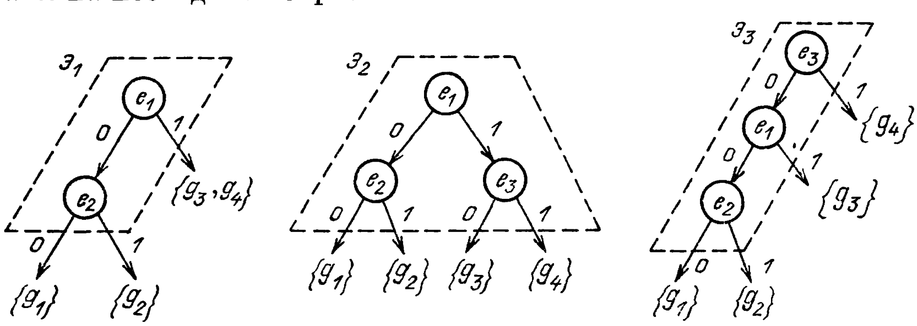


Рис. 16

Пример. На рис. 16 приведены условные эксперименты $Э_1$, $Э_2$ и $Э_3$ (обведены штриховыми линиями) и все исходы экспериментов для табл. 4.

Каждый эксперимент приводит к разбиению множества $\{g_1, \ldots, g_m\}$ на классы, а исход — к выбору его компоненты. На рис. 16 для этого примера для всех экспериментов указаны компоненты, получаемые при каждом возможном исходе.

Таблица 4

	g_1	g_2	g_3	g_4
e_1	0	0	1	1
e_2	0	1	0	0
e_3	0	0	0	1

Если разбиение, получаемое в эксперименте $Э$, таково, что для каждой пары (i, j) из $\mathfrak{R}$ функции g_i и g_j принадлежат различным компонентам разбиения, то говорят, что *эксперимент $Э$ распознает свойство $\mathfrak{R}$.*

Эксперимент $Э$, распознающий свойство $\mathfrak{R}$, называется *тестом* (*относительно* $\mathfrak{R}$) и обозначается далее через T.

Если в приведенном выше примере взять за $\mathfrak{R}$ множество всех пар, то $Э_1$ не будет тестом, а $Э_2$ и $Э_3$ являются тестами.

Для безусловных экспериментов понятие теста может быть упрощено: система наборов $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}\}$ является тестом относительно $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда для любой пары (i, j) из $\mathfrak{N}$ найдется набор e из данной системы такой, что $g_i(e) \neq g_j(e)$. Следует отметить, что множество всех вопросов, входящих в произвольный условный тест, является безусловным тестом. Заметим также, что во многих случаях таблица функций неисправностей может быть ограничена по числу строк без утраты возможностей контроля. Пусть s_0 — число строк усеченной таблицы. Тогда множество $T_0 = \{e_1, \ldots, e_{s_0}\}$ образует безусловный тест, называемый также тривиальным тестом.

Оказывается, что для задачи контроля таблица, как правило, допускает много тестов. Поэтому на множестве тестов вводят функционал $l(T)$, обозначающий сложность теста T. Этот функционал (в силу диаграммы включений — рис. 15) достаточно определить для кратных условных тестов. Пусть

$l_1(T)$ — число деревьев в T, называемое также *кратностью теста* T;

$l_2(T) = \max\limits_{i,j} |B_{ij}|$, где $|B_{ij}|$ обозначает сложность ветки B_{ij}, входящей в i-е дерево из T (обычно $|B_{ij}|$ есть либо сумма весов наборов, встречающихся в ветке B_{ij}, либо максимальный вес этой ветки, $l_2(T)$ характеризует максимальную высоту деревьев или время выполнения кратного эксперимента);

$l_3(T) = \sum\limits_j l(e_{i_j})$, где $l(e_{i_j})$ — вес набора e_{i_j} и суммирование ведется по всем наборам (с учетом повторений), входящим в T, $l_3(T)$ называется *длиной* (*объемом*) теста T.

Функционал $l(T)$ для каждой таблицы и свойства $\mathfrak{N}$ позволяет определить понятие минимального теста, для которого значение $l(T)$ минимально.

Основной задачей теории контроля является создание методов построения минимальных тестов и оценки их сложности для разных классов управляющих систем, различных источников неисправностей и целей контроля, а также создания методов синтеза просто тестируемых схем.

При построении минимальных тестов мы обычно имеем дело с более широким классом тестов — так называемыми тупиковыми тестами. В простейшем случае, когда тестами являются некоторые подмножества множества $\{e_1, \ldots, e_{s_0}\}$, понятие тупиковости определяется так: тест $T = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}\}$ называется *тупиковым*, если удаление любого набора из T приводит к подмножеству, не являющемуся тестом. В общем случае для определения тупикового теста сначала вводится понятие подэксперимента как части исходного эксперимента и затем тупиковый тест определяется как тест такой, что любые его собственные подэксперименты не являются тестами (ср. с [46]).

Первые работы по теории контроля появились в середине 50-х годов:

для преобразователей без памяти (контактные схемы, схемы из ФЭ и др.) — Яблонский С. В. и Чегис И. А., 1954 г. [43, 45],

для контроля автоматов — Мур Э., 1956 г. [53],

для схем из ФЭ — Элдрид Б., 1959 г. [51],

для схем из ФЭ — Армстронг Д., 1966 г. [50],

для схем из ФЭ — Рот Дж., 1966 г. [55].

В настоящее время число математических работ превосходит 800, из них примерно 60% — советских и 40% — зарубежных (большинство из США).

Имеется серия книг по различным аспектам этой теории, принадлежащих советским авторам: Кострыкину А. И. [14], Богомолову А. М., Твердохлебову В. А. [4], Казначееву В. И. [10], Гольдману Р. С., Чипулису В. П. [8], Соловьеву Н. А. [38], Пархоменко П. П., Согомоняну Е. С. [27] и др.

В теории тестов можно выделить три этапа: 1) табличный подход, 2) учет информации о структуре схемы и 3) построение алгоритмов контроля. Эти этапы связаны друг с другом. Дадим их краткую характеристику, останавливая внимание на узловых моментах.

1. Табличный подход. Разбивается на два случая. Таблица состоит из неупорядоченных наборов. Обычно рассматриваются бинарные таблицы. Без ограничения общности можно считать, что $s_0 \leqslant 2^m$, так как при $s_0 > 2^m$ бинарные таблицы будут содержать повторяющиеся строки.

а) Безусловные тесты. Основной вопрос, который здесь рассматривался, это построение и изучение минимальных (в смысле l_1 *)) тестов.

В 1954 г. был сформулирован (Яблонский С. В., Чегис И. А. [43, 45]) первый алгоритм для нахождения всех безусловных тупиковых тестов. Он состоит в следующем. Для каждого i и j, $(i, j) \in \mathfrak{N}$, составляют множество $E_{ij} = \{e_1^{ij}, \ldots, e_{\nu(i,j)}^{ij}\}$ всех наборов из E, на которых различаются g_i и g_j. Затем составляют выражение

$$\& \bigvee = \underset{ij}{\&} \left(e_1^{ij} \vee \ldots \vee e_{\nu(i,j)}^{ij}\right)$$

и преобразуют его к виду $\vee \&$ путем раскрытия скобок. Наконец, в выражении $\vee \&$ при помощи тождеств вида $AB \vee A = A$ производят удаление повторяющихся и поглощающихся членов. Полученные слагаемые дают тупиковые безусловные тесты. Следует заметить, что этот алгоритм является весьма трудоемким.

Имеется довольно много результатов в следующих направлениях (см. Соловьев Н. А. [38]):

— оценка сложности минимальных и тупиковых тестов,

— оценка числа минимальных и тупиковых тестов,

— построение тестов для классов таблиц,

— построение тестов для не всюду определенных и многозначных таблиц.

Упомянем здесь результаты, связанные с оценкой сложности минимальных тестов для задачи диагностики. Имеется очевидное неравенство (аналог теоремы Мура [53])

$$\log m \leqslant \min l_1(T) \leqslant m - 1.$$

С другой стороны (см. Журавлев Ю. И. [9], Носков В. Н. [24], Коршунов А. Д. [13], Слепян В. А. [37], Андреев А. Е. [1]), для почти всех $(m = m(s_0),\ s_0 \to \infty)$ таблиц

$$\log m \leqslant \min l_1(T) \leqslant 2 \log m.$$

Последнее означает, что задача о нахождении минимальных тестов актуальна и для почти всех таблиц дает величину, близкую к нижней оценке.

б) Условные тесты. В силу предыдущих рассуждений условные тесты могут дать преимущество по сравнению с безусловными для малой доли таблиц, именно когда сложность безусловного теста далека от $\log m$. Теория условных тестов менее разработана. Наиболее интересные результаты получены Мошковым М. Ю. [19].

Таблица состоит из наборов e_i, для которых имеется частичный порядок $\preccurlyeq$.

Этот случай изучался достаточно подробно для автоматов. Здесь для двух входных слоев e' и e'' отношение $e' \preccurlyeq e''$ имеет место тогда и только тогда, когда слово e' является началом слова e''. Таблица состоит из всех о.-д. функций одного переменного (см. [47]), перерабатывающих слова в N-буквенном алфавите и имеющих вес (число состояний

---

*) Здесь l_1 — число наборов в T.

автомата), не превосходящий r. Мы имеем конечное число функций ($m < +\infty$). Следовательно, таблица содержит конечное число столбцов, но бесконечное число строк. В качестве исправной функции может выступать любая из функций g_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Таким образом, для данной автоматной таблицы имеется одна диагностическая задача и m задач на проверку. Введем числовые функции, характеризующие сложность проверки и диагностики для указанной таблицы:

а) при проверке

$$h(N, r) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{T_б} l_2(T_б),$$

$$\nu(N, r) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{T_б} l_1(T_б),$$

$$\lambda(N, r) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{T_б} l_3(T_б);$$

б) при диагностике

$$h_б(N, r) = \min_{T_б} l_2(T_б), \quad h_у(N, r) = \min_{T_у} l_2(T_у),$$

$$\nu_б(N, r) = \min_{T_б} l_1(T_б), \quad \nu_у(N, r) = \min_{T_у} l_1(T_у),$$

$$\lambda_б(N, r) = \min_{T_б} l_3(T_б), \quad \lambda_у(N, r) = \min_{T_у} l_3(T_у),$$

где:

$l(e)$ обозначает число букв в слове e;

$l_2(T)$ — максимум длин слов, определяемых ветками деревьев из T;

$T_б$ и $T_у$ — безусловный и условный тесты, и минимум берется по всем тестам таблицы указанного типа.

В табл. 5 приводится сводка основных результатов. Из таблицы видно, что параметр h не меняется при усложнении задачи контроля и при переходе к более сложным экспериментам. Величины ν и λ, напротив, при переходе от задачи проверки к задаче диагностики усложняются, а в диагностической задаче при переходе от безусловных экспериментов к условным упрощаются.

В случае контроля автоматов приходится рассматривать таблицы, содержащие часть функций $g_1, \ldots, g_m$, и поэтому тесты могут получаться более простые, чем при рассмотрении всех автоматов с параметрами N и r.

В [46] автором предложен алгоритм для построения всех тупиковых безусловных кратных тестов. Оказалось, что для этого надо учитывать более длинные (чем у Мура [53]) входные слова, а именно с длиной, не превосходящей $(m-1)r^m$. В дипломной работе Н. Кунянц (МГУ, 1978 г.) произведено сравнение длины $\mathscr{L}_1$ в смысле $l_3(T)$ минимального (тупикового) безусловного кратного теста, если брать входные слова из муровских экспериментов, т. е. длины, не большей чем $2r-1$, с длиной $\mathscr{L}_2$ минимального (тупикового) безусловного кратного теста. Установлено, что

$$\mathscr{L}_1/\mathscr{L}_2 \leqslant m,$$

и эта оценка не улучшаема.

2. Тесты с учетом структуры. Изучались в основном для двух классов УС — контактных схем и схем из ФЭ, и в последнее время начали появляться работы по контролю программ.

а) Контактные схемы (первая публикация [45], 1955 г.). Здесь можно выделить следующие группы вопросов:

— учет активности состояний контактов,

— метод цепей и тупиковых сечений,

— учет блочной структуры,

— сведение результатов для одних классов УС к результатам для других классов УС (принцип двойственности, редукция и т. п.),

— изучение вопросов сложности контроля для контактных схем.

Таблица 5

	Безусловный кратный эксперимент		Условный кратный эксперимент	
Проверка	$h(N, r) = 2r - 1$	Э. Мур [53]		
	$\nu(N, r) \sim r^2(N - 1)$ $(r \to \infty)$	М. П. Василевский [7, 8]		
	$\lambda(N, r) \sim r^3(N - 1)$ $(r \to \infty)$			
Диагностика	$h_б(N, r) = 2r - 1$	Э. Мур [53]	$h_у(N, r) = 2r - 1$	Э. Мур [53]
	$\log_N \nu_б(N, r) \sim 2r$ $(r, N \to \infty)$	М. П. Василевский [7, 8]	$\nu_у(N, r) = \begin{cases} N^{r-1}, & N \geqslant 3 \\ \frac{5}{4}\, 2^{r-1}, & N = 2 \end{cases}$	М. П. Василевский [7, 8]
	$\log_N \lambda_б(N, r) \sim 2r$ $(r, N \to \infty)$		$\lambda_у(N, r) = \begin{cases} rN^{r-1}, & N \geqslant 4 \\ \frac{10}{9}\, r3^{r-1}, & N = 3 \\ \frac{3}{2}\, r2^{r-1}, & N = 2 \end{cases}$	

б) Схемы из ФЭ (первые работы [44, 45] и за рубежом [51], 1959 г.). Исследования касались следующих вопросов:

— выяснение условий активизации путей,

— построение наборов для обнаружения данной неисправности,

— изучение вопросов сложности.

В табл. 6 приведены оценки сложности тестов для разных классов УС и источников неисправностей. Функция Шеннона $l(n)$ определяется обычным образом:

$$l(n) = \max_{f \in P_2^n} \ \min_{\Sigma, \Sigma \text{ реализ. } f} \ \min_{T, T - \text{тест для } \Sigma} l(T),$$

где $l(T)$ — сложность теста $T = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}\}$, т. е. число наборов в T, индексы при l связаны с типами неисправностей и тестов.

Приведенный в таблице перечень результатов относится в основном к оценкам сложности полных тестов. Из него видно, что учет структуры схемы приводит к нетривиальным оценкам (по сравнению с табличным подходом). Любопытно отметить, что нет симметрии в оценках тестов для размыкания и замыкания.

3. Алгоритмы контроля. Здесь имеются результаты, которые относятся скорее к области технической диагностики. Среди математических результатов упомянем алгоритм (Мадатян Х. А. [17]), который позволяет для бесповторных контактных π-схем в случае любых неисправностей (типа замыкания и размыкания контактов) осуществлять локализацию ошибки.

В заключение отметим, что в настоящее время появились работы, в которых исследуются возможности одновременной самокоррекции и контроля. В [18] X. А. Мадатян вводит функционал, который позволяет

Таблица 6

Тип теста	Оценка	
	Контактные схемы	
Единичные проверяющие тесты	$l_1(n) \leqslant \frac{2^n}{n}$	С. В. Яблонский, 1958 [43]
Полный диагностический тест	$l^{д}(n) = 2^n$	Х. А. Мадатян, 1970 [17]
Единичные проверяющие тесты	$l_1(n) \leqslant \frac{2^n}{n\sqrt{n}}$	Х. А. Мадатян, 1981 [18]
Полный проверяющий тест для константных неисправностей входов	$l^{вх}(n) = \begin{cases} 2n-2t & \text{при } k^{t-1}+t<n\leqslant k^t+t \\ 2n-2t+1 & \text{при } n=k^{t-1}+t \end{cases}$	В. Н. Носков, 1975 [25] Г. Р. Погосян, 1982 [29]
Полный проверяющий тест	$l(n) \leqslant \frac{15}{6}2^n, \quad n \geqslant 4$	Н. П. Редькин, 1983 [33]
Полный тест размыкания	$l_р(n) \leqslant 2^{[n/2]} + 2^{]n/2[}$	Н. П. Редькин, 1983 [34]
Полный тест замыкания	$l_з(n) \leqslant 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2}\log_2 n}+\frac{5}{2}}$	Н. П. Редькин, 1983 [34]
	Схемы из ФЭ	
Полный проверяющий тест	$l(n) \leqslant 2(2^{[n/2]} + 2^{]n/2[} + n)$	Н. П. Редькин, 1986 [35]

сравнивать различные реализации булевской функции контактными схемами с точки зрения возможности контроля. А. И. Рыбко [36] предложил метод построения самокорректирующихся контактных схем с двумя специальными контрольными точками, через которые можно осуществлять контроль.

Автор выражает большую признательность X. А. Мадатяну и Н. П. Редькину за подбор некоторых материалов для обзора и за обсуждение данной проблематики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Е. О тупиковых и минимальных тестах // ДАН СССР.— 1981.— 256, № 3.— С. 521—524.
2. Андреев А. Е. О синтезе самокорректирующихся управляющих систем // ДАН СССР.— 1984.— 277, № 3.— С. 521—525.
3. Андреев А. Е. Универсальный принцип самопроектирования // Мат. сб.— 1985.— 127 (169), № 6.— С. 147—172.
4. Богомолов А. М., Твердохлебов В. А. Диагностика сложных систем.— Киев: Наукова думка, 1974.
5. Быков А. Г. О минимальных самокорректирующихся контактных схемах для функций трех переменных (случай замыкания) // Проблемы кибернетики. Вып. 19.— М.: Наука, 1967.— С. 39—46.

6. Василевский М. П. О распознавании неисправности автоматов // Кибернетика.— 1973.— № 4.— С. 98—108.
7. Василевский М. П. О расшифровке автоматов // Кибернетика.— 1974.— № 2.— С. 19—23.
8. Гольдман Р. С., Чипулис В. П. Техническая диагностика цифровых устройств.— М.: Энергия, 1976.
9. Журавлев Ю. И. Об одном классе не всюду определенных функций алгебры логики // Дискретный анализ. Вып. 2.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1964.— С. 23—27.
10. Казначеев В. И. Диагностика неисправностей цифровых автоматов.— М.: Сов. радио, 1975.
11. Кириенко Г. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 12.— М.: Наука, 1964.— С. 29—37.
12. Кириенко Г. И. Синтез самокорректирующихся схем из функциональных элементов для случая растущего числа ошибок в схеме // Дискретный анализ. Вып. 16.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970.— С. 38—43.
13. Коршунов А. Д. О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц // Кибернетика.— 1970.— № 6.— С. 17—25; 1971.— № 1.— С. 1—11.
14. Кострыкин А. И. Логический контроль релейно-контактных схем.— М.: Радио и связь, 1970.
15. Лупанов О. Б. О синтезе контактных схем // ДАН СССР.— 1958.— **119**, № 1.— С. 23—26.
16. Мадатян Х. А. О синтезе схем, корректирующих размыкание контактов // ДАН СССР.— 1964.— **159**, № 2.— С. 290—293.
17. Мадатян Х. А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23.— М.: Наука, 1970.— С. 103—118.
18. Мадатян Х. А. Построение единичных тестов для контактных схем // Сборник работ по математической кибернетике.— М.: ВЦ АН СССР, 1981.— С. 77—86.
19. Мошков М. Ю. Условные тесты // Проблемы кибернетики. Вып. 40.— М.: Наука, 1983.— С. 131—170.
20. Мучник А. А., Гиндикин С. Г. О полноте системы ненадежных элементов, реализующих функции алгебры логики // ДАН СССР.— 1962.— **144**, № 5.— С. 1007—1010.
21. Нечипорук Э. И. О корректировании обрывов в вентильных и контактных схемах // Кибернетика.— 1968.— № 5.— С. 40—48.
22. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // ДАН СССР.— 1968.— **179**, № 4.— С. 786—789.
23. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21.— М.: Наука, 1969.— С. 5—102.
24. Носков В. Н. О тупиковых и минимальных тестах для одного класса таблиц // Дискретный анализ. Вып. 12.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.— С. 27—49.
25. Носков В. Н. О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Дискретный анализ. Вып. 27.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1975.— С. 23—51.
26. Ортюков С. И. К вопросу о синтезе асимптотически безызбыточных самокорректирующихся схем из ненадежных функциональных элементов // Проблемы передачи информации.— 1977.— **13**, вып. 4.— С. 3—8.
27. Пархоменко П. П., Согомонян Е. С. Основы технической диагностики.— М.: Энергоиздат, 1981.
28. Петри Н. В. О сложности реализации функций алгебры логики контактными схемами из ненадежных контактов при высокой требуемой надежности // Проблемы кибернетики. Вып. 21.— М.: Наука, 1969.— С. 159—169.
29. Погосян Г. Р. О проверяющих тестах для логических схем.— М.: ВЦ АН СССР, 1982.
30. Потапов Ю. Г., Яблонский С. В. О синтезе самокорректирующихся контактных схем // ДАН СССР.— 1960.— **134**, № 3.— С. 544—547.
31. Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 33.— М.: Наука, 1978.— С. 119—138.
32. Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 36.— М.: Наука, 1979.— С. 195—208.
33. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. Вып. 39.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983.— С. 80—87.
34. Редькин Н. П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Вып. 40.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983.— С. 87—99.
35. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика, механика.— 1986.— № 1.— С. 72—74.

36. Рыбко А. И. О сложности самокорректирующихся контактных схем, допускающих тестирование // Проблемы кибернетики. Вып. 37.— М.: Наука, 1980.— С. 139—153.
37. Слепян В. А. Длина минимального теста для некоторого класса таблиц // Дискретный анализ. Вып. 23.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1973.— С. 59—71.
38. Соловьев Н. А. Тесты (теория, построение, применение).— Новосибирск: Наука, 1978.
39. Тарасов В. В. К проблеме полноты для систем функций алгебры логики с ненадежной реализацией // Мат. сб.— 1975.— 98, № 3.— С. 378—394.
40. Тарасов В. В. К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Мат. заметки.— 1976.— 20, № 3.— С. 391—400.
41. Улиг Д. О синтезе самокорректирующихся схем из функциональных элементов с малым числом надежных элементов // Мат. заметки.— 1974.— 15, № 6.— С. 937—944.
42. Улиг Д. Самокорректирующиеся контактные схемы, исправляющие большое число ошибок // ДАН СССР.— 1978.— 241, № 6.— С. 1273—1276.
43. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля электрических схем // Тр. МИАН СССР.— 1958.— 51.— С. 270—360.
44. Юкна С. П. Самокорректирующиеся программы и их сложность // Проблемы кибернетики. Вып. 38.— М.: Наука, 1981.— С. 217—258.
45. Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем // УМН.— 1955.— 10, вып. 4 (66).— С. 182—184.
46. Яблонский С. В. О построении тупиковых кратных экспериментов для автоматов // Тр. МИАН СССР.— 1973.— 83.— С. 263—272.
47. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1986.
48. Яблонский С. В. Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов // Banach center pub.— 1982.— № 7.— P. 11—19.
49. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям.— М.: МГУ, 1986.— С. 7—12.
50. Armstrong D. B. On finding of nearly minimal set of fault detection tests for combinational logic nets // IEEE Trans. on Electronic Computers.— 1966.— EC-15, № 1.— P. 66—73.
51. Eldred B. D. Test routines based on cymbolic logic statements // J. ACM.— 1959.— 6, № 1.— P. 33—36.
52. Moore E. F., Shannon C. E. Reliable circuits using less reliable relays // Journal of the Franklin Institute.— 1956.— № 3, 4. [Рус. пер.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике.— М.: ИЛ, 1963.— С. 114—153.]
53. Moore E. F. Gedanken-experiments on sequential machines, Automata studies edited by Shannon C., McCarty J.— Princeton University Press, 1956.— P. 129—153. [Рус. пер.: Автоматы.— М., ИЛ, 1956.— С. 179—210.]
54. von Neuman J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components, Automata studies, edited by Shannon C., McCarty I.— Princeton University Press, 1956.— P. 43. [Рус. пер.: Автоматы.— М.: ИЛ, 1956.— С. 68—139.]
55. Roth J. P. Diagnosis of automata failuresa: a calculus and method // Journal Research and development.— July, 1966.— P. 278—291.